

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

Кафедра технической механики и инженерной графики

Авторы: Ю.В. Петров д.т.н., профессор

А.С. Кочетов к.т.н., доцент

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

учебные материалы по подготовке к практическим занятиям по дисциплине
«Сопротивление материалов»

для обучающихся 2 курса
по специальности 25.03.01 и 25.05.05
очной формы обучения

Краткая аннотация: Цель учебного материала - выработать умение и навыки решения практических задач, закрепить и углубить теоретические знания по расчету элементов инженерных конструкций на прочность и жесткость при кручении. На основе теоретического материала, усвоенного студентами на лекционном занятии, практические занятия способствуют выработке навыков для самостоятельного решения задач, в том числе при выполнении контрольного домашнего задания по дисциплине.

Москва, 2025

Практические занятия включают в себя решение практических задач на основе теоретического материала, усвоенного студентами на лекционном занятии. Каждое практическое занятие дополняет лекционный материал и позволяет студентам самостоятельно использовать свои знания для решения профильных задач.

Задачи практических занятий:

1. Обобщить, систематизировать и закрепить полученные теоретические знания по данной теме.
2. Совершенствовать общие и профессиональные компетенции обучающегося.
3. Сформировать умения применять полученные теоретические знания на практике.
4. Выбатывать при решении практических задач такие профессионально значимые качества, как самостоятельность, ответственность, точность.

На практических занятиях решаются, как правило, типовые задачи, рассматривается их физический смысл, анализируется методика решения и полученные результаты. При подготовке к практическим занятиям студенты должны повторить теоретический материал по теме занятия, рассмотреть примеры решения практических задач, приведенные в данном пособии. Согласно рабочей программе по дисциплине «Сопротивление материалов» предусмотрено проведение двух практических занятий.

В результате проведения практических занятий у студентов формируются:

- знания о кручении как одном из видов напряженно – деформированного состояния элементов конструкции;
- способность применять основные расчетные формулы для определения напряжений и деформаций при кручении.

Практические занятия позволяют:

- анализировать задачи на кручение;
- уметь строить эпюры крутящего момента и определять максимальную нагрузку на вал;
- овладеть навыками определения внутренних силовых факторов при кручении, расчета нагрузки, проверки прочности и обоснованного подбора сечения элементов конструкции при заданных допускаемых напряжениях и деформациях.

Требования к выполнению и оформлению практической работы:

1. Задача выполняется в тетради для практических работ.
2. Вариант задачи студент получает у преподавателя. В начале работы указывается номер варианта задачи, затем текст задачи и решение задачи. Записи сопровождаются схемами, рисунками, таблицами.
3. Графическая часть практической работы выполняется аккуратно, с использованием чертёжных инструментов. На рисунках (схемах) необходимо нанести известные и искомые параметры.

4. При возврате отчета о практической работе студент должен внимательно прочитать рецензию преподавателя, выполнить все его рекомендации. Работа над ошибками выполняется в той же тетради и сдается на проверку повторно.

5. Оценка за практическую работу складывается из следующих показателей: правильность решения задачи; качество оформления работы; срок сдачи работы; качество защиты.

6. Практическая работа, выполненная небрежно, не по своему варианту возвращается студенту без проверки.

8. Студенты, не выполнившие задачи на практическом занятии, дополнительно отвечают на вопрос по данной теме при сдаче зачета и экзамена.

Основные теоретические положения

Кручением называется такой вид напряженно – деформированного состояния бруса, при котором в поперечных сечениях возникает лишь один интегральный внутренний силовой фактор – крутящий момент, при этом брус, работающий на кручение, называется валом.

Рассмотрим кручение вала кругового поперечного сечения с радиусом R и длиной l (рис. 1). На рисунке используются следующие обозначения: γ – угол сдвига, который показывает на какой угол отклонилась образующая вала при действии $M_{кр}$; ϕ – угол поворота (угол закручивания) текущего сечения.

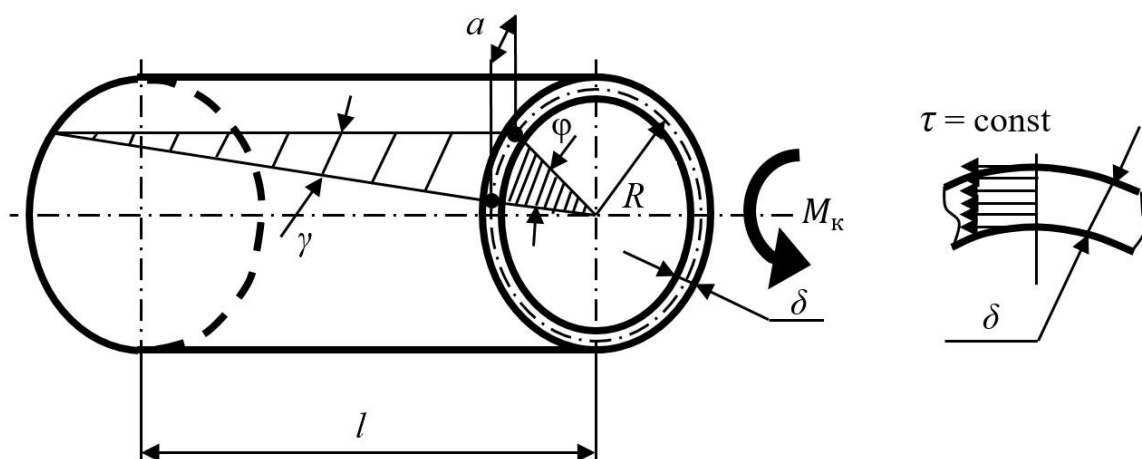


Рис. 1. Кручение круглого вала

Угол сдвига определяется соотношением $\gamma = \frac{d\phi}{dz} \rho$. Иногда в расчетах используется понятие - погонный угол закручивания $\theta = \frac{d\phi}{dz}$.

При расчете вала на прочность и жесткость при кручении нужно решить две задачи: определить дифференциальные внутренние усилия (касательные напряжения) во всех точках опасных сечений и найти относительные угловые смещения сечений при заданном внешнем воздействии.

На первом этапе решения практических задач на кручение, используя метод сечений, строится эпюра крутящих моментов. Анализ данной эпюры

позволяет выявить потенциально опасные сечения, в которых крутящий момент $M_{кр}$ достигает максимального значения. В расчетах используются следующие основные допущения:

- поперечные сечения остаются плоскими после деформации (выполняется гипотеза Бернулли - гипотеза плоских сечений);
- расстояние между поперечными сечениями не изменяется.

Если на вал действуют несколько внешних закручивающих моментов, приложенных в различных сечениях, эти моменты делят вал на участки, границами которых являются сечения их приложения. В этом случае крутящий момент следует определять на каждом участке, а затем по полученным данным строится эпюра крутящих моментов.

Касательные напряжения при кручении вала определяются по формуле:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho,$$

где τ - касательные напряжения в точке, удаленной от продольной оси вала на расстояние ρ ;

$J_p = \int_F \rho^2 dF$, - полярный момент инерции сечения.

Так, для вала круглого поперечного сечения диаметром D имеем $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$.

Полученные результаты позволяют сформулировать ряд важных выводов:

- касательные напряжения при кручении направлены перпендикулярно к текущему радиусу ρ ;
- касательные напряжения достигают своего максимального значения в точках, наиболее удаленных от продольной оси вала, где $\rho = \rho_{max} = D/2$ (рис. 2).

В этом случае $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p}$

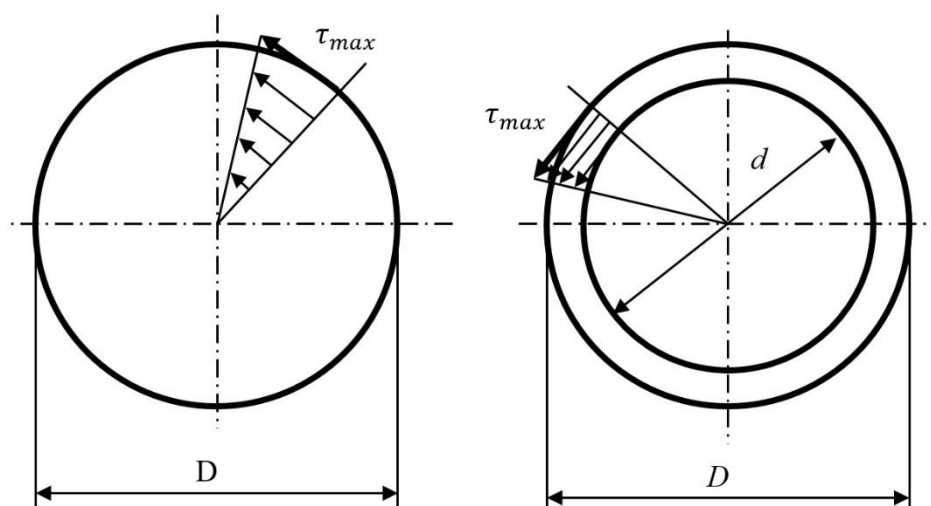


Рис. 2. Касательные напряжения при кручении вала

На основании эпюры касательных напряжений (рис. 2) видно, что внутренняя часть детали недогружена, а основная нагрузка приходится на

области, прилегающие к краю сечения, а значит, наиболее рациональными при кручении являются полые элементы трубчатого и коробчатого типа.

Геометрическая характеристика сечения $W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}$ называется полярным моментом сопротивления. Для сплошного круглого вала он равен $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$.

Взаимный угол поворота сечений определяется по формуле (интегрирование проводят по длине вала l)

$$\varphi = \int_l \frac{M_{кр}}{GJ_p} dz,$$

где G - модуль сдвига (модуль упругости второго рода), который является характеристикой материала и приводится в справочной литературе. Если по длине вала крутящий момент и полярный момент инерции имеют постоянное значение, то получим

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} l.$$

Условия прочности для вала при использовании метода расчета по допускаемым напряжениям имеют вид:

$$\tau_{max} = \left(\frac{M_{кр}}{W_p} \right)_{max} \leq [\tau].$$

При оценке жесткости сравнивают максимальный расчетный относительный (погонный) угол закручивания сечений с нормируемым по каким-либо условиям (например, эксплуатационные ограничения) значением $[\theta] = \left[\frac{d\varphi}{dz} \right]$, а именно:

$$\theta_{max} = \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_{max} = \left(\frac{M_{кр}}{GJ_p} \right)_{max} \leq [\theta].$$

Вопросы и задания для самоконтроля

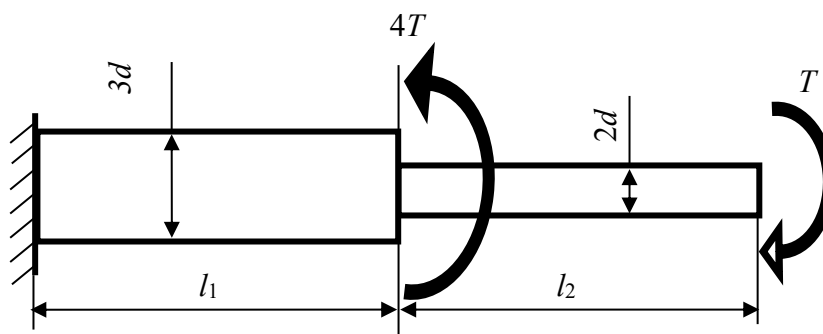
1. Какие допущения положены в основу вывода формулы для определения касательных напряжений при кручении вала круглого поперечного сечения?
2. Записать расчётную формулу для определения касательного напряжения в произвольной точке вала круглого поперечного сечения при кручении.
3. Что такое полярный момент сопротивления?
4. Чему равен полярный момент сопротивления круглого сечения?
5. Записать формулу для определения полярного момента сопротивления тонкостенного полого вала.
6. Изобразить вид эпюры касательных напряжений вдоль радиуса круглого поперечного сечения.
7. Записать условие прочности при кручении по касательным напряжениям.
8. Как определить полный и относительный углы закручивания вала круглого сечения?
9. Записать условия жёсткости при кручении вала круглого сечения.

10. Каков характер разрушения при кручении валов из пластического и хрупкого материалов?

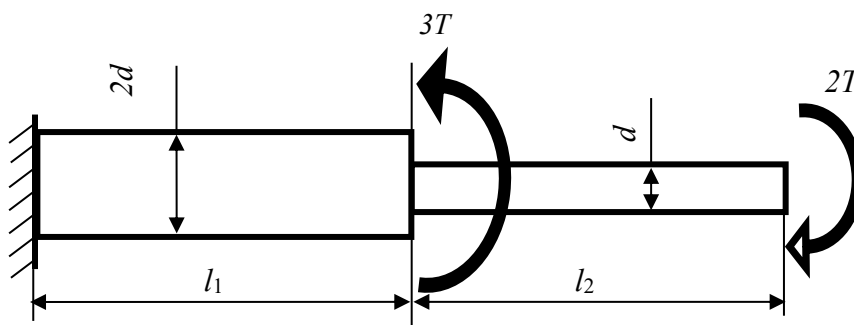
11. Чему равна потенциальная энергия при кручении вала круглого сечения в зоне упругих деформаций?

Перечень типовых задач на прочность и жесткость при кручении

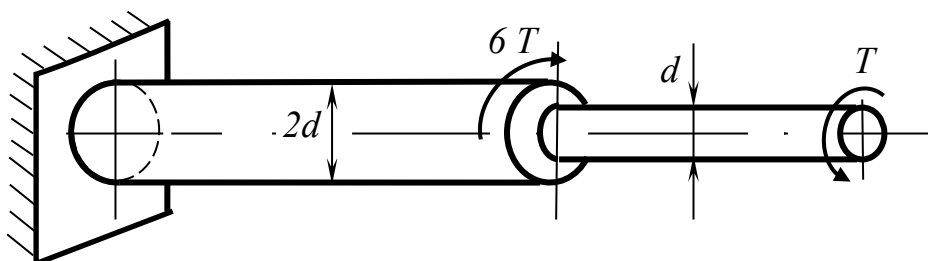
1. Построить эпюру крутящих моментов, вычислить диаметр вала из условия прочности. Дано: $T = 20$ кНм; $l_1 = 1$ м; $l_2 = 2$ м; $[\tau] = 120$ МПа.



2. Построить эпюру крутящих моментов и углов закручивания вала относительно крайнего левого сечения. Дано: $T = 5$ кНм; $l_1 = 1$ м; $l_2 = 1$ м; $G = 8 \cdot 10^{10}$ МПа; $d = 10$ мм



3. Определить значение момента T , при котором в стержне возникнут пластические деформации. Дано: $d = 20$ мм; $\tau_T = 250$ МПа.



Рассмотрим последовательность решения типовых задач на кручение на конкретных примерах.

Примеры решения задач при кручении вала

1. Условие задачи: определить из условия прочности диаметры ступенчатого вала (рис. 1). Проверить выполняется ли для данного вала условие жесткости. Дано: $T = 1$ кНм; $[\tau] = 100$ МПа; $[\theta] = 0,8$ град/м; $l_1 = 0,5$ м; $l_2 = 0,3$ м; $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па

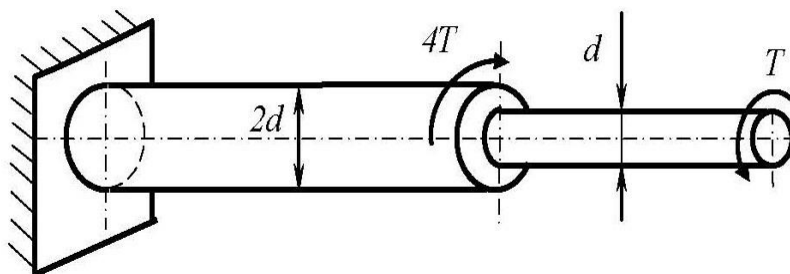


Рис.1

Алгоритм решения задачи

Для решения задачи необходимо построить эпюры крутящих моментов $M_{кр}$ по длине балки, выявить опасные сечения и для них записать условия прочности. По условию прочности вычисляются геометрические параметры вала, удовлетворяющие этому условию. Затем при известных геометрических размерах проверяется выполнение условия жесткости.

1. Вычисляем реакции опор

Левый торец вала жестко зашпелен. Потенциально в жесткой заделке при заданном нагружении возможно возникновение двух реактивных сил R_{Ox} , R_{Oy} и реактивного момента M_R (рис. 2).

Так как нет внешних сил, имеющих ненулевые проекции на оси Ox и Oy , то вычисляем лишь неизвестный реактивный момент (правило знаков теоретической механики):

$$\sum M_z = M_R - 4T + T = 0 \rightarrow M_R = 3T.$$

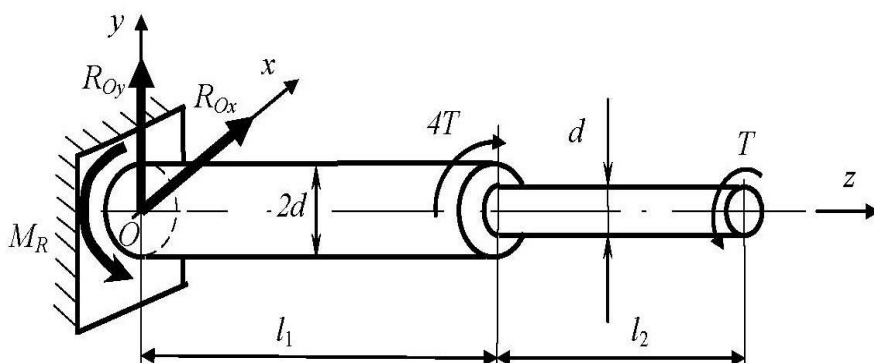


Рис. 2

2. Изображаем расчетную схему вала

Под расчетной схемой (рис. 3) будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры и их действие заменено соответствующим реактивным моментом. **Важно!!!** Если по условию задачи есть внешние моменты со знаком минус (например, $M_i = -15 \text{ кНм}$), то на расчетной схеме целесообразно поменять направление действия соответствующего момента M_i .

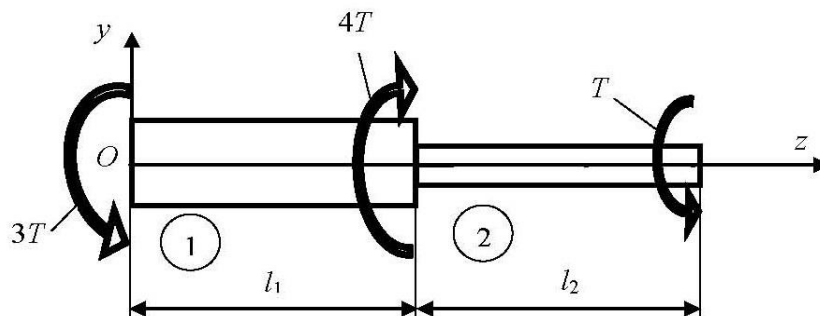


Рис. 3

3. Разбиваем вал на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр крутящих моментов являются сечения, в которых приложены внешние моменты (включая реактивные моменты в опорах) и (или) изменяется геометрия (форма и площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка крутящий момент описывается одним уравнением. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений вала на вид эпюры крутящих моментов не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной геометрией, так как в дальнейшем при построении эпюр касательных напряжений и углов поворота сечений их необходимо будет учитывать.

В данной задаче свяжем систему координат Oyz с левым по рис. 3 концом вала. Выделим два характерных участка с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq l_1$, второй - $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$.

4. Построение эпюр крутящих моментов

Вал разделен на два характерных участка 1 и 2, как показано на рис.3. Будем считать внутренний интегральный силовой фактор - крутящий момент положительным, когда он стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора нормали к сечению.

На 1-ом участке $0 \leq z_1 \leq l_1$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum M_z^1 = 3T + M_{k1} = 0$, а значит $M_{k1} = -3T$. Таким образом, направление крутящего момента на участке 1 выбрано неверно. Он будет направлен по часовой стрелке и имеет знак «-».

На 2-ом участке $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum M_z^2 = 3T - 4T + M_{k2} = 0$, а значит $M_{k2} = T$. Уравновешивающий

крутящий момент имеет знак «+» и направлен против часовой стрелки, как показано на рисунке. По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов на характерных участках (рис. 4).

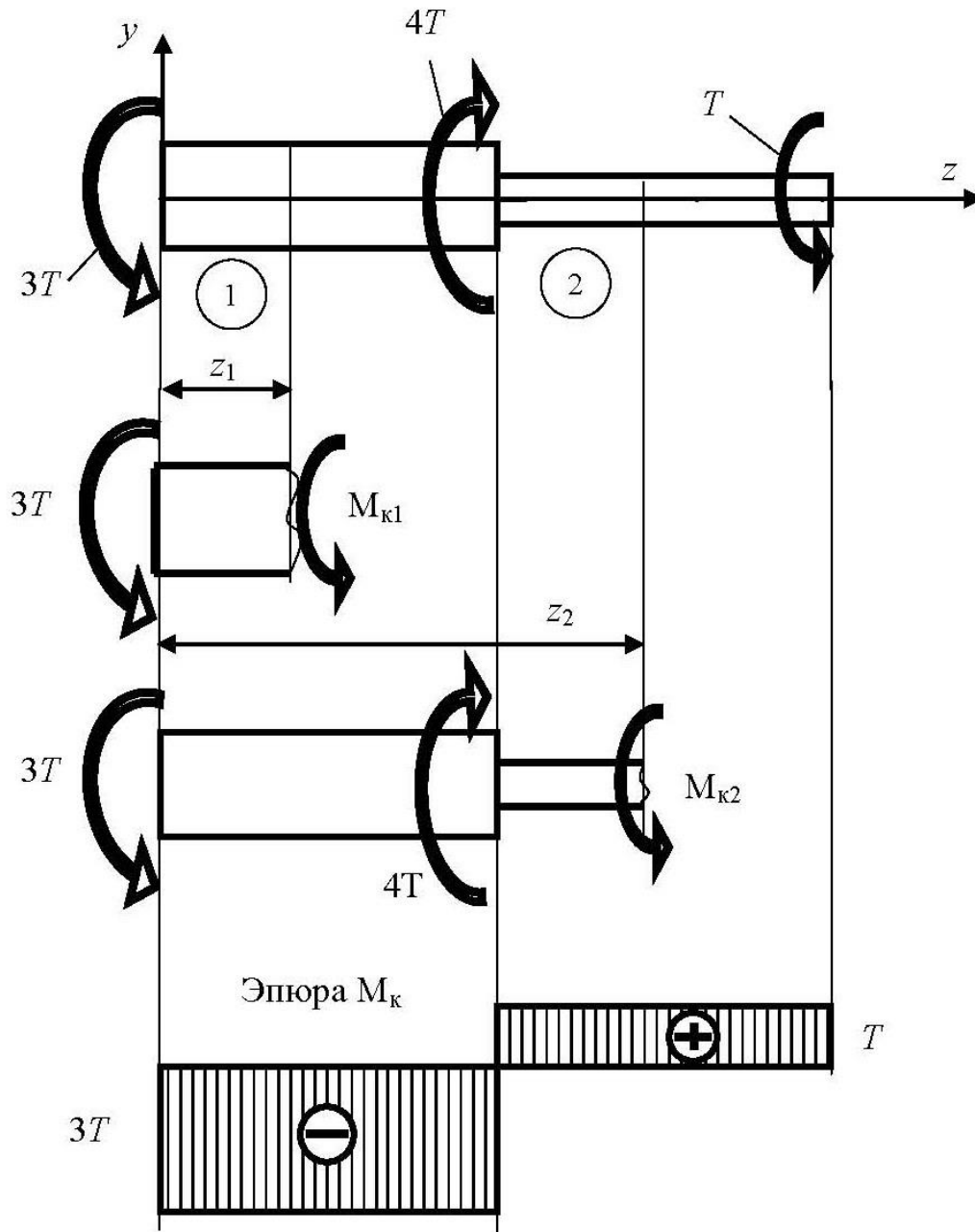


Рис. 4

5. Вычисляем максимальные касательные напряжения

В общем случае по эпюре крутящих моментов определить опасное сечение без проведения соответствующих расчетов затруднительно, так как касательные напряжения определяются двумя параметрами: геометрия и значение крутящего момента. При вычислении касательных напряжений крутящий момент берется по абсолютному значению без учета знака.

На 1 участке $\tau_1 = \frac{M_{k1}}{W_{p1}} = \frac{2 \cdot 3T}{\pi \cdot d^3}$, где $W_{p1} = \frac{\pi(2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2}$,
на 2 участке $\tau_2 = \frac{M_{k2}}{W_{p2}} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3}$, где $W_{p2} = \frac{\pi d^3}{16}$.

Из формул видно, что наибольшие касательные напряжения возникают на 2 участке (хотя абсолютное значение крутящего момента в три раза меньше). Тогда имеем $\tau_{max} = \tau_2 = \frac{M_{k2}}{W_{p2}} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3}$

6. Определяем геометрические параметры вала по условию прочности на кручение

Условие прочности запишем в виде $\tau_{max} \leq [\tau]$. Тогда $\tau_{max} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau]$, следовательно, $d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^8}} = 3,71 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Важно! Округлять вычисленный диаметр вала можно только в сторону его увеличения, иначе условие прочности выполняться не будет.

7. Определяем погонные углы поворота сечений на характерных участках

Здесь важно подчеркнуть, что в формуле погонный угол закручивания вычисляется в рад/м, поэтому для выполнения условий жесткости необходим переход в одинаковые единицы измерения.

$$\theta_1 = -\frac{M_{k1}}{G \cdot J_{p1}} = -\frac{2 \cdot 3T}{G \pi \cdot d^4} = -\frac{6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} = -0,013 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = -0,75 \text{ град/м},$$

$$\text{где } J_{p1} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2},$$

$$\theta_2 = \frac{M_{k2}}{G \cdot J_{p2}} = \frac{32 \cdot T}{G \pi \cdot d^4} = -\frac{32 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} = 0,067 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 3,85 \text{ град/м},$$

$$\text{где } J_{p2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Важно отметить, что крутящие моменты по характерным участкам необходимо подставлять со своими знаками.

8. Проверяем выполнение условий жесткости для вала

Условия жесткости вала записываются в виде $\theta_{max} \leq [\theta]$.

Из п.7 алгоритма видно, что максимального значения относительный угол поворота сечения достигает на втором характерном участке $\theta_2 = \theta_{max} = 3,85 \text{ град/м} > [\theta] = 0,8 \text{ град/м}$. Из условия жесткости видно, что оно не выполняется, так как максимальный относительный угол поворота сечения существенно больше допускаемого.

9. Строим эпюру углов поворота сечений по длине вала

При решении ряда задач требуется иметь эпюру углов поворота сечений. В этом случае необходимо выбрать неподвижное сечение. В данной задаче – это

сечение в заделке вала. Если в задаче нет заданной опоры, то неподвижное сечение необходимо назначить (например, левое или правое торцевые сечения). **Важно!!!** При вычислении углов поворота сечений крутящий момент в формулу нужно подставлять со своим знаком.

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} l.$$

Имеем (рис. 5):

$$\varphi_A = \varphi_O + \varphi_{OA} = 0 + \frac{(-3 \cdot 10^3) \cdot 0,5 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} = -0,0063 \text{ рад},$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = -0,0063 + \frac{10^3 \cdot 0,3 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} \approx 0,014 \text{ рад}.$$

По полученным данным строим эпюру углов поворота сечений вала (рис. 5). Здесь важно учесть, что между расчетными сечениями угол поворота φ изменяется по линейному закону.

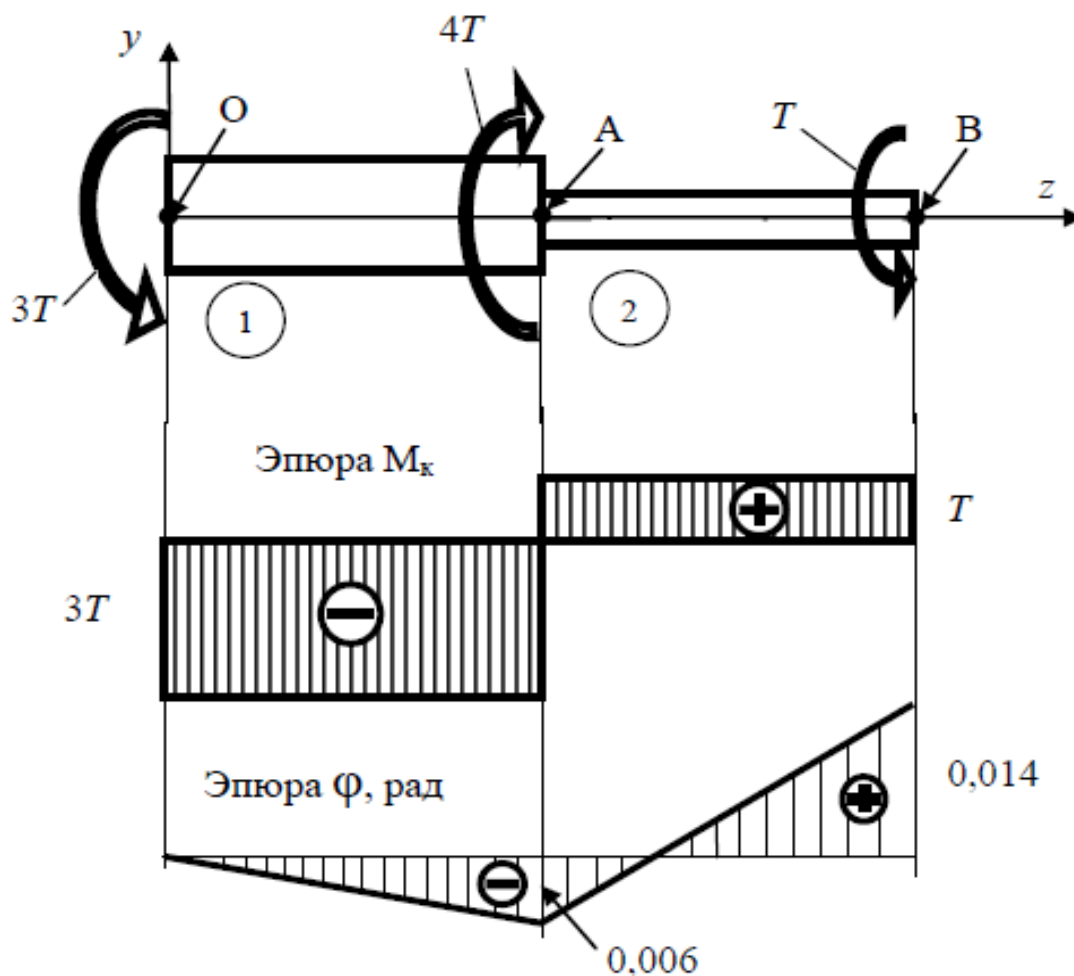
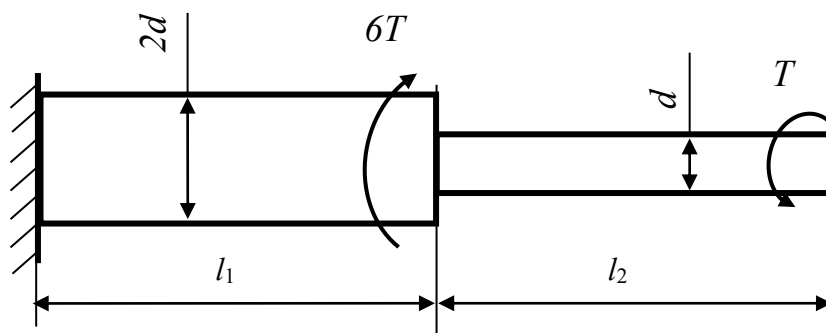


Рис.5

2. Условие задачи: определить значение момента T , при котором в стержне возникнут пластические деформации. Дано: $d = 20$ мм; $\tau_T = 250$ МПа.



Алгоритм решения задачи

Для решения задачи необходимо построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ по длине балки, так как касательные напряжения определяются двумя параметрами: геометрией стержня и значением крутящего момента. Далее выявить опасное сечение и для него записать условие, при котором возникают пластические деформации: $\tau_{max} = \left(\frac{M_{кр}}{W_p} \right)_{max} = \tau_T$.

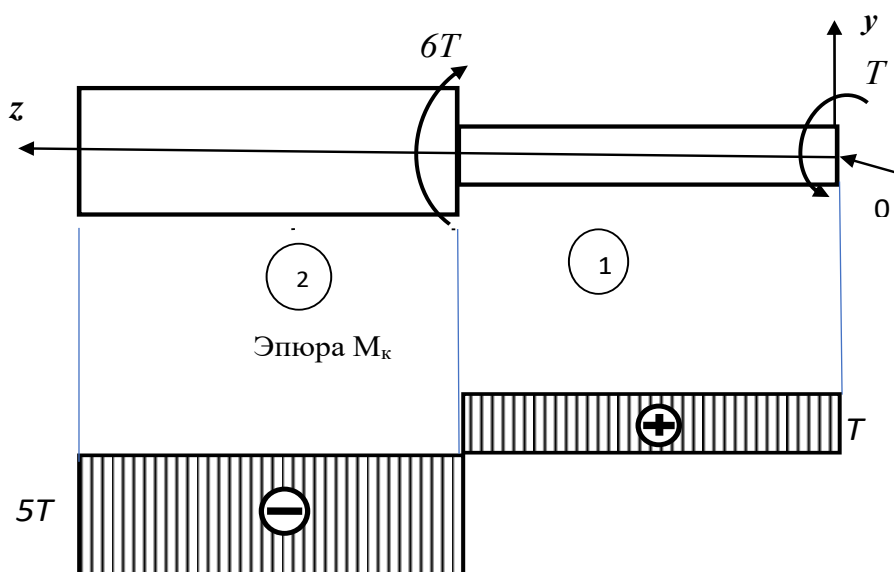
Построение эпюры крутящих моментов

В данной задаче свяжем систему координат Oyz с правым свободным концом вала.

Вал разделен на два характерных участка 1 и 2, как показано на рис. ниже.

На 1-ом участке $0 \leq z_1 \leq l_2$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum M_z^1 = -T + M_{k1} = 0$, а значит $M_{k1} = T$.

На 2-ом участке $l_2 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum M_z^2 = -T + 6T + M_{k2} = 0$, а значит $M_{k2} = -5T$. По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов на характерных участках.



Вычисляем максимальные касательные напряжения

В общем случае по эпюре крутящих моментов определить опасное сечение без проведения соответствующих расчетов затруднительно. При вычислении касательных напряжений крутящий момент берется по абсолютному значению без учета знака.

на 1 участке $\tau_1 = \frac{M_{k1}}{W_{p1}} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3}$, где $W_{p1} = \frac{\pi d^3}{16}$.

На 2 участке $\tau_2 = \frac{M_{k2}}{W_{p2}} = \frac{2 \cdot 5T}{\pi \cdot d^3}$, где $W_{p2} = \frac{\pi(2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2}$,

Из формул видно, что наибольшие касательные напряжения возникают на 1 участке (хотя абсолютное значение крутящего момента в 5 раз меньше).

Тогда имеем $\tau_{max} = \tau_1 = \frac{M_{k2}}{W_{p2}} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3}$

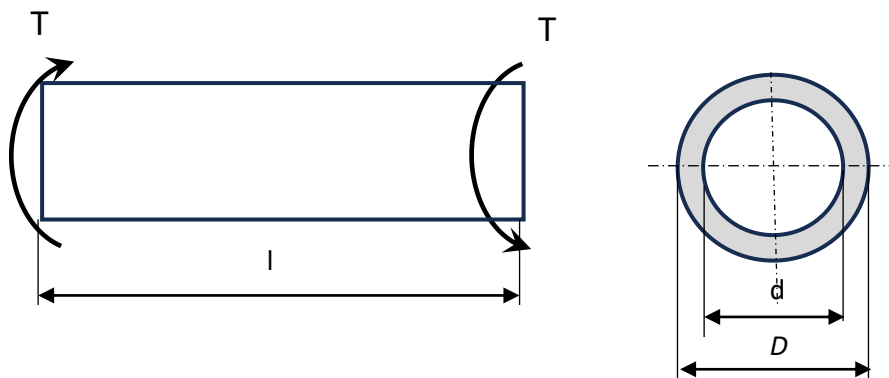
Определяем значение момента Т, при котором в стержне возникнут пластические деформации:

$$\frac{16T}{\pi \cdot d^3} = \tau_T, \text{ отсюда находим}$$

$$T = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \tau_T}{16} = \frac{3,14 \cdot (2,0 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 250 \cdot 10^6}{16} = 95,12 \text{ Нм}$$

3. Условие задачи: определить угол закручивания вала кольцевого сечения.

Дано: внешний крутящий момент $T = 20 \text{ кНм}$; $l = 1 \text{ м}$; $D = 30 \text{ см}$; $d = 20 \text{ см}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.



Алгоритм решение задачи

Для данного простого случая нет необходимости выполнять пункты 1-4 алгоритма по аналогии с задачей 1, включая построение эпюры крутящих моментов. Очевидно, что во всех сечениях вала действует постоянный внутренний интегральный силовой фактор - крутящий момент, численно равный внешнему моменту T . Значит, $T = M_{кр}$. Формула для вычисления угла закручивания вала запишем в виде:

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} l.$$

$$\text{где } J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot 0,3^4}{32} (1 - 0,7^4) = 5,9 \cdot 10^{-4} \cdot \text{м}^4, \alpha = \frac{d}{D}.$$

$$\varphi = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 5,9 \cdot 10^{-4}} = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Самостоятельная работа студентов по данной теме способствует более глубокому усвоению материала, ориентирует на умение применять полученные теоретические знания на практике.

На самостоятельной работе студенты должны внимательно прочитать материал лекций, относящийся к данному практическому занятию, ознакомиться с учебным материалом по учебнику и учебным пособиям, выписать основные термины, уяснить какие учебные вопросы остались неясными и постараться найти на них ответ.

Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, необходимо сформулировать вопросы и обратиться за помощью к преподавателю на консультации или ближайшей лекции. Рекомендуются регулярно отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам, которые приведены выше.

Любая форма самостоятельной работы студента начинается с изучения соответствующей литературы. Самостоятельная работа студентов при подготовке к практическому занятию обеспечена необходимой учебной, технической и справочной литературой, учебно-методическими пособиями, список которых приведен ниже.

Рекомендуемая литература:

- Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: МВТУ им. Баумана. 2006 г.
- Петров Ю.В. Сопротивление материалов. Специальные вопросы сопротивления материалов. Тексты лекций для обучающихся по направлению 25.03.01. М.: МГТУ ГА/эл. версия НТБ. 2017 г.
- Петров Ю.В., Семакова М.В. Сопротивление материалов. Учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ по направлению 25.03.01 всех форм обучения. М.: МГТУ ГА /эл. версия НТБ. 2017 г.
- Борисов С.П., Хромых Т.Н. Сопротивление материалов. Пособие по проведению практических занятий. М.: МГТУ ГА /эл. версия НТБ. 2015 г.
- Петров Ю.В., Харина В.К., Хромых Т.Н. Учебно-методическое пособие по выполнению контрольных домашних заданий для обучающихся по направлению подготовки 25.03.01 и специальности 25.05.05. В.: ООО «МИР» / эл. версия НТБ. 2019 г.
- Петров Ю.В., Семакова М.В. Сопротивление материалов. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и кручении. Учебно-методическое пособие по выполнению практических занятий для студентов направления 25.03.01 и специальности 25.05.05 очной формы обучения. М.: ИД Академии Жуковского/ эл. версия НТБ. 2020 г.