

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА  
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

---

Кафедра электротехники  
и авиационного электрооборудования

С.П. Халютин, И.Е. Старостин

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

**Учебное пособие**

*Утверждено редакционно-  
издательским советом МГТУ ГА  
в качестве учебного пособия*

Москва  
ИД Академии Жуковского  
2023

УДК 621.3.01  
ББК 6П2.12  
Х17

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

*Гатовский В.А.* (МГТУ ГА) – канд. техн. наук, доцент;  
*Жмуров Б.В.* (ООО «НПО НаукаСофт») – канд. техн. наук, доцент

**Халютин С.П.**

X17 Теоретические основы электротехнического оборудования воздушных судов [Текст] : учебное пособие / С.П. Халютин, И.Е. Старостин. – М. : ИД Академии Жуковского, 2023. – 32 с.

ISBN 978-5-907699-81-6

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 25.04.02 «Техническая эксплуатация авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов», изучающих дисциплину «Теоретические основы электротехнического оборудования воздушных судов». Данное учебное пособие издаётся в соответствии с тематическим планом издания учебной литературы МГТУ ГА.

В учебном пособии содержится теоретический материал первого раздела дисциплины, начиная с физических основ и применения энергетического подхода в теоретической электротехнике. Методы расчёта электрических цепей основаны на математических моделях, полученных с использованием метода математического прототипирования энергетических процессов, отдельно приведён пример расчёта токов и напряжений, а также даны вопросы для самоконтроля.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 22.09.2023 г. и методического совета 26.09.2023 г.

**УДК 621.3.01**

**ББК 6П2.12**

Св. тем. план 2023 г.  
поз. 27

ХАЛЮТИН Сергей Петрович, СТАРОСТИН Игорь Евгеньевич

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ  
ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Учебное пособие

*В авторской редакции*

Подписано в печать 07.12.2023 г.

Формат 60x84/16 Печ. л. 2 Усл. печ. л. 1,86

Заказ № 1000/1020-УП08 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА  
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского

125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А

Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

**ISBN 978-5-907699-81-6**

© Московский государственный технический  
университет гражданской авиации, 2023

## **Введение**

В пособии рассматривается методика получения уравнений динамики для электрических цепей (в общем случае нелинейных) на основе энергетического подхода, которая сводится к форме метода математического прототипирования энергетических процессов. Рассматриваются реальные элементы электрических цепей, всегда имеющие активные сопротивления (в общем случае тоже нелинейные), которые обуславливают потери в соответствии с законом Джоуля-Ленца. В частном случае, когда активные сопротивления элементов (источников и потребителей электроэнергии) стремятся к нулю, полученные уравнения могут использоваться и для исследования цепей с идеальными элементами.

## **Моделирование и расчеты**

Расчет переходных процессов в электрических цепях начинается как правило с составления систем дифференциальных уравнений, то есть с составления уравнений динамики, и может проводиться различными методами [1-4] – классическим, операторным, с применением интеграла Дюамеля (для линейных цепей), методом предельных состояний и т.п.

Метод математического прототипирования энергетических процессов, который является развитием разработанного в рамках современной неравновесной термодинамики потенциально-потокowego метода [5-10] в части распространения на все виды энергетических процессов (механических, электродинамических, физико-химических,

материаловедческих и т.д.), позволяет создавать модели динамических процессов в технических, природных, биохимических системах. Основные процессы, происходящие при функционировании таких систем, — это процессы преобразования, накопления и передачи энергии. Процессы передачи энергии независимо от её вида протекают аналогично – от источников (преобразователей в электрическую энергию из других видов или преобразователей одного вида электрической энергии в другой) к потребителям (это преобразователи электроэнергии в энергию другого типа) через материальную среду, практически всегда имеющую диссипативные свойства, то есть уменьшающую долю полезной энергии на величину потерь (как правило – это тепловые потери).

При преобразовании энергии существуют потери, обусловленные диссипативными свойствами среды, в которой это преобразование происходит. Умение оценивать величину потерь необходимо для понимания эффективности технических систем как на этапе их проектирования, так и в процессе эксплуатации.

Необходимо отметить, что проведению конкретных расчетов предшествует составление математических моделей в виде дифференциальных уравнений или аналитических функций. Однако для того, чтобы математические модели были адекватными реальным объектам и процессам, происходящим в них, необходимо проводить процедуру валидации [11], а реализованные модели (их называют цифровыми или компьютерными моделями) в виде программного кода тре-

буют проверки их на соответствие математическим моделям, т.е. проведения процедуры верификации (см. рис. 1) [11].

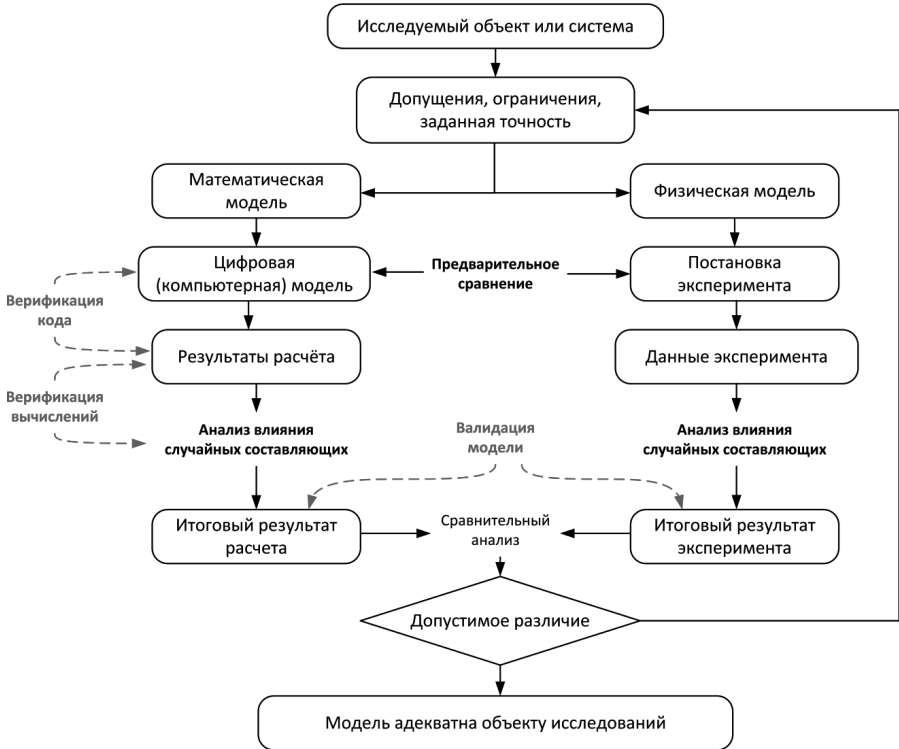


Рис. 1. Процедуры формирования моделей

Современные тенденции развития технических систем в том числе связаны с цифровыми технологиями, с разработкой так называемых «цифровых двойников». В соответствии с ГОСТ Р 57700.37 – 2021 [12] цифровой двойник изделия – это система, состоящая из цифровой модели изделия и двусторонних информационных связей с изделием (при наличии изделия) и (или) его составными частями. В

этом же стандарте приведены определения верификации и валидации моделей изделий. Основой для создания цифровых двойников объектов и систем может быть метод математического прототипирования энергетических процессов как универсальный (для всех видов энергетических процессов) инструмент создания математических моделей.

## Теория

Кинетические свойства веществ и процессов рассматриваемой системы в методе математического прототипирования энергетических процессов учитываются диссипативной матрицей  $\mathbf{A}$ , которая связывает внутренние потенциальные силы с потоковыми параметрами процессов:

$$\frac{d\Delta\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t)) \Delta\mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t)), \quad (1)$$

где

$\Delta\mathbf{z}(t)$  – матрица-столбец координат энергетических процессов, которые могут быть выражены через приращения параметров состояния системы; текущие значения координат процессов зависят не только от текущего состояния системы, но и от пути, по которому эта система эволюционировала;

$\frac{d\Delta\mathbf{z}(t)}{dt}$  – матрица-столбец скоростей протекания процессов в системе,

$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t))$  – внутренние возмущающие силы, движущие про-

цессы в системе,

$\mathbf{z}(t)$  – матрица-столбец координат состояния системы, однозначно определяющих её состояние, независимо от ее предыстории,

$\mathbf{U}(t)$  – вектор свойств системы, которые не связаны с протекающими процессами (геометрические размеры, анизотропия свойств веществ среды и т.п.).

Внутренние возмущающие силы  $\Delta\mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t))$  обусловлены наличием внутри системы накопленной энергии, которая расходуется, переводя систему в устойчивое состояние при отсутствии внешних входящих (исходящих) потоков энергии, в соответствии со свойствами потенциальных полей

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t)) = \mathbf{B}(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t)) \left[ -\nabla_{\mathbf{z}} W(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t)) \right], \quad (2)$$

где

$W(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t))$  – скалярная функция запасенной энергии внутри системы (скалярный потенциал фазового пространства).

$\mathbf{B}(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t))$  – матрица, характеризующая топологию системы (например, матрица инцидентности) в соответствии с выбранным набором параметров  $\mathbf{z}$  и внутренними возмущающими силами.

$\nabla_{\mathbf{z}}$  – оператор Гамильтона (набла) – векторный диффе-

ренциальный оператор градиента, компоненты которого являются частными производными по координатам вектора  $\mathbf{z}$ ; знак « $\rightarrow$ » перед оператором свидетельствует о процессе траты (уменьшения) свободной энергии системы.

Запасенная энергия  $W(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t))$  – это скалярная функция, которая формируется путем сложения энергий всех накопительных (инерционных) элементов рассматриваемой системы. Она выражается через координаты состояния, выбранные исследователем. Она является универсальным инвариантом, позволяющим объединить разные по виду энергетические процессы (электрические, магнитные, механические, тепловые, химические и т.п.) в единую систему уравнений динамики. Следует отметить, что ввиду множественности вариантов выбора координат состояния (базиса), форм представления функции запасенной энергии тоже может быть много.

В случае наличия в системе внешних потоков энергии  $\frac{d\mathbf{z}_{ext}(t)}{dt}$  уравнения динамики дополняются соответствующим слагаемым, характеризующим эти потоки:

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{B}^T(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t))\mathbf{A}(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t))\mathbf{B}\left(-\nabla_{\mathbf{x}}W(\mathbf{z}(t), \mathbf{U}(t))\right) + \frac{d\mathbf{z}_{ext}(t)}{dt}. \quad (3)$$

Уравнения (1) - (3) – это и есть обобщенные уравнения динамики энергетических процессов в технических системах.



### Постановка задачи и допущения

Рассмотрим формализованную процедуру составления уравнений динамики методом математического прототипирования для хорошо известного объекта – электрической цепи – и покажем ее универсальность для любых электрических цепей, которые могут представлять электрические схемы замещения реальных физических процессов и систем.

В качестве объекта исследования в настоящей работе рассматриваются реальные электрические цепи, содержащие соответственно реальные электрические элементы – реальные источники электроэнергии, представимые в виде последовательно соединенных идеального источника ЭДС и его внутреннего сопротивления или параллельно соединенного идеального источника тока и его внутреннего сопротивления (рис. 2).

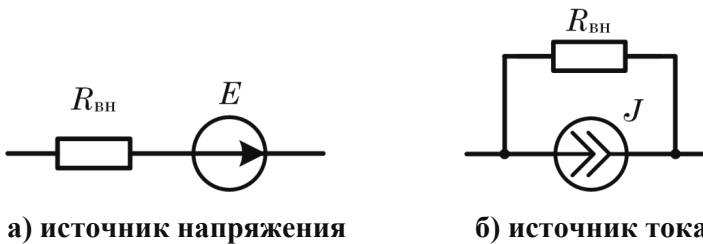


Рис. 2. Реальные источники электроэнергии

Аналогично реальный конденсатор представляется в виде параллельно соединенного идеального конденсатора и сопротивления и последовательно ко всему этому сопротивление пластин, а катушка индуктивности в виде последовательного соединенной катушки ин-

дуктивности и сопротивления для низких частот и для высоких частот – еще параллельно ко всей этой схеме замещения подсоединяется конденсатор (рис. 3).

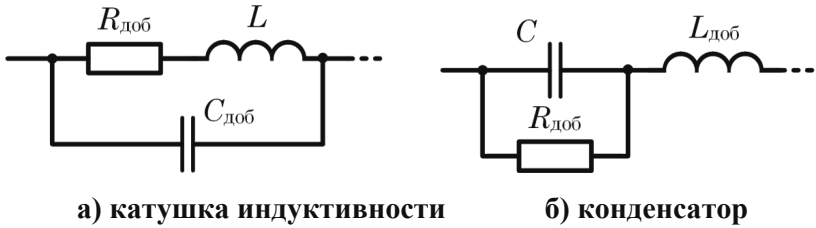


Рис. 3. Реальные катушка индуктивности и конденсатор

В случае поляризации диэлектрика в конденсаторе описанная схема замещения конденсатора усложняется – добавляются также конденсаторы и сопротивления (на схеме обозначено пунктиром). Аналогично и с катушкой индуктивности с ферромагнитным сердечником – добавляются сопротивления, емкости и дополнительные индуктивности. В описанных схемах замещения к любому узлу присоединен хотя бы один резистивный элемент. Причем идеальные конденсаторы в схемах замещения замкнутого контура не образуют, т. к. в противном случае заряды на конденсаторах бы устанавливались мгновенно, а это в реальных системах невозможно (хотя бы из-за наличия сопротивления электрических проводов). Аналогичное касается и индуктивных катушек. Таким образом, схема замещения рассматриваемой электрической цепи представляется в таком виде, в котором к каждому узлу электрической цепи подсоединен хотя бы один резистивный элемент.

## Методика составления уравнений

В соответствии с процедурой составления уравнений заменим в схеме замещения идеальные катушки индуктивности идеальными источниками тока, а идеальные конденсаторы – идеальными источниками ЭДС.

Отсюда, согласно первому правилу Кирхгофа:

$$\sum_{j=0, j \neq k}^N i_{R,k,j}(t) = \sum_{p=1}^{n_e} \alpha_{p,k}^{(\varepsilon)} \cdot i_p^{(\varepsilon)}(t) + \sum_{p=1}^{n_j} \alpha_{p,k}^{(J)} \cdot i_p^{(J)}(t), \quad k=1, N, \quad (4)$$

где

$N+1$  – число узлов в электрической цепи (узлы нумеруем от 0 до  $N$ );

$i_{R,k,j}(t)$ ,  $j=0, N$ ,  $k=1, N$ ,  $k \neq j$  – токи, текущие через резистивные элементы;

$i_p^{(\varepsilon)}(t)$ ,  $p=1, n_e$  – токи, текущие через источники ЭДС;  $\alpha_{p,k}^{(\varepsilon)}$ ,  $p=1, n_e$ ,  $k=1, N$  – коэффициенты матрицы инцидентностей идеальных источников ЭДС (принимают значение +1, если + идеального источника ЭДС подсоединен к рассматриваемому узлу, -1, если – идеального источника ЭДС подсоединен к рассматриваемому узлу, 0 если ни один из выводов рассматриваемого источника ЭДС не подсоединен к рассматриваемому узлу);

$i_p^{(J)}(t)$ ,  $p=1, n_j$  – токи, текущие через источники тока;  $\alpha_{p,k}^{(J)}$ ,  $p=1, n_j$ ,  $k=1, N$  – коэффициенты матрицы инцидентностей идеальных источников тока (принимают значение +1, если «+» идеального источника тока подсоединен к рассматриваемому узлу, -1, если «-»

идеального источника тока подсоединен к рассматриваемому узлу, 0 если ни один из выводов рассматриваемого источника тока не подсоединен к рассматриваемому узлу).

Согласно закону Ома:

$$i_{R,k,j}(t) = \sigma_{k,j} \left( \varphi_k(t) - \varphi_j(t) \right), \quad j=0, N, \quad k=1, N, \quad k \neq j, \quad (5)$$

где  $\sigma_{k,j}$ ,  $j=0, N$ ,  $k=1, N$ ,  $k \neq j$  – проводимость между двумя узлами электрической цепи;  $\varphi_j(t)$ ,  $j=0, N$  – электрические потенциалы узлов, причем  $\varphi_0(t) \equiv 0$ . Отсюда, согласно (4) и (5) имеем:

$$\sum_{j=0, j \neq k}^N \sigma_{k,j} \left( \varphi_k(t) - \varphi_j(t) \right) = \sum_{p=1}^{n_\varepsilon} \alpha_{p,k}^{(\varepsilon)} \cdot i_p^{(\varepsilon)}(t) + \sum_{p=1}^{n_j} \alpha_{p,k}^{(j)} \cdot i_p^{(j)}(t), \quad k=1, N;$$

отсюда имеем окончательно, учитывая, что  $\varphi_0(t) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{k,j} \cdot \varphi_j(t) + \left( \sum_{j=0, j \neq k}^N \sigma_{k,j} \right) \cdot \varphi_k(t) - \sum_{j=k+1}^N \sigma_{k,j} \cdot \varphi_j(t) - \sum_{p=1}^{n_\varepsilon} \alpha_{p,k}^{(\varepsilon)} \cdot i_p^{(\varepsilon)}(t) = \\ = \sum_{p=1}^{n_j} \alpha_{p,k}^{(j)} \cdot i_p^{(j)}(t); \quad k=1, N \end{aligned} \quad (6)$$

Для ЭДС идеальных источников ЭДС и токов идеальных источников тока имеем:

$$\varepsilon_p(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_{p,k}^{(\varepsilon)} \cdot \varphi_k(t), \quad u_p^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_{p,k}^{(j)} \cdot \varphi_k(t), \quad k=1, N, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_p(t)$ ,  $p=1, n_\varepsilon$  – ЭДС идеальных источников ЭДС;  $u_p^{(j)}(t)$ ,  $p=1, n_j$  – напряжения на идеальных источниках тока.

Введя матричные обозначения:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0, j \neq 1}^N \sigma_{1,j} & -\sigma_{1,2} & \cdots & -\sigma_{1,N} \\ -\sigma_{2,1} & \sum_{j=0, j \neq 2}^N \sigma_{2,j} & \cdots & -\sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sigma_{N,1} & -\sigma_{N,2} & \cdots & \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{N,j} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{(\varepsilon)} & \cdots & \alpha_{n_\varepsilon,1}^{(\varepsilon)} \\ \alpha_{1,2}^{(\varepsilon)} & \cdots & \alpha_{n_\varepsilon,2}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1,N}^{(\varepsilon)} & \cdots & \alpha_{n_\varepsilon,N}^{(\varepsilon)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{(J)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{(J)} & \cdots & \alpha_{n_J,1}^{(J)} \\ \alpha_{1,2}^{(J)} & \cdots & \alpha_{n_J,2}^{(J)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1,N}^{(J)} & \cdots & \alpha_{n_J,N}^{(J)} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p(t), \quad \mathbf{u}^{(J)}(t) = \begin{pmatrix} u_1^{(J)}(t) \\ \vdots \\ u_{n_J}^{(J)}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) = \begin{pmatrix} i_1^{(\varepsilon)}(t) \\ \vdots \\ i_{n_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}^{(J)}(t) = \begin{pmatrix} i_1^{(J)}(t) \\ \vdots \\ i_{n_J}^{(J)}(t) \end{pmatrix},$$

имеем в силу (6) и (7):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \cdot \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) &= \boldsymbol{\alpha}^{(J)} \cdot \mathbf{i}^{(J)}(t), \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \mathbf{u}^{(J)}(t) = \boldsymbol{\alpha}^{(J)T} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (8), в силу независимости ЭДС идеальных источников ЭДС строки матрицы  $\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T}$  линейно независимы. Матрица  $\boldsymbol{\sigma}$  положительно определенная, а значит невырожденная. Отсюда, в силу (5) имеем:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \cdot \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) + \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(J)} \cdot \mathbf{i}^{(J)}(t),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \cdot \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) + \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(J)} \cdot \mathbf{i}^{(J)}(t), \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^{(J)}(t) = \boldsymbol{\alpha}^{(J)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \cdot \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) + \boldsymbol{\alpha}^{(J)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(J)} \cdot \mathbf{i}^{(J)}(t). \quad (10)$$

Так как число столбцов матрицы  $\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)}$  меньше числа строк этой матрицы, то матрица  $\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)}$  имеет максимальный ранг. Отсюда в силу положительной определенности матрицы  $\boldsymbol{\sigma}$  (а значит и матрицы  $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ ) матрица  $\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)}$  положительно определена, а значит невырожденная. Отсюда уравнение (9) разрешимо относительно  $\mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t)$ , а значит, как видно из (9) и (10), система уравнений (8) разрешима относительно  $\mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t)$  и  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ . Отсюда в силу (8) имеем:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & -\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(J)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix};$$

отсюда в силу (8) имеем окончательно:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(J)T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & -\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{(J)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В случае отсутствия в электрической цепи идеальных источников тока имеем в силу (9) и невырожденности матрицы  $\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)}$ :

$$\mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) = \left( \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t). \quad (12)$$

В общем случае столбцы матрицы  $\boldsymbol{\alpha}^{(J)}$  могут быть линейно зависимыми (в таком случае идеальные источники тока образуют замкнутый контур). В этом случае определена матрица  $\boldsymbol{\beta}$ , такая что:

$$\boldsymbol{\alpha}^{(J)} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad (13)$$

где столбцы матрицы  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)}$  линейно независимые. Отсюда, введя приведенные токи через идеальные источники тока:

$$\tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t) = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{i}^{(J)}(t), \quad (14)$$

а также приведенные напряжения на идеальных источниках тока:

$$\mathbf{u}^{(J)}(t) = \boldsymbol{\beta}^T \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t), \quad (15)$$

имеем согласно (8) и (13) – (15):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \cdot \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) &= \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)} \cdot \tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t), \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) &= \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)T} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Выполнив преобразования полученного соотношения (16), аналогичные (9) – (11), имеем:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & -\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Из (14) и (15) имеем:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Как видно из (13) из (17) и (18) вытекает уравнение (11).

Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & -\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \\ \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(J)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

входящая в (17), в силу положительной определенности матрицы  $\boldsymbol{\sigma}$  неотрицательно определена, а значит является кинетической. Матрица

$$\mathbf{A} = \left( \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)} \right)^{-1}, \quad (20)$$

входящая в (12), в силу положительной определенности матрицы  $\boldsymbol{\sigma}$  и максимальности ранга матрицы  $\boldsymbol{\alpha}^{(\varepsilon)}$  положительно определена, а значит тоже является кинетической. Положительная определенность матрицы  $\boldsymbol{\sigma}$ , как и положительная определенность кинетической матрицы  $\mathbf{A}$ , входящей в (20), является следствием положительности активных сопротивлений, а неотрицательная определенность матрицы  $\mathbf{A}$ , определяемой в силу (19), также является следствием положительности активных сопротивлений, а отсутствие положительной определенности (а только лишь неотрицательная определенность) кинетической матрицы  $\mathbf{A}$ , определяемой (19), является следствием наличия в цепи индуктивных элементов, обладающих инерционностью.

Элементарная отданная в цепь идеальными источниками ЭДС и источниками тока электрическая энергия определяется согласно:

$$dW(t) = \mathbf{i}^{(J)T}(t) \cdot \mathbf{u}^{(J)}(t) dt + \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) \cdot \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) dt; \quad (21)$$

отсюда согласно (14) и (15) имеем:

$$dW(t) = \tilde{\mathbf{i}}^{(J)T}(t) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) dt + \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) \cdot \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) dt. \quad (22)$$

Таким образом, как нетрудно видеть из (17) – (19), (22) вытекающая из (17) и (19) система уравнений:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix} \quad (23)$$

является потенциально-потокковой системой: в ее левой части стоят потокковые величины, а в правой части – потенциальные (потенциаль-



ные и потоковые свойства этих величин будут видны далее) (на которую умножается кинетическая матрица  $\mathbf{A}$ ). Более того, в силу (23) электрическая энергия, как видно из (22), является неубывающей во времени (в силу неотрицательной определенности диссипативной матрицы  $\mathbf{A}$ ). Если в рассматриваемой цепи имеются только емкостные и индуктивные элементы, то напряжение на индуктивных элементах представляет собой производную по времени суммарного магнитного потокосцепления  $\Psi(t)$  через этот элемент (закон электромагнитной индукции Фарадея):

$$\mathbf{u}^{(j)}(t) = -\frac{d\Psi(t)}{dt}, \quad (24)$$

а ток через емкостной элемент – производной по времени электрического заряда  $\mathbf{q}(t)$  на емкостном элементе:

$$\mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) = -\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}. \quad (25)$$

Отсюда видно, что величины, стоящие в левой части (23) – потоковые. Согласно (24) и (25) уравнение (21) для приращения накопленной энергии в виде электрического и магнитного полей, примет вид:

$$d\tilde{W} = -dW = \mathbf{i}^{(j)T} \cdot d\Psi + \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot d\mathbf{q};$$

отсюда имеем:

$$\mathbf{i}^{(j)} = \nabla_{\Psi} \tilde{W}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\mathbf{q}} \tilde{W}. \quad (26)$$

Отсюда видно, что величины, стоящие в правой части (23) – потенциальные. Введя матрицу  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

имеем в силу (18), (23) – (27) уравнения электрических цепей, не содержащих источников электроэнергии, в потенциально-потокном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Psi(t)}{dt} \\ \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{\Psi} W \\ \nabla_{\mathbf{q}} W \end{pmatrix}. \quad (28)$$

В общем случае, когда имеются источники электроэнергии, можно считать, что каждый емкостной элемент последовательно соединен с источником электроэнергии, а каждый индуктивный элемент – параллельно с источником электроэнергии. Для получения одного емкостного элемента ЭДС и внутреннее сопротивление этого источника электроэнергии обнуляем; для получения одного индуктивного элемента ток этого источника электроэнергии обнуляем, а внутреннее сопротивление этого источника электроэнергии берем за бесконечность. Аналогично для получения одного только источника электроэнергии емкости емкостных элементов и индуктивности индуктивных элементов устремляем к бесконечности. В таком случае потенциально-потокные уравнения (28) примут вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Psi(t)}{dt} \\ \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(J)}(t) \\ \mathbf{i}^{(\varepsilon)}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}}^{(J)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{i}}^{(j)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}^{(j)}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}^{(j)}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{\Psi} W \\ \nabla_{\mathbf{q}} W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{эн}^{(кз)}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{эн}(t) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Проведя описанные ранее рассуждения для систем емкостных элементов, ее тоже можем заменить источниками ЭДС и провести такие же преобразования, получив систему потенциально-потокковых уравнений (29). Такие ЭДС будут зависеть от зарядов на емкостных элементах. Аналогично можно поступить и с индуктивными элементами. Матрицы  $\mathbf{B}$  будут определяться уже более сложными соотношениями, чем (27).

Приведенные в настоящей работе рассуждения справедливы как для постоянных сопротивлений (линейных электрических цепей), так и для непостоянных сопротивлений (нелинейных электрических цепей). Отличие потенциально-потокковых уравнений (29) для нелинейных электрических цепей заключается лишь в том, что матрица диссипации  $\mathbf{A}$  непостоянна; выражения для ее коэффициентов также определяются через сопротивления и матрицы инцидентностей согласно (19). Таким образом, подходы построения этой матрицы через сопротивления что в случае линейных цепей, что в случае нелинейных цепей идентичны.

В случае линейной цепи справедлив принцип суперпозиции. В соответствии с этим принципом можно обнулить (закоротить) все источники напряжения кроме одного, ЭДС которого взять равной единице, обнулить (разомкнуть) источники тока и получить выражения для токов через источники ЭДС и напряжений на источниках тока. Эти выражения и будут записываться в качестве коэффициентов

столбца матрицы, которые соответствуют не обнулённому источнику напряжения. Аналогично процедуру можно провести и для всех остальных источников ЭДС и тока. Как нетрудно видеть из (23) согласно принципу суперпозиции произведение диссипативной матрицы на вектор-столбец генерируемых идеальными источниками токов и напряжений даст нам искомые токи и напряжения.

### Методика применения метода математического прототипирования

В качестве примера рассмотрим электрическую схему, включающую 2 реактивных элемента (катушку индуктивности и конденсатор), представленную на рис. 4 и последовательно выполним процедуру составления системы дифференциальных уравнений.

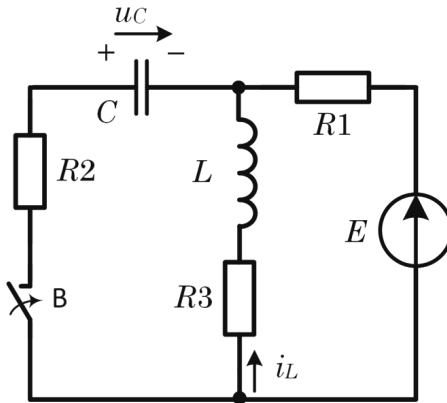


Рис. 4. Пример электрической схемы с двумя реактивными элементами

Обозначим на схеме условное положительное направление тока в ветви с катушкой индуктивности и полярность заряда конденсатора.

Считаем, что в начальный момент времени замыкается выключатель В. В правом контуре схемы протекает ток, обусловленный источником напряжения  $E$ , левый контур разомкнут, конденсатор разряжен.

1. Определяем количество реактивных элементов в схеме и для каждого элемента задаём энергетические процессы, которые в нем протекают: для индуктивностей – изменение потокоцепления  $\Delta\psi$ , а для ёмкостей – изменение накопленного заряда  $\Delta q$ . Вектор координат процессов  $\Delta\mathbf{z}$  имеет 2 компоненты

$$\Delta\mathbf{z} = (\Delta q \quad \Delta\psi)^T.$$

2. Так как количество реактивных элементов определяет порядок системы дифференциальных уравнений, то в качестве базиса мы должны выбрать 2 координаты состояния. Этот выбор может быть произвольным, главное, чтобы координаты состояния были независимыми переменными. Рекомендуется для начинающих следующее правило для выбора координат состояния – напряжение на конденсаторах и токи в катушках индуктивности. Следуя этому правилу вектор координат состояния системы  $\mathbf{z}$  запишется

$$\mathbf{z} = (u_C \quad i_L)^T.$$

3. Из соотношения

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^T \Delta\mathbf{z},$$

а также учитывая определения ёмкости и индуктивности, получим

$$\mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} = \mathbf{V}, \quad (30)$$

при этом  $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$  в силу диагональности матрицы  $\mathbf{V}^T$ . Если матрица  $\mathbf{V}$  не является диагональной, тогда в общем случае она не равна транспонированной.

4. Обнулим внешние источники энергии (в нашем случае – E) и запишем выражение для суммарной внутренней энергии в терминах координат состояния

$$W(\mathbf{z}) = \frac{Cu_c^2}{2} + \frac{Li_L^2}{2}. \quad (31)$$

5. Получим потенциалы взаимодействия  $\mathbf{F}$  взяв градиент от энергии по координатам состояния

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{z}} \left( W(\mathbf{z}) \right) = (-Cu_c \quad -Li_L)^T. \quad (32)$$

6. Найдём силы, действующие в системе, в соответствии с выражением

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Cu_c \\ -Li_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_c \\ -i_L \end{pmatrix}, \quad (33)$$

то есть внутренними силами, действующими в рассматриваемой системе, являются напряжение на конденсаторах и токи в индуктивно-

стях, взятые с обратным знаком. Сделав замену переменных (обозначив силы через источники напряжений и токов)

$$\Delta \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -u_C \\ -i_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^* \\ J^* \end{pmatrix}, \quad (34)$$

получим следующую расчетную электрическую схему замещения (рис. 5)

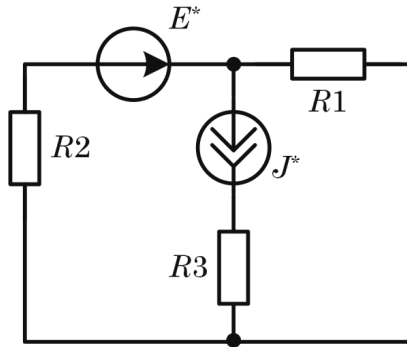


Рис. 5. Расчетная схема после замены переменных

7. Запишем основное потенциально-потокное уравнение метода математического прототипирования энергетических процессов (1) для нашей схемы с учетом (34)

$$\frac{d\Delta \mathbf{z}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{F} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} E^* \\ J^* \end{pmatrix},$$

или с учетом того, что

$$\frac{dq}{dt} = i_C \quad \text{и} \quad \frac{d\psi}{dt} = u_L$$

получим

$$\begin{pmatrix} i_C \\ u_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ J^* \end{pmatrix}. \quad (35)$$

8. Из системы алгебраических уравнений (35) с учетом допущения о постоянстве всех сопротивлений можно получить выражения для коэффициентов матрицы диссипации

$$a_{11} = \left. \frac{i_C}{E^*} \right|_{J^*=0}, \quad a_{12} = \left. \frac{i_C}{J^*} \right|_{E^*=0}, \quad a_{21} = \left. \frac{u_L}{E^*} \right|_{J^*=0}, \quad a_{22} = \left. \frac{u_L}{J^*} \right|_{E^*=0}. \quad (36)$$

Получить значения коэффициентов можно двумя способами:

– экспериментальным путём, обнуляя соответствующие источники (размыкая источники тока и замыкая источники напряжения) в схеме (рис. 3) и подключая нужный источник, производить измерение нужного параметра (тока через конденсатор или напряжения на катушке индуктивности), после чего применять выражения (36);

– расчетным способом любыми известными методами расчета электрических цепей с резистивными элементами, при этом также необходимо обнулять соответствующие источники.

Для коэффициентов  $a_{11}$  и  $a_{21}$  расчетная схема после обнуления  $J^*$  (размыкания), будет как на рис. 6, следовательно

$$a_{11} = \left. \frac{i_C}{E^*} \right|_{J^*=0} = \frac{1}{R1 + R2}, \quad a_{21} = \left. \frac{u_L}{E^*} \right|_{J^*=0} = \frac{R1}{R1 + R2},$$

а для расчета коэффициентов  $a_{12}$  и  $a_{22}$  схема после обнуления  $E^*$  (замыкания), будет как на рис. 7, следовательно

$$a_{12} = \left. \frac{i_C}{J^*} \right|_{E^*=0} = \frac{R1}{R1 + R2}, \quad a_{22} = \left. \frac{u_L}{J^*} \right|_{E^*=0} = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2} - R3.$$



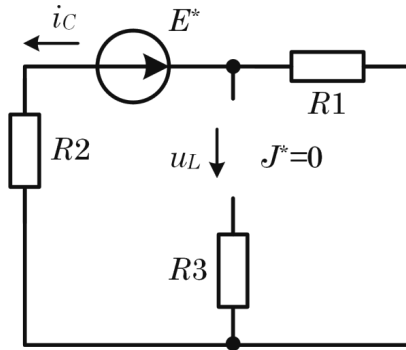


Рис. 6. Электрическая схема для расчета  $a_{11}$  и  $a_{21}$

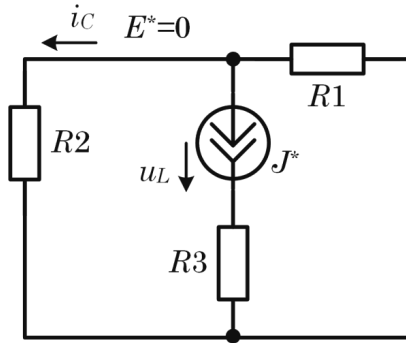


Рис. 7. Электрическая схема для расчета  $a_{12}$  и  $a_{22}$

9. Таким образом система потенциально-потокowych уравнений запишется так

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta q \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R1+R2} & \frac{R1}{R1+R2} \\ \frac{R1}{R1+R2} & \frac{R1 \cdot R2}{R1+R2} - R3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* \\ J^* \end{pmatrix},$$

а система дифференциальных уравнений в терминах координат состояния (уравнения метода математического прототипирования эне-

гетических процессов без внешних источников энергии) запишется так

$$\begin{pmatrix} \frac{du_{C \text{ int}}}{dt} \\ \frac{du_{L \text{ int}}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R1+R2} & \frac{R1}{R1+R2} \\ \frac{R1}{R1+R2} & \frac{R1 \cdot R2}{R1+R2} - R3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Cu_C \\ -Li_L \end{pmatrix}. \quad (37)$$

10. Следующий этап – определение составляющих производных от координат состояния, обусловленных внешними источниками энергии. Для этого «обнуляем» источники  $E^*$  и  $J^*$ , а внешние источники (рис. 4) оставляем – рис. 8.

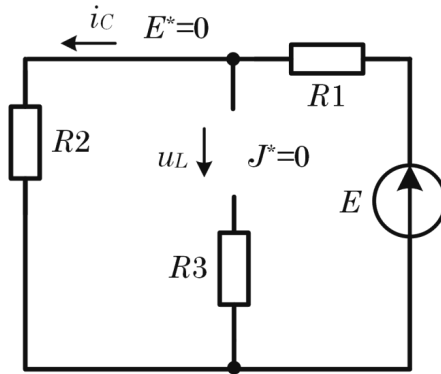


Рис. 8. Электрическая схема для расчета внешних воздействий

Для расчета составляющих координат состояния, обусловленных внешними потоками энергии, необходимо рассмотреть все внешние источники как внешние силы, действующие от сторонних сил, например для нашей схемы, в которой один источник напряжения вектор сил вырождается в число  $\Delta F^* = E$  или рассмотреть век-

тор  $\Delta \mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$ , для того, чтобы матрица диссипации  $\mathbf{A}^*$  была квадратной. Обе формы представления внешних сил  $\Delta \mathbf{F}^*$  равнозначны.

Потенциально-потокковые уравнения, необходимые для получения матрицы диссипации, аналогичны (35)

$$\begin{pmatrix} i_{C \text{ ext}} \\ u_{L \text{ ext}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

11. Из системы алгебраических уравнений (38) с учетом допущения о постоянстве всех сопротивлений можно получить выражения для коэффициентов матрицы диссипации  $\mathbf{A}^*$ .

$$a_{11}^* = \frac{i_C}{E} = \frac{1}{R1 + R2}, \quad a_{21}^* = \frac{u_L}{E} = \frac{R2}{R1 + R2}, \quad a_{12}^* = a_{22}^* = 0. \quad (39)$$

В этом случае уравнение метода математического прототипирования для внешних воздействий запишется так

$$\begin{pmatrix} \frac{du_{C \text{ ext}}}{dt} \\ \frac{di_{L \text{ ext}}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R1 + R2} & 0 \\ \frac{R2}{R1 + R2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

В случае, если мы используем вектор сил первого порядка, тогда уравнение (38) будет выглядеть так

$$\begin{pmatrix} i_{C \text{ ext}} \\ u_{L \text{ ext}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^* \\ a_{21}^* \end{pmatrix} E, \quad (41)$$

а уравнение (40) так

$$\begin{pmatrix} \frac{du_{C \text{ ext}}}{dt} \\ \frac{di_{L \text{ ext}}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R1+R2} \\ \frac{R2}{R1+R2} \end{pmatrix} E. \quad (42)$$

То есть матрица  $A^*$  не является квадратной.

12. Заключительный этап формирования уравнений динамики заключается в одновременном учёте уравнения (37) и (42) (или (40)), то есть влияния и внутренних и внешних сил

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{du_L}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{du_{C \text{ int}}}{dt} \\ \frac{di_{L \text{ int}}}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{du_{C \text{ ext}}}{dt} \\ \frac{di_{L \text{ ext}}}{dt} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R1+R2} & \frac{R1}{R1+R2} \\ \frac{R1}{R1+R2} & \frac{R1 \cdot R2}{R1+R2} - R3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Cu_C \\ -Li_L \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R1+R2} \\ \frac{R2}{R1+R2} \end{pmatrix} E. \end{aligned} \quad (43)$$

Матричное уравнение (43) и есть результат применения метода математического прототипирования энергетических процессов, остальные процедуры получения решения стандартные.

В случае необходимости использования другого базиса для составления уравнений динамики уравнение (43) модифицируется путем умножения матрицы преобразования координат слева на правую и левую части матричного уравнения.

13. Решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений (43) ищется в виде суммы свободной и вынужденной составляющих известными методами в виде фундаментальной системы решений по результатам решения характеристического уравнения. При этом начальные условия (при  $t_0 = 0$ ) получаются из независимых начальных условий

$$u_C(0) = 0, \quad i_L(0) = \frac{-E}{R1 + R3}.$$

### **Заключение**

В учебном пособии рассмотрена методика составления уравнений динамики для любых электрических цепей с реальными элементами (имеющими внутреннее активное сопротивление) в соответствии с методом математического прототипирования энергетических процессов.

Данная методика может быть использована при исследованиях физических процессов в технических системах для нормальных и аварийных режимов работы по единым правилам ввиду того, что большинство технических устройств (электрические машины, полупроводниковые преобразователи, трансформаторы, силовые кабельные линии и т.п.) могут быть представлены в виде электрических схем замещения, то есть в виде электрических цепей.

Для простейшей цепи с двумя реактивными элементами (индуктивным и емкостным) подробно описана процедура получения системы дифференциальных уравнений относительно выбранных коор-

динат состояния, при этом выбор конкретного базиса остается за исследователем.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие энергетические процессы происходят в авиационном электрооборудовании?
2. Чем отличаются идеальные элементы электрических схем замещения от реальных и чем это обусловлено?
3. Какие типы элементов в электрической цепи характеризуют диссипативные свойства системы?
4. Какие элементы электрической цепи обладают инерционными свойствами и как это связано с накоплением энергии?
5. Чем реальный источник энергии отличается от идеального?
6. Объясните почему мы можем заменить реактивные элементы на источники тока и напряжения?
7. При каких условиях справедлив принцип суперпозиции для определения матрицы диссипации?
8. Справедлив ли принцип суперпозиции, если компоненты диссипативной матрицы зависят от температуры окружающей среды?
9. Объясните почему матрица диссипации так называется?
10. В чем принципиальная разница между координатами энергетических процессов системы и координатами состояния и какие у них общие свойства?
11. Как определить количество координат состояния для формирования базиса?

12. Запасенная энергия системы – это векторная или скалярная функция?

13. Как изменяются свойства катушек индуктивности и конденсаторов с точки зрения их схемы замещения при изменении частоты переменного тока?

14. Что изменится в схеме замещения реальной катушки индуктивности на больших частотах?

15. Как изменится схема замещения конденсатора для высоких частот переменного тока?

16. Какие идеальные элементы входят в схему замещения синхронного генератора?

17. Какие законы сохранения учитываются при формировании математической модели системы?

18. Какие составляющие внутренней энергии должны присутствовать при моделировании электромеханического генератора?

19. В схеме замещения три реактивных элемента и 5 ветвей, какой порядок системы дифференциальных уравнений получится при использовании метода математического прототипирования энергетических процессов?

20. Как Вы понимаете термин внутренняя энергия системы?

21. Как учитываются внешние потоки энергии в методе математического прототипирования энергетических процессов?

22. Как записать выражение для запасенной энергии электромеханического генератора?

## Литература

1. Тамм, И. Е. Основы теории электричества. Т.2. - М., Гостехиздат, 1934.
2. Бутырин, П. А. Разработка аналитических и численно-аналитических методов решения уравнений состояния электрических цепей.: Дисс. докт. техн. наук. 1993. - 304 с.
3. Халютин, С. П. О некоторых разделах теоретической электротехники / С. П. Халютин, А. А. Титов. – Москва: Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, 2010. – 187 с. – ISBN 978-5-903111-40-4. – EDN QMLNYX.
4. Халютин, С. П. Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи / С. П. Халютин, А. А. Титов // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – Т. 6. – № 11. – С. 31-41. – EDN JXLSOJ.
5. Халютин, С. П. Потенциально-поточковый квазиградиентный метод моделирования неравновесных процессов / С. П. Халютин, И. Е. Старостин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2(22). – С. 25-35. – EDN PCOYDV.
6. Быков, В. И. Построение матрицы восприимчивостей потенциально-поточковых уравнений для простых подсистем сложной системы / В. И. Быков, И. Е. Старостин, С. П. Халютин // Сложные системы. – 2013. – № 3(8). – С. 66-86. – EDN RCUJTR.
7. Старостин, И. Е. Потенциально-поточковый метод - инструмент качественного анализа и моделирования динамики неравновесных процессов / И. Е. Старостин, С. П. Халютин // Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н. Е. Жуковского. – 2013. – № 1. – С. 65-69. – EDN UINPFD.
8. Быков, В. И. Потенциально-поточковый метод и современная неравновесная термодинамика / В. И. Быков, И. Е. Старостин, С. П. Халютин // Сложные системы. – 2014. – № 1(10). – С. 4-30. – EDN RZPZXJ.
9. Старостин, И. Е. Кинетическая теорема современной неравновесной термодинамики / И. Е. Старостин, В. И. Быков. – Raleigh: Open Science Publishing, 2017. – 229 с. – ISBN 978-0-244-36699-5. – EDN XTKQQH.
10. Халютин, С. П. Метод математического прототипирования энергетических процессов для электрических цепей / С. П. Халютин, И. Е. Старостин, К. К. Докин // Электропитание. – 2022. – № 1. – С. 41-49. – EDN DAQPEV.
11. Верификация и валидация моделей для инженерных расчетов. [электронный ресурс] URL: <https://multiphysics.ru/stati/blog/veri-fikatciia-i-validatciia-modelei-dlia-inzhenernykh-raschetov.htm>. (Дата обращения: 03.11.2023).
12. ГОСТ Р 57700.37— 2021. «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий».