

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Ю.И. Дементьев, И.В. Платонова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебно-методическое пособие
по выполнению лабораторных работ
и варианты заданий

*для студентов III и IV курсов
направления 25.03.01
очной формы обучения*

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 004.94:656.078
ББК 517
Д30

Рецензент:

Илларионова О.Г. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Дементьев Ю.И.
Д30 Моделирование транспортных процессов [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ и варианты заданий / Ю.И. Дементьев, И.В. Платонова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Моделирование транспортных процессов» по учебному плану для студентов III и IV курсов направления 23.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 10.09.2021 г. и методического совета 28.09.2021 г.

УДК 004.94:656.078
ББК 517

В авторской редакции

Подписано в печать 09.11.2021 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ № 860/1004-УМП21 Тираж 40 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

© Московский государственный технический
университет гражданской авиации, 2021

Содержание

Введение	4
Программа дисциплины	5
Общие требования к оформлению отчёта о выполнении лабораторной работы.....	6
Порядок защиты лабораторных работ.....	7
Курс 3	
Лабораторная работа № 1	7
Лабораторная работа № 2	14
Лабораторная работа № 3	18
Курс 4	
Лабораторная работа № 4	26
Лабораторная работа № 5	33
Лабораторная работа № 6	42
Рекомендуемая литература	48

Введение

Студенты очной формы обучения направления подготовки 23.03.01 «Технология транспортных процессов» изучают дисциплину «*Моделирование транспортных процессов*» на третьем и четвёртом курсах.

Данная дисциплина является одной из важнейших прикладных дисциплин, определяющей уровень профессиональной подготовки, соответствующей высшему образованию.

Целью изучения дисциплины является обучение использованию моделирования и оптимизации транспортных процессов воздушного транспорта (ВТ), развитие интеллекта студентов и их способностей к логическому и алгоритмическому мышлению.

Преподавание дисциплины состоит в том, чтобы на примерах экономико-математических методов продемонстрировать сущность научного подхода и специфику при моделировании транспортного процесса (ТП), обеспечить освоение универсальных компетенций в рамках указанной специальности.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

- знать: подходы в постановке экономико-математических задач на предприятиях транспорта для достижения поставленной цели, оптимальные математические методы и модели их решения;
- уметь: выбирать оптимальные математические методы и модели решения экономико-математических задач в профессиональной области для достижения поставленной цели с учётом ограничений и исходя из имеющихся ресурсов на предприятиях транспорта;
- владеть: навыками применения оптимальных математических методов и моделей для решения экономико-математических задач на предприятиях транспорта с последующей интерпретацией полученных решений.

Цикл лабораторных работ (ЛР) направлен на формирование практических навыков прогнозирования показателей транспортных процессов, построения многокритериальных рейтингов транспортных компаний, оптимизации сети воздушных линий и парка воздушных судов, использования ресурсов авиатранспортного предприятия, численности

персонала. ЛР выполняются с использованием программного приложения *Microsoft Office Excel*.

Распределение часов по видам занятий и формы контроля

<i>Курс, семестр</i>	<i>Часы на дисциплину</i>					<i>Номера лабораторных работ</i>	<i>Форма контроля</i>
	<i>Общее число часов</i>	<i>Лекционные занятия</i>	<i>Практические занятия</i>	<i>Лабораторные занятия</i>	<i>Самостоятельная работа</i>		
Курс 3 Семестр 6	87	22	10	12	43	1, 2, 3	Зачёт
Курс 4 Семестр 7	165	38	30	12	85	4, 5, 6	Экзамен

Пособие содержит программу дисциплины с распределением на разделы и темы, методические указания по выполнению лабораторных работ, необходимый теоретический материал по дисциплине, варианты заданий для лабораторных работ и список рекомендуемой литературы.

Программа дисциплины

«Моделирование транспортных процессов»

**РАЗДЕЛ 1. МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Тема 1.1. Базовые концепции методологии моделирования и анализа транспортных процессов (ТП).

Тема 1.2. Методы корреляционного анализа при исследовании взаимосвязей показателей ТП.

Тема 1.3. Однофакторное прогнозирование показателей ТП с использованием классической модели парной линейной регрессии.

Тема 1.4. Модели нелинейных регрессий для прогнозирования показателей ТП.

Тема 1.5. Моделирование и прогнозирование показателей ТП методами множественного регрессионного анализа.

**РАЗДЕЛ 2. МНОГОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
КЛАССИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ ТП**

Тема 2.1. Методы рейтинговых оценок при моделировании ТП.

Тема 2.2. Методы кластерного анализа при исследовании объектов ТП.

РАЗДЕЛ. 3. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ПОСТРОЕНИЯ ТП

Тема 3.1. Элементы теории графов. Задачи оптимизации на графах.

Тема 3.2. Методы нахождения кратчайших маршрутов на транспортных сетях.

Тема 3.3. Задача коммивояжёра нахождения кратчайших замкнутых маршрутов.

Тема 3.4. Методы сетевого планирования при моделировании ТП.

РАЗДЕЛ. 4. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Тема 4.1. Линейное программирование (ЛП). Сущность и методы решения задач ЛП. Геометрическая интерпретация задачи ЛП.

Тема 4.2. Моделирование и оптимизация использования дробных ресурсов на транспортных предприятиях алгоритмами линейного программирования.

Тема 4.3. Экономико-математические методы оптимизации использования целочисленных ресурсов на транспортном предприятии.

Тема 4.4. Транспортная модель. Моделирование и оптимизация процесса стратегического использования парка воздушных судов (ВС) на сети воздушных линий (ВЛ).

Тема 4.5. Задача о назначениях: моделирование и оптимизация процесса оперативного использования ВС.

РАЗДЕЛ. 5. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Тема 5.1. Системы массового обслуживания (СМО). Классификация и входные параметры моделей СМО.

Тема 5.2. СМО с отказами. Вероятностно-статистические показатели функционирования СМО с отказами.

Тема 5.3. СМО с ожиданиями. Вероятностно-статистические показатели функционирования СМО с ожиданиями.

Тема 5.4. Модели теории игр.

Общие требования к оформлению отчёта о выполнении лабораторной работы

При оформлении отчёта о выполнении лабораторной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы,

выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для доработки.

Отчёт по результатам проведения ЛР оформляется после выполнения ЛР в формате документа Microsoft Word. На титульном листе отчёта нужно указать: название кафедры, фамилию, имя, отчество студента, номер варианта и дату выполнения. Номер варианта выдаётся преподавателем перед проведением ЛР. В отчёт о выполнении ЛР включаются: постановка задачи, регламент выполнения, исходные данные, условные обозначения, модели, необходимые таблицы и рисунки, выводы по работе. К документу Microsoft Word должен быть приложен документ Microsoft Office Excel с результатами расчётов прогнозирования или моделирования.

Порядок защиты лабораторных работ

Защиты ЛР происходят в компьютерном классе сразу после выполнения и завершаются сдачами отчётов. В процессе защиты студент должен показать теоретические знания по теме работы, продемонстрировать личные умения и практические навыки решения поставленной задачи на компьютере с использованием программного приложения Microsoft Office Excel.

Лабораторная работа № 1

Построение модели парной линейной регрессии (МПЛР), анализ и прогнозирование показателей ТП ВТ

Постановка задачи: построить модель линейной регрессии и найти прогнозные значения результативного показателя, характеризующего численность перевезённых пассажиров (y , млн.чел.) авиакомпанией Q в течение определённого периода (x).

Регламент выполнения Лабораторной работы № 1

1. Создать документы Microsoft Word и Microsoft Office Excel.
2. Ввести массив с исходными данными в документы Microsoft Word (Таблица 1.1, см. стр. 13 – 14) и Microsoft Office Excel.
3. Провести визуальный анализ исходных данных в приложении Microsoft Office Excel – Мастер диаграмм. Скопировать рисунок (обозначить Рис. 1.1) в документ Word и сделать краткие выводы о целесообразности использования МПЛР.

4. Открыть приложение Microsoft Office Excel – Анализ данных – Регрессия, провести моделирование линейной регрессии.
5. Скопировать таблицу с результатами значений остатков (обозначить Таблица 1.2) и график остатков (обозначить Рис. 1.2), сделать вывод о выполнении четырёх условий Гаусса-Маркова.
6. Составить таблицу 1.3 с результатами корреляционного анализа и написать **вывод**.
7. Составить таблицу 1.4 с результатами дисперсионного анализа и написать краткий **вывод** о значимости уравнения.
8. Составить таблицу 1.5 с результатами регрессионного анализа, выписать **уравнение самой модели**, сделать краткий **вывод по модели**.
9. Найти значение относительной ошибки аппроксимации для МПЛР.
10. Найти прогнозные значения для двух последующих периодов (13 и 14).
11. Построить графики исходных, расчётных и прогнозных значений (обозначить Рис. 1.3).
12. Сделать вывод о полученной модели с точки зрения качества, статистической значимости, адекватности и точности. Рассмотреть данную практическую ситуацию и написать свои рекомендации о тенденциях развития авиакомпании Q.

Примечание. Все таблицы и графики должны быть подписаны (иметь номер и название). Все надписи внутри таблиц должны быть **обязательно на русском языке**.

Методические рекомендации

Парной линейной регрессией называется уравнение, описывающее корреляционную линейную связь между зависимой объясняемой переменной (результативным показателем) y и независимой объясняющей переменной (факторным признаком) x : $\hat{y}=a+bx$.

Уравнение регрессии строится на основании имеющихся исходных статистических данных конкретной выборки, содержащей n наблюдений – значений x_i и y_i . В действительности в каждом отдельном случае (наблюдении) величина y_i складывается из суммы двух слагаемых: $y_i = \hat{y}_i + e_i$, $i=1,2,\dots,n$, где

y_i – фактическое значение результативного показателя;

\hat{y}_i – теоретическое значение результативного показателя, найденное по модели парной линейной регрессии (МПЛР);

e_i – случайная величина (остаток), характеризующая отклонения реального значения результативного показателя от теоретического, полученного по уравнению регрессии.

Случайная величина включает влияние неучтённых в модели случайных факторов. В связи с этим задача построения МПЛР заключается в том, чтобы по данным выборки найти неизвестные параметры a и b . При этом параметры должны быть оценены так, чтобы полученное уравнение регрессии наилучшим образом описывало исходные данные. Эти оценки параметров находятся с помощью метода наименьших квадратов (МНК), который позволяет минимизировать сумму квадратов остатков: $e_i = y_i - \hat{y}_i$, где $\hat{y}_i = a + bx_i$.

$$\text{Таким образом, } S = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \rightarrow \min.$$

Функция S достигает минимума при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем систему нормальных уравнений (СНУ):

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (1.1)$$

При решении данной системы вычисляются оценки параметров a и b .

Заметим, что сумма остатков $\sum_{i=1}^n e_i = 0$.

МНК можно применять, если остатки удовлетворяют условиям Гаусса-Маркова:

- 1) остатки и объясняющая переменная не коррелируют;
- 2) остатки не коррелируют между собой;
- 3) математическое ожидание остатков равно нулю;
- 4) остатки должны быть гомоскедастичными, т.е. дисперсия остатков в среднем постоянна.

Распределение остатков должно подчиняться нормальному закону.

Примечание. Если имеет место гетероскедастичность остатков (дисперсия остатков непостоянна), то в этом случае рекомендуется применять обобщённый метод наименьших квадратов.

Для предварительной оценки качества полученного уравнения линейной регрессии рассчитывается коэффициент детерминации R^2 , который равен выборочному коэффициенту корреляции r_{yx}^2 . Коэффициент детерминации показывает, какая доля дисперсии результативного показателя y объясняется полученным уравнением регрессии. Соответственно, величина $1-R^2$ характеризует долю дисперсии y , вызванную влиянием случайных, неучтённых в модели факторов.

Числовые значения параметров уравнения регрессии являются выборочными оценками неизвестных параметров. Для оценки значимости параметров a и b используется ***t-критерий Стьюдента***. Выдвигается предположение (гипотеза) о незначимости параметра. Вычисляется фактическое значение t -критерия Стьюдента как отношение значения самого параметра к его стандартной ошибке. Полученное значение надо сравнить с табличным значением для уровня значимости α и числа степеней свободы $df=n-m$, где m – число параметров в уравнении регрессии. Для парных регрессий значение m всегда равно 2. Если фактическое значение больше, чем табличное, то гипотеза отклоняется на данном уровне значимости.

Оценка значимости и адекватности уравнения в целом производится с помощью ***F-критерия Фишера***, который основан на анализе дисперсий. Общую сумму квадратов отклонений переменной y от среднего значения \bar{y} можно представить в виде суммы квадратов отклонений, объяснённой регрессией и остаточной (необъяснённой) суммы квадратов отклонений.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Любая сумма квадратов отклонений связана с числом степеней свободы независимого варьирования признака: на общую сумму квадратов отклонений приходится $n-1$ степень свободы, на остаточную сумму – $n-2$, а на объяснённую сумму – 1. Для определения фактического значения F -критерия Фишера рассматривают отношение объяснённой доли дисперсии в расчёте на одну степень свободы к остаточной доле в расчёте на каждую степень свободы.

$$F = \frac{\frac{R^2}{m-1}}{\frac{1-R^2}{n-m}} \quad \text{или} \quad F = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m}{m-1}, \quad \text{при этом число степеней свободы } m-1$$

называют числом степеней свободы числителя и обозначают df_1 , а число $n-m$ называют числом степеней свободы знаменателя и обозначают df_2 . В нашем случае $m=2$.

Выдвигается гипотеза $H_0: D_{\text{объясн.}} = D_{\text{необъясн.}}$. Далее по таблице значений находится критическое значение F-критерия Фишера при уровне значимости α и числе степеней свободы df_1 и df_2 . Фактическое значение F-критерия Фишера сравнивается с критическим значением, найденным по таблице. Если $F > F_{\text{кр}}$, то гипотеза отклоняется и уравнение считается значимым и адекватным.

Примечание. При использовании приложения Microsoft Office Excel – **Анализ данных – Регрессия** значимость уравнения и параметров a , b определяется в автоматическом режиме в столбцах таблиц 3 и 4 «Значимость F-критерия» и «уровень значимости» соответственно.

Крайне важен для процесса моделирования этап верификации. Поэтому после построения модели нужно оценить её точность. Это можно сделать с помощью вычисления значения относительной ошибки аппроксимации, которая показывает, насколько отличаются полученные расчётные значения результативного показателя \hat{y} от исходных (реальных) значений y .

$$A\% = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} \cdot 100\%. \quad (1.2)$$

Значения относительной ошибки аппроксимации, не превосходящие 7%, свидетельствуют о хорошем соответствии линии регрессии исходным данным. В дальнейшем уравнение регрессии используется для получения точечных и интервальных прогнозных значений.

По исходным данным таблицы 1 были произведены расчёты с помощью приложения Microsoft Office Excel – **Анализ данных – Регрессия**.

Таблица 1

y	4,1	4,8	5,6	5,2	6,1	6,6	6,2	6,8	7,5	7,3	7,8	8,2
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Полученные результаты корреляционного, дисперсионного, регрессионного анализа, а также значения и график остатков представлены на рабочем листе MS Excel.

ВЫВОД ИТОГОВ

<i>Регрессионная статистика</i>	
Множественный R	0,973497
R-квадрат	0,947697
Нормированный R-квадрат	0,942467
Стандартная ошибка	0,308757
Наблюдения	12

<i>Дисперсионный анализ</i>					
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
Регрессия	1	17,27336	17,27336	181,1935	9,85E-08
Остаток	10	0,95331	0,095331		
Итого	11	18,22667			

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
Y-пересечение	4,107576	0,190027	21,61576	1E-09	3,684169	4,530982
Переменная X 1	0,347552	0,02582	13,46081	9,85E-08	0,290023	0,405082

ВЫВОД ОСТАТКА

<i>Наблюдение</i>	<i>Предсказанное Y</i>	<i>Остатки</i>
1	4,455128	-0,35513
2	4,802681	-0,00268
3	5,150233	0,449767
4	5,497786	-0,29779
5	5,845338	0,254662
6	6,19289	0,40711
7	6,540443	-0,34044
8	6,887995	-0,088
9	7,235548	0,264452
10	7,5831	-0,2831
11	7,930653	-0,13065
12	8,278205	0,121795

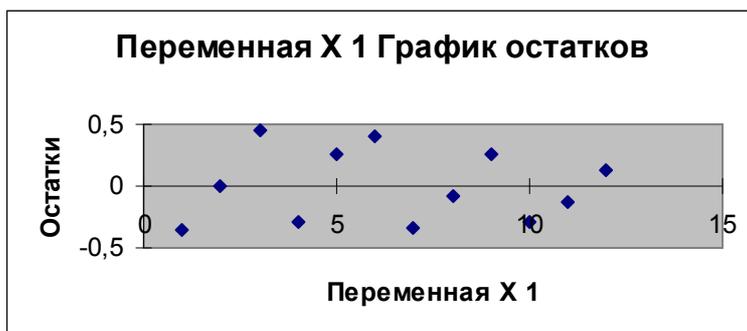


Рис. 1. Рабочий лист MS Excel с полученными результатами

Далее нужно произвести грамотную перетрансляцию полученных результатов моделирования в таблицы документа Word. Некоторые образцы таблиц приведены ниже. Все числа следует округлять до тысячных долей по правилам округления, принятым в математике.

Таблица 2

Корреляционный анализ

Коэффициент корреляции r_{yx}	0,973
Коэффициент детерминации R^2	0,948

Таблица 3

Дисперсионный анализ

	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Сумма квадратов отклонений, приходящаяся на одну степень свободы	F-критерий Фишера	Значимость F-критерия
Регрессия	1	17,273	17,273	181,194	$9,85 \cdot 10^{-8}$
Остаток	10	0,953	0,095		
Итого	11	18,226			

Таблица 4

Регрессионный анализ

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика Стьюдента	Уровень значимости	Нижняя граница доверительного интервала	Верхняя граница доверительного интервала
Константа	4,108	0,190	21,616	$1 \cdot 10^{-9}$	3,684	4,531
Переменная x	0,348	0,026	13,461	$9,85 \cdot 10^{-8}$	0,290	0,405

Исходные данные для выполнения Лабораторной работы № 1 по вариантам представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

1.1	y	4,29	4,23	4,31	4,33	4,37	4,35	4,42	4,39	4,48	4,52	4,5	4,55
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.2	y	5,33	5,38	5,32	5,39	5,4	5,42	5,48	5,46	5,51	5,49	5,53	5,61
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

1.3	y	6,45	6,49	6,44	6,51	6,52	6,54	6,61	6,58	6,63	6,61	6,65	6,73
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.4	y	7,28	7,22	7,31	7,35	7,34	7,38	7,46	7,45	7,51	7,5	7,54	7,58
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.5	y	8,11	8,16	8,13	8,19	8,25	8,21	8,28	8,34	8,31	8,39	8,43	8,49
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.6	y	3,35	3,71	3,69	4,01	4,24	4,22	4,58	4,46	4,71	5,02	5,38	5,62
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.7	y	4,44	4,82	5,21	5,63	5,54	5,88	6,12	6,32	6,19	6,57	6,88	7,24
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.8	y	8,22	8,06	8,44	8,39	8,55	8,81	8,67	8,95	8,77	9,09	9,35	9,5
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.9	y	6,14	6,19	6,16	6,25	6,32	6,29	6,38	6,44	6,51	6,59	6,54	6,63
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.10	y	4,97	5,32	5,27	5,66	5,34	5,61	5,88	5,79	6,15	6,42	6,28	6,53
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.11	y	7,16	7,25	7,21	7,32	7,29	7,41	7,48	7,44	7,53	7,51	7,62	7,7
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.12	y	5,65	5,99	5,91	6,31	6,54	6,51	6,88	6,74	6,99	7,31	7,68	7,92
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Лабораторная работа № 2

Построение моделей парных нелинейных регрессий, анализ и прогнозирование параметров ТП ВТ

Постановка задачи: построить модели нелинейных регрессий (полулогарифмической и двух степенных), найти прогнозные значения результативного показателя, характеризующего численность перевезённых пассажиров (y , млн.чел.) авиакомпанией Q в течение определённого периода (x).

Регламент выполнения Лабораторной работы № 2

1. Создать документы Microsoft Word и Microsoft Office Excel.
2. Ввести массив с исходными данными в документы Microsoft Word (Таблица 2.1) и Microsoft Office Excel.

3. Провести визуальный анализ исходных данных в приложении Microsoft Office Excel – Мастер диаграмм. Скопировать рисунок (Рис. 2.1) в документ Word и сделать краткие выводы о целесообразности использования нелинейных регрессий.
4. Открыть приложение Microsoft Office Excel – Анализ данных – Регрессия, провести моделирование полулогарифмической регрессии.
5. Скопировать таблицу с результатами значений остатков (Таблица 2.2) и график остатков (Рис. 2.2), сделать вывод о выполнении четырёх условий Гаусса-Маркова.
6. Составить таблицу 2.3 с результатами корреляционного анализа и написать **вывод**.
7. Составить таблицу 2.4 с результатами дисперсионного анализа и написать краткий **вывод** о значимости уравнения.
8. Составить таблицу 2.5 с результатами регрессионного анализа, выписать **уравнение самой модели**, сделать краткий **вывод по модели**.
9. Найти значение относительной ошибки аппроксимации для полулогарифмической модели.
10. Найти прогнозные значения для двух последующих периодов (13 и 14).
11. Построить графики исходных, расчётных и прогнозных значений (Рис. 2.3).
12. Сделать вывод о полученной модели с точки зрения качества, статистической значимости, адекватности и точности.
13. Открыть приложение Microsoft Office Excel – Анализ данных – Регрессия, провести моделирование степенной модели $\hat{y}=a+bx^{\alpha}$, $0,5<\alpha<1$.
14. Скопировать таблицу с результатами значений остатков (Таблица 2.6) и график остатков (Рис. 2.4), сделать вывод о выполнении четырёх условий Гаусса-Маркова.
15. Составить таблицу 2.7 с результатами корреляционного анализа и написать **вывод**.
16. Составить таблицу 2.8 с результатами дисперсионного анализа и написать краткий **вывод** о значимости уравнения.
17. Составить таблицу 2.9 с результатами регрессионного анализа, выписать **уравнение самой модели**, сделать краткий **вывод по модели**.
18. Найти значение относительной ошибки аппроксимации для данной степенной модели.

19. Найти прогнозные значения для двух последующих периодов (13 и 14).
20. Построить графики исходных, расчётных и прогнозных значений (Рис. 2.5).
21. Сделать вывод о полученной модели с точки зрения качества, статистической значимости, адекватности и точности.
22. Открыть приложение Microsoft Office Excel – Анализ данных – Регрессия, провести моделирование степенной модели $\hat{y}=a+bx^\alpha$, $1<\alpha<1,5$.
23. Скопировать таблицу с результатами значений остатков (Таблица 2.10) и график остатков (Рис. 2.6), сделать вывод о выполнении четырёх условий Гаусса-Маркова.
24. Составить таблицу 2.11 с результатами корреляционного анализа и написать **вывод**.
25. Составить таблицу 2.12 с результатами дисперсионного анализа и написать краткий **вывод** о значимости уравнения.
26. Составить таблицу 2.13 с результатами регрессионного анализа, выписать **уравнение самой модели**, сделать краткий **вывод по модели**.
27. Найти значение относительной ошибки аппроксимации для данной степенной модели.
28. Найти прогнозные значения для двух последующих периодов (13 и 14).
29. Построить графики исходных, расчётных и прогнозных значений (Рис. 2.7).
30. Сделать вывод о полученной модели с точки зрения качества, статистической значимости, адекватности и точности.
31. Составить итоговую таблицу с уравнениями линейной и всех нелинейных регрессий, коэффициентами корреляции и детерминации, значениями t-статистики Стьюдента, относительными ошибками аппроксимации и прогнозными значениями.
32. Произвести окончательный выбор модели для прогнозирования и написать свои рекомендации о тенденциях развития авиакомпании Q.

Примечание. Все таблицы и графики должны быть подписаны (иметь номер и название). Все надписи внутри таблиц должны быть **обязательно на русском языке**.

Методические рекомендации

Оценка параметров нелинейных регрессий проводится МНК после проведения процедуры линеаризации.

Рассмотрим уравнение полулогарифмической регрессии $\hat{y}=a+b\ln x$. Проведём процедуру линеаризации, для этого введём линеаризующую замену $t=\ln x$. Получим линеаризованное уравнение $\hat{y}=a+bt$. В этом случае система нормальных уравнений (СНУ) примет вид:

$$\begin{cases} na+b\sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a\sum_{i=1}^n t_i + b\sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i y_i. \end{cases} \quad (2.1)$$

Вернёмся к замене, получим следующую систему:

$$\begin{cases} na+b\sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a\sum_{i=1}^n \ln x_i + b\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i = \sum_{i=1}^n y_i \ln x_i. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для предварительной оценки качества полученного уравнения полулогарифмической регрессии рассчитывается коэффициент детерминации R^2 , который равен квадрату индекса корреляции ρ_{yx}^2 . Для всех парных нелинейных регрессий, но линейных по параметрам, выполняется равенство индекса корреляции и абсолютного значения коэффициента корреляции $\rho_{yx}=|r_{yt}|$.

$$r_{yt} = r_{y \ln x} = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i \ln x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n \ln^2 x_i - \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}. \quad (2.3)$$

Для оценки значимости параметров a , b и уравнения в целом используются *t-критерий Стьюдента* и *F-критерий Фишера* соответственно. Вычисление относительной ошибки аппроксимации производится по формуле 1.2 (Лабораторная работа № 1).

Рассмотрим уравнение степенной регрессии $\hat{y}=a+bx^\alpha$ с показателем $\alpha=0,8$. Проведём процедуру линеаризации. Для этого введём линеаризующую замену $t=x^{0,8}$. Получим линеаризованное уравнение $\hat{y}=a+bt$. В этом случае СНУ примет вид (2.1). В «старых» переменных СНУ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i^{0,8} = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^{0,8} + b \sum_{i=1}^n x_i^{1,6} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^{0,8}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Индекс корреляции $\rho_{yx} = |r_{yt}|$.

$$r_{yt} = r_{yx^{0,8}} = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i^{0,8} - \sum_{i=1}^n x_i^{0,8} \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^{1,6} - \left(\sum_{i=1}^n x_i^{0,8} \right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}. \quad (2.5)$$

Для уравнения степенной регрессии $\hat{y} = a + bx^\alpha$ с показателем $\alpha = 1,2$ провести процедуру линеаризации самостоятельно. Исходные данные для выполнения Лабораторной работы № 2 по вариантам представлены в таблице 1.1.

Лабораторная работа № 3

Построение рейтинга транспортных компаний

Постановка задачи: построить многокритериальный рейтинг 10 авиакомпаний с помощью аналитического метода ранжирования объектов. Получить комплексную оценку деятельности авиакомпаний на основе системы основных отобранных производственных показателей, сделать выводы.

Для построения рейтинговой оценки авиакомпаний использовать следующие производственные показатели:

X_1 – перевезено пассажиров (пассажиропоток) за период N, (млн. чел.),

X_2 – пассажирооборот за период N, (млрд. пасс. км),

X_3 – процент занятости кресел за период N, (%).

Регламент выполнения Лабораторной работы № 3

1. Создать документы Microsoft Word и Microsoft Office Excel.
2. Ввести массив с исходными данными в документ Microsoft Office Excel.
3. Провести анализ дескриптивных статистик (среднего, медианы, наибольшего, наименьшего) значений исходных показателей, сделать вывод.
4. Провести корреляционный анализ на выявление тесноты взаимосвязей между исходными показателями, сделать вывод.

5. Провести стандартизацию исходных данных.
6. Составить таблицу стандартизованных значений показателей эталонной авиакомпании.
7. Создать новую переменную R и в поле для функции ввести формулу для расчёта рейтинговой оценки.
8. Провести ранжирование значений рейтинговых оценок.
9. Пункты регламента 2 – 8 отразить в документе Microsoft Word в виде таблиц, формул и кратких выводов. Сделать выводы о лидирующих авиакомпаниях в рейтинге: проанализировать и аргументировать обоснованность занятия ими высоких позиций.

Методические рекомендации

Рейтинг – это многокритериальная комплексная оценка состояния объекта, которая позволяет отнести его к некоторому классу или категории.

Рейтинг выполняет функцию преобразования достаточно больших объёмов информации в рекомендацию по принятию решений наиболее компактным способом. Вся процедура создания, формирования и построения рейтинга включает следующие этапы.

1. Обоснованный выбор системы показателей (критериев).
2. Сбор первичной статистической информации, аналитическая обработка исходных данных, исследование взаимосвязей между признаками (критериями).
3. Выбор инструментария для расчёта итоговой рейтинговой оценки.
4. Ранжирование исследуемых объектов по рейтингу.

Для аргументированного выбора показателей важным является то, чтобы в рейтинговой оценке участвовали однотипные объекты – предприятия, относящиеся к одному виду экономической деятельности. Кроме этого используемый набор показателей должен обладать определёнными свойствами, делающими выбор оправданным. Эти требования могут быть сформулированы в следующем виде:

- Показатели должны характеризовать все подлежащие контролю свойства объекта в соответствии с уровнем их важности, степени влияния на динамику состояния и обеспечивать его адекватную оценку.

- Показатели должны быть доступными и однозначно восприниматься.
- Из набора необходимо исключить дублирующие друг друга показатели. Каждый из выбранных показателей должен описывать свой аспект деятельности объекта, который не отражают другие.
- Показатели должны быть измеримыми, чтобы для любого исследуемого объекта можно было найти значение оценки для каждого критерия.

Анализ дескриптивных статистик показывает наличие или отсутствие смещения медианы относительно среднего значения исследуемого показателя ТП. Если медиана смещена в сторону максимального значения, то это свидетельствует о том, что для большинства авиакомпаний значения этого показателя являются выше среднего. В случае смещения медианы в сторону минимального значения большинство авиакомпаний будет иметь значения этого показателя ниже среднего. Идеальной является ситуация, когда значения медианы и выборочного среднего совпадают.

Определение рейтинга подразумевает оценивание состояния объекта ТП, а не простое упорядочивание группы объектов ТП. Итоговая рейтинговая оценка, представляет собой комплексную интегральную характеристику, которая формируется как функция многих переменных. Рейтинговая оценка состояния предусматривает сравнение с некоторой точкой отсчёта. При этом могут рассматриваться два подхода к выбору такой точки. В первом случае происходит сопоставление с однородными объектами данного типа, действующими в аналогичных условиях, например, в условиях стабильного роста. В данной ситуации предполагается, что существует «среднее» состояние объекта, которое соответствует эффективной деятельности при сложившихся обстоятельствах. При применении другого подхода сопоставление происходит с абстрактным объектом данного типа, состояние которого принимается в качестве эталона, определяющего требования к эффективной деятельности объектов. Эталонные (наилучшие) значения показателей возникают в рыночных условиях в результате сильной конкуренции. Эталонный объект, у которого все показатели наилучшие, может быть, как условным, так и реальным. Данный подход основывается на

том, что для каждого показателя определяется оптимальное значение, которое может быть максимальным или минимальным в рассматриваемой совокупности. В данной лабораторной работе студентам рекомендуется использование второго подхода к выбору эталонного объекта (авиакомпания).

Технология формирования рейтинга подразумевает обоснованный выбор метрики для расчёта оценок. Если в результате анализа корреляционной матрицы тесной взаимосвязи между исходными показателями не выявлено, то это делает обоснованным использование евклидовой метрики для получения рейтинговых оценок. Геометрическая интерпретация оценки – это расстояние от точки с координатами из стандартизованных критериев сопоставляемого объекта до точки с координатами «эталона». Таким образом, рейтинговая оценка показывает меру близости критериев сравниваемого объекта с показателями эталонного объекта. Если в качестве эталона выбирается объект с наилучшими характеристиками, то в этом случае худшие объекты будут иметь более высокие оценки, а у самого лучшего объекта будет минимальная оценка. Процедура стандартизации или нормирования необходима в следующих ситуациях:

- выбранные для исследования показатели имеют разные единицы измерения;
- используемые показатели заданы величинами с различным числовым порядком.

***Примечание.** Серьёзной проблемой большинства рейтинговых систем является наличие в них набора сильно коррелированных показателей. Это обстоятельство делает нецелесообразным применение в качестве меры расстояния между объектами ТП евклидовой метрики. Если пренебречь этим условием, то значения полученных оценок будут недостоверными и впоследствии приведут к ошибочному результату всего исследования. В таких ситуациях при наличии коррелированных показателей возникает необходимость использования метрики Махаланобиса общего вида. Также в этом случае и при наличии большого числа показателей (не менее четырёх) рекомендуется использовать метод главных компонент для получения обобщённых факторов, обладающих свойством ортогональности. В*

дальнейшем это даёт возможность применения евклидовой метрики в качестве расстояния между объектами.

Для каждой авиакомпании нужно рассчитать рейтинговую оценку по формуле, аналогичной формуле определения расстояния между двумя точками в многомерном евклидовом пространстве:

$$R_i = \sqrt{\sum (x_{ij} - x_{\text{э}j})^2} . \quad (3.1)$$

Для рассматриваемой практической задачи формула расчёта рейтинговой оценки принимает вид:

$$R_i = \sqrt{(x_{i1} - x_{\text{э}1})^2 + (x_{i2} - x_{\text{э}2})^2 + (x_{i3} - x_{\text{э}3})^2} , \quad (3.2)$$

где R_i – рейтинговая оценка i -й авиакомпании;

x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} – стандартизованные значения показателей i -й авиакомпании;

$x_{\text{э}1}, x_{\text{э}2}, x_{\text{э}3}$ – стандартизованные значения показателей эталонной авиакомпании.

На завершающем этапе необходимо ранжировать объекты по рейтингу. В связи с вышеизложенным эту процедуру нужно производить следующим образом:

- ранжирование авиакомпаний с учётом полученной рейтинговой оценки;
- построение итогового рейтинга авиакомпаний.

В выводе нужно проанализировать первые три авиакомпании, занявшие лидирующие позиции по производственным показателям, а также три авиакомпании, оказавшиеся на последних местах. Аргументация должна быть обоснованной, студентам следует обратить внимание на значения исходных показателей этих авиакомпаний. Провести сравнение этих значений с медианой и выборочным средним. Также стоит отразить особенности некоторых авиакомпаний при построении данного рейтинга.

Исходные данные для выполнения Лабораторной работы № 3 по вариантам представлены в таблицах 3.1 – 3.6.

Таблица 3.1

<i>Вариант № 1</i>				<i>Вариант № 2</i>			
<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3	<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3
<i>Авиакомпания 1</i>	1,9	6,8	91,6	<i>Авиакомпания 1</i>	2,6	7,8	75,1
<i>Авиакомпания 2</i>	4,7	7,8	93,8	<i>Авиакомпания 2</i>	1,8	5,4	92,3
<i>Авиакомпания 3</i>	3,4	6,2	75,2	<i>Авиакомпания 3</i>	2,9	9,1	93,4
<i>Авиакомпания 4</i>	3,2	7,6	83,9	<i>Авиакомпания 4</i>	2,1	4,1	79,3
<i>Авиакомпания 5</i>	3,7	6,0	91,6	<i>Авиакомпания 5</i>	4,2	7,6	77,1
<i>Авиакомпания 6</i>	3,5	11,1	81,2	<i>Авиакомпания 6</i>	2,5	4,8	80,2
<i>Авиакомпания 7</i>	2,1	4,1	81,6	<i>Авиакомпания 7</i>	1,7	5	89,4
<i>Авиакомпания 8</i>	4,7	7,6	82,4	<i>Авиакомпания 8</i>	2,6	5,1	75,3
<i>Авиакомпания 9</i>	3,1	6,8	79,3	<i>Авиакомпания 9</i>	2,9	5,7	80,8
<i>Авиакомпания 10</i>	2,4	3,87	89,3	<i>Авиакомпания 10</i>	3,1	6,1	75,4

Таблица 3.2

<i>Вариант № 3</i>				<i>Вариант № 4</i>			
<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3	<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3
<i>Авиакомпания 1</i>	4,1	13,5	92,6	<i>Авиакомпания 1</i>	2,3	7,4	92,1
<i>Авиакомпания 2</i>	9,3	15,5	92,1	<i>Авиакомпания 2</i>	4,7	7,8	90,5
<i>Авиакомпания 3</i>	6,8	12,4	75,2	<i>Авиакомпания 3</i>	3,4	6,2	75,2
<i>Авиакомпания 4</i>	6,4	15,1	83,9	<i>Авиакомпания 4</i>	3,3	7,6	82,7
<i>Авиакомпания 5</i>	7,4	12,3	89,6	<i>Авиакомпания 5</i>	3,7	6	91,6
<i>Авиакомпания 6</i>	7,3	20,1	85,2	<i>Авиакомпания 6</i>	3,5	10,9	83,2
<i>Авиакомпания 7</i>	4,5	8,8	78,6	<i>Авиакомпания 7</i>	2,7	5,1	81,5
<i>Авиакомпания 8</i>	9,1	16,2	82,4	<i>Авиакомпания 8</i>	4,7	7,6	82,4
<i>Авиакомпания 9</i>	6,2	13,1	79,3	<i>Авиакомпания 9</i>	3,1	6,8	79,3
<i>Авиакомпания 10</i>	4,9	8,1	88,3	<i>Авиакомпания 10</i>	2,4	3,8	89,3

Таблица 3.3

<i>Вариант № 5</i>				<i>Вариант № 6</i>			
<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3	<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3
<i>Авиакомпания 1</i>	6,4	12,1	93,1	<i>Авиакомпания 1</i>	5,4	9,6	89,3
<i>Авиакомпания 2</i>	7,1	20,8	84,2	<i>Авиакомпания 2</i>	5,2	14,2	92,1
<i>Авиакомпания 3</i>	5,5	10,2	81,5	<i>Авиакомпания 3</i>	9,2	15,7	83,5
<i>Авиакомпания 4</i>	9,4	15,2	75,4	<i>Авиакомпания 4</i>	6,9	12,4	75,2
<i>Авиакомпания 5</i>	6,2	13,6	79,3	<i>Авиакомпания 5</i>	6,8	15,4	78,7
<i>Авиакомпания 6</i>	5,1	8,9	89,3	<i>Авиакомпания 6</i>	6,5	12,3	93,1
<i>Авиакомпания 7</i>	4,9	13,8	92,1	<i>Авиакомпания 7</i>	7,3	22,1	83,2
<i>Авиакомпания 8</i>	9,1	15,6	90,5	<i>Авиакомпания 8</i>	5,7	10,5	81,5
<i>Авиакомпания 9</i>	6,8	12,2	75,2	<i>Авиакомпания 9</i>	9,3	15	75,4
<i>Авиакомпания 10</i>	6,6	15,2	82,7	<i>Авиакомпания 10</i>	6,4	13,9	79,3

Таблица 3.4

<i>Вариант № 7</i>				<i>Вариант № 8</i>			
<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3	<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3
<i>Авиакомпания 1</i>	3,5	11,1	81,2	<i>Авиакомпания 1</i>	2,5	4,8	80,2
<i>Авиакомпания 2</i>	2,1	4,1	81,6	<i>Авиакомпания 2</i>	1,7	5	89,4
<i>Авиакомпания 3</i>	4,7	7,6	82,4	<i>Авиакомпания 3</i>	2,6	5,1	75,3
<i>Авиакомпания 4</i>	3,1	6,8	79,3	<i>Авиакомпания 4</i>	2,9	5,7	80,8
<i>Авиакомпания 5</i>	2,4	3,9	89,3	<i>Авиакомпания 5</i>	3,1	6,1	75,4
<i>Авиакомпания 6</i>	1,9	6,8	91,6	<i>Авиакомпания 6</i>	2,6	7,8	75,1
<i>Авиакомпания 7</i>	4,6	7,8	89,8	<i>Авиакомпания 7</i>	1,8	5,4	92,3
<i>Авиакомпания 8</i>	3,4	6,2	75,2	<i>Авиакомпания 8</i>	2,9	9,1	93,1
<i>Авиакомпания 9</i>	3,2	7,6	83,9	<i>Авиакомпания 9</i>	2,1	4,1	79,3
<i>Авиакомпания 10</i>	3,7	6,0	91,6	<i>Авиакомпания 10</i>	4,2	7,6	77,1

Таблица 3.5

<i>Вариант № 9</i>				<i>Вариант № 10</i>			
<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3	<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3
<i>Авиакомпания 1</i>	7,4	12,3	89,6	<i>Авиакомпания 1</i>	3,7	6,6	91,6
<i>Авиакомпания 2</i>	7,3	20,1	85,2	<i>Авиакомпания 2</i>	3,5	10,9	90,2
<i>Авиакомпания 3</i>	4,5	8,8	78,6	<i>Авиакомпания 3</i>	2,7	5,1	81,5
<i>Авиакомпания 4</i>	9,1	16,2	82,4	<i>Авиакомпания 4</i>	4,7	7,6	82,4
<i>Авиакомпания 5</i>	6,2	13,1	79,3	<i>Авиакомпания 5</i>	3,1	6,8	79,3
<i>Авиакомпания 6</i>	4,9	8,1	88,3	<i>Авиакомпания 6</i>	2,4	3,8	89,3
<i>Авиакомпания 7</i>	4,1	13,5	92,6	<i>Авиакомпания 7</i>	2,3	7,4	92,1
<i>Авиакомпания 8</i>	9,3	15,5	92,1	<i>Авиакомпания 8</i>	4,6	7,8	89,1
<i>Авиакомпания 9</i>	6,8	12,4	75,2	<i>Авиакомпания 9</i>	3,4	6,2	75,2
<i>Авиакомпания 10</i>	6,4	15,1	83,9	<i>Авиакомпания 10</i>	3,3	7,6	82,7

Таблица 3.6

<i>Вариант № 11</i>				<i>Вариант № 12</i>			
<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3	<i>Авиакомпания</i>	X_1	X_2	X_3
<i>Авиакомпания 1</i>	9,4	15,2	75,4	<i>Авиакомпания 1</i>	6,9	12,4	75,2
<i>Авиакомпания 2</i>	6,2	13,6	79,3	<i>Авиакомпания 2</i>	6,8	15,4	78,7
<i>Авиакомпания 3</i>	5,1	8,9	89,3	<i>Авиакомпания 3</i>	6,5	12,3	93,1
<i>Авиакомпания 4</i>	4,9	13,8	92,1	<i>Авиакомпания 4</i>	7,3	22,1	83,2
<i>Авиакомпания 5</i>	9,1	15,6	93,5	<i>Авиакомпания 5</i>	5,7	10,5	81,5
<i>Авиакомпания 6</i>	6,8	12,2	75,2	<i>Авиакомпания 6</i>	9,3	15	75,4
<i>Авиакомпания 7</i>	6,6	15,2	82,7	<i>Авиакомпания 7</i>	6,4	13,9	79,3
<i>Авиакомпания 8</i>	6,4	12,1	93,1	<i>Авиакомпания 8</i>	5,4	9,6	89,3
<i>Авиакомпания 9</i>	7,1	21,8	83,2	<i>Авиакомпания 9</i>	5,2	14,2	92,1
<i>Авиакомпания 10</i>	5,5	10,2	81,5	<i>Авиакомпания 10</i>	9,2	15,7	83,5

Лабораторная работа № 4

Оптимизация использования ресурсов авиапредприятия матричным симплекс-методом

Постановка задачи: авиаремонтное предприятие располагает тремя видами ресурсов в количествах b_i . Расходуя имеющиеся ресурсы, предприятие может производить 6 видов изделий x_j ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$). Реализация 1 единицы j -го изделия даёт предприятию c_j денежных единиц прибыли. На производство 1 единицы j -го вида изделия расходуется a_{ij} единиц i -го ресурса. Найти оптимальный план производства изделий x_j , обеспечивающий максимальную прибыль.

Регламент проведения Лабораторной работы № 4

1. Создать документы Microsoft Word и Microsoft Office Excel.
2. Выполнить тренировочное задание, представленное в разделе ***Методические рекомендации*** по предложенному алгоритму.
3. Приступить к выполнению индивидуального задания, для этого определить цель задачи и вид целевой функции.
4. Составить систему ограничений.
5. Произвести рациональную организацию исходных данных и целевой функции на листе MS Excel.
6. Выбрать надстройку «Поиск решения» и ввести исходные данные в диалоговое окно «Поиск решения».
7. Зайти во вкладку «Параметры», установить необходимое число итераций и время (100, 100).
8. Нажать ОК и вернуться в диалоговое окно «Поиск решения».
9. Нажать клавишу «Выполнить», после чего будет найдено решение. (При нажатии ОК полученное решение будет сохранено на листе MS Excel, содержащем условие задачи.)
10. Написать краткий вывод и рекомендации.

Методические рекомендации

Методы линейного программирования (ЛП) позволяют находить экстремальные (минимальные или максимальные) значения линейной функции при заданной системе ограничений в виде равенств или неравенств. Класс таких задач называют оптимизационным, а полученное решение – оптимальным. При использовании методов ЛП, в частности симплекс-

метода, систему ограничений в виде неравенств записывают в виде системы уравнений, добавляя в левую часть каждого неравенства неотрицательные переменные x_j . В кратком виде математическая постановка задачи ЛП может быть сформулирована следующим образом.

Найти значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n при заданной системе ограничений $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, (i=1, 2, \dots, m)$, позволяющее найти оптимальное значение целевой функции $z = \sum_{j=1}^n c_jx_j$ при условии, что x_j – неотрицательны ($j=1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим решение тренировочного задания.

Постановка тренировочного задания: авиаремонтное предприятие производит и тестирует 3 вида изделий. В таблице 5 приведены временные затраты на производство и тестирование изделий в часах. Также известно, что в неделю на производство тратится не более 250 часов, а на тестирование тратится не более 150 часов.

Таблица 5

Исходные данные

Время	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3
На производство	0,5	0,5	1
На тестирование	0,25	0,5	0,5

Прибыль от продажи каждого изделия составляет соответственно 140, 270 и 360 ден. усл. ед. Определить, сколько изделий различных видов нужно производить еженедельно, чтобы максимизировать прибыль?

Сначала определим цель задания и вид целевой функции.

Цель задания: максимизация прибыли с помощью составления оптимального плана производства и тестирования изделий.

Пусть

- x_1 – количество изделий 1;
- x_2 – количество изделий 2;
- x_3 – количество изделий 3;

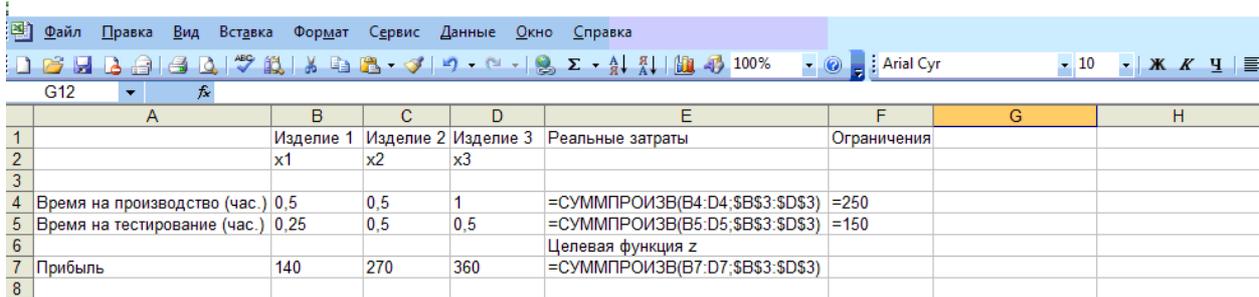
Тогда целевая функция будет иметь вид: $z=140x_1+270x_2+360x_3$

Требуется определить $x_1, x_2, x_3, \max z$.

Система ограничений будет выглядеть следующим образом:

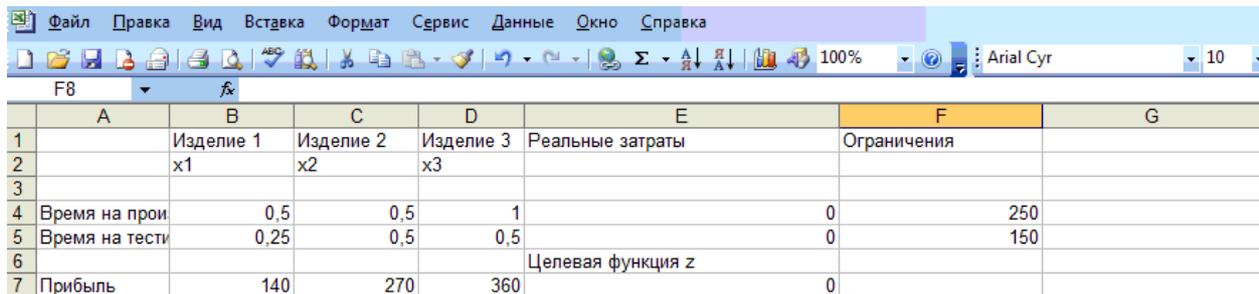
$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,5x_2 + x_3 \leq 250, \\ 0,25x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 - \text{целые.} \end{cases}$$

Произведём рациональную организацию исходных данных и целевой функции на листе MS Excel (Рис. 4.1, Рис. 4.2).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Реальные затраты	Ограничения		
2		x1	x2	x3				
3								
4	Время на производство (час.)	0,5	0,5	1	=СУММПРОИЗВ(B4:D4:\$B\$3:\$D\$3)	=250		
5	Время на тестирование (час.)	0,25	0,5	0,5	=СУММПРОИЗВ(B5:D5:\$B\$3:\$D\$3)	=150		
6					Целевая функция z			
7	Прибыль	140	270	360	=СУММПРОИЗВ(B7:D7:\$B\$3:\$D\$3)			
8								

Рис. 4.1. Рабочий лист MS Excel организации данных в режиме показа формул



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Реальные затраты	Ограничения		
2		x1	x2	x3				
3								
4	Время на прои	0,5	0,5	1		0	250	
5	Время на тести	0,25	0,5	0,5		0	150	
6					Целевая функция z			
7	Прибыль	140	270	360		0		

Рис. 4.2. Рабочий лист MS Excel организации данных

Далее выбираем надстройку «Поиск решения» (Рис. 4.3).

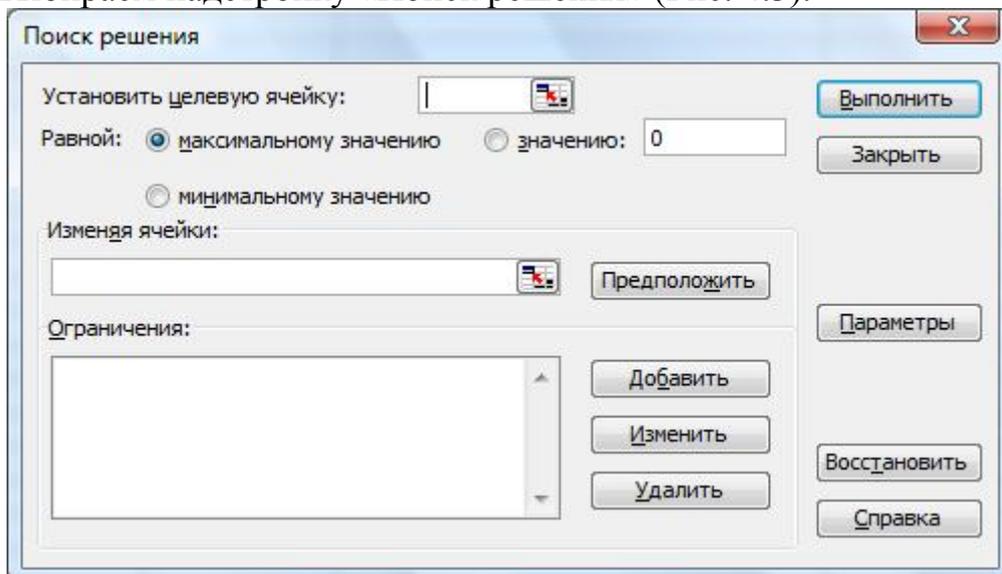


Рис. 4.3. Диалоговое окно надстройки «Поиск решения»

Введём исходные данные в диалоговое окно «Поиск решения». Окончательный вариант представлен на Рис. 4.4.

Во вкладке «Параметры» устанавливаем необходимое число итераций и время (100, 100).

Рис. 4.4. Окончательный вид диалогового окна надстройки «Поиск решения»

После этого нужно нажать ОК и вернуться в диалоговое окно «Поиск решения». Далее нажать клавишу «Выполнить», после чего полученное решение отобразится на рабочем листе (Рис. 4.5.). При нажатии ОК оно будет сохранено на листе MS Excel, содержащем условие задачи.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Реальные затраты	Ограничения	
2		x1	x2	x3			
3		0	100	200			
4	Время на производство (час.)	0,5	0,5	1	250	250	
5	Время на тестирование (час.)	0,25	0,5	0,5	150	150	
6					Целевая функция z		
7	Прибыль	140	270	360	99000		
8							

Рис. 4.5. Рабочий лист MS Excel с полученным результатом

Краткий вывод: максимальная прибыль в размере 99000 ден. усл.ед. будет получена, если оптимальный план производства составит 100 единиц изделия 2 и 200 единиц изделия 3. Изделие 1 в этом случае производиться не будет. Временной ресурс будет израсходован полностью.

Исходные данные для выполнения Лабораторной работы № 4 по вариантам представлены в таблицах 4.1 – 4.12.

Таблица 4.1

Вариант № 1

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2	1	1	2,2	3	1	440
<i>Ресурс 2</i>	1	2	1	2	2,5	4,2	310
<i>Ресурс 3</i>	2,3	2,3	1,4	2	1,7	1,3	230
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	1	3	2	1	3	4	

Таблица 4.2

Вариант № 2

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2	1	2	2,5	1	2	380
<i>Ресурс 2</i>	3	2	1,5	2	1,5	3,5	510
<i>Ресурс 3</i>	2	3	2,2	4	2	1,9	450
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	4	2	3	2	3	4	

Таблица 4.3

Вариант № 3

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2	1	1	1,3	2	1	520
<i>Ресурс 2</i>	1,6	1,8	2	1	1,4	2,5	550
<i>Ресурс 3</i>	1	3,2	2	3	2,1	2	430
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	3	3	2	2	3	2	

Таблица 4.4

Вариант № 4

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	1,1	1,6	2	2,8	3	2	440
<i>Ресурс 2</i>	1	2	3	2	2,4	3,7	390
<i>Ресурс 3</i>	2	2,5	3,2	3	2	2,9	530
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	1	2	3	1	3	4	

Таблица 4.5

Вариант № 5

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	6	1	2	1,3	1,7	2	450
<i>Ресурс 2</i>	3,1	2	3	2	2,5	3,5	610
<i>Ресурс 3</i>	2,7	3	2,5	3	2	4,1	500
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	5	2	3	2	3	4	

Таблица 4.6

Вариант № 6

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	4	3	2	1,5	1	1,2	560
<i>Ресурс 2</i>	3	2,5	4,5	2	1	2	400
<i>Ресурс 3</i>	2	1,5	3,5	1	2,1	1	390
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	4	3	4	1	1	2	

Таблица 4.7

Вариант № 7

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2,5	2	2,1	2,8	2	2	370
<i>Ресурс 2</i>	3	1	2	2	4,5	3,5	520
<i>Ресурс 3</i>	2	3	3,1	2,4	2	3	460
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	3	2	3	2	4	4	

Таблица 4.8

Вариант № 8

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2	1	6	2,2	3	4	450
<i>Ресурс 2</i>	3	2	1	2	1,5	3,5	490
<i>Ресурс 3</i>	2	3	2,5	1	2	2,7	520
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	1	2	5	2	3	4	

Таблица 4.9

Вариант № 9

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2,5	2	2	3,5	2	2	620
<i>Ресурс 2</i>	3	1,5	1,5	3	1,5	2,9	530
<i>Ресурс 3</i>	4	3	2	4	2	3,1	350
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	4	3	2	5	3	4	

Таблица 4.10

Вариант № 10

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	5,5	4	3	2	1	2	500
<i>Ресурс 2</i>	3	2	1	2,8	1,5	2,5	600
<i>Ресурс 3</i>	2	3	2,5	1,4	1	1,4	450
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	5	4	3	2	1	2	

Таблица 4.11

Вариант № 11

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2,5	2	2	1	4	1	350
<i>Ресурс 2</i>	3	2	1,5	1,4	4,5	1	550
<i>Ресурс 3</i>	2	3	2,1	1	2	1,5	400
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	4	3	2	1	5	1	

Вариант № 12

	<i>Изделие 1</i>	<i>Изделие 2</i>	<i>Изделие 3</i>	<i>Изделие 4</i>	<i>Изделие 5</i>	<i>Изделие 6</i>	<i>Ограничения</i>
<i>Ресурс 1</i>	2	6	2	2,5	3	1	440
<i>Ресурс 2</i>	4	2	1,7	2,4	3,5	1	540
<i>Ресурс 3</i>	2	3	2,8	1	1	1,2	640
<i>Прибыль на ед. изделия</i>	4	5	3	2	3	1	

Лабораторная работа № 5

Решение транспортной задачи «закрытого» и «открытого» типа

Постановка задачи 1: авиакомпания должна осуществить доставку однотипного груза нескольких производителей (A_i) к нескольким потребителям (B_j). При этом учитываются только переменные транспортные издержки. Данные о стоимости перевозки одной тонны груза от производителя A_i к потребителю B_j , а также запасы производителей и спрос потребителей известны. Требуется составить оптимальный план перевозок груза от производителей к потребителям. Определить минимальные транспортные расходы.

Регламент выполнения задачи 1 Лабораторной работы № 5

1. Создать документы Microsoft Word и Microsoft Office Excel.
2. Определить тип транспортной задачи («открытая» или «закрытая»).
3. Сформулировать цель задачи и вид целевой функции.
4. Составить систему ограничений.
5. Произвести рациональную организацию исходных данных и целевой функции на листе MS Excel (Рис. 5.1, Рис. 5.2).
6. Далее выбрать надстройку «Поиск решения», установить целевую функцию, ввести все ограничения, выбрать метод решения (Рис. 5.3).
7. Нажать клавишу «Выполнить», после чего будет найдено решение.
8. При нажатии ОК найденное решение будет сохранено на листе MS Excel, содержащем условие задачи (Рис. 5.4).
9. Вывод по полученному решению задачи.

Постановка задачи 2: авиакомпания выполняет рейсы по m ВЛ на n типах ВС. Известны: 1) c_{ij} – транспортные расходы на 1 млн. ткм на i -м типе ВС по j -й ВЛ (ден. усл. ед./млн. ткм); 2) a_i – потенциал i -го типа ВС (млн. ткм); 3) b_j – спрос по грузообороту j -й ВЛ (млн. ткм). ВЛ, на которых i -й тип самолета не используется, рекомендуется назначить $c_{ij}=100$. Требуется составить оптимальный план перевозок ВС по ВЛ, дающий минимальные транспортные расходы.

Регламент выполнения задачи 2 Лабораторной работы № 5

1. Определить тип транспортной задачи («открытая» или «закрытая»).
2. В случае «открытой» задачи ввести дополнительное ВС или ВЛ.
3. Определить цель задачи и вид целевой функции.
4. Составить систему ограничений.
5. Произвести рациональную организацию исходных данных и целевой функции на листе MS Excel.
6. Далее выбрать надстройку «Поиск решения», установить целевую функцию, ввести все ограничения, выбрать метод решения.
7. Нажать клавишу «Выполнить», после этого будет найдено решение.
8. При нажатии ОК найденное решение будет сохранено на листе MS Excel, содержащем условие задачи.
9. Вывод по полученному решению задачи.

Примечание. Отчёт по каждой задаче должен содержать постановку задачи, таблицу с исходными данными, все 4 копии рабочих листов MS Excel согласно регламенту, а также выводы.

Методические рекомендации

Транспортная задача является важнейшей частной моделью класса задач линейного программирования и имеет обширные практические приложения при моделировании транспортных процессов. Особо важное значение она имеет при рассмотрении конкретных практических ситуаций, связанных с рационализацией поставок любых видов продукции и с оптимизацией планирования грузопотоков.

Математическая формулировка транспортной задачи сводится к нахождению минимального значения целевой функции $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ при заданных следующих ограничениях на запас и на спрос:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j. \end{cases} \quad \text{При этом } \sum_{i=1}^m a_i = a \text{ и } \sum_{j=1}^n b_j = b.$$

Если $a = b$, то модель называется сбалансированной транспортной моделью или моделью закрытого типа. Если $a \neq b$, то модель называется несбалансированной или открытого типа. В случае закрытой модели весь имеющийся в наличии груз доставляется полностью, и спрос потребителей полностью удовлетворён. В случае открытой модели либо все потребители удовлетворены, но при этом в некоторых исходных пунктах остаются излишки груза ($a > b$), либо весь груз доставлен полностью, а спрос удовлетворён только частично ($a < b$). В данной лабораторной работе предполагается решение транспортной задачи «закрытого» и «открытого» типа.

Рассмотрим решение транспортной задачи «закрытого» типа с использованием приложения MS Office Excel.

Данные о стоимости перевозки, запасы производителей и спрос потребителей известны и представлены в таблице 6.

Таблица 6

Исходные данные

Производители	B1	B2	B3	B4	B5	Запас
A1	120	125	90	85	135	59
A2	125	95	125	105	120	75
A3	140	100	110	90	75	64
A4	135	85	100	100	90	82
Спрос	52	61	56	51	60	

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Производители	B1	B2	B3	B4	B5	Запас	
2	A1	120	125	90	85	135	59	
3	A2	125	95	125	105	120	75	
4	A3	140	100	110	90	75	64	
5	A4	135	85	100	100	90	82	
6	Спрос	52	61	56	51	60	=СУММПРОИЗВ(B2:F5;B9:F12)	
7								
8	Производители	B1	B2	B3	B4	B5	Контроль отгрузки	
9	A1						=СУММ(B9:F9)-G2	
10	A2						=СУММ(B10:F10)-G3	
11	A3						=СУММ(B11:F11)-G4	
12	A4						=СУММ(B12:F12)-G5	
13	Контроль выполнения заказа							
14		=СУММ(B9:B12)-B6	=СУММ(C9:C12)-C6	=СУММ(D9:D12)-D6	=СУММ(E9:E12)-E6	=СУММ(F9:F12)-F6		
15								
16								

Рис. 5.1. Рабочий лист MS Excel организации данных в режиме показа формул

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Производители	B1	B2	B3	B4	B5	Запас			
2	A1	120	125	90	85	135	59			
3	A2	125	95	125	105	120	75			
4	A3	140	100	110	90	75	64			
5	A4	135	85	100	100	90	82			
6	Спрос	52	61	56	51	60	0			
7										
8	Производители	B1	B2	B3	B4	B5	Контроль			
9	A1						-59			
10	A2						-75			
11	A3						-64			
12	A4						-82			
13	Контроль выполнения заказа									
14		-52	-61	-56	-51	-60				
15										
16										

Рис. 5.2. Рабочий лист MS Excel организации данных

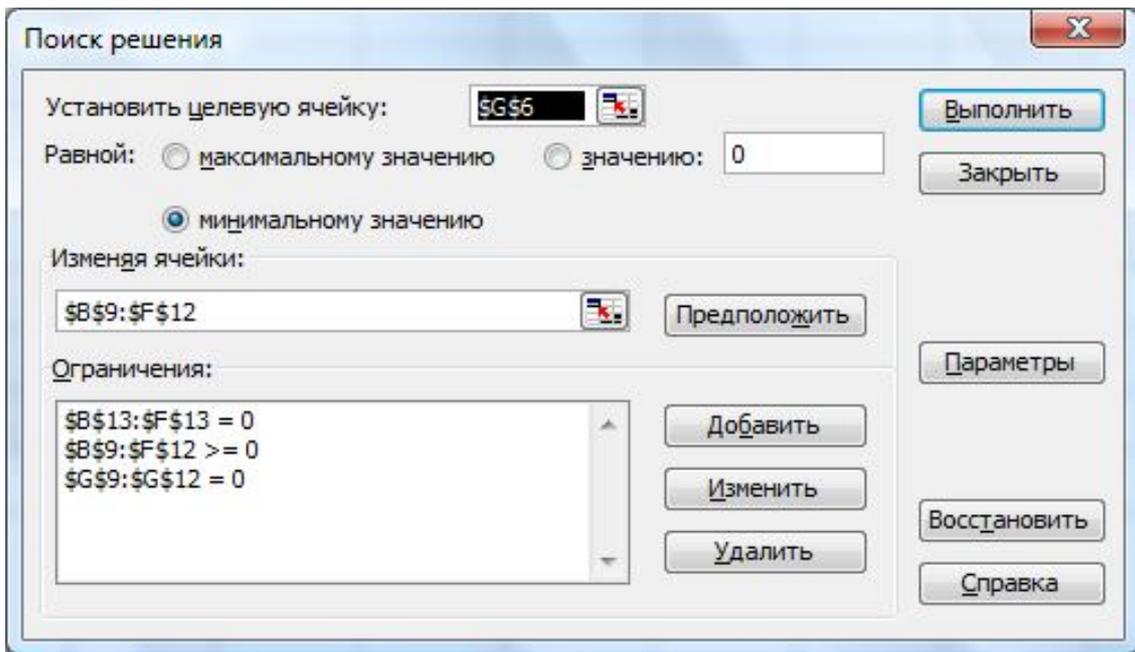


Рис. 5.3. Окончательный вид диалогового окна надстройки «Поиск решения»

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Производители	B1	B2	B3	B4	B5	Запас		
2	A1	120	125	90	85	135	59		
3	A2	125	95	125	105	120	75		
4	A3	140	100	110	90	75	64		
5	A4	135	85	100	100	90	82		
6	Спрос	52	61	56	51	60	26250		
7									
8	Производители	B1	B2	B3	B4	B5	Контроль		
9	A1	0	0	35	24	0	0		
10	A2	52	0	0	23	0	0		
11	A3	0	0	0	4	60	0		
12	A4	0	61	21	0	0	0		
	Контроль выполнения заказа								
13		0	0	0	0	0			
14									
15									
16									

Рис. 5.4. Решение транспортной задачи

Транспортную задачу 2 студентам предлагается выполнить полностью самостоятельно. Исходные данные для выполнения задачи 1 Лабораторной работы № 5 по вариантам представлены в таблицах 5.1 – 5.12.

Таблица 5.1

Вариант № 1						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	100	113	90	84	131	50
<i>A2</i>	105	98	124	107	121	60
<i>A3</i>	135	100	112	92	78	50
<i>A4</i>	120	95	102	104	94	70
Спрос	44	36	50	52	48	

Таблица 5.2

Вариант № 2						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	97	105	100	86	99	58
<i>A2</i>	85	78	83	79	78	66
<i>A3</i>	88	90	95	91	102	52
<i>A4</i>	101	94	101	86	95	44
Спрос	51	40	49	40	40	

Таблица 5.3

Вариант № 3						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	79	78	99	104	100	77
<i>A2</i>	91	102	79	78	83	63
<i>A3</i>	86	99	85	78	112	60
<i>A4</i>	79	78	88	90	100	60
Спрос	55	52	55	48	50	

Таблица 5.4

Вариант № 4						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	90	104	94	85	97	40
<i>A2</i>	101	96	100	106	105	46
<i>A3</i>	88	85	90	94	74	50
<i>A4</i>	122	95	93	85	78	54
Спрос	40	36	40	34	40	

Таблица 5.5

Вариант № 5						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	65	82	66	85	69	50
<i>A2</i>	54	79	74	68	70	48
<i>A3</i>	60	76	73	82	80	52
<i>A4</i>	71	80	82	74	75	50
Спрос	40	37	40	43	40	

Таблица 5.6

Вариант № 6						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	82	80	79	74	68	54
<i>A2</i>	74	75	76	73	82	46
<i>A3</i>	65	82	82	92	78	38
<i>A4</i>	54	79	72	84	64	62
Спрос	50	30	50	30	40	

Таблица 5.7

Вариант № 7						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	92	78	90	84	103	60
<i>A2</i>	84	64	84	107	100	50
<i>A3</i>	105	100	82	89	77	50
<i>A4</i>	102	95	79	77	95	60
Спрос	42	38	40	55	45	

Таблица 5.8

Вариант № 8						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	90	93	85	87	103	70
<i>A2</i>	105	98	99	100	111	70
<i>A3</i>	107	104	112	92	78	60
<i>A4</i>	100	96	102	105	92	50
Спрос	50	40	50	60	50	

Таблица 5.9

Вариант № 9						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	105	98	90	84	100	45
<i>A2</i>	103	104	97	92	82	65
<i>A3</i>	99	95	98	101	92	55
<i>A4</i>	98	85	102	93	94	60
Спрос	55	35	45	42	48	

Таблица 5.10

Вариант № 10						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	100	113	90	84	131	61
<i>A2</i>	105	98	124	107	121	60
<i>A3</i>	135	100	112	92	78	59
<i>A4</i>	120	95	102	104	94	50
Спрос	52	38	50	42	48	

Таблица 5.11

Вариант № 11						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	55	63	80	84	66	75
<i>A2</i>	65	56	74	77	81	55
<i>A3</i>	73	60	57	62	78	65
<i>A4</i>	70	58	82	58	60	75
Спрос	50	60	50	60	50	

Таблица 5.12

Вариант № 12						
Производители	В1	В2	В3	В4	В5	Запас
<i>A1</i>	62	78	74	77	56	80
<i>A2</i>	58	60	57	62	58	65
<i>A3</i>	63	80	60	57	65	80
<i>A4</i>	56	74	58	82	70	75
Спрос	60	65	60	55	60	

Исходные данные для выполнения задачи 2 Лабораторной работы № 5 по вариантам представлены в таблицах 5.13 – 5.24.

Таблица 5.13

Вариант № 1							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
<i>1</i>	5	6	4	8	4	3	50
<i>2</i>	2	100	7	6	9	5	70
<i>3</i>	4	7	6	9	100	4	65
<i>4</i>	3	8	3	100	6	8	60
b_j	45	35	40	60	55	45	

Таблица 5.14

Вариант № 2							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
<i>1</i>	5	6	4	8	100	3	50
<i>2</i>	2	100	7	6	9	5	70
<i>3</i>	4	7	6	9	7	4	60
<i>4</i>	3	8	3	100	6	8	60
b_j	45	55	40	60	35	40	

Таблица 5.15

Вариант № 3							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
<i>1</i>	5	100	4	8	4	3	50
<i>2</i>	2	6	7	6	9	5	50
<i>3</i>	4	7	6	9	100	4	55
<i>4</i>	3	8	100	5	6	8	40
b_j	50	40	40	40	30	50	

Таблица 5.16

Вариант № 4							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	6	4	8	100	3	55
2	2	100	7	6	9	5	60
3	4	7	6	9	7	4	40
4	3	8	3	100	6	8	45
b_j	50	50	40	60	50	50	

Таблица 5.17

Вариант № 5							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	8	4	8	4	3	50
2	2	100	7	6	9	5	50
3	4	7	6	9	100	4	50
4	100	8	5	5	6	8	70
b_j	40	40	40	40	40	40	

Таблица 5.18

Вариант № 6							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	6	8	4	100	3	60
2	100	3	7	6	9	5	60
3	4	7	10	9	7	4	50
4	3	8	3	100	6	8	50
b_j	40	50	40	50	40	50	

Таблица 5.19

Вариант № 7							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	7	4	8	100	3	60
2	100	3	7	6	9	5	60
3	4	7	100	9	7	4	50
4	3	8	3	7	6	8	50
b_j	40	50	40	50	40	50	

Таблица 5.20

Вариант № 8							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	9	4	8	5	3	70
2	100	3	7	6	9	5	60
3	4	7	100	9	7	4	50
4	3	8	3	7	6	8	70
b_j	40	50	50	50	40	50	

Таблица 5.21

Вариант № 9							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	6	4	5	100	3	70
2	8	3	7	6	9	5	70
3	4	100	9	4	7	4	70
4	3	8	3	7	6	8	70
b_j	50	50	50	50	50	50	

Таблица 5.22

Вариант № 10							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	8	4	4	5	100	9	80
2	5	6	7	100	9	5	75
3	4	100	9	4	7	4	75
4	3	8	3	7	6	8	80
b_j	60	60	60	60	60	60	

Таблица 5.23

Вариант № 11							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	6	4	8	4	3	50
2	2	100	7	6	9	5	70
3	4	7	6	9	100	4	65
4	3	8	3	100	6	8	60
b_j	45	35	40	60	55	45	

Таблица 5.24

Вариант № 12							
Тип ВС	ВЛ1	ВЛ2	ВЛ3	ВЛ4	ВЛ5	ВЛ6	a_i
1	5	6	4	8	100	3	50
2	2	100	7	6	9	5	70
3	4	7	6	9	7	4	60
4	3	8	3	100	6	8	60
b_j	45	55	40	60	35	40	

Лабораторная работа № 6

Оптимизация параметров СМО ГА моделями теории массового обслуживания

Постановка задачи: в терминале B аэропорта города N в течение определённого периода времени T открыто n стоек для регистрации пассажиров на ближайшие рейсы. Ожидаемое число пассажиров зависит от

конкретных типов ВС, готовящихся к вылету. Требуется определить вероятностно-статистические показатели обслуживания пассажиров в терминале B аэропорта города N . Предварительно необходимо рассчитать оптимальное количество стоек регистрации n . Для решения задачи нужно использовать модель СМО с ожиданиями. Данные о периоде времени T , типах ВС, коэффициенте загрузки k , среднем времени регистрации пассажира $t_{обс}$, средние данные о количестве кресел L для определённых типов ВС считаются известными.

Регламент выполнения Лабораторной работы № 6

1. Создать документы Microsoft Word и Microsoft Office Excel. В документе Word сформулировать конкретную постановку задачи для своего варианта.
2. Определить значения необходимых входных параметров (***приведённую интенсивность α округлить до десятых долей***).
3. ***Самостоятельно*** определить ***минимально возможное*** число стоек регистрации. Допустим, получено значение ***приведённой интенсивности $\alpha=5,7$*** . ***Тогда, исходя из условия, что $n>\alpha$, получаем $n=6$*** . Это и будет минимально возможное число стоек регистрации.
4. Изобразить граф состояний СМО с ожиданием с учётом данных своего варианта.
5. Подробный расчёт вероятности того, что все стойки свободны. (подтвердить формулой и полученным значением). Все расчёты проводить с использованием Microsoft Office Excel.
6. Вероятности различных состояний системы.
7. Вероятности ожидания и немедленного обслуживания пассажиров.
8. Среднее число пассажиров в очереди.
9. Среднее время ожидания регистрации пассажира в очереди.
10. Среднее время ожидания регистрации и собственно процедуры регистрации пассажира у стойки.
11. Среднее число занятых стоек регистрации.
12. Выводы по задаче и рекомендации.

Методические рекомендации

Системы массового обслуживания (СМО) занимают особое место при моделировании транспортных процессов в гражданской авиации (ГА). Например, любой аэропорт является достаточно сложной СМО.

СМО называется система, включающая несколько каналов (технических устройств), выполняющих одинаковые по характеру функции по обслуживанию поступающих случайным образом заявок (требований) в систему. СМО подразделяются на СМО с отказами и СМО с ожиданием.

СМО с ожиданием – это система, в которой в случае занятости всех каналов заявка становится в очередь и ожидает момента, когда она будет принята на обслуживание. СМО с ожиданием делятся на системы с ограниченной и неограниченной очередью. В данной ЛР предполагается использование многоканальной модели СМО с ожиданием и неограниченной очередью. Заявки, поступающие в СМО в случайные моменты времени, образуют случайный простейший поток, который подчиняется распределению Пуассона. **Поток называется простейшим, если он обладает тремя свойствами: стационарностью, ординарностью и отсутствием последействия.**

Стационарность – это свойство заключается в том, что среднее число заявок, поступающее в систему, должно быть постоянным.

Ординарность – это свойство заключается в том, что вероятность поступления в систему двух и более заявок в течение бесконечно малого промежутка времени бесконечно мала по сравнению с поступлением одной или ни одной заявки.

Отсутствие последействия – заявки поступают в систему независимо друг от друга.

При простейшем потоке интервал времени между двумя последовательными поступлениями заявок есть случайная величина, подчинённая показательному закону распределения. Интенсивность входящего потока λ и время между последовательными поступлениями заявок t_0 связаны между собой взаимно обратной зависимостью. Время обслуживания заявки $t_{обс}$ также является случайной величиной, подчинённой показательному закону распределения. Если СМО имеет n каналов обслуживания, то интенсивность обслуживания увеличивается в n раз. В результате того, что заявки поступают в систему случайным образом и в случайное время, время обслуживания заявки является случайной величиной, то и весь процесс функционирования СМО носит случайный характер. При простейшем потоке заявок и показательном законе распределения времени обслуживания этот процесс является **марковским**. В процессе

функционирования СМО может находиться в различных дискретных состояниях. Каждое состояние системы отличается от другого состояния числом заявок, находящихся в системе. Установлено, что по истечении определённого времени, процесс функционирования СМО переходит в установившийся режим. При работе системы в установившемся режиме вероятности её состояний не зависят от времени. Входными параметрами СМО с ожиданием и неограниченной очередью являются:

n – число каналов;

λ – интенсивность входящего потока (или t_0 – среднее время между двумя последовательными поступлениями заявок);

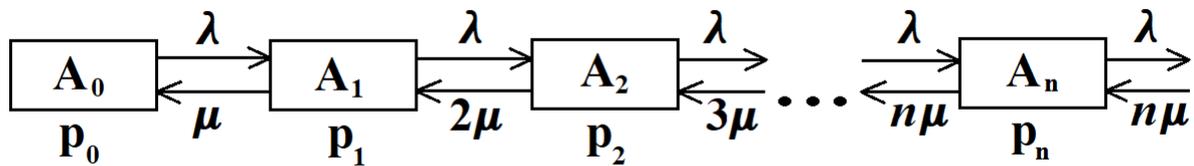
μ – интенсивность обслуживания (или $t_{обс}$ – среднее время обслуживания заявки).

При этом $\lambda=1/t_0$ и $\mu=1/t_{обс}$.

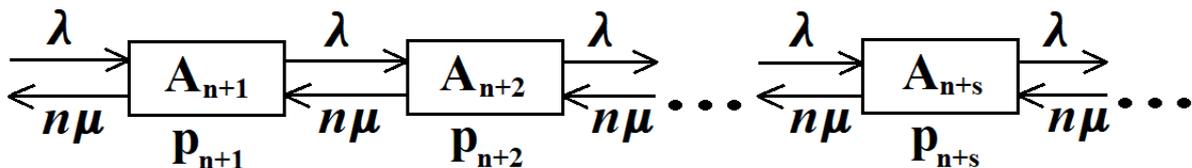
Для решения задачи целесообразно ввести безразмерную величину – приведённую интенсивность α .

Граф состояний СМО с ожиданием и неограниченной очередью

1. Состояния СМО 1 группы (когда нет очереди)



2. Состояния СМО 2 группы (когда есть очередь)



A_0 – состояние системы, в котором нет ни одной заявки и все каналы свободны, этому состоянию соответствует вероятность P_0 .

A_k – состояние системы, в котором есть k заявок и k каналов заняты их обслуживанием, этому состоянию соответствует вероятность P_k , $k=1, \dots, n$.

A_{n+s} – состояние системы, в котором есть $n+s$ заявок, при этом n каналов заняты обслуживанием, а s заявок находятся в очереди, этому состоянию соответствует вероятность $P_{n+s}, s=1,2,3,\dots$

Приведённой интенсивностью входящего потока называется среднее число заявок, поступившее в систему за среднее время обслуживания.

$$\alpha = \lambda t_{\text{обс}} \text{ или } \alpha = \lambda / \mu.$$

Вероятность того, что все стойки регистрации будут свободны:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{\alpha}{n-\alpha} \right)^{-1}.$$

Вероятности состояний системы 1 группы (когда нет очереди).

Вероятность того, что в системе k пассажиров и k стоек регистрации заняты

обслуживанием: $P_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot P_0$, где $k = 1, \dots, n$.

Состояниям СМО 2 группы (когда есть очередь), соответствуют вероятности P_{n+s} , где s – число авиапассажиров в очереди.

$$P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \left(\frac{\alpha}{n} \right)^s \cdot P_0, \text{ где } s \in \mathbb{N}.$$

Вероятность ожидания $P_{\text{ож}}$ находится по формуле:

$$P_{\text{ож}} = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-\alpha} \cdot P_0.$$

Авиапассажир в любом случае будет обслужен у стойки регистрации, поэтому практический интерес представляет вероятность немедленного обслуживания $P_{\text{н.обс}}$.

$$P_{\text{н.обс}} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-\alpha} \cdot P_0 \text{ или } P_{\text{н.обс}} = 1 - P_{\text{ож}}.$$

Среднее число пассажиров в очереди можно определить по формулам:

$$m_s = P_{\text{ож}} \cdot \frac{\alpha}{n-\alpha} \text{ или } m_s = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{\alpha n}{(n-\alpha)^2} \cdot P_0.$$

Среднее время ожидания регистрации пассажира в очереди определяется следующим образом:

$$t_s = \frac{m_s \cdot t_{обс}}{n}$$

Среднее время ожидания регистрации и процедуры регистрации пассажира у стойки $t_{рег} = t_{обс} + t_s$.

Среднее число занятых стоек регистрации $\xi_k = \alpha$. По смыслу задачи оно может быть только целым.

Исходные данные по вариантам представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Исходные данные

№ варианта	Период времени (час.)	Тип ВС	Коэффициент загрузки	Среднее время регистрации (сек.)
1.	00-01	A-319; A-320; B-767	0,75	51
2.	01-02	A-320; A-321; B-787	0,76	48
3.	02-03	A-319; A-320; B-757	0,77	42
4.	04-05	A-320; A-321; B-757	0,79	54
5.	05-06	A-319; A-320; B-787	0,81	39
6.	07-08	A-319; A-321; B-757	0,83	51
7.	08-09	A-319; A-321; B-787	0,84	48
8.	09-10	A-320; A-321; B-757	0,85	45
9.	11-12	A-319; A-320; B-757	0,87	39
10.	17-18	A-319; A-320; B-787	0,81	54
11.	18-19	A-330; A-319; A-320	0,82	48
12.	19-20	A-320; A-321; B-757	0,83	39

Средние данные о количестве кресел для определённых типов ВС приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

Исходные данные

Тип ВС	Количество кресел
А-319	156
А-320	140
А-321	160
А-330	360
В-757	200
В-767	260
В-787	240

Рекомендуемая литература

1. Гармаш А. Н., Орлова И. В., Федосеев В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели. Учебник для бакалавриата и магистратуры – М.: Юрайт, 2019.
2. Ниворожкина Л. И., Арженовский С. В. Многомерные статистические методы в экономике. Учебник для вузов – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2018.
3. Елисеева И. И., Курышева С. В., Гордеенко Н. М. и др. Практикум по эконометрике. – М.: Финансы и статистика, 2008.