

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА  
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

---

Кафедра технической эксплуатации  
радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта

Э.А. Болелов, А.Т. Кудинов, И.Б. Губерман

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ  
НА РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА**

**Учебное пособие**

*Утверждено редакционно-  
издательским советом МГТУ ГА  
в качестве учебного пособия*

Москва  
ИД Академии Жуковского  
2021

УДК 621.391.8:519.21  
ББК 6Ф2  
Б79

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

*Петров В.И.* (МГТУ ГА) – канд. техн. наук, доцент;  
*Полосин С.А.* (ФГУП «ГосНИИАС») – канд. техн. наук, доцент

**Болелов Э.А.**

Б79      Статистическая теория радиотехнических систем. Воздействие случайных процессов на радиотехнические устройства [Текст] : учебное пособие / Э.А. Болелов, А.Т. Кудинов, И.Б. Губерман. – М. : ИД Академии Жуковского, 2021. – 64 с.

ISBN 978-5-907490-13-0

Данное учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Статистическая теория радиотехнических систем» по учебному плану специальности 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» для всех форм обучения.

Учебное пособие ставит своей целью дать студентам знания, необходимые при изучении радиотехнических систем воздушного транспорта. В учебном пособии излагается материал, отражающий вопросы воздействия случайных процессов на линейные и нелинейные устройства радиотехнических систем, а также приводится описание методов анализа радиотехнических устройств.

Содержание учебного пособия согласовано с другими дисциплинами специальности 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» и опирается на материал, излагаемый в дисциплинах, предшествующих дисциплине «Статистическая теория радиотехнических систем».

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 30.08.2021 г. и методического совета 30.08.2021 г.

**УДК 621.391.8:519.21**  
**ББК 6Ф2**  
Св. тем. план 2021 г.  
поз. 26

ISBN 978-5-907490-13-0

© Московский государственный технический  
университет гражданской авиации, 2021

## Содержание

<b>1. Воздействие случайных процессов на линейные устройства радиотехнических систем</b>	<b>4</b>
1.1. Интегральные характеристики случайных процессов и линейных устройств	4
1.2. Преобразования случайных процессов в стационарных линейных устройствах	6
1.3. Преобразования случайных процессов в нестационарных линейных устройствах	15
<b>2. Воздействие случайных процессов на нелинейные устройства радиотехнических систем</b>	<b>24</b>
2.1. Анализ воздействия случайного процесса на нелинейный элемент прямым методом	24
2.2. Анализ воздействия случайного процесса на нелинейный элемент методом характеристических функций (метод Райса)	35
<b>3. Выбросы случайных процессов</b>	<b>44</b>
<b>4. Шумы радиотехнических устройств</b>	<b>49</b>
4.1. Тепловой шум	49
4.2. Дробовой шум	51
4.3. Избыточные шумы	52
<b>5. Электромагнитные помехи</b>	<b>55</b>
<b>Список используемой литературы</b>	<b>60</b>
<b>Список сокращений</b>	<b>63</b>

## 1. Воздействие случайных процессов на линейные устройства радиотехнических систем

В общем виде задача изучения прохождения случайных сигналов через линейные цепи состоит в определении закона распределения (функции распределения или плотности вероятности) процесса на выходе цепи при известном законе распределения входного случайного процесса и характеристик цепи. Как правило, решение задачи в общем виде наталкивается на существенные трудности. Поэтому, обычно указанную задачу сводят к определению вероятностных характеристик (математического ожидания, дисперсии, автокорреляционной функции) выходного случайного процесса. Объясняется это тем, что для практики построения и анализа радиотехнических устройств вполне достаточно знания этих характеристик.

В списке литературы указаны ряд учебников, учебных пособий, монографий, в которых излагаются вопросы воздействия случайных процессов на линейные и нелинейные устройства радиотехнических систем. Вместе с тем, авторы полагают, что наиболее полно эти вопросы отражены в трудах Тихонова В.И. и Шахтарина Б.И. Именно на базе их работ и написано данное учебное пособие.

### 1.1. Интегральные характеристики случайных процессов и линейных устройств

В рамках данного учебного пособия будем рассматривать как непрерывные, так и дискретные случайные процессы (СП), т.к. оба типа СП являются характерными для радиотехнических систем. Это же относится и к линейным системам (ЛС).

Под интегральными характеристиками будем понимать:

для случайных процессов – время корреляции СП и эффективную ширину его энергетического спектра (ЭС);

для линейных систем – шумовую полосу и системную КФ (СКФ).

Для непрерывного случайного процесса и линейной системы можно определить следующее.

**Время корреляции**  $\tau_k$  зависит от коэффициента корреляции  $\rho(\tau)$  и для стационарного СП определяется по формуле

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau$$

**Эффективная ширина энергетического спектра** определяется выражением:

$$\Delta\omega_{\text{Э}} = \int_0^{\infty} \tilde{S}(\omega) d\omega$$

где  $\tilde{S}(\omega) = S(\omega)/S_m$  – нормированная спектральная плотность (энергетический спектр)  $S_m = \text{const}$ ,  $S_m$  – максимальное значение ЭС.

Введём **системную КФ** непрерывной стационарной ЛС (СКФ)  $R_h(\tau)$  соотношением

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-\tau)dt = R_h(-\tau)$$

где  $h(t)$  – импульсная характеристика (ИХ) ЛС.

Выразим шумовую полосу через значение СКФ:

$$R_h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 d\omega = 2H_m^2 B$$

где  $H(i\omega)$  – частотная характеристика системы.

Отсюда получим  $B = R_h(0)/2H_m^2$ .

Для дискретного случайного процесса и линейной системы можно определить аналогичные характеристики.

**Системная КФ дискретной системы**, например цифрового фильтра (ЦФ) находится по формуле:

$$R_g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k g_{k-n}$$

Введём системную функцию фильтра (СФФ)  $G(z)$  в виде  $z$ -преобразования от ИХ  $g_n$ :

$$G(z) = Z\{gn\} = \sum_{n=0}^{\infty} gnz^{-n}$$

где  $Z$  – знак  $z$ -преобразования:

$$Z[R_g(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} g_k g_{k-n} \right) z^{-n}$$

После введения новых индексов суммирования  $k - n = m; k = l$

Получим  $Z[R_g(n)] = G\left(\frac{1}{z}\right)G(z)$ . Отсюда

$$R_g(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\pi}^{\pi} G(z)G\left(\frac{1}{z}\right)z^{n-1} dz$$

Если ввести частотную характеристику цифровой ЛС  $H(i\omega) = G(z)|_{z = e^{i\omega}}$ ,  $\omega = \omega T$ , где  $T$  – интервал дискретизации, то получим

$$R_g(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(i\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega$$

## 1.2. Преобразования случайных процессов в стационарных линейных устройствах

Вопросы дифференцируемости и интегрируемости случайных функций уже рассматривались авторами в предыдущих учебных пособиях по дисциплине. Дадим здесь лишь краткие сведения по этому вопросу.

Случайная функция  $X(t)$  называется **дифференцируемой** в среднеквадратическом смысле в точке  $t_0 \in T$ , если существует СВ  $X'(t_0)$  такая, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \left[ \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} - X'(t_0) \right]^2 \right\} = 0.$$

Причем СВ  $X'(t_0)$  называется производной СП  $X(t)$  в точке  $t_0$ .

Для дифференцируемости СП  $X(t)$  необходимо и достаточно существование производных  $\frac{dm_x(t)}{dt}$  и  $\frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ .

При этом

$$m_{x'}(t) - M[X'(t)] = \frac{dm_x(t)}{dt}$$

$$K_{x'}(t_1, t_2) = M\{[X'(t_1) - m_{x'}(t_1)][X'(t_2) - m_{x'}(t_2)]\} = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

Для стационарного СП  $X(t)$

$$K_{x'}(\tau) = R_{x'}(\tau) = -\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}$$

**Пример.** Гауссовско-марковский СП с экспоненциальной КФ не является дифференцируемым, так у функции  $e^{-\alpha|\tau|}$  не существует производной в точке  $\tau = 0$ .

**Пример.** Случайный процесс с КФ

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$$

Является дифференцируемым, так как

$$\frac{dR(\tau)}{d\tau} = -\alpha^2 \tau e^{-\alpha|\tau|}; \quad \frac{d^2R(\tau)}{d\tau^2} = -\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|).$$

Интегральное преобразование СП  $x(t)$

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau$$

называется среднеквадратичным **интегралом случайной функции** на  $[t_0, t]$ .

Среднее значение и ковариационная функция СП  $y(t)$  определяются соотношениями

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t m_x(\tau) d\tau$$

$$K_y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Отсюда следует, что даже при стационарном СП  $x(t)$  интеграл от него является нестационарным СП.

Если СП  $x(t)$  стационарный, тогда

$$m_x = \text{const}, m_y(t) = m_x(t - t_0),$$

$$K_y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

Преобразуем двухкратный интеграл к сумме однократных и вычислим дисперсию  $\sigma_y^2(t) = K_y(t, t)$ . Пусть  $t_0 = 0$  и  $t_2 > t_1$ . Тогда вводя новые переменные  $\lambda = \tau_2 - \tau_1$ ;  $\mu = \tau_2$  получим

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \left( \int_{\mu-t_1}^{\mu} K_x(\lambda) d\lambda \right) d\mu$$

Изменяя порядок интегрирования, приходим к соотношению

$$K_y(t_1, t_2) = \int_{-t_1}^0 (t_1 + \lambda) K_x(\lambda) d\lambda + t_1 \int_0^{t_2-t_1} K_x(\lambda) d\lambda + \int_{t_2-t_1}^{t_2} (t_2 - \lambda) K_x(\lambda) d\lambda$$

Области интегрирования для каждого слагаемого отмечены на рис. 1.1. Отсюда при  $t_1 = t_2 = t$  получим

$$\sigma_y^2 = \int_{-t}^t (t - |\lambda|) K_x(\lambda) d\lambda = 2 \int_0^t (t - \lambda) K_x(\lambda) d\lambda$$

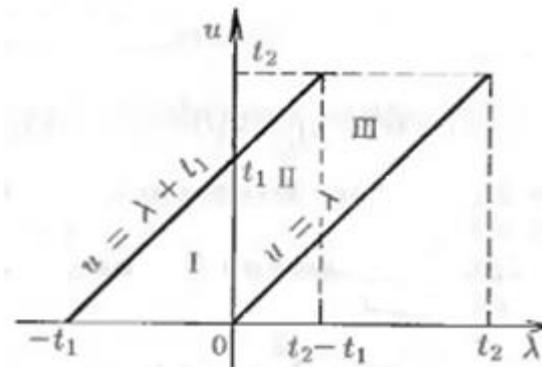


Рисунок 1.1.

**Пример.** Найти КВФ  $K_y(t_1, t_2)$  отклика интегратора, если КВФ входного воздействия имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \sigma_x^{-2} K_y(t_1, t_2) &= \\ &= \int_{-t_1}^0 (t_1 + \lambda) e^{-\alpha|\lambda|} d\lambda + t_1 \int_0^{t_2-t_1} e^{-\alpha|\lambda|} d\lambda + \int_{t_2-t_1}^{t_2} (t_2 - \lambda) e^{-\alpha|\lambda|} d\lambda \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

После интегрирования находим

$$I_1 = \frac{t_1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t_1}; \quad I_2 = \frac{t_1}{\alpha} - \frac{t_1}{\alpha^2} e^{-\alpha(t_2-t_1)};$$

$$I_3 = \frac{t_1}{\alpha} e^{-\alpha(t_2-t_1)} + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t_2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha(t_2-t_1)}$$

В результате при  $t_2 > t_1$  получим КВФ отклика интегратора

$$K_y(t_1, t_2) = \sigma_x^2 \left[ \frac{2t_1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t_1} + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t_2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha(t_2-t_1)} \right]$$

**Пример.** Пусть задано интегральное преобразование

$$\omega(t) = \int_0^t \xi(t) dt$$

где  $\xi(t)$  - гауссовский БШ (БГШ):  $M[\xi(t)] = 0$ ,  $R_\xi(\tau) = S_0 \delta(\tau)$ . Следовательно  $\omega(t)$  — это винеровский СП. Найдем его КФ  $R_\xi(t_1, t_2)$ .

По определению

$$\begin{aligned} D_\omega(t) - \sigma_\omega^2(t) &= M \left[ \int_0^t \xi(\tau) d\tau \int_0^t \xi(u) du \right] = \\ &= \int_0^t \int_0^t M[\xi(\tau)\xi(u)] du d\tau = \\ &= S_0 \int_0^t \int_0^t \delta(u - \tau) du d\tau = S_0 \int_0^t d\tau = S_0 t \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия СП  $\omega(t)$  возрастает с ростом времени линейно,  $\sigma_\omega = \sqrt{S_0 t}$ . Поскольку  $\xi(t)$  - БГШ, то и СП  $\omega(t)$  также будет гауссовским СП.

Найдем КФ винеровского СП

$$\begin{aligned} R_\omega(t_1, t_2) &= E \left[ \int_0^{t_2} \xi(v) dv \int_0^{t_1} \xi(u) du \right] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[\xi(v)\xi(u)] du dv \\ &= S_0 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \delta(u - v) dv du \end{aligned}$$

Пусть  $t_2 > t_1$ , тогда аргумент дельта-функции равен нулю на штриховой линии, в остальной области дельта-функция равно нулю. При  $t_2 > t_1$  интегрируем сначала по  $v$  (при любом  $u \in (0, t_1)$ ), при этом путь интегрирования пересекает штриховую линию. Получим

$$R_\omega(t_1, t_2) = S_0 \int_0^{t_1} 1 du = S_0 t_1$$

Аналогично при  $t_2 < t_1$ , интегрируя сначала по  $u$ , получим

$$R_\omega(t_1, t_2) = S_0 1$$

Окончательно находим

$$R_\omega(t_1, t_2) = \begin{cases} S_0 t_1 & \text{при } t_2 \gg t_1: \\ S_0 t_2 & \text{при } t_2 < t_1 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$R_\omega(t_1, t_2) = S_0 \min(t_1, t_2)$$

Тогда  $D_\omega(t) = R_\omega(t, t) = S_0 t$ .

Отклик  $y(t)$  ЛС имеет вид свертки ИХ системы  $h(t)$  и входного воздействия  $x(t)$ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

По определению КФ  $R_y(t_1, t_2) = M(y_1, y_2)$ , где  $y_1 = y(t_1)$ ,  $y_2 = y(t_2)$ . Тогда КФ  $R_y(t_1, t_2)$  отклика ЛС

$$R_y(t_1, t_2) = M \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)x(t_1 - \alpha)x(t_2 - \beta)d\alpha d\beta$$

Меняя местами операции усреднения и интегрирования и вводя КФ  $R_x(t_1, t_2) = M(x_1, x_2)$ , получим

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(t_1 - \alpha; t_2 - \beta)d\alpha d\beta$$

Данная формула справедлива при воздействии на ЛС нестационарного СП  $x(t)$ . Если СП  $x(t)$ - стационарный, то  $R_x(t_1 - \alpha; t_2 - \beta) = R_x(\tau + \alpha - \beta)$ ,  $\tau = t_2 - t_1$ . Тогда

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta$$

Сделав замену переменных  $u = \beta - \alpha$   $v = \beta$ , получим

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(v)h(v-u)dv \right] R_x(\tau-u)du$$

Окончательно находим

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_h(u)R_x(\tau-u)du$$

То есть **КФ отклика выражается через свертку СКФ и КФ входного воздействия.**

Отсюда следует соотношение для ЭС (частотный образ свертки равен произведению частотных образов сомножителей подынтегрального выражения):

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)|H(i\omega)|^2$$

Частный случай: на вход ЛС воздействует БГШ, его КФ  $R_x(\tau) = R_n(\tau) = S_0\delta(\tau)$ , тогда

$$R_y(\tau) = S_0 R_h(\tau)$$

**Теорема.** Пусть задан отклик  $y(t)$  линейной системы в виде свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= R_x(\tau) * h(-\tau) & R_y(\tau) &= R_{xy}(\tau) * h(\tau) \\ S_{xy}(\omega) &= S_x(\omega)\overline{H(i\omega)} & S_y(\omega) &= S_{xy}(\omega)H(i\omega) \end{aligned}$$

Здесь символом «\*» обозначена операция свертки, черта сверху - знак комплексного сопряжения.

**Доказательство.** Найдем взаимную КФ

$$R_{xy}(\tau) = M[x(t+\tau)y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} M[x(t+\tau)x(t-\alpha)]h(\alpha)d\alpha$$

Поскольку

$$M[x(t+\tau)x(t-\alpha)] = R_x(t+\alpha),$$

то получим

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \alpha) h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - \beta) h(-\beta) d\beta = R_x(\tau) * h(-\tau)$$

Аналогичной найдем

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= M[y(t)y(t-\tau)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} M[x(t-\alpha)y(t-\alpha)]h(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha = R_{xy}(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

Данное соотношение получается на основе теоремы Винера-Хинчина с учетом соотношения  $\xi[h(-\tau)] = \overline{H(i\omega)}$  и свойства преобразования Фурье: свертка временных функций соответствует произведению их частотных образов (спектров).

**Пример.** Найти КФ отклика инерциальной цепи при условии, что на ее вход действует стационарный СП с КФ

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

Используя известные соотношения

$$\xi[e^{-\alpha|\tau|}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad |H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_\phi^2} - \frac{b^2}{b^2 + \omega^2} \quad b = \frac{1}{\tau_\phi}$$

получим

$$S_y(\omega) = \frac{2\alpha\sigma_x^2 b^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)}$$

Воспользуемся разложением

$$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)} = \left( \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{1}{b^2 + \omega^2} \right) \frac{1}{b^2 - \alpha^2}$$

и соотношениями

$$\xi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \quad \xi^{-1}\left(\frac{1}{b^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{2b} e^{-b|\tau|}$$

В результате получим КФ отклика инерциальной цепи

$$R_y(\tau) = \frac{\sigma_x^2 \alpha b^2}{b^2 - \alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} - \frac{1}{b} e^{-b|\tau|} \right)$$

и его дисперсию

$$D_y = R_y(0) = b\sigma_x^2 / (b + \alpha)$$

Отсюда:

при  $a \gg b$  (эффективная ширина ЭС значительно больше полосы пропускания ИЦ)  $Dy \approx c_x^2 b / a$  (эффективная фильтрация шума);

при  $b \gg a$  (полоса пропускания ИЦ значительно больше эффективной ширины ЭС СП)  $Dy \approx c_x^2$  (фильтрация шума отсутствует).

Пусть  $g_n$  – ИХ ЦФ, тогда отклик ЛС  $y_n$  на последовательность  $x_n$  на входе определяется дискретной сверткой

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k g_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k x_{n-k}$$

Среднее значение отклика

$$M(y_n) = M\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k x_{n-k}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k M(x_{n-k})$$

Для стационарного СП  $m_x = M(x_{n-k}) = const.$  Тогда получим

$$M(y_n) = m_y = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k = const.$$

Найдем КФ отклика

$$R_y[n, m+n] = M(y_n y_{n+m}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_k g_i M(x_{n-k} x_{n+m-i})$$

Если СП  $\{x_n\}$  стационарный, то

$$M(x_{n-k} x_{n+m-i}) = R_x[m+k-i]$$

и поэтому

$$R_y[n, n + m] = R_y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_k g_j R_x(m + k - j)$$

Вводя новый индекс суммирования  $l = j - k$ , получим

$$R_y[m] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]g[k + l] \right) R_x[m - l] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_g[l]R_x[m - l]$$

где  $R_g[l]$ - СКФ дискретной ЛС.

Таким образом, *как и в непрерывной ЛС, КФ отклика на стационарное воздействие выражается в виде дискретной свертки СКФ  $R_g[l]$  и КФ входного воздействия.*

Введем z-форму ЭС

$$S(z) = Z^{(2)}\{R[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R[n] z^{-n}$$

где  $R[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} S(z)z^{n-1} dz$ ;  $Z^{(2)}$  – знак двухстороннего z преобразования.

Найдем z-форму ЭС отклика ЛС:

$$S_y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_k g_j R_x[m + k - j] z^{-m}$$

Введем новый индекс суммирования  $n = m + k - j$ , тогда тройная сумма распадается на произведение однократных сумм:

$$S_y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]z^k \sum_{j=-\infty}^{\infty} g[j]z^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x[n]z^{-n}$$

Следовательно,

$$S_y(z) = S_x(z)G(z)G\left(\frac{1}{z}\right)$$

Поскольку

$$G(z)G(1/z) = Z^{(2)}\{R_y[n]\}$$

то полученный результат для ЭС  $S_y(z)$  следует непосредственно из выражения свертки КФ  $R_x[n]$  и СКФ  $R_s[n]$ . В частотной области полученный результат имеет вид

$$S_y(\bar{\omega}) = S_x(\bar{\omega}) |\overline{H(i\bar{\omega})}|^2$$

**Пример.** Найти КФ отклика дискретного аналога ИЦ, имеющего ИХ

$$g[n] = \begin{cases} 0 & \text{при } k < 0 \\ d^{-k} & \text{при } k \gg 0, d = e^{-\alpha} < 1 \end{cases}$$

при дискретном белом шуме на входе с дисперсией  $D_x$ .  
Здесь КФ входного воздействия

$$R_x(m-l) = D_x \delta_{ml}$$

где  $\delta_{ml}$  - символ Кронекера. Тогда по свертке находим

$$R_y[m] = D_x \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_g[l] \delta_{ml} = D_x R_g[m]$$

где СКФ  $R_g[m]$  вычислена ранее имеет вид

$$R_g(m) = \frac{d^{|m|}}{1-d^2}$$

### 1.3. Преобразования случайных процессов в нестационарных линейных устройствах

Перейдем теперь к нестационарным линейным системам. Рассмотрим преобразование случайных процессов в нестационарных ЛС на примере двух задач:

- прохождение стационарного СП через ИЦ (переходный режим);
- прохождение стационарного СП через колебательный контур (переходный режим).

*Прохождение стационарного случайного процесса через инерциальную цепь (переходный режим).* Пусть на вход ИЦ воздействует стационарный СП  $x(t)$  с равным нулю средним значением и ковариационной функцией

$$K_x(t_1, t_2) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|}$$

Найдем ковариационную функцию отклика  $K_y(t_1, t_2)$ , его дисперсию  $D_y(t)$  и стационарные значения  $K_y(\tau)$ ,  $\tau = t_2 - t_1$ , при  $t_1 \rightarrow \infty$ ,  $t_2 \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

ИХ ИЦ  $h(t)$  запишем в виде

$$h(t_1, t_2) = \frac{1}{\tau_\phi} e^{-(t_1 - t_2)/\tau_\phi} = b e^{-b(t_1 - t_2)}$$

где  $b = 1/\tau_\phi$ ,  $\tau_\phi = RC$ .

Выразим отклик ЛС

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

где  $x(\tau)$  – входное воздействие. Тогда ковариационная функция отклика

$$K_y(t_1, t_2) = \int_{\tau_0}^{t_1} \int_{\tau_0}^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Пусть  $t_0 = 0$ , тогда КВФ имеет вид

$$K_y(t_1, t_2) = \sigma_x^2 b^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-b(t_1 - \tau_1)} e^{-b(t_2 - \tau_2)} e^{-\alpha|\tau_1 - \tau_2|} d\tau_1 d\tau_2 = \sigma_x^2 b^2 e^{-b(t_1 + t_2)} I_\alpha$$

где

$$I_\alpha = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{b\tau_1} e^{-\alpha|\tau_1 - \tau_2|} e^{b\tau_2} d\tau_1 d\tau_2$$

Пусть  $t_2 > t_1$ , тогда интеграл  $I_\alpha$  можно разбить на три интеграла:

$$I_\alpha = I_1 + I_2 + I_3$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{t_1} e^{(b-\alpha)\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} e^{(b+\alpha)\tau_2} d\tau_2; \\ I_2 &= \int_0^{t_1} e^{(b+\alpha)\tau_1} d\tau_1 \int_{t_1}^{t_2} e^{(b-\alpha)\tau_2} d\tau_2; \\ I_3 &= \int_0^{t_1} e^{(b+\alpha)\tau_1} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_1} e^{(b+\alpha)\tau_2} d\tau_2. \end{aligned}$$

После интегрирования находим

$$I_1 = \frac{1}{2b(b+\alpha)}(e^{2bt_1} - 1) - \frac{1}{b^2 - \alpha^2}[e^{(b-\alpha)t_1} - 1];$$

$$I_2 = \frac{1}{b^2 - \alpha^2}[e^{bt_1 + \alpha t_1 + bt_2} - e^{bt_2 - \alpha t_2} - e^{2bt_1} + e^{(b-\alpha)t_1}];$$

$$I_3 = \frac{b - \alpha}{2b(b^2 - \alpha^2)}e^{2bt_1} - \frac{1}{b^2 - \alpha^2}e^{(b-\alpha)t_1} + \frac{1}{2b(b - \alpha)}.$$

Тогда

$$I_\alpha e^{-b(t_1+t_2)} = e^{-b(t_1+t_2)}(I_1 + I_2 + I_3)$$

Получим формулу, справедливую как при  $t_2 > t_1$ , так и при  $t_2 < t_1$ :

$$K_y(t_1, t_2) = \frac{b\sigma_x^2}{b^2 - \alpha^2} \{be^{-\alpha|t_2-t_1|} - \alpha e^{-b|t_2-t_1|} + (b+\alpha)e^{-\alpha(t_1+t_2)} - b[e^{-(\alpha t_1 + bt_2)} + e^{-(bt_1 + \alpha t_2)}]\}$$

Отметим три свойства:

- 1) симметрию по переменным  $t_1$  и  $t_2$ ;
- 2) равенство нулю КФ в начальный момент:  $K_y(0,0) = 0$ ;
- 3) КФ зависит не только от абсолютного значения разности  $|t_2 - t_1|$ , но и от каждого момента  $t_1$  и  $t_2$  в отдельности.

Таким образом можно сделать вывод – случайный процесс на выходе нестационарный.

При  $t_1 \rightarrow \infty$ ,  $t_2 \rightarrow \infty$ , но при сохранении конечной разности отсчетов, получим стационарное значение КФ

$$K_y(t_1, t_2) = R_y(t_1, t_2) = R_y(\tau) = \frac{b\sigma_x^2}{b^2 - \alpha^2}(be^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-b|\tau|})$$

где  $\tau = t_2 - t_1$  и

$$R_y(0) = \sigma_y^2 = \frac{b\sigma_x^2}{b^2 - \alpha^2}(b - \alpha) = \frac{b\sigma_x^2}{b + \alpha}.$$

Следовательно, можно также сделать вывод, что  $y(t)$  - стационарный случайный процесс.

Найдем нестационарную дисперсию

$$D_y(t) = K_y(t_1, t_2) = \frac{b\sigma_x^2}{b^2 - \alpha^2} [b - \alpha + (b + \alpha)e^{-2bt} - 2be^{-(b+\alpha)t}]$$

В установившемся режиме

$$D_y = \sigma_y^2 = \sigma_x^2 \frac{b}{b + \alpha}.$$

Таким образом, в стационарном режиме приходим к формулам полученным в п.1.2.

*Прохождение стационарного случайного процесса через колебательный контур (переходный режим).* Стохастическое ДУ линейной системы имеет вид

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\delta}{\omega_0} \frac{du}{dt} + u = \frac{\delta}{\omega_0} \frac{de_0(t)}{dt},$$

где  $u=u(t)$  – напряжение на выходе колебательного контура;  $e_0(t)$  – ЭДС источника, включаемого последовательно с эквивалентным сопротивлением  $R_3$  контура,  $\delta$  – затухание,  $\delta = 1/Q$ ;  $Q$  – добротный контур;  $\omega_0$  – резонансная частота контура (см. рис. 1.2).

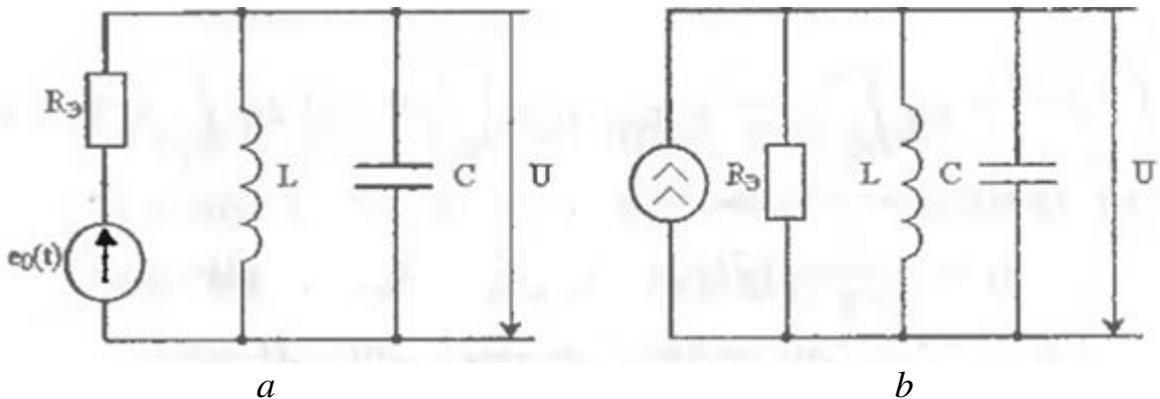


Рисунок 1.2.

Пусть  $e_0(t)$  – СП с нулевым средним значением и КФ  $R_0(t) = (N_0/2)\delta(t)e_0(t)$ . Оговорим начальные условия:

$$\begin{aligned} M[u(0)] &= m_1, & M[u'(0)] &= m_2, & M\{[u(0) - m_1]^2\} &= D_1, \\ M\{[u'(0) - m_2][u(0) - m_1]\} &= D_2 & M\{[u'(0) - m_2]^2\} &= D_3. \end{aligned}$$

Найдем среднее значение  $m_u(t)$ , ковариационную функцию  $K_u(t_1, t_2)$  и дисперсию  $D_u(t)$  в переходном режиме, а также их установившиеся значения.

Введем нормированное время  $\tau = \omega_0 t$ . Запишем ДУ системы после введения нормированного времени

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \delta \frac{du}{d\tau} + u = \delta \frac{de(\tau)}{d\tau}, \quad e(\tau) = e_0(\tau/\omega_0),$$

Причем КФ  $R_e(\tau) = (N_0\omega_0/2)\delta(\tau)$ . Схема включения источника ЭДС  $e(t)$  изображена на рис 1.2а.

Для избежания необходимости дифференцировать БГШ, запишем ДУ второго порядка в формате системы ДУ. Введем переменные состояния

$$\begin{cases} y_1 = \dot{y}_2 + \delta y_2 - \delta e(\tau), \\ y_2 = u. \end{cases}$$

Тогда получим систему ДУ

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 - \delta y_2 + \delta e(\tau). \end{cases}$$

Эта система ДУ в матричной форме имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{G}\mathbf{w},$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\delta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w} = [0; e(\tau)]^T.$$

Для вектора средних значений получим ДУ

$$\frac{d\mathbf{m}_y}{d\tau} = \mathbf{F}\mathbf{m}_y + \mathbf{G}\mathbf{m}_\omega.$$

Согласно условию  $\mathbf{m}_\omega = 0 = (0; 0)^T$ , тогда ДУ упрощается:

$$\frac{d\mathbf{m}_y}{d\tau} = \mathbf{F}\mathbf{m}_y.$$

Решение этого ДУ имеет вид

$$\begin{aligned} m_{y1}(t) &= m_{10}e^{-\gamma t} \left( \cos\omega_0 t + \frac{\gamma}{\omega_0} \sin\omega_0 t \right) - \frac{m_{20}}{\omega_0} e^{-\gamma t} \sin\omega_0 t \\ m_{y2}(t) &= m_{10\omega_0} e^{-\gamma t} \left( 1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} \right) \sin\omega_0 t + m_{20} e^{-\gamma t} \left( \cos\omega_0 t - \frac{\gamma}{\omega_0} \sin\omega_0 t \right) \end{aligned}$$

Значение  $m_{y10}$  можно найти, усредняя левые и правые части каждого ДУ систему. В результате имеем:

$$m_{y10} = m_2 + \delta m_1, \quad m_{y20} = m_1.$$

Окончательно находим среднее значение напряжения на колебательном контуре

$$m_u(\tau) = m_{y2}(\tau) = (m_2 + \delta m_1)[1 + (\gamma/\omega')^2]\omega' e^{-\gamma\tau} \sin\omega'\tau + m_1 e^{-\gamma\tau} [\cos\omega'\tau - (\gamma/\omega') \sin\omega'\tau].$$

Найдем матрицу  $\bar{D}$  дисперсий, решая ДУ

$$\frac{d\bar{D}}{d\tau} = F\bar{D} + \bar{D}F^T + G\psi G^T,$$

где

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_0\omega_0/2. \end{bmatrix}; \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

причем  $D_{12} = D_{21}$ .

В результате преобразований получим систему ДУ:

$$\begin{bmatrix} \dot{D}_{11} & \dot{D}_{12} \\ \dot{D}_{12} & \dot{D}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_0\omega_0/2. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{cases} \dot{D}_{11} = -2D_{12}, \\ \dot{D}_{12} = D_{11} - \delta D_{12} - D_{22}, \\ \dot{D}_{22} = 2D_{12} - 2\delta D_{22} + \delta^2 \omega_0 N_0/2. \end{cases}$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{D}_{11} \\ \dot{D}_{12} \\ \dot{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -\delta & -1 \\ 0 & 2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta^2 \omega_0 N_0/2 \end{bmatrix},$$

или  $\dot{\bar{D}} = A\bar{D} + E$ .

Определим собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$  из решения характеристического уравнения  $\text{del}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0$  или

$$(\delta + \lambda)(\lambda^2 + 2\delta\lambda + 4) = 0.$$

Отсюда находим, что собственные числа  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  имеют вид

$$\lambda_1 = -\delta = -2\gamma; \quad \lambda_{2,3} = -2\gamma \pm i2\omega'; \quad \omega' = \omega_0 = \sqrt{1 - \delta^2/4}, \delta < 2.$$

Определим собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$  из решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -\lambda\tilde{u}_1 - 2\tilde{u}_2 = 0 \\ \tilde{u}_1 - (\delta + \lambda)\tilde{u}_2 - \tilde{u}_3 = 0, \\ 2\tilde{u}_2 - (2\delta + \lambda)\tilde{u}_3 = 0. \end{cases}$$

Собственный вектор можно записать в виде

$$u = [C; -\frac{1}{2}\lambda C; C(1 + \frac{1}{2}\lambda(\delta + \lambda))]^T,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Введем матрицу  $\mathbf{T} = (u_1, u_2, u_3)$ , столбцами которой являются собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 & -\frac{1}{2}\lambda_2 & -\frac{1}{2}\lambda_3 \\ 1 & 1 + i\lambda_2\omega' & 1 - i\lambda_3\omega' \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2\omega'^2 & -\gamma/\omega'^2 & 1/2\omega'^2 \\ \frac{1 - 0,5\lambda_1\lambda_3}{4\omega'^2} & -\lambda_3/4\omega'^2 & -1/4\omega'^2 \\ \frac{1 - 0,5\lambda_1\lambda_2}{4\omega'^2} & -\lambda_2/4\omega'^2 & -1/4\omega'^2 \end{bmatrix}.$$

Введем переменную  $z$  таким образом, что  $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{T}_z$ . Тогда ДУ для  $z$  будет иметь вид

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}E.$$

Учитывая, что  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}.$$

Это уравнение представляет собой совокупность независимых ДУ, которые легко решаются. В результате получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \text{diag}(e^{\lambda_1\tau}, e^{\lambda_2\tau}, e^{\lambda_3\tau})\mathbf{z}_0 + \text{diag}(e^{\lambda_1\tau}, e^{\lambda_2\tau}, e^{\lambda_3\tau})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}' - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}',$$

где  $\mathbf{E}' = \mathbf{T}\text{diag}(\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}$ ;  $\mathbf{z}_0$ - вектор начальных условий. Учтем, что

$$\mathbf{T}\text{diag}(\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} \text{ и } \mathbf{z}_0 = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_0,$$

тогда

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{T}\text{diag}(\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1})\mathbf{T}^{-1}(\tilde{\mathbf{D}}_0 + \mathbf{E}') - \mathbf{E}'.$$

Для условий задачи  $\mathbf{E}' = [0, 0, -\omega_0\delta N_0/4]^T$ .

Чтобы определить ковариационную функцию напряжения  $K_u(t_1, t_2)$ , необходимо знать величины  $D_u(t) = D_{22}(t)$  и  $D_{12}(t)$ .

После преобразования получим

$$\begin{aligned} D_u(\tau) &= \left[ \frac{1}{2\omega'^2} + \frac{1-2\gamma^2-2\omega'^2}{2\omega'^2} \cos 2\omega\tau \right] e^{-2\gamma\tau} D_{11_0} + \left[ -\frac{\gamma}{\omega'^2} + \frac{\gamma}{\omega'^2} \cos 2\omega'\tau + \right. \\ &\left. \frac{1}{\omega'} \sin 2\omega'\tau \right] e^{-2\gamma\tau} D_{12_0} + \left[ \frac{1}{2\omega'^2} - \frac{1-2\omega'^2}{2\omega'^2} \cos 2\omega'\tau - \frac{\gamma}{\omega'} \sin 2\omega'\tau \right] e^{-2\gamma\tau} (D_{22_0} - \\ &\quad \frac{\delta\omega_0}{4} N_0) + \frac{\delta\omega_0}{4} N_0; \\ D_{12}(\tau) &= \left[ \frac{\gamma}{2\omega'^2} + \frac{9\gamma}{2\omega'^2} \cos 2\omega\tau + \frac{1}{2\omega'} \sin 2\omega'\tau \right] e^{-2\gamma\tau} D_{11_0} + \left[ \frac{\gamma^2}{\omega'^2} + \right. \\ &\left. \frac{1}{\omega'^2} \cos 2\omega'\tau \right] D_{12_0} + \left[ \frac{\gamma}{2\omega'^2} - \frac{\gamma}{2\omega'^2} \cos 2\omega'\tau - \frac{1}{2\omega'} \sin 2\omega'\tau \right] e^{-2\gamma\tau} D_{22_0}. \end{aligned}$$

Начальные условия  $D_{11_0}, D_{12_0}, D_{22_0}$  определяется из ДУ системы

$$\begin{aligned} D_{22_0} &= D_u(0) = D_1; \\ D_{12_0} &= D_2 + \delta(D_1 + m_1) - \delta m_1; \\ D_{11_0} &= D_3 + m_2^2 + \delta^2(D_1 + m_1) + \delta(D_2 + m_1 m_2). \end{aligned}$$

КВМ  $K_y(\tau_1, \tau_2)$  можно найти, зная матрицу дисперсий и переходную матрицу системы. Переходная матрица

$$\Phi(\tau_1, \tau_2) = \boldsymbol{\varphi}(\tau_1)\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\tau_2),$$

где  $\Phi(\tau)$  – фундаментальная матрица системы.

Для условий задачи получим

$$\Phi(\tau_1, \tau_2) = e^{-\gamma\tau} \begin{bmatrix} \cos\omega'\bar{\tau} + \frac{\gamma}{\omega'} \cos\omega'\bar{\tau} & -\frac{1}{\omega'} \sin\omega'\bar{\tau} \\ \frac{1}{\omega'} \sin\omega'\bar{\tau} & \cos\omega'\bar{\tau} - \frac{\gamma}{\omega'} \cos\omega'\bar{\tau} \end{bmatrix}, \bar{\tau} = \tau_1 - \tau_2.$$

Таким образом, ковариационная функция напряжения на выходе системы

$$K_u(t_1, t_2) = \begin{cases} D_{22}(\tau_2)e^{-\gamma|\bar{\tau}|} \left( \cos'|\bar{\tau}| - \frac{\gamma}{\omega'} |\bar{\tau}| \right) + \frac{1}{\omega'} D_{12}(\tau_2)e^{-\gamma|\bar{\tau}|} \sin\omega'|\bar{\tau}| \\ D_{22}(\tau_1)e^{-\gamma|\bar{\tau}|} \left( \cos'|\bar{\tau}| - \frac{\gamma}{\omega'} |\bar{\tau}| \right) + \frac{1}{\omega'} D_{12}(\tau_1)e^{-\gamma|\bar{\tau}|} \sin\omega'|\bar{\tau}| \end{cases}$$

в 1 случае при  $\tau_1 > \tau_2$ ; во 2 случае при  $\tau_1 < \tau_2$ .

В стационарном режиме

$$m_u = \lim_{\tau \rightarrow \infty} m_u(\tau) = 0; \quad D_u = \lim_{\tau \rightarrow \infty} D_u(\tau) = N_0 B, \quad B = \frac{\omega_0}{4Q};$$

$$K_u(|\bar{\tau}|) = \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} K_u(\tau_1, \tau_1 + \bar{\tau}) = D_u e^{-\gamma|\bar{\tau}|} \left( \cos'\bar{\tau} - \frac{\gamma}{\omega'} \sin\omega'|\bar{\tau}| \right).$$

С другой стороны,

$$R_y(\tau) = S_0 \xi R_3^2 e^{-\xi|\tau|/\omega_0} \left( \cos\omega'\tau - \frac{\xi}{\omega_k} \sin'|\tau| \right).$$

Заметим, что  $S_0 R_3^2 = N_0/2$ , так как  $S_0$  и  $N_0/2$  – двусторонние ЭС соответственно источников тока (рис. 1.2b) и напряжения, а

$$\xi = \omega_0/(2Q); \quad \omega'\omega_0 = \omega_k; \quad \omega'\tau = \omega_k\tau; \quad \gamma\bar{\tau} = \omega_0\gamma\tau = \tau\omega_0/2Q = \xi\tau.$$

## 2. Воздействие случайных процессов на нелинейные устройства радиотехнических систем

Будем рассматривать воздействие случайных процессов на нелинейные устройства РТС с использованием прямого метода анализа нелинейных систем.

### 2.1 Анализ воздействия случайного процесса на нелинейный элемент прямым методом

Прямой метод анализа нелинейных систем эффективно применяется при гауссовском СП на входе нелинейного элемента (НЭ) с характеристикой  $y = g(x)$ . В это случае КФ отклика НЭ может быть записано в форме ряда

$$R_y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \frac{p_x^n(\tau)}{n!}$$

где

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma x) H e_n(x) e^{-x^2/2} dx$$

$p_x(\tau) = p$  – коэффициент корреляции двумерного гауссовского распределения

$$W(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-p^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2pxy + y^2}{2\sigma^2(1-p^2)}\right], y = x_\tau;$$

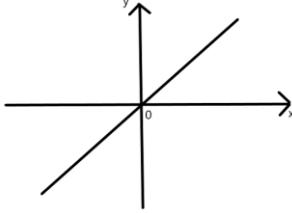
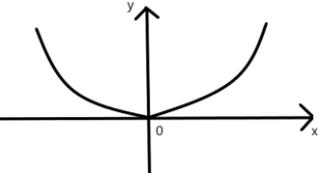
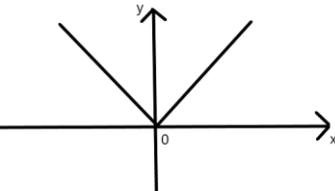
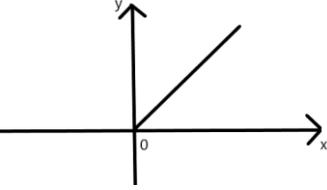
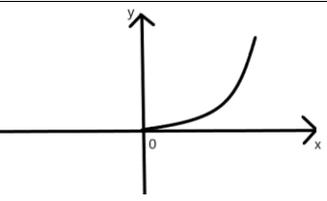
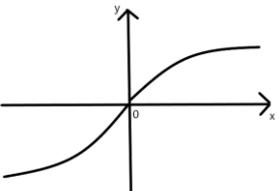
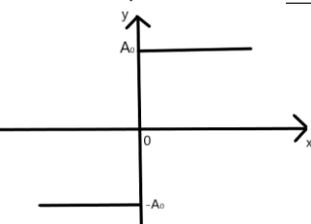
$$H e_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right), n = 0, 1, 2, \dots,$$

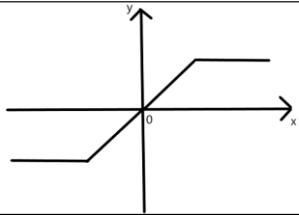
Причем полиномы Эрмита  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  и  $H e_n(x)$  связаны соотношением

$$H e_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right); H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} H e_n(x\sqrt{2}).$$

Коэффициенты  $c_n$  прямого метода даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1.

Характеристика НЭ $y = g(x)$	График функции $g(x)$	Формулы для коэффициентов $c_n$
$y = kx$		$c_1 = k\sigma; c_n = 0, \text{ при } n \neq 1$
$y = kx^2$		$c_0 = k\sigma^2, c_2 = 2k\sigma^2, c_1 = c_3 = c_4 = \dots = 0$
$y = k x $		$c_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\sigma, c_{2r+1} = 0, c_1 = 0, c_{2r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\sigma (2r-3)!! (-1)^r, r = 1, 2, \dots$
$y = \begin{cases} kx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$		$c_0 = \frac{k\sigma}{\sqrt{2\pi}}; c_1 = \frac{k\sigma}{2}; c_{2r+1} = 0, c_{2r} = \frac{k\sigma}{\sqrt{2\pi}} (2r-3)!! (-1)^r, r = 1, 2, \dots$
$y = \begin{cases} kx^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$		$c_0 = \frac{k\sigma}{2}, c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\sigma^2, c_2 = k\sigma^2, c_{2r} = 0, c_{2r+3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k\sigma^2 (2r-1)!! (-1)^r, r = 0, 1, 2, \dots$
$y = \sqrt{\frac{2}{\pi} A_0 \int_0^x e^{-t^2/2} dt}$		$c_{2r+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_0 \frac{(2r-1)!! (-1)^r}{(1+\mu^2)^{r+1/2}}, c_{2r} = 0, r = 0, 1, 2, \dots$
$y = \begin{cases} A_0, & x > 0 \\ -A_0, & x < 0 \end{cases}$		$c_{2r+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_0 (2r-1)!! (-1)^r, c_{2r} = 0, r = 0, 1, 2, \dots$

Характеристика НЭ $y = g(x)$	График функции $g(x)$	Формулы для коэффициентов $c_n$
$y = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, &  x  < 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$		$c_{2r} = 0$ $c_{2r+3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\sigma) e^{\frac{-1}{2e^2}} He_{2r+1} \left( \frac{1}{e} \right), r = 0, 1, 2, \dots$

Пусть квадратичный детектор (КД) имеет характеристику нелинейного элемента (НЭ) вида [1]

$$y = ax^2,$$

*Безынерционное преобразование.* На вход КД воздействует только гауссовский СП (без сигнала). Сначала вычислим ПРВ  $W(y)$  отклика  $y(t)$  НЭ:

$$W(y) = W[x = \varphi_1(y)] \left| \frac{d\varphi_1(y)}{dy} \right| + W[x = \varphi_2(y)] \left| \frac{d\varphi_2(y)}{dy} \right|;$$

$$y = ax^2; \rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{y} = \varphi_{1,2}(y); \varphi_1(y) = \sqrt{\frac{y}{a}};$$

$$\left| \frac{d\varphi_{1,2}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{ay}}$$

Тогда

$$W(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}} \{W[x = \varphi_1(y)] + W[x = \varphi_2(y)]\}$$

Пусть на входе КД гауссовский СП  $x(t)$  с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma_x^2$ . Тогда ПРВ его одномерного сечения

$$W(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_x^2}$$

Поэтому

$$W[x = \varphi_1 = \sqrt{y/a}] = W[x = \varphi_2 = \sqrt{y/a}]$$

С учетом этого свойства получаем ПРВ отклика

$$W(y) = 2 \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y}{2a\sigma_x^2}} \frac{1}{2\sqrt{ay}} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi ay}} e^{\frac{-y}{2a\sigma_x^2}}, \text{ при } y > 0$$

Таким образом, при нулевом среднем значении входного воздействия отклик НЭ  $y(t)$  имеет ненулевое значение  $m_y > 0$  (рис. 2.1 при  $\sigma_x = 1, a = 1$ )

$$m_y = \int_0^{\infty} yW(y)dy = \int_0^{\infty} y \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi ay}} e^{\frac{-y}{2a\sigma_x^2}} dy$$

Это среднее значение необходимо вычислять методом интегрирования по частям. Его можно вычислить проще, если воспользоваться формулой прямого метода:

$$m_y - E(y) = E(ax^2) = aE(x^2) = a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x) dx = aI_1$$

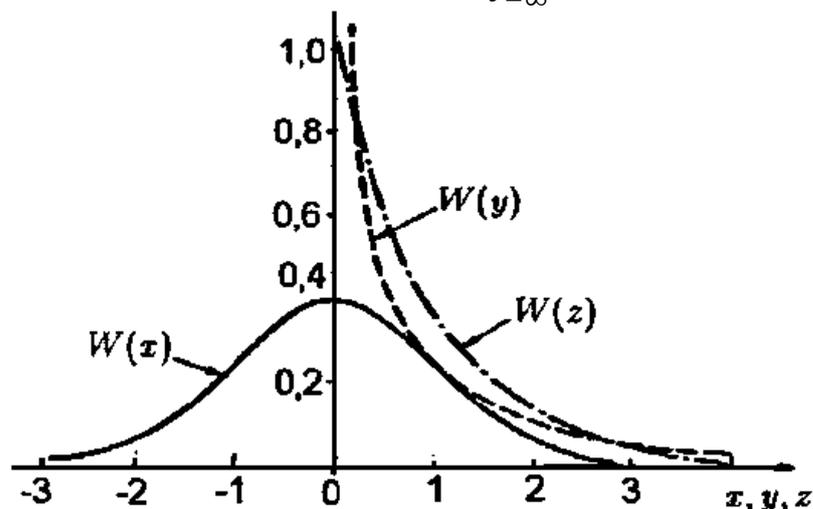


Рисунок 2.1.

где  $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x) dx$  — дисперсия СВ  $x$ , распределенной по закону Гаусса (21.1), а это значит, что

$$I_1 = a\sigma_x^2$$

Поэтому сразу находим

$$m_y = a\sigma_x^2$$

По данной формуле определяется постоянная составляющая СП на выходе НЭ.

Найдем мощность СП  $y(t)$  на выходе НЭ

$$\sigma_y^2 = m_{2y} - m_y^2$$

$$m_{2y} = M(y^2) = a^2 E(x^4) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 W(x) dx$$

При гауссовском распределении справедлива формула для центральных моментов, в данном случае  $n = 4$ , тогда

$$\mu_4 = M[(x - m_x)^4] |_{m_x=0} = M(x^4) I_{n-4} = 3\sigma_x^4$$

Поэтому

$$m_{2y} = a^2 M(x^4) - 3a^2 \sigma_x^4$$

По данным формулам находится полная мощность процесса  $y(t)$  на выходе НЭ и мощность флуктуационной составляющей.

Таким образом, мощность флуктуационной составляющей СП на выходе НЭ имеет значение

$$\sigma_y^2 = 3a^2 \sigma_x^4 - a^2 \sigma_x^4 = 2a^2 \sigma_x^4$$

Заметим, что  $\sigma_y^2 = 2m_y^2$ , т.е. мощность флуктуационной составляющей на выходе НЭ (двухполупериодного квадратирующего устройства) равна удвоенной мощности постоянной составляющей.

Рассмотрим теперь статические характеристики отклика ФНЧ  $x(t)$  или напряжения на выходе КД. Пусть  $x(t)$  - узкополосный СП и по-прежнему гауссовский. Его можно записать в виде

$$x(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Известно, что огибающая  $V(t) = V_t$  имеет распределение Релея, фаза  $\varphi(t)$  распределена равномерно. Отклик НЭ

$$y(t) = ax^2(t) = aV_t^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_t) = aV_t^2 \frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_t)}{2}$$

$$= \frac{aV_t^2}{2} + \frac{aV_t^2}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_t)$$

Напряжение на выходе НЭ состоит из двух слагаемых: низкочастотного и высокочастотного. Поскольку огибающая узкополосного СП является низкочастотным СП, то полагаем справедливым допущение: НЧ процесс  $\frac{aV_t^2}{2}$  проходит ФНЧ без искажений, а второе слагаемое с двойной радиочастотой не проходит ФНЧ. Следовательно, можно полагать, что отклик ФНЧ имеет вид

$$z(t) = aV^2(t)/2$$

Найдем ПРВ  $z(t)$ , зная, что  $z(t) \geq 0$ :

$$z(t) = g(V) = \frac{aV^2}{2}; \rightarrow V = \mp \sqrt{\frac{2z}{a}}$$

Так как  $V \geq 0$ , то полагаем

$$V = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{z - \varphi(z)};$$

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \sqrt{\frac{2 * 1}{a2\sqrt{z}}} = \frac{1}{\sqrt{2az}};$$

$$W(z) = W[V - \varphi(z)] \left| \frac{d\varphi_1(z)}{dz} \right| = W \left[ V - \sqrt{\frac{2z}{a}} \right] \frac{1}{\sqrt{2az}}$$

Используя распределение  $W(\vartheta)$  огибающей - закон Релея получим

$$W(x) = \frac{1}{a_x^2} \sqrt{\frac{2z}{a}} e^{\frac{2z}{2a\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2az}} = \frac{1}{a\sigma_x^2} e^{\frac{z}{a\sigma_x^2}}$$

Таким образом,

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{a\sigma_x^2} e^{\frac{-z}{a\sigma_x^2}} & \text{при } z \geq 0, \\ 0 & \text{при } z < 0 \end{cases}$$

Распределение  $W(x)$  отклика  $z(t)$  КД - показательное

$$W(z) = \lambda e^{-\lambda z}, \quad \lambda = \frac{1}{a\sigma_z^2}$$

Найдем среднее значение отклика

$$\begin{aligned}
 m_z &= M(z) = \int_0^{\infty} zW(z)dz \\
 &= \lambda \int_0^{\infty} ze^{-\lambda z} dz = \lambda \left[ x\left(\frac{-1}{\lambda}\right)e^{-\lambda z} \int_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} dz \right] \\
 &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda z} \int_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} = a\sigma_z^2
 \end{aligned}$$

Таким образом, как и можно было предположить, среднее значение СП  $z(x)$  на выходе ФНЧ равно среднему значению СП  $y(t)$  на его входе.

Очевидно, мощность должна удовлетворять равенству

$$\sigma_z^2 = \sigma_y^2/2$$

Покажем, что это равенство удовлетворяется. Для этого вычислим дисперсию  $\sigma_z^2 = m_{2z} - m_z^2$

$$\begin{aligned}
 m_{2z} &= \int_0^{\infty} z^2 W(z) dz = \lambda \int_0^{\infty} z^2 e^{-\lambda z} dz = \lambda \left| z^2 \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda z} \right|_0^{\infty} + 2 \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} ze^{-\lambda z} dz \\
 &= 2 \int_0^{\infty} ze^{-\lambda z} dz = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} zW(z) dz = \frac{2}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

$$m_{2z} = \frac{2}{\lambda^2} \Big|_{\lambda=1/(a\sigma_z^2)} = 2a^2\sigma_z^4 \text{ - полная мощность СП на выходе КД.}$$

Мощность флуктуационной составляющей

$$\sigma_z^2 - m_{2z} - m_{2z} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = a^2\sigma_z^4 = \sigma_z^4 = \sigma_z^4 = \sigma_y^2/2$$

Следовательно, равенство выполняется.

*Инерционное преобразование.* Найдем КФ отклика НЭ  $R_y(\tau)$  и отклика КД  $R_z(\tau)$ / Согласно прямого метода КФ отклика НЭ имеет вид

$$R_y(t_1, t_2) = M(y_{t_1}, y_{t_2}) = a^2 M(x_{t_1}^2, x_{t_2}^2)$$

Положим  $x_1 = x_2 = x_{t_1}$ ;  $x_3 = x_4 = x_{t_2}$ , тогда

$$\begin{aligned} M(x_{t_1}^2 x_{t_2}^2) &= M(x_{t_1}^2)M(x_{t_2}^2) + M(x_{t_1}x_{t_2})M(x_{t_1}x_{t_2}) + M(x_{t_1}x_{t_2})M(x_{t_1}x_{t_2}) \\ &= M(x_{t_1}^2)E(x_{t_2}^2) + 2R_x^2(t_1 t_2) \end{aligned}$$

Допустим, что СП  $x(t)$  стационарный, тогда

$$R_x(t_1 t_2) = R_x(\tau); M(x_{t_1}^2)M(x_{t_2}^2) = \sigma_x^4$$

Следовательно,

$$R_y(t_1 t_2) = R_y(\tau) = a^2 \sigma_x^4 + 2a^2 R_x^2(\tau)$$

Формула выражает КФ отклика НЭ через КФ входного воздействия.

Покажем, как еще может быть найден полученный ранее результат. По свойству КФ

Найдем энергетический спектр отклика НЭ и отклика КД. По теореме Винера-Хинчина

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [a^2 \sigma_x^4 + 2a^2 R_x^2(\tau)] e^{-i2\pi f \tau} d\tau = I_1 + I_2 \\ I_1 &= a^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f \tau} d\tau \Big|_{2\pi i = x} = a^2 \sigma_x^4 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ifx} dx \end{aligned}$$

По второму определению дельта-функции

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ifx} dx = \sigma(u)$$

Поэтому  $I_1 = a^2 \sigma_x^4 \sigma(f)$ .

Таким образом,  $I_1 = m_y^2 \sigma(f)$  – спектр постоянной составляющей

$$\begin{aligned} I_2 &= 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = 2a^2 I_3 \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) R_x(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \end{aligned}$$

По теореме Винера-Хинчина

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{-i2\pi f \tau} df$$

$$\text{Тогда } In = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi(f-\hat{f})\tau} d\tau}_{S_x(f-\hat{f})}$$

В результате получим  $I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) S_x(f-\hat{f}) df$  (свертка).  
Таким образом, ЭС отклика НЭ имеет вид

$$S_y(f) = 2a^2 \sigma_x^4 \sigma(f) + 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) S_x(f-\hat{f}) df$$

При наличии гауссовского шума на входе ЭС на выходе НЭ состоит из двух слагаемых:

- постоянной составляющей  $S = a^2 \sigma_x^4 \sigma(f)$ ;
- переменной составляющей  $S(f) = 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) S_x(f-\hat{f}) df$ .

Причем переменная составляющая представляет собой свертку ЭС входного шума с самим собой.

Для получения наглядных результатов необходимо задаться видом ЭС входного шума (рис.2.2).

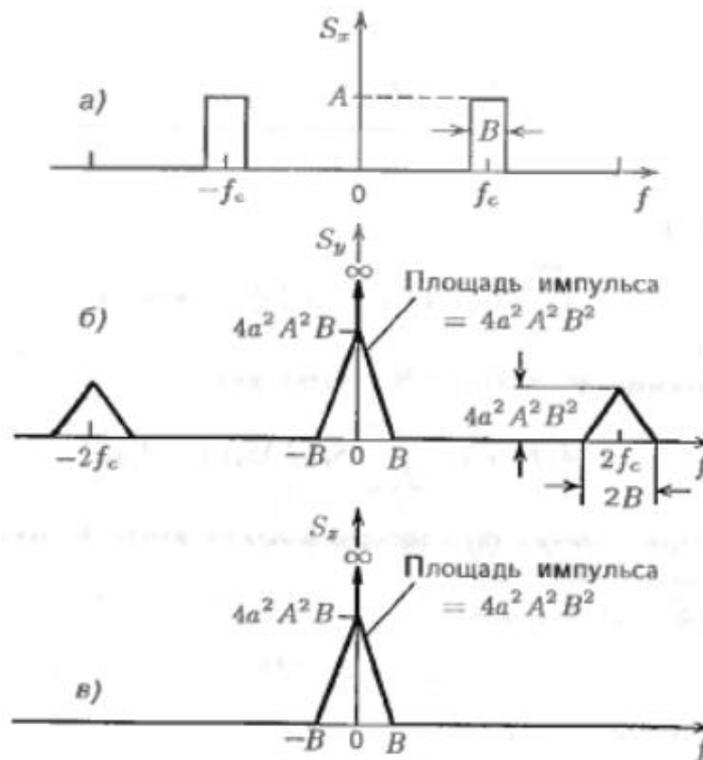


Рисунок 2.2.

Сформулируем этапы получения составляющих ЭС:

1. Вычисление дисперсии входного шума  $x(t)$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = AB + AB = 2AB$$

2. Расчет постоянной составляющей ЭС. Ранее получено  $m_y = a\sigma_x^2$  поэтому

$$m_y^2 = a^2 \sigma_x^4 = a^2 (2AB)^2 = 4a^2 A^2 B^2; S_m = m_y^2 \sigma(f) = 4a^2 A^2 B^2 \sigma(f)$$

3. Формирование свертки двух импульсов. При выполнении свертки прямоугольного импульса длительностью  $T$  и амплитудой  $\Phi$  с самим собой максимум был равен  $\mathcal{E} = A^2 T$ , где  $T = B$  (см рис. 2.2в). За счет свертки двух импульсов в максимуме должно получиться  $2A^2 B$ . а если учесть множитель  $2a^2$  перед сверткой, то получим в максимуме  $4a^2 A^2 B$

4. Два боковых треугольных импульса ЭС в два раза меньше.

Аналитическая запись ЭС:

$$S_x(f) = \begin{cases} A & \text{при } f_e - \frac{B}{2} < |f| < f_e + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{при других } f \end{cases}$$

$$S_y = (f) = 4a^2 A^2 B^2 \sigma(f)$$

$$S_y = \begin{cases} 4a^2 A^2 (B - |f|) & \text{при } 0 < |f| \leq B \\ 2a^2 A^2 (B - ||f| - 2f_e|) & \text{при } 2f_e - B < |f| < 2f_e + B \\ 0 & \text{при других } f \end{cases}$$

$$S_z(f) = S_{y=}(f) + S_{z\approx}(f)$$

$$S_{z=}(f) = S_{y=}(f) = 4a^2 A^2 B^2 \sigma(f)$$

$$S_z = \begin{cases} 4a^2 A^2 (B - |f|) & \text{при } 0 < |f| \leq B \\ 0 & \text{при других } f \end{cases}$$

Пусть на вход квадратичного детектора (КД) подается сумма сигнала и шума

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где  $s(t)$  и  $n(t)$  – независимые СП с равными нулю средними значениями; форма сигнала не оговаривается. Схема исследования та же, что и при  $s(t)=0$ : сначала исследуются характеристики СП  $y(t)$  на выходе НЭ, затем находятся характеристики СП  $z(t)$  на выходе КД.

Отклик НЭ

$$y(t) = ax^2 = a(s_t + n_t)^2 = a(s_t^2 + 2s_t n_t + n_t^2)$$

Случайные процессы независимы, поэтому корреляционный момент  $E(s_t n_t) = 0$ . Следовательно, среднее значение СП  $s(t)$  на выходе НЭ

$$m_y = M(y_t) - a[M(s_t^2) + M(n_t^2)].$$

Если СП  $s(t)$  и  $n(t)$  стационарны, то  $m_y = a(\sigma_s^2 + \sigma_n^2)$ .

Аналогично получаем второй начальный момент СП на выходе НЭ

$$M(y_t^2) = a^2[M(s_t^4) + 6M(s_t^2)M(n_t^2) + M(n_t^4)].$$

В случае стационарных СП

$$M(y_t^2) = a^2[M(s_t^4) + 6\sigma_s^2\sigma_n^2 + M(n_t^4)].$$

Найдем КФ  $R_y(t_1, t_2)$  СП  $y(t)$  на выходе НЭ:

$$R_y(t_1, t_2) = M(y_1 y_2) = a^2 M[(s_1 + n_1)^2 (s_2 + n_2)^2].$$

где  $s_1 = s(t_1)$ ;  $s_2 = s(t_2)$ ;  $n_1 = n(t_1)$ ;  $n_2 = n(t_2)$ .

После перемножения и усреднения получим

$$R_y(t_1, t_2) = a^2 \left[ \begin{array}{l} M(s_1^2 s_2^2) + 4M(s_1 s_2)M(n_1 n_2) + M(s_1^2)E(n_2^2) + \\ + M(s_2^2)M(n_1^2) + M(n_1^2 n_2^2) \end{array} \right].$$

При стационарных СП находим, что отклик  $y(t)$  НЭ является стационарным СП, тогда его КФ

$$R_y(\tau) = a^2 [R_{s^2}(\tau) + 4R_s(\tau)R_n(\tau) + 2\sigma_s^2\sigma_n^2 + R_{n^2}(\tau)],$$

где  $R_s(\tau)$  и  $R_n(\tau)$  – КФ сигнала и КФ шума

$$R_{s^2}(\tau) = E(s_1^2 s_2^2) \text{ и } R_{n^2}(\tau) = M(n_1^2 n_2^2).$$

Таким образом, КФ СП  $y(t)$  на выходе НЭ содержит слагаемые трех типов:

$$R_y(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau) + R_{sn}(\tau)$$

Первое слагаемое  $R_{ss}(\tau) = a^2 R_{s^2}(\tau)$  обусловлено взаимодействием сигнала с самим собой.

Второе слагаемое  $R_{nn}(\tau) = R_{n^2}(\tau)$  обусловлено взаимодействием шума с самим собой.

Третье слагаемое  $R_{sn}(\tau) = 4a^2 R_s(\tau)R_n(\tau) + 2a^2 \sigma_s^2 \sigma_n^2$  обусловлено взаимодействием сигнала и шума.

Полезным сигналом на выходе НЭ является лишь первое слагаемое  $R_{ss}(\tau)$ . Остальные два слагаемых образуют шумовую составляющую на выходе НЭ.

Получаем по теореме Винера-Хинчина три слагаемых ЭС:

$$S_y(f) = S_{ss}(f) + S_{nn}(f) + S_{sn}(f),$$

где

$$\begin{aligned} S_{ss}(f) &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{s^2}(\tau) e^{-i2\tau f} d\tau \\ S_{nn}(f) &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{n^2}(\tau) e^{-i2\tau f} d\tau \\ S_{sn}(f) &= 4a^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau)R_n(\tau) e^{-i2\tau f} d\tau + 2a^2 \sigma_s^2 \sigma_n^2 \delta(f) = \\ &= 4a^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f')S_s(f - f')df' + 2a^2 \sigma_s^2 \sigma_n^2 \delta(f). \end{aligned}$$

Наличие слагаемого  $S_{sn}(f)$  на выходе НЭ указывает на то, что из-за наличия сигнала на выходе НЭ возрастает шумовая составляющая: помимо собственной составляющей шума  $S_{nn}(f)$  возникает дополнительно взаимная составляющая  $S_{sn}(f)$ .

## 2.2. Анализ воздействия случайного процесса на нелинейный элемент методом характеристических функций (метод Райса)

Метод характеристических функций называется иногда еще методом Райса или методом контурных интегралов. Суть метода заключается в следующем. Рассматривается пара преобразований Фурье

$$\begin{aligned} f(iv) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ivx} dx \\ g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(iv)e^{ixv} dv \end{aligned}$$

где  $g(x)$  – характеристика НЭ;  $f(iu)$  – переходная функция НЭ, которая может быть получена как одностороннее преобразование Лапласа от характеристики  $g(x)$

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} g(x)e^{-\omega x} dx$$

Тогда отклик  $y = g(x)$  НЭ находится из обратного преобразования Лапласа

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} f(\omega)e^{\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\omega)e^{\omega x} d\omega$$

Пусть справедливы неравенства

$$|g(x)| \leq M_2 e^{u_2 x} \text{ при } x > 0; |g(x)| \leq M_3 e^{-u_3 x} \text{ при } x < 0,$$

где  $M_2, u_2, M_3, u_3$  – постоянные. В этом случае можно определить однополупериодные характеристики

$$g_+(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0; \end{cases} \quad g_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq 0; \\ g(x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x)$$

Причем односторонние преобразования Лапласа  $f_+(\omega)$   $f_-(\omega)$  ( $\omega = u + i\nu$ ) имеют вид:

$$f_+(\omega) = \int_0^{\infty} g_+(x) e^{-\omega x} dx; \quad f_-(\omega) = \int_{-\infty}^0 g_-(x) e^{-\omega x} dx.$$

Первый интеграл сходится при  $u > u_2$ , второй при  $u < u_3$ . Полная характеристика  $g(x)$  определяется равенством

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} f_+(\omega) e^{\omega x} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} f_-(\omega) e^{\omega x} d\omega$$

где за контур  $C_+$  можно взять линию  $\omega = u' + i\nu$ ,  $u' > u_2$ , а за контур  $C_-$  – линию  $\omega = u'' + i\nu$ ,  $u < u_3$ .

Важный класс нелинейных устройств составляют те, которые образованы на основе НЭ с однополупериодной характеристикой  $\nu$ -й степени

$$\gamma(x) = \begin{cases} ax^\nu & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где  $a$  – масштабный множитель;  $\nu$  – неотрицательное число.

Примерами таких устройств являются однополупериодное устройство  $\nu$ -й степени с характеристикой  $g(x) = \gamma(x)$  (см. рис. 2.3а), двухполупериодное (четное) устройство  $\nu$ -й степени с характеристикой (см. рис.2.3б)

$$g_{\text{ч}}(x) = \gamma(x) + \gamma(-x) = \begin{cases} ax^\nu & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ a(-x)^{-\nu} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

и двухполупериодное (нечетное) устройство  $\nu$ -й степени с характеристикой (см. рис.2.3в)

$$g_{\text{н}}(x) = \gamma(x) + \gamma(-x) = \begin{cases} ax^\nu & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ -a(-x)^{-\nu} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

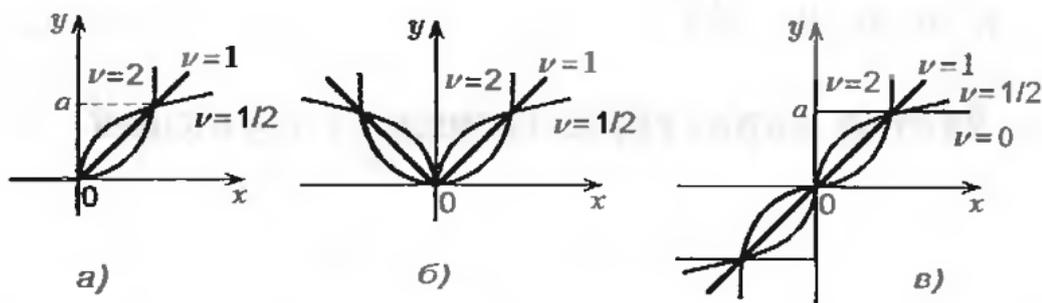


Рисунок 2.3

Одно- и двухполупериодные четные устройства  $\nu$ -й степени часто используются в качестве детекторов; двухполупериодные нечетные устройства  $\nu$ -й степени описывают некоторые нелинейные усилители.

**Пример.** Найти переходную функцию  $f(\omega)$  однополупериодного устройства  $\nu$ -й степени.

Введем преобразование Лапласа

$$\varphi(\omega) = a \int_0^{\infty} x^\nu e^{-\omega x} dx,$$

Причем интеграл сходится при  $\operatorname{Re} \omega > 0$ . Следовательно, контур для обратного преобразования должен лежать вправо от оси  $\omega = i\nu$ .

Полагая  $t = \omega x$ , получим

$$\varphi(\omega) = \frac{a}{\omega^{\nu+1}} \int_0^{\infty} t^{\nu} e^{-t} dt = \frac{a}{\omega^{\nu+1}} \Gamma(\nu + 1),$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} z^{z-1} dt$  – гамма-функция, при  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Таким образом, переходная функция однополупериодного устройства  $\nu$ -й степени  $f(\omega) = \varphi(\omega)$ . Поскольку справедливо соотношение

$$a \int_{-\infty}^0 (-x)^{\nu} e^{-\omega x} dx = a \int_0^{\infty} t^{\nu} e^{-(-\omega)t} dt = \varphi(-\omega),$$

то переходная функция двухполупериодных устройств имеет вид

$$\begin{aligned} f_{\psi+}(\omega) &= \varphi(\omega) & f_{\psi-}(\omega) &= \varphi(-\omega); \\ f_{\eta+}(\omega) &= \varphi(\omega) & f_{\eta-}(\omega) &= -\varphi(-\omega). \end{aligned}$$

Интеграл для  $\varphi(-\omega)$  сходится при  $\operatorname{Re} \omega < 0$ . Тогда соответствующий контур для обратного преобразования  $C_-$  должен лежать слева от оси  $\omega = i\nu$ .

В дальнейшем в качестве контура  $C_+$  выбирается линия  $\omega = \varepsilon + i\nu$ , а в качестве контура  $C_-$  – линия  $\omega = -\varepsilon + i\nu$ , где  $\varepsilon > 0$ ,  $-\infty < \nu < \infty$ .

Из определения КФ  $R_y(t_1 t_2) = M(y_1 y_2) = M[g(x_1)g(x_2)]$  отклика  $y(t)$  НЭ получим

$$\begin{aligned} R_y(t_1 t_2) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C f(\omega_1) d\omega_1 \int_C f(\omega_2) d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x_1 x_2) e^{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Учтем определение характеристической функции  $\theta_x(\omega_1 \omega_2)$  ( $\omega_1 = i\nu_1$ ,  $\omega_2 = i\nu_2$ ). В результате получим

$$R_y(t_1 t_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C f(\omega_1) d\omega_1 \int_C f(\omega_2) \theta_x(\omega_1 \omega_2) d\omega_2.$$

Это выражение является основной формулой при анализе случайных воздействий на нелинейные системы методом характеристических функций.

Во многих задачах воздействие  $x(t)$  на входе системы имеет вид суммы  $x(t) = s(t) + n(t)$  при выполнении допущения о независимости слагаемых. В этом случае совместная характеристическая функция воздействия  $\theta_x(\omega_1 \omega_2)$

равна произведению характеристических функций сигнала  $\theta_s(\omega_1\omega_2)$  и шума  $\theta_n(\omega_1\omega_2)$ . В результате получим

$$R_y(t_1t_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C f(\omega_1)d\omega_1 \int_C f(\omega_2)\theta_s(\omega_1\omega_2)\theta_n(\omega_1\omega_2)d\omega_2$$

Определить КФ  $R_y(t_1t_2)$  отклика НЭ и его ЭС  $S_y(\omega)$ , если на входе НЭ имеется аддитивная смесь  $x(t)$  сигнала  $s(t)$  и шума  $n(t)$ , причем

$$s(t) = P(t) \cos \theta(t) = P(t) \cos (\omega_c t + \varphi),$$

где  $P(t)$  – низкокачественный процесс, у которого эффективная ширина  $\Delta f_{\text{Э}}$  энергетического спектра значительно меньше частоты  $f_c = \omega_c/(2\pi)$ , фаза  $\varphi$  распределена равномерно в интервале  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и не зависит от модулирующего сигнала  $P(t)$  и шума. Шум  $n(t)$  на входе является гауссовским случайным процессом с нулевым средним значением ( $M(n_t) = 0$ ).

Характеристическая функция  $\theta_n(\omega_1\omega_2)$  гауссовского шума имеет вид

$$\theta_n(\omega_1\omega_2) = \exp \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_1^2 \omega_1^2 + 2R_n(t_1t_2)\omega_1\omega_2 + \sigma_2^2 \omega_2^2] \right\}.$$

Воспользуемся разложением экспоненты

$$\exp[R_n(t_1t_2)\omega_1\omega_2] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n^k(t_1t_2)\omega_1^k\omega_2^k}{k!}.$$

В результате КФ отклика

$$R_y(t_1t_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n^k(t_1t_2)}{k! (2\pi i)^2} \int_C f(\omega_1)\omega_1^k \exp\left(\frac{\sigma_1^2 \omega_1^2}{2}\right) d\omega_1 \int_C f(\omega_2)\omega_2^k \exp\left(\frac{\sigma_2^2 \omega_2^2}{2}\right) \theta_s(\omega_1\omega_2) d\omega_2.$$

По определению, характеристическая функция сигнала

$$\theta_s(\omega_1\omega_2) = M[\exp(\omega_1 P_1 \cos \theta_1 + \omega_2 P_2 \cos \theta_2)].$$

Разложим экспоненту в ряд

$$e^{x \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m I_m(z) \cos m\theta,$$

где  $\epsilon_m$  – множитель Неймана;  $\epsilon_0 = 1, \epsilon_m 2 (m = 1, 2, \dots)$ ;  $I_m(z)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода. В результате найдем

$$\theta_s(\omega_1 \omega_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_m \epsilon_n M[I_m(\omega_2 P_2) I_n(\omega_n P_n)] \cdot M(\cos m \theta_1 \cos n \theta_2).$$

Учтем соотношение

$$M(\cos m \theta_1 \cos n \theta_2) = M[(\cos m (\omega_c t_1 + \varphi) \cos(n \omega_c t_2 + \varphi))] \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 1/\epsilon_m \cos m \omega_c \tau & \text{при } n = m, \end{cases}$$

где  $\tau = t_1 - t_2$ .

Тогда характеристическая функция АМ сигнала

$$\theta_s(\omega_1 \omega_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m Y[I_m(\omega_1 P_1) I_m(\omega_2 P_2)] \cos m \omega_c \tau.$$

Найдем КФ отклика НЭ. Определим функцию

$$h_{mk}(t_r) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\omega_1) d\omega_1 \int_C f(\omega) \omega^k I_m(\omega P_r) \exp\left(\frac{\sigma_r^2 \omega^2}{2}\right) d\omega,$$

где  $P_r = P(t_r), \sigma_r = \sigma(n(t_r))$ .

Введем КФ

$$R_{mk}(t_1 t_2) = E[h_{mk}(t_1) h_{mk}(t_2)],$$

где усреднение производится по модулирующему сигналу.

КФ отклика принимает вид

$$R_y(t_1 t_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{k!} R_{mk}(t_1 t_2) R_n^k(t_1 t_2) \cos m \omega_c \tau.$$

Пусть шум и модулирующий сигнал стационарны, тогда

$$R_y(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{k!} R_{mk}(\tau) R_n^k(\tau) \cos m \omega_c \tau.$$

Если входной сигнал представляет собой немодулированное колебание  $s(t) = P \cos(\omega_c t + \varphi)$ , где  $P = \text{const}$ , то

$$R_y(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m h_{mk}^2}{k!} R_n^k(\tau) \cos m \omega_c \tau,$$

так как в этом случае коэффициенты  $h_{mk}(t_1)$  и  $h_{mk}(t_2)$  постоянны и равны. Запишем предыдущее соотношение в виде

$$\begin{aligned} R_y(\tau) = & h_{00}^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} h_{m0}^2 \cos m \omega_c \tau + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_{0k}^2}{k!} R_n^k(\tau) \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{mk}^2}{k!} R_n^k(\tau) \cos m \omega_c \tau. \end{aligned}$$

Энергетический спектр отклика найдем преобразованием Фурье  $S_y(f) = \xi[R_y(\tau)]$ :

$$\begin{aligned} S_y(f) = & h_{00}^2 \delta(f) + \sum_{m=1}^{\infty} h_{m0}^2 [\delta(f + mf_c) + \delta(f - mf_c)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{0k}^2}{k!} {}_k S_n(f) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{mk}^2}{k!} [{}_k S_n(f)(f + mf_c) + {}_k S_n(f)(f - mf_c)]. \end{aligned}$$

где

$${}_k S_n(f) = \xi[R_n^k(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_n^k(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau.$$

Первое слагаемое соответствует постоянной составляющей на выходе НЭ, следующая группа слагаемых представляет собой совокупность импульсов, расположенных на частотах  $\pm mf_c$ , и соответствует периодическим составляющим отклика (что обусловлено взаимодействием сигнала с самим собой), остальные слагаемые определяют выходной шум.

Заметим, что приведенные соотношения справедливы для произвольных нелинейностей  $g(x)$  и переходной функции  $f(\omega)$ , которые входят в выражения для коэффициентов  $h_{mk}(t)$ .

В частности, когда на вход НЭ воздействует лишь гауссовский шум с нулевым средним значением, формула КФ принимает вид

$$R_y(t_1 t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{mk}(t_1 t_2)}{k!} d_{k1} d_{k2},$$

где

$$d_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\omega_j) \omega_j^k \exp\left(\frac{\sigma_j^2 \omega_j^2}{2}\right) d\omega_j, \quad j = 1, 2.$$

При стационарном случайном процессе на входе, когда  $R_n(t_1 t_2) = R_n(\tau)$  и  $d_{k1} = d_{k2} = d_k$ , следует формула прямого метода

$$R_y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \frac{p^n}{n!},$$

где

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma x) e^{-\frac{x^2}{2}} H e_n(x) dx,$$

где  $H e_n(x)$  – полином Эрмита.

Подставляя в  $c_n$  значение нелинейности  $g(x)$ , которое выражается через переходную функцию  $f(iv)$  НЭ

$$g(\sigma x) = \frac{1}{2\pi} \int_C f(iv) e^{i\sigma xv} dv,$$

получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_C f(iv) I_n(v) dv,$$

где

$$I_n(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H e_n(u) e^{i\sigma xv} du = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{du^n} \left( e^{-\frac{u^2}{2}} \right) e^{i\sigma xv} du.$$

Используя теорему о дифференцировании в теории преобразования Фурье, найдем

$$I_n = (-1)^n (-iv)^n I_0(v),$$

где

$$I_0(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} e^{i\sigma xv} du = e^{-u^2\sigma^2/2}.$$

При вычислении интеграла  $I_0(v)$  используется формула преобразования Фурье. В результате выражение для коэффициента  $c_n$ , не зависящее от полиномов Эрмита, имеет вид

$$c_n = \frac{(i\sigma)^n}{2\pi} \int_C v^n f(iv) e^{-\frac{v^2\sigma^2}{2}} dv.$$

### 3. Выбросы случайных процессов

Если случайный процесс стационарен и эргодичен, то его характеристики могут быть получены при анализе временных зависимостей  $x(t)$ . Именно таким образом работают аналоговые электрические схемы для измерений случайных сигналов.

На рис. 3.1 показан простейший способ получения среднего значения случайного сигнала  $x(t)$  при помощи интегральной  $RC$ -цепочки.

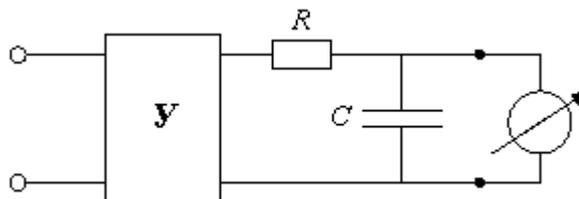


Рисунок 3.1.

Пусть характерное время  $RC$ -фильтра  $T_0 = RC$ . Схема, показанная на рис.3.1 состоит из линейного усилителя ( $Y$ ) коэффициентом усиления  $k$  и  $RC$ -интегрирующей цепи. Сигнал  $x(t)$ , поступающий на вход схемы, усиливается и, при интегрировании  $RC$ -фильтром даёт следующую временную зависимость:

$$x(t) = \frac{k}{T_0} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T_0}} x(t - \tau) d\tau$$

При большом  $T_0 = RC$  для этой цепи  $y(t) \approx k\bar{x}(t)$ .

Точность измерения среднего определяется двумя факторами:

- 1) нелинейными искажениями усилителя;
- 2) характерным временем интегрирования  $T_0 = RC$ .

Статистическое распределение случайных сигналов и вероятность их нахождения в определённом интервале для случайного стационарного процесса также может определяться во временной области в том случае, если процесс эргодический.

Пусть  $P\{x_1 < x < x_2\}$  - вероятность нахождения случайного сигнала  $x(t)$  в интервале  $(x_1, x_2)$ . Такую вероятность можно определить по относительному времени пребывания реализации  $x(t)$  в указанном интервале:

$$P\{x_1 < x < x_2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_i \Delta t_i}{T}$$

где  $\Delta t_i$  - время пребывания сигнала в указанном интервале,  $T$  - общая длительность реализации случайного процесса. Расчет вероятности  $P\{x_1 < x < x_2\}$  легко может быть реализован в электронной схеме. Например, схема сравнения, срабатывающая при пересечении сигналом уровней  $(x_1, x_2)$ . Управляет работой триггера, генерирующего прямоугольные сигналы единичной амплитуды, как это показано на рис. 3.2. Остается лишь при помощи генератора импульсов эталонной частоты рассчитать суммарную длительность прямоугольных импульсов на выходе триггера.

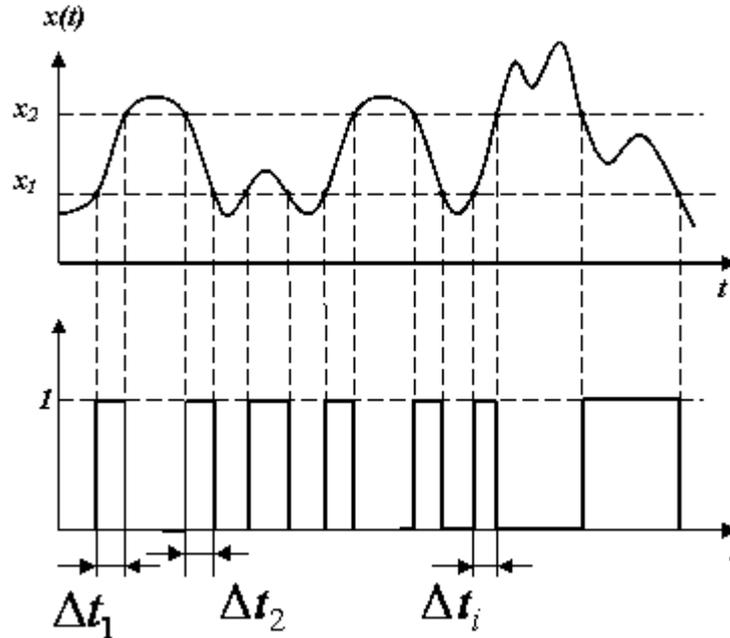


Рисунок 3.2.

Функция  $\mu(t)$  является некоторой функцией, причем детерминированной, от случайной функции  $x(t)$ , поэтому  $\mu(t)$  представляет собой случайный стационарный процесс, для которого можно записать

$$\bar{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mu(x, t) dt = P\{x_1 < x < x_2\}$$

Функции  $\mu(x)$  принимает значения 0 и 1, а поведение плотности вероятности  $f(x)$  полностью соответствует временному поведению  $\mu(t)$ .

Такой же алгоритм обработки случайного процесса может быть применен к исследованию выбросов случайных процессов.

*Измерение выбросов случайных процессов.* Рассмотрим выбросы случайного процесса  $x(t)$ , при этом **выбросами** будем называть превышение  $x(t)$  некоторого уровня  $C$ . Алгоритм обработки такого процесса и временные зависимости соответствующих сигналов показаны на рис.3.3.

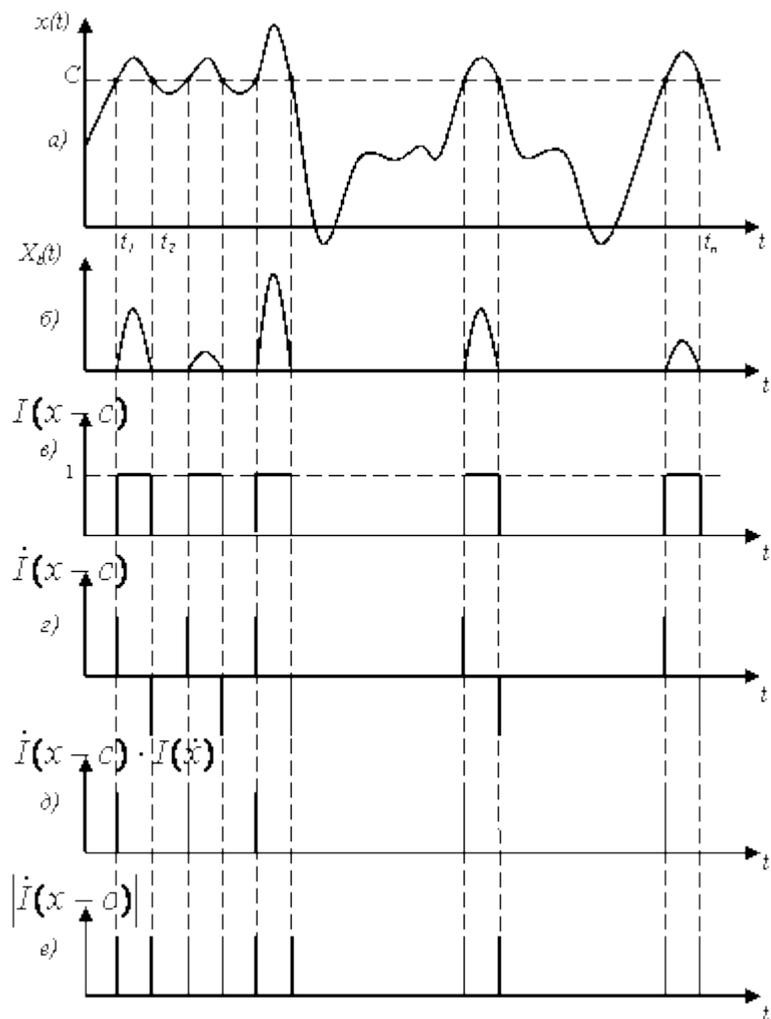


Рисунок 3.3.

Математически выбросы определяются выражением:

$$x_t(t) = [x(t) - C]I(x - C)$$

где

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0,5, & x = 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

при этом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}I(x) &= \delta(x), \\ \frac{d}{dt}I(x) &= \delta(x)\dot{x}. \end{aligned}$$

Переход от  $x(t)$  к  $x_t(t)$  и последовательность вычисления характеристик выбросов показаны на рис. 3.3.

При аналоговой обработке такие процедуры возможно осуществить двумя нелинейными устройствами, характеристики которых показаны на рис.3.4. Устройства представляют собой идеальный детектор (а) и идеальный ограничитель (б).

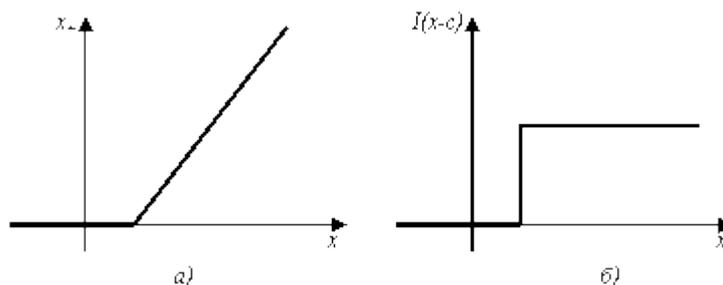


Рисунок 3.4

Как функция времени процесс  $I(x - C)$  представляет собой случайную последовательность прямоугольных импульсов.

Прямоугольные импульсы синхронны с выбросами и их суммарная длительность соответствует длительности выбросов.

На практике представляет интерес длительность выбросов случайного процесса и число выбросов случайного процесса, а также иногда суммарная энергия выбросов случайного процесса. Запишем эти характеристики выбросов и дадим им определения.

Под **длительностью выбросов** понимается величина  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Суммарная длительность импульсов совпадает со временем пребывания процесса в области  $x > C$ , а значение длительности выброса определяется интегралом

$$\tau = \int_0^T I(x - C) dt$$

**Число выбросов** может быть рассчитано при дифференцировании функции  $I(x)$ .

Введя фактор  $I(\dot{x})$ , отсекающий отрицательные короткие выбросы (дельта функции), рассчитаем полное число выбросов за время  $T$ :

$$n = \int_0^T I(x - C) I(\dot{x}) dt = \int_0^T \delta(x - C) \dot{x} I(x) dt$$

В практических задачах, часто необходимо рассчитать суммарную энергию выбросов:

$$Q = \int_0^T [x_t(t)]^2 dt = \int_0^T (x - C)^2 I^2(x - C) dt$$

Если необходимо рассчитать **число пересечений порога**  $x = C$ , то записывается функция

$$|\dot{I}(x - C)| = |\delta(x - C)\dot{x}| = \delta(x - C)|\dot{x}|$$

которая представляет собой временную последовательность положительных дельта - импульсов, положение каждого из которых совпадает с моментом пересечения. Таким образом, **полное число пересечений**  $N$  уровня  $C$  с положительной и отрицательной стороны запишется в виде:

$$N = \int_0^T \delta(x - C)|\dot{x}| dt$$

В случае переменного порога  $C(t)$ :

$$N = \int_0^T \delta(x - C)|\dot{x} - \dot{C}| dt$$

Аналогичным образом может быть рассчитано число максимумов  $\dot{x}(t) = 0$  и другие характеристики выбросов, в частности можно рассчитать статистические характеристики пересечений случайного процесса  $x(t)$  со случайными кривыми  $C(t)$ , т.е. анализировать уже два параллельных случайных процесса.

## 4. Шумы радиотехнических устройств

Радиотехнические устройства демонстрируют большое разнообразие шумов. Некоторые виды шумов радиотехнических устройств имеют фундаментальное происхождение и присущи всем радиотехническим системам, другие возникают лишь при определенных условиях и/или характерны лишь для некоторых электронных схем и элементов радиочепей.

Шум может быть обусловлено как самим механизмом протекания электрического тока, так и флуктуациями других неэлектрических величин, которые преобразуются во флуктуации тока или напряжения. Причины возникновения ряда шумов до конца не выяснены. Ниже рассматриваются некоторые типичные примеры электрических флуктуаций – тепловой шум, дробовой шум и избыточный шум.

### 4.1. Тепловой шум

Тепловой шум еще носи название шума Найквиста или шума Джонсона. Джонсон первый экспериментально обнаружил эти флуктуации, а Найквист получил выражение для мощности шума. Тепловой шум представляет собой флуктуации, имеющие место в любой термодинамически равновесной системе, а формула Найквиста является частным случаем флуктуационно-диссипационной теоремы. Система с постоянным числом частиц находится в термодинамическом равновесии со своим окружением (термостатом), если средний поток энергии между ними равен нулю. Равновесие подразумевает взаимодействие системы и термостата посредством некоторого физического механизма, который в среднем уравнивает противоположно направленные потоки энергии: от системы к термостату и обратный потоки. Это взаимодействие происходит на микроскопическом уровне и носит случайный характер. Флуктуации возникают уже в силу того, что термостат состоит из огромного числа частиц и поэтому имеет исключительно сложную траекторию движения в фазовом пространстве. Когда на систему действует внешняя сила, равновесие нарушается, и возникает средний поток энергии от системы к термостату - диссипация энергии, сообщаемой системе за счет действия силы. Если внешняя сила достаточно мала, отклонение состояния системы от равновесного также невелико, и, в первом приближении, механизм, контролирующей потоки энергии между системой и термостатом, остается прежним. Таким образом, один и тот же механизм взаимодействия системы и термостата отвечает и за флуктуации, и за рассеяние энергии. Отсюда возникает связь между величиной равновесных флуктуаций в системе и макроскопическими параметрами, отвечающими за диссипацию энергии при действии внешней силы (диссипативными параметрами, коэффициентами трения). Флуктуационно-диссипационная теорема дает количественное выражение этой связи.

В электрических системах диссипативным параметром является активное сопротивление. Для того, чтобы учесть флуктуационное взаимодействие системы и термостата, с сопротивлением  $R$  связывают так называемый случайный (шумовой) источник – генератор случайной ЭДС  $e(t)$ , включенный последовательно с сопротивлением, или генератор шумового тока  $i(t)$ , включенный параллельно сопротивлению (рис.4.1.).

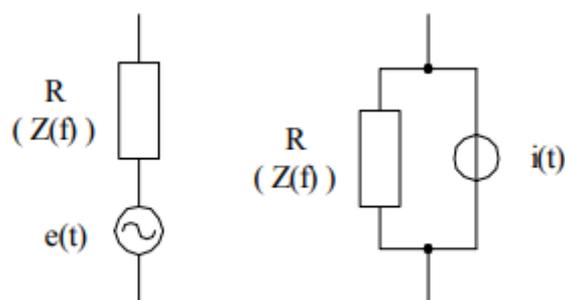


Рисунок 4.1.

Оба представления эквивалентны, и шумовые источники  $e(t)$  и  $i(t)$  подчиняются соотношению  $e(t) = Ri(t)$ . На микроскопическом уровне причиной флуктуаций напряжения и тока в проводнике является хаотическое движение носителей заряда. Так, в металле оно обусловлено случайным рассеянием электронов на колебаниях кристаллической решетки, которая играет роль термостата для электронной системы. Время корреляции флуктуаций определяется характерным временем свободного пробега носителей, поскольку в ходе столкновений теряется информация о первоначальной скорости носителя. В большинстве практических случаев время корреляции, обусловленное конечным временем пробега носителей (например, порядка  $10^{-14}$  с. в чистых металлах при комнатной температуре), пренебрежимо мало по сравнению с инерционностью электрической цепи, в которую включено сопротивление.

Таким образом, флуктуации можно толковать как результат очень большого числа независимых случайных событий. Каждое событие состоит из начальной стадии, когда происходит отклонение от состояния равновесия и из возврата (релаксации) к этому состоянию. Начальная стадия – это пробег электрона между столкновениями, которое порождает неравновесное распределение заряда в проводнике, а релаксация – это последующее изменение заряда, восстанавливающее состояние равновесия. Отсюда – флуктуации объемной плотности электрического заряда. Случайное событие (отклонение релаксации) приводит к возникновению импульса тока или напряжения, а суперпозиция

(наложение) всех таких импульсов и представляет собой флуктуации (тепловой шум).

Средняя тепловая скорость электронов большая, а следовательно, длительность импульса тока весьма мала.

Следовательно, можно сделать вывод: *тепловой шум достаточно точно моделируется белым шумом.*

Для теплового шума ЭС  $S_{uu}(f)$  шума резистора определяется формулой Найквиста:

$$S_0 = 2kTR B^2 / \Gamma_{\zeta}$$

где  $R$  - сопротивление резистора [Ом];  $T$  - температура резистора [К];  $k=1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана.

Практически при расчетах используют односторонний ЭС  $N_0 = 2S_0$ , тогда

$$N_0 = 4kTR$$

При любом сопротивлении  $R$  при температуре  $T$  существует шумовое напряжение со средним квадратом в полосе частот  $df$

$$\overline{V_n^2} = 4kTRdf$$

Для всех частот радиодиапазона аппроксимация спектра теплового шума формулой Найквиста оправдана.

#### 4.2. Дробовый шум

Природу дробового шума (ДШ) можно пояснить на примере электровакуумного диода, в котором электроны эмитируются из катода случайным образом и затем перемещаются к аноду под действием электрического поля. Ток, создаваемый потоком электронов, флуктуирует около среднего уровня, причем эти флуктуации (т.е. ДШ) возникает из-за дискретного характера эмиссии. Дробовой шум – неотъемлемое свойство электронных приборов (ламп, транзисторов и т.д.).

Физическая природа теплового и дробового шумов различна, однако структура шумовых сигналов в том и другом случае похожа. Оба сигнала можно представить в виде последовательности случайных импульсов, похожих по форме и случайно распределенных во времени.

В том и другом случае – это поток импульсов вида

$$x(t) = \sum_k a_k f(t - t_k)$$

где  $a_k$  – амплитуда  $k$ -го импульса;  $t_k$  – момент времени возникновения импульса;  $f(t)$  – форма отдельного импульса, по предположению одинаковая для всех видов импульсов потока.

### 4.3. Избыточные шумы

Тепловой и дробовой шумы, рассматривавшиеся выше, относят к фундаментальным типам флуктуаций. Механизм их возникновения хорошо изучен, и уровень флуктуаций предсказуем. В большинстве систем они определяют минимальную величину флуктуаций, которая может быть получена. Однако реальные радиотехнические системы часто генерируют шум, мощность которого превышает величину, ожидаемую для теплового и дробового шума. Эти добавочные флуктуации и называют **избыточными**.

Из-за разнообразия механизмов возникновения, статистических свойств и условий проявления избыточных флуктуаций нет какой-то единой классификации этих шумов. Тем не менее, выделяют определенные типы шума, например:

- генерационно-рекомбинационный шум,
- шум токораспределения,
- взрывной шум,
- фликкерный шум и другие.

При рассмотрении избыточных шумов широко используется понятие о флуктуациях параметров системы. Например, в силу некоторых причин могут случайным образом изменяться емкость конденсатора или сопротивление резистора, высота потенциального барьера  $p$ - $n$  перехода полупроводникового прибора. Если к электрической цепи, содержащей такие элементы, приложить напряжение, в цепи возникнут избыточные флуктуации тока.

Наиболее простой является модель равновесных флуктуаций сопротивления. Термин равновесные означает, что флуктуации сопротивления существуют вне зависимости от того, протекает ли по сопротивлению ток или нет, и что свойства этих флуктуаций не зависят от тока.

Если через такое флуктуирующее сопротивление пропустить постоянный электрический ток  $I_0$ , на сопротивлении возникнут флуктуации напряжения

$$u(t) = I_0 r(t)$$

где  $r(t)$  – флуктуирующая составляющая полного сопротивления. Отсюда следует, что спектральная плотность избыточного шума определяется спектральной плотностью флуктуаций сопротивления:

$$S(f) = I_0^2 S_R(f)$$

Мощность избыточного шума, вызванного флуктуациями сопротивления, пропорциональна квадрату протекающего тока, и это отличает его от дробового шума, имеющего линейную зависимость мощности от тока. Физическими причинами флуктуаций сопротивления могут быть, например, флуктуации числа подвижных носителей в полупроводниковом материале из-за случайного характера процессов генерации/рекомбинации; флуктуации подвижности носителей из-за случайного рождения/уничтожения дефектов кристаллической решетки проводника, на которых происходит рассеяние носителей; случайный захват/освобождение носителей заряда ловушками, расположенными в обедненном слое  $p-n$  перехода, и другие. Избыточный шум, вызванный флуктуациями параметров, в нелинейных элементах часто имеет другие зависимости мощности флуктуаций напряжения от тока.

В качестве примера рассмотрим полупроводниковый диод, вольтамперная характеристика которого описывается выражением:

$$I = I_0(\exp(\alpha U) - 1)$$

где  $I_0$  - обратный ток насыщения диода,  $U$  - напряжение на  $p-n$  переходе,  $\alpha$  - некоторая постоянная.

Если чисто формально предположить, что параметры  $p-n$  перехода  $I_0$  и  $\alpha$  флуктуируют, и что ток диода  $I$  поддерживается постоянным, соответствующее шумовое напряжение  $\delta U$  при условии  $I \gg I_0$  имеет вид:

$$\delta U = - \frac{[\ln(\frac{I}{I_0}) \frac{\delta \alpha}{\alpha} + \frac{\delta I_0}{I_0}]}{\alpha}$$

Шум, создаваемый флуктуациями  $\delta I_0$  и  $\delta \alpha$ , имеет более слабую зависимость от тока, чем шум, создаваемый флуктуациями сопротивления. Этот пример демонстрирует, что зависимость избыточного шума от тока может быть достаточно сложной. Детальное обсуждение избыточного шума в полупроводниковых диодах выходит за рамки данного описания. Спектральные свойства избыточных шумов могут быть различными. Так, процессы генерации/рекомбинации, характеризуемые некоторой постоянной времени  $\tau$ , дают частотную зависимость спектральной плотности, аналогичную для теплового шума  $RC$ -цепочки. Спектр такого вида называется спектром Лоренца и характеризует шум в релаксационной системе, имеющей одну постоянную времени.

Особое место занимает фликкерный шум или шум  $1/f$ . Частотная зависимость спектра этого шума имеет вид:

$$S(f) \propto 1/f^\gamma$$

с показателем спектра  $\gamma$ , близким к единице. Такой вид спектральной плотности означает, что шум  $1/f$  проявляется, главным образом на низких частотах. Необычность спектра заключается в том, что его интеграл по частоте расходится, и, следовательно, мощность флуктуаций должна быть бесконечной. Реальным фактором, ограничивающим рост мощности шума на низких частотах, является конечная длительность измерения шума. В полупроводниковых усилителях зависимость типа  $1/f$  прослежена вплоть до частот порядка  $10^{-6}$  Гц.

Шум  $1/f$  при тех или иных условиях наблюдается практически во всех электронных приборах и компонентах. Флуктуации этого типа также присутствуют в биологических, геофизических, астрофизических и других системах. Столь универсальный характер этого явления в настоящее время не объяснен.

В радиотехнических системах шум  $1/f$  обычно связан с флуктуациями сопротивления. Физическими процессами, наиболее подходящими для объяснения шума на инфранизких частотах, являются захват носителей медленными ловушками в полупроводниках и рождение/уничтожение дефектов решетки в металлах. Модели, описывающие этот шум, в большинстве случаев основаны на предположении о суперпозиции шумовых релаксационных процессов, имеющих различные постоянные времени. Главная трудность таких теорий состоит в физическом обосновании распределения весовых коэффициентов, согласно которым должны складываться отдельные релаксационные процессы для получения спектра  $1/f$ .

## 5. Электромагнитные помехи

Источники помех радиотехническим системам разделяют на две группы (см. рис.5.1):

- естественные;
- искусственные.

Источники естественных помех в свою очередь делятся на земные и внеземные.



Рисунок 5.1.

Земные источники - связаны с атмосферой, как средой распространения радиоволн. Это, в первую очередь, атмосферные помехи и статические разряды. Источниками атмосферных помех являются электрические разряды во время гроз, которые обладают широким спектром частот и распространяются на большие расстояния. В северных широтах источниками помех являются полярные сияния. Накопление электрических зарядов в осадках и последующий их разряд на элементах антенны, заземления или вблизи антенны также приводят к электромагнитным помехам. К естественным источникам помех следует отнести также искажения сигналов в среде распространения. Кроме того, источником радиопомех в КВ диапазоне и на более низких частотах является земная магнитосфера, простирающаяся на несколько тысяч

километров от поверхности Земли и собирающая корпускулярное излучение Солнца и других звезд.

К внеземным источникам помех относят помехи, обусловленные электромагнитными излучениями Солнца, планет, звезд и других небесных тел. Эти излучения являются источниками дополнительных космических помех и их следует учитывать при определении характеристик приемников РТС, особенно работающих в диапазонах ОВЧ, СВЧ и на более высоких частотах.

Источниками искусственных электромагнитных помех являются радиоэлектронные устройства, принцип работы которых связан с излучением электромагнитной энергии.

Электромагнитные помехи радиоэлектронным средствам создают также устройства, не предназначенные для излучения электромагнитной энергии: источники электрической энергии, оборудование и машины, системы зажигания двигателей, аппаратура промышленного и широкого потребления. Помехи, создаваемые этими объектами, образуют широкий класс индустриальных помех. Интенсивность индустриальных помех и ширина их спектра различны для разных источников. С индустриальными помехами приходится считаться до частот в несколько сотен мегагерц. Расстояния от источника, на которых радиоприемники ощущают воздействие помехи, могут достигать нескольких километров.

Уровень помех измеряют либо в единицах напряженности поля (В/м, мкВ/м, дБмкВ/м и т.д., где дБмкВ означает измерение в децибелах относительно 1 мкВ), либо в единицах плотности мощности (Вт/м<sup>2</sup>, дБВт/м<sup>2</sup> и т.д.).

Классификация, приведенная на рис. 5.1, учитывает связь помехи с ее источником.

По спектральным и временным характеристикам выделяют сосредоточенные, импульсные, флуктуационные помехи.

**Сосредоточенная помеха** представляет собой узкополосное колебание, параметры которого медленно меняются (по сравнению с центральной частотой колебаний) или остаются постоянными во времени.

**Импульсная и флуктуационная** помехи – широкополосные. Флуктуационную помеху можно рассматривать как предельный случай импульсной помехи, когда происходит наложение во времени случайного числа импульсов со случайными амплитудами. Следовательно, флуктуационная помеха – случайный процесс. Такой помехой могут быть космические шумы и внутренние шумы радиоаппаратуры.

На рис. 5.2 представлены рецепторы электромагнитных помех. Их так же, как и источники помех, делят на естественные и искусственные. Учитывать восприимчивость естественных рецепторов к электромагнитным помехам важно как с точки зрения сохранения здоровья человека, так и для защиты окружающей среды. В этих целях устанавливаются допустимые санитарные нормы для уровней радио- и СВЧ-облучения.



Искусственные рецепторы можно разбить на две группы: рецепторы, работающие на принципах извлечения полезной информации из окружающего электромагнитного поля, и рецепторы, которые по принципу своей работы не должны реагировать на внешние электромагнитные поля.

Первую группу составляют радиоэлектронные приемные устройства и радиовзрыватели. Для них наиболее трудно защитимым от помех является антенный тракт, поскольку поля всех работающих передатчиков создают в антенне приемника токи своих сигналов. Однако антенна и приемное устройство обладают избирательными свойствами: реагируют на сигналы, занимающие определенную полосу частот. Сигналы, лежащие вне полосы пропускания, сильно подавляются. В других случаях поля помех создаются токами, протекающими в различных элементах конструкции ИП, существуют в окружающем пространстве в виде направляемых или свободно распространяющихся электромагнитных волн и воздействуют на рецептор за счет появления наведенной ЭДС в элементах его электрических цепей. Конкретный способ осуществления этой нежелательной передачи энергии определяется понятием пути воздействия помех. Наличие этих путей нежелательно и для устранения непосредственного влияния требуется значительное ослабление помех на пути распространения.

В случае свободно распространяющихся волн уровень помех, воздействующих на рецептор, зависит от мощности ИП, расстояния до

рецептора, длины волны помехи  $\lambda$ , параметров среды и ряда других факторов. В зависимости от места расположения рецептора помех относительно ИП пространство вокруг последнего разделяют на ближнюю ( $r \leq \lambda/2\pi$  для ненаправленных помех), промежуточную и дальнюю зоны.

Помехи могут проникать не только через антенный тракт, но и вследствие наводок на элементы устройства, а также по цепям питания и управления. Снижение уровня таких помех осуществляется экранированием, а также фильтрацией цепей питания.

При косвенном влиянии ИП на РП непосредственная передача электромагнитной энергии рецептору отсутствует. Воздействие помехи в этих случаях происходит из-за изменения параметров среды, параметров элементов устройств или режимов работы под действием ИП. Например, под действием излучения мощного радиопередатчика изменяются электродинамические параметры ионосферы, приводя к изменению условий распространения радиоволн в радиоканале, соответствующем рецептору помех. Другим примером является воздействие на РП различных бортовых радио или электротехнических устройств за счет изменения режима энергопотребления: при включении мощной нагрузки изменяются условия работы различных электронных устройств из-за изменения напряжения электропитания и возникающих при этом переходных процессов.

Как отмечалось выше, электромагнитные помехи имеют различную природу и различаются по происхождению, структуре, спектральным и временным признакам. Помехи возникают, как правило, вследствие случайных процессов в источниках помех. Поэтому особенностью их является, в основном, вероятностный характер. Это относится к частотному спектру, спектральной плотности амплитуд помехи, случайному времени их появления.

По характеру воздействия на сигнал помехи делятся на **аддитивные** и **мультипликативные**.

Наибольший интерес представляют помехи случайные, воздействие которых на сигнал оценивается статистически. Поэтому для общего случая используют два случайных процесса, которые выражают влияние на сигнал  $X(t)$  аддитивной  $S(t)$  и мультипликативной помех  $A(t)$ . На выходе тракта передачи сигнал в общем случае записывается в виде:

$$Y(t) = A(t)X(t) + S(t).$$

Аддитивные помехи обычно называют просто шумами, а мультипликативные - модулирующими помехами.

В условиях действия помех важным является определение качественных показателей конкретных РТС, подвергающихся действию помех. Каждое конкретное средство можно характеризовать некоторым числовым показателем качества  $Q$ , отражающим выполнение этим средством своих основных

функций. В отсутствие помех значение показателя качества зависит от отношения сигнал-шум

$$q = q(P_c/P_{ш}) \text{ или } q = q(U_c/U_{ш}),$$

где  $P_c, P_{ш}, U_c, U_{ш}$  - соответственно мощности и напряжения сигнала и собственного шума, пересчитанные ко входу устройства. Под действием помехи значения показателя качества может изменяться.

Степень ухудшения зависит от энергетических, спектральных и статических характеристик помехи, а также способа обработки сигнала, выбранного метода кодирования, специальных мер, предпринятых для защиты рецептора от действия умышленных и преднамеренных помех.

Задача определения качественных показателей РТС в условиях действия НЭМП заключается в определении снижения показателя качества под действием помех  $q(P_c, P_{ип1}, P_{ип2}, \dots)$  и нахождении их допустимых уровней  $P_{ип1 \text{ доп}}, P_{ип2 \text{ доп}}, \dots$  или соотношений сигнал-помеха плюс шум ( $P_c / (P_{п} + P_{ш})$ ) по соответствующему значению  $q_{\text{доп}}$  критерия оценки влияния помехи на рецептор. При этом работа РТС обеспечивается, если

$$q(P_c, P_{ип1}, P_{ип2}, \dots) \geq q_{\text{доп}}$$

Задачи определения характеристик помех могут решаться на основе детерминированного или вероятностного подхода. При детерминированном подходе искомые параметры помех описываются детерминированными величинами или функциями, при вероятностном – случайными величинами или функциями. Более адекватным является вероятностное описание характеристик помех, так как на указанные характеристики влияет большое число факторов, имеющих случайный характер.

### Список используемой литературы

1. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы : учеб. для вузов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 448 с.
2. *Матальцкий М.А.* Элементы теории случайных процессов : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2004. 326 с.
3. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 384 с.
4. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М. : ФИЗ-МАТЛИТ, 2002. 320 с.
5. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. М. : КомКнига, 2005. 400 с.
6. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
7. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969. 448 с.
8. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. 3-е изд. М. : Айрис-пресс, 2008. 290 с.
9. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. 328 с.
10. *Донской Е.Н.* Курс теории вероятностей с элементами случайных процессов и математической статистики. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. 288 с.
11. *Максимов Ю.Д.* Математика. Теория вероятностей и случайных процессов. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2008. 384 с.
12. *Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова.* СПб. : Лань, 2007. 448 с.
13. *Власенков В.М.* Основы теории случайных процессов в практическом изложении. Комсомольск-на-Амуре : Изд-во КНАГТУ, 2004. 99 с.
14. *Марченко Л.В.* Случайные процессы : учеб. пособие. Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2013. 75 с.
15. *Храмов А.Г.* Теория случайных процессов : электронное учебное пособие. Самара : Самарский аэрокосмический университет, .
16. *Крутин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г.* Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы : учеб. пособие. М. : Издательский дом МЭИ, 2013. 368 с.

17. *Син Л.И.* Элементы теории случайных процессов: методическое пособие. Шахты : ЮРГУЭС, 2002. 32 с.
18. *Крицкий О.Л.* Введение в теорию случайных процессов: учеб. пособие. Томск : Изд-во ТПУ, 2009. 110 с.
19. *Миронов М.А.* Марковская теория оптимального оценивания случайных процессов. Учебное пособие. -М.: ГосНИИ АС, 2013, 194 с.
20. *Миронов М.А., Бондаренко А.В.* Марковские процессы и их применение в задачах моделирования автоматических систем. Учебное пособие. – М.: ГосНИИ АС, 2010, 103 с.
21. *Галажинская О.Н., Моисеева С.П.* Теория случайных процессов: учебное пособие. – Томск: Издательский дом ТГУ, 2015, 128 с.
22. *Буре М.В., Парилина Е.М.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для вузов – М.: Лань, 2013.
23. *Худяков Г.И.* Статистическая теория радиотехнических систем. Учебное пособие. – М.: Академия, 2009.
24. *Барзилович Е.Ю.* Модели технического обслуживания сложных систем. М.; Высшая школа, 1982- 231 с.
25. *Барзилович Е.Ю. Воскобоев В. Ф.* Эксплуатация авиационных систем по состоянию. М.; Транспорт, 1981-197 с.
26. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002.
27. *Перов А. И.* Статистическая теория радиотехнических систем: учебное пособие для вузов / А. И. Перов. – М.: Радиотехника, 2003.
28. *Тихонов В. И.* Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. – М.: Сов.радио, 1977.
29. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982.
30. *Тихонов В. И.* Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983.
31. *Тихонов В. И.* Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986.
32. *Тихонов В. И.* Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, 1970.
33. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991.
34. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов.радио, 1961.

35. *Давенпорт В.Б., Рут В.Л.* Введение в теорию случайных сигналов и шумов. – М.: ИЛ, 1960.
36. *Шахтарин Б.И.* Оптимальная фильтрация и прогнозирование случайных процессов. М.: Изд-во МГТУ, 1991.
37. *Шахтарин Б.И.* Случайные процессы в радиотехнике. Цикл лекций. - М.: Радио и связь, 2000.
38. *Кочетков Е.С., Смерчинская С.О.* Теория вероятностей в задачах и упражнениях. – М.: Форум, 2008.
39. *Наместников С.М., Морозов А.А.* Статистическая теория радиотехнических систем. Пособие по выполнению лабораторных работ. – Ульяновск.: УГТУ, 2006.
40. *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982 – 256с.
41. *Кофман А.* Методы и модели исследования операций – М.: Мир, 1966 – 524с.
42. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. Ч.1. Теория вероятностей. – М.: Юрайт, 2016.
43. *Иванов П.А., Давыдов П.С.* Техническая эксплуатация РЭО воздушных судов – М.: Транспорт, 1985 – 284с.
44. *Давыдов П.С., Иванов В.И.* Эксплуатация авиационного радиоэлектронного оборудования – М.: Транспорт, 1990 – 240 с.

**Список сокращений**

БГШ	белый гауссовский шум
ДУ	дифференциальное уравнение
ДШ	дробовой шум
ИЦ	инерционная цепь
ИХ	импульсная характеристика
КВМ	ковариационная матрица
КФ	корреляционная функция
КД	квадратичный детектор
ЛС	линейная система
НЭ	нелинейный элемент
ОВЧ	очень высокие частоты
ПРВ	плотность распределения вероятностей
РТС	радиотехническая система
СП	случайный процесс
СКФ	системная корреляционная функция
СВЧ	сверхвысокие частоты
СВ	случайная величина
ЦФ	цифровой фильтр
ФНЧ	фильтр низких частот
ЭС	энергетический спектр
ЭДС	электродвижущая сила

БОЛЕЛОВ Эдуард Анатольевич, КУДИНОВ Александр Тимофеевич,  
ГУБЕРМАН Игорь Борисович

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.  
ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ  
НА РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА

*Учебное пособие*

В авторской редакции

Подписано в печать 25.10.2021 г.  
Формат 60x84/16 Печ. л. 4 Усл. печ. л. 3,72  
Заказ № 853/1004-УП05 Тираж 35 экз.

Московский государственный технический университет ГА  
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского  
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А  
Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru