

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра технической механики и инженерной графики

Ю.В. Петров

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Тексты лекций

*Утверждено редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия*

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 539.3/.6
ББК 605
ПЗ1

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

Самойленко В.М. (МГТУ ГА) – д-р техн. наук, профессор;
Обчинников В.В. (МГТУ им. Баумана) – д-р техн. наук, профессор

Петров Ю.В.

ПЗ1 Сопrotивление материалов [Текст] : тексты лекций / Ю.В. Петров. – М. :
ИД Академии Жуковского, 2021. – 68 с.

ISBN 978-5-907275-96-6

Данные тексты лекций издаются в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Сопrotивление материалов» по учебному плану для студентов по направлению подготовки 25.03.01 (ГСМ) всех форм обучения.

В текстах лекций рассматриваются основные вопросы сопротivления материалов, как базовой дисциплины проблем прочности конструкций. В строгом соответствии с рабочей программой для обучающихся по направлению подготовки 25.03.01 изучаются проблемы, представляющие практический интерес для специалистов: методы расчетов на прочность и жесткость при растяжении – сжатии, кручении и поперечном изгибе.

Рассматриваются также вопросы исследования напряженно-деформированного состояния статически неопределимых систем.

Вводятся основные понятия и определения, обосновываются принятые допущения, приводится анализ результатов и особенности их практического применения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 16.03.2021 г. и методического совета 24.03.2021 г.

УДК 539.3/.6

ББК 605

Св. тем. план 2021 г.
поз. 19

ПЕТРОВ Юрий Владимирович
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Тексты лекций

В авторской редакции

Подписано в печать 17.05.2021 г.

Формат 60x84/16 Печ. л. 4,25 Усл. печ. л. 3,95

Заказ № 759/0330-УП04 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского

125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А

Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907275-96-6

© Московский государственный технический
университет гражданской авиации, 2021

Тема 1. Введение в дисциплину. Основные понятия и гипотезы. Силы и их классификация

1.1. Введение

Первые шаги в развитии теоретического направления науки о прочности были предприняты отцом современной науки Галилео Галилеем (1564–1642 г.г.). В его работах содержится решение некоторых задач (с современной точки зрения не совсем верное) о прочности балки в зависимости от ее размеров и действующей нагрузки.

Мощный толчок развитию науки о прочности дало дифференциальное и интегральное исчисление, созданное И. Ньютоном и Г. Лейбницем. С его использованием различные прочностные задачи решали такие знаменитые ученые, как Леонард Эйлер (впервые решил задачу об устойчивости колонны при сжатии), Даниил Бернулли (положил начало теории изгиба балок). В 1678 г. английский ученый Роберт Гук (1635–1703 г.г.) экспериментально установил закон деформирования упругих тел, согласно которому деформация упругого тела прямо пропорциональна действующему на него усилию. Этот закон является одним из фундаментальных в механике деформируемого тела. Суть опытов Гука состоит в следующем (рис. 1.1).

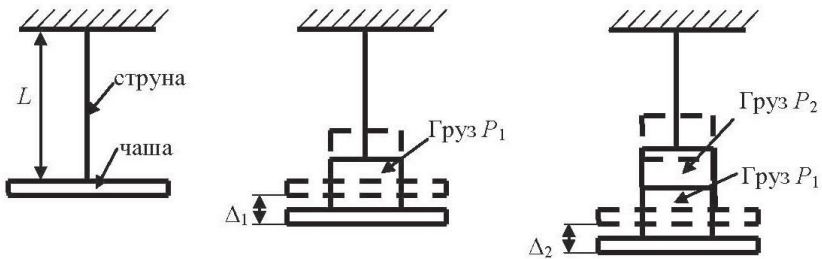


Рис. 1.1. Деформация струны Δ_i в зависимости от веса груза P_i

Пусть струна длиной L одним концом прикреплена к основанию, а на другом (свободном) конце к ней подвешена чаша для грузов. Положим на чашу груз весом P_1 (сила тяжести P_1), удлинение струны составит Δ_1 . Затем добавим груз P_2 , удлинение струны будет Δ_2 . Проводя такие опыты, Гук установил, что удлинения Δ_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) струны соотносятся между собой так, как и вызвавшие их грузы ($i = 1, 2, 3 \dots$), т. е.

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

или, обобщая

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} = \frac{P_{i+1}}{P_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Закон Гука можно сформулировать так: вызванная некоторой силой P деформация упругого тела Δ пропорциональна этой силе, причем коэффициент пропорциональности k является характеристикой деформируемого тела:

$$P = k \Delta.$$

Быстрое развитие науки о сопротивлении материалов началось в конце XVIII столетия в связи с бурным развитием промышленности и транспорта. Большой вклад в ее формирование на протяжении XIX-XX веков внесли такие зарубежные ученые, как Т. Карман, А. Кастильяно, О. Коши, Ш. Кулон, Г. Ламе, А. Ляв, Д. Максвелл, О. Мор, Л. Прандтль, С. Пуассон.

Развитию науки о сопротивлении материалов и совершенствованию учебной дисциплины в нашей стране содействовали работы Д.И. Журавского по теории изгиба балок и мостовым фермам, Ф.С. Ясинского и С.П. Тимошенко по устойчивости упругих систем, И.Г. Бубнова и А.Н. Крылова по прочности и строительной механике корабля, Б.Г. Галеркина - автора фундаментальных исследований по теории пластин и оболочек, И.М. Рабиновича - исследователя в области строительной механики стержневых систем, А.С. Вольмира и А.А. Уманского по строительной механике летательных аппаратов и многих других.

1.2. Цели и задачи сопротивления материалов

Основной задачей науки о сопротивлении материалов является разработка инженерных методов расчета элементов конструкции на **прочность, жесткость и устойчивость.**

Под прочностью в широком смысле этого слова можно понимать способность конструкции воспринимать без разрушения заданные внешние нагрузки в течение определенного времени.

Разрушение конструкции (фактическое прекращение ее существования, как единой конструкции; невозможность дальнейшего выполнения возложенных на нее функций) может происходить по следующим причинам.

1. Потеря прочности. Здесь имеется в виду потеря прочности в узком смысле слова – нарушение целостности конструкции или ее элементов.
2. Потеря жесткости, т.е. появление недопустимых деформаций конструкции при ее эксплуатации.
3. Потеря устойчивости, т.е. появление недопустимых форм равновесия конструкции или ее элементов.

Можно сформулировать три основные расчетные задачи сопротивления материалов:

1. Проверка выполнения условия прочности (жесткости, устойчивости) данного элемента конструкции при заданной нагрузке.
2. Подбор оптимальных геометрических параметров элементов конструкций, при которых исключается возможность потери прочности (жесткости, устойчивости).
3. Определение предельных нагрузок, при которых конструкция не теряет прочность (жесткость, устойчивость).

1.3. Реальный объект и расчетная схема

Реальная конструкция всегда чрезвычайно сложна и учет ее особенностей практически невозможен из-за их неисчерпаемости. Решение прочностных задач всегда сопровождается упрощениями, принятием гипотез, достаточно достоверно отражающих на языке математики поведение объекта в процессе нагружения. В этом процессе конструкция упрощается, отбрасывается все второстепенное, и сохраняются ее главные, определяющие несущую способность, параметры. **Модель реального объекта, освобожденная от несущественных в данном конкретном расчете особенностей, носит название расчетной схемы.**

Совершенство расчетной схемы зависит от глубины понимания исследователем особенностей работы объекта в реальных условиях применения. Умение удачно выбрать расчетную схему и определяет квалификацию инженера, талант проектировщика. Если для одного объекта может быть предложено несколько расчетных схем, то и одной расчетной схеме может быть поставлено в соответствие значительное число реальных объектов.

Ряд рассматриваемых ниже расчетных схем (моделей) объектов и явлений используются практически во всех разделах механики деформируемого тела, а не только в сопротивлении материалов.

Модели изучаемых объектов

При всем разнообразии конструктивных элементов, встречающихся в технике, их можно свести к сравнительно небольшому числу форм. К ним относятся: брус, оболочка (пластинка), массив.

Б р у с о м называют тело, одно из измерений которого (длина) намного превышает размеры поперечного сечения (рис. 1.2).

Продольная ось бруса (стержня) - линия, проходящая через центры тяжести (центры площади) поперечных сечений бруса. *Поперечное сечение бруса (стержня)* - сечение бруса плоскостью, перпендикулярной его продольной оси.

Брус бывает постоянного по длине или переменного поперечного сечения. В зависимости от формы продольной оси брус может быть прямым, криволинейным или пространственно-изогнутым. Если брус работает на растяжение – сжатие, то он называется *стержнем*. Брус, работающий в условиях кручения, называют *валом*, в условиях изгиба – *балкой*. Так, к расчетной схеме бруса могут приводиться такие элементы конструкции ЛА, как крыло, лопасть несущего винта вертолета, элементы оперение и др.

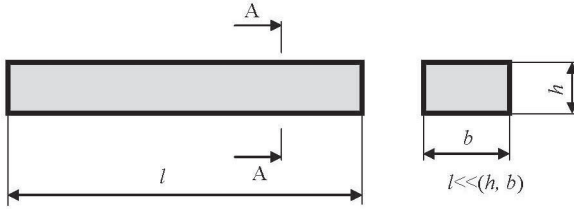


Рис. 1.2. Брус

Оболочки - тела, одно из измерений которых (толщина) много меньше двух других (рис. 1.3). Частным случаем оболочки является плоская пластина.

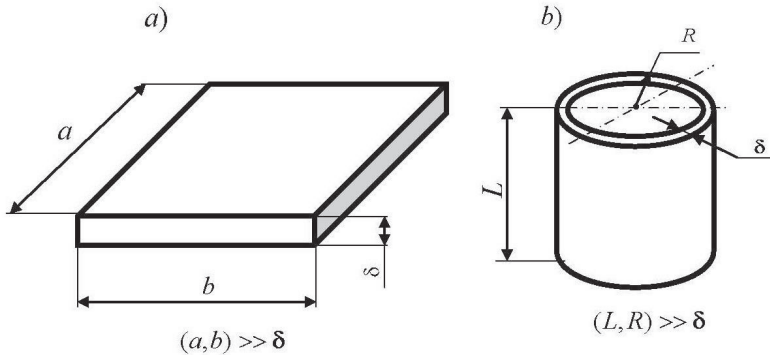


Рис. 1.3. Элементы конструкции, приводимые к схеме пластины (а), цилиндрической оболочки (б)

Тела, у которых все три характерных размера сравнимы по величине, называют *массивами*.

Модели материалов

Важным этапом формирования расчетной схемы является описание свойств конструкционных материалов. Расчетные методы сопротивления материалов базируются на двух основных гипотезах: гипотеза сплошности материала; гипотеза однородности и изотропности среды.

1. Гипотеза о сплошности среды (материала)

На рис. 1.4 представлены три уровня моделей материала: физическая модель кристаллической решетки (рис. 1.4а), используемая при изучении влияния несовершенства кристаллической решетки на прочность материала; инженерно-физическая модель (совокупность зерен, рис. 1.4б) - для выработки

научных основ статистического описания механических свойств материалов; инженерная модель (модель сплошной среды, рис. 1.4в) - для разработки инженерных методов расчета элементов конструкции на прочность, жесткость и устойчивость. В соответствии с этой гипотезой материал, из которого изготавливается конструкция, считается сплошной средой. Это самая универсальная из гипотез о материале. Отсюда вытекает весьма важное следствие: *внутренние силы и связанные с ними деформации и перемещения являются непрерывными функциями координат*, а значит, для анализа и описания этих функций применим аппарат математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление).

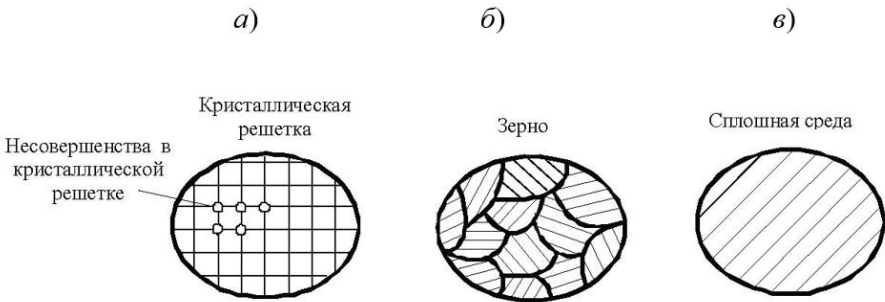


Рис. 1.4. Модели материала: *а* — физическая модель, *б* — инженерно-физическая модель, *в* — инженерная модель (модель сплошной среды)

2. Гипотеза об однородности и изотропности среды

Эта гипотеза в основном используется при инженерных расчетах металлических элементов конструкций. Согласно этой гипотезе свойства сплошной среды, представляющей материал элемента, одинаковы во всех точках, а в каждой конкретной точке одинаковы по всем направлениям. Конечно, на практике встречаются и анизотропные материалы - дерево, ткани, композитные материалы и т. д.

Модели нагрузок. Силы и их классификация

Внешние силы (нагрузки), действующие на деформируемое тело, принято делить на:

- статические (стационарные) и динамические (нестационарные) (т.е. независимые и зависящие от времени);
- поверхностные и объемные;
- сосредоточенные и распределенные.

По характеру приложения во времени нагрузки подразделяются на статические и динамические. Нагрузки, медленно изменяющиеся по времени от нуля до своего конечного значения, называются статическими; силами инерции здесь пренебрегают. Динамические нагрузки сопровождаются

значительными ускорениями точек деформируемого тела. При этом возникают силы инерции, которыми пренебречь нельзя. Динамические нагрузки, в свою очередь, делят на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные. Авиационные конструкции многоразового пользования подвергаются, как правило, действию переменных нагрузок, называемых повторно-переменными.

Объемные силы действуют непрерывно по всему объему тела. Примерами объемных сил могут служить сила тяжести, центробежные силы, электромагнитные силы и силы инерции. Поверхностные силы приложены к точкам поверхности тела и являются результатом взаимодействия твердых тел или воздействия на них внешней среды, например, набегающего потока воздуха на крыло ЛА (воздушная нагрузка).

Часто нагрузку, распределенную по поверхности p (рис. 1.5а), приводят к главной плоскости, в результате чего получается нагрузка q , распределенная по линии или погонная нагрузка (рис. 1.5б). Очевидно, что размерность распределенной по площади нагрузки Н/м^2 , а погонной – Н/м . В технической литературе часто погонную нагрузку q называют распределенной, в том смысле, что она распределена по длине конструктивного элемента.

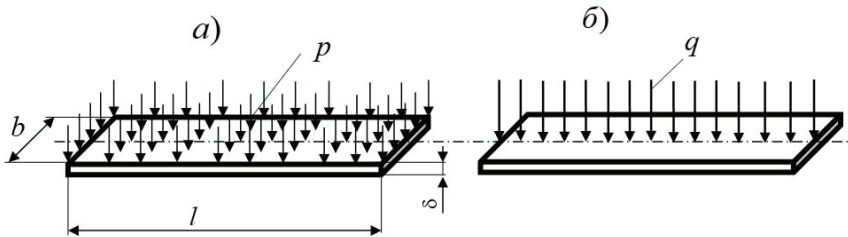


Рис.1.5. Распределенная (а) и погонная (б) нагрузки

Иногда возникает необходимость приведения распределенной по поверхности или погонной нагрузки к эквивалентной сосредоточенной силе. При этом абсолютное значение эквивалентной силы равно площади эпюры распределенной нагрузки (графика изменения распределенной нагрузки по длине элемента конструкции) и приложена она в центре тяжести такой эпюры. Так, на рис. 1.6 показаны схемы перехода от реально действующей погонной нагрузки к эквивалентной силе $P_{\text{экв}}$ для двух простейших случаев: равномерной погонной нагрузки и нагрузки, распределенной по линейному закону. Очевидно, что переход допустим лишь в том случае, если длина участка действия погонной нагрузки существенно меньше длины всего объекта в целом, как это показано на рис. 1.7.

Все реально действующие внешние нагрузки распределены по некоторому конечному участку тела. Тем не менее, при схематизации реальных объектов

(например, узлов крепления) в сопротивлении материалов делаются упрощения в системе сил, приложенных к элементу конструкции. Смысл упрощения, при котором вводится понятие сосредоточенной силы, ясен из рис. 1.7 (при $l \ll L$ сила P , действующая в узле крепления груза, считается сосредоточенной). Аналогично может быть рассмотрено введение понятия сосредоточенного момента.

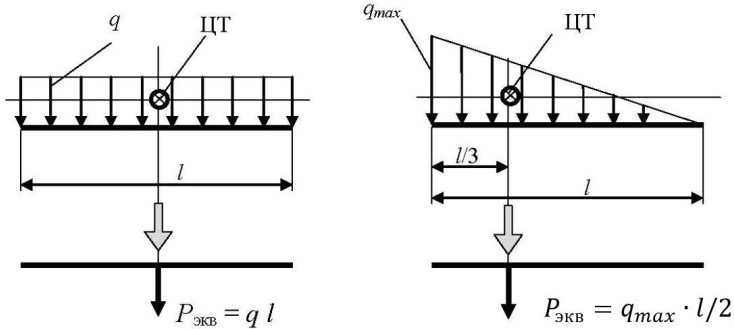


Рис.1.6. Схема перехода к эквивалентной нагрузке

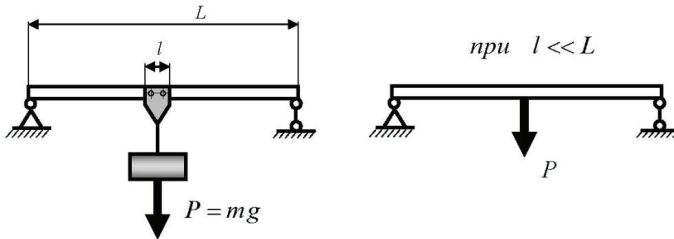


Рис. 1.7. К выбору представления силы в расчетной схеме

Модели опор

Опорные устройства (связи) препятствуют тем или иным перемещениям тела или вообще исключают их. Опорные устройства классифицируются по числу накладываемых на объект связей (ограничений). Если нет специальных указаний, опорные связи и поверхности считаются абсолютно жесткими. При нагружении тела на него со стороны опорных связей (поверхностей) действуют силы, называемые опорными реакциями. Для плоского тела (в частности, бруса) основными видами опор являются: шарнирно-неподвижная (рис. 1.8), шарнирно-подвижная (рис. 1.9) и жесткое защемление (рис. 1.10). На этих же рисунках показаны реакции в таких опорах.

Количество реакций, которые в процессе расчета относят к внешним нагрузкам, определяется количеством исключенных перемещений. При «запрете» линейного смещения точки крепления тела к опоре возникает сила по направлению этого смещения (на рисунках R_x^O, R_y^O) при запрете углового смещения возникает момент (на рисунке M_R).

При действии внешних нагрузок на тело силы взаимодействия между его частями получают некоторые приращения, которые называются внутренними силами или усилиями. Именно они, как будет ясно из дальнейшего, определяют прочность элемента конструкции. Расчетное определение внутренних усилий – одна из основных задач сопротивления материалов.

Для нахождения реакций опор и внутренних усилий составляют уравнения равновесия тела и его частей. Как известно из теоретической механики, таких уравнений для каждой мысленно выделенной части упругого тела можно составить 3 на плоскости и 6 в пространстве.

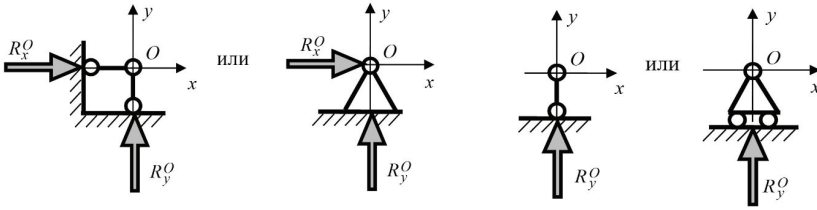


Рис. 1.8. Шарнирно-неподвижная опора Рис. 1.9. Шарнирно-подвижная опора

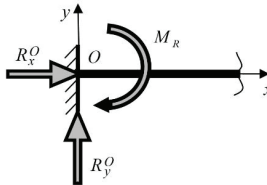


Рис. 1.10. Защемление (заделка)

В зависимости от соотношения числа независимых уравнений статики (N_y) и неизвестных (N_H) в этих уравнениях реакций опор можно провести следующую классификацию упругих систем.

1. $N_y > N_H$ - геометрически изменяемая система или механизм. Для исследования такой системы необходимо использовать уравнения динамики, в которые войдут ускорения системы (рис. 1.11, где $N_y = 3$, $N_H = 2$).

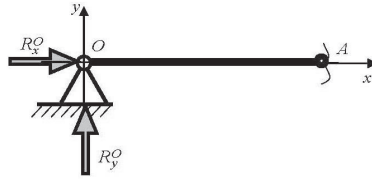


Рис. 1.11. Геометрически изменяемая система

2. $N_y = N_n$ - геометрически неизменяемая статически определимая система (рис. 1.12а, где $N_y = N_n = 3$).
3. $N_y > N_n$ - геометрически неизменяемая статически неопределимая система (рис. 1.12б, где $N_y = 3$, $N_n = 4$) Для исследования такой системы необходимо уравнения статики дополнить так называемыми уравнениями совместности деформаций, которые будут рассматриваться ниже.

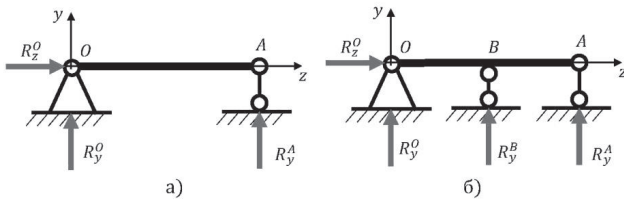


Рис. 1.12. Геометрически неизменяемые системы

1.4. Основные гипотезы сопротивления материалов

Для решения прикладных инженерных задач в сопротивлении материалов принимается ряд дополнительных гипотез, далеко не всегда применяемых (и применимых) в других, более специализированных отраслях механики деформируемого тела (теория упругости, теория пластичности и др.). Использование этих гипотез, оправданное повседневной инженерной практикой и согласием с некоторыми точными решениями задач теории упругости, позволяет получить решение многих важных прикладных задач в конечном виде, удобным для прочностных расчетов.

Принцип Сен-Венана

Сущность принципа Сен-Венана состоит в следующем: некоторую совокупность внешних сил (рис. 1.13), действующих на малой части тела, можно заменить другой совокупностью внешних сил, статически

эквивалентной исходной, при этом внутренние усилия и деформации, соответствующие этим нагрузкам, будут отличаться только в непосредственной близости (на удалении до l_0) от места приложения обеих совокупностей сил. При удалении от места приложения этих совокупностей сил внутренние усилия и деформации будут все меньше отличаться друг от друга. Иначе говоря, **способ приложения внешней нагрузки сказывается на внутренних усилиях и деформациях только на малом расстоянии l_0 от места ее приложения.**

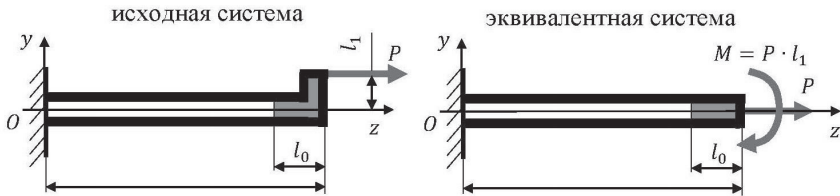


Рис. 1.13. К сущности принципа Сен-Венана

Принцип Сен-Венана не имеет теоретического обоснования (основан на опыте), однако, играет большую роль в механике деформируемого тела, позволяя:

- заменить нагрузку на заданном участке другой нагрузкой, статически ей эквивалентной;
- правильно организовать экспериментальные исследования для проверки теоретических положений;
- проводить анализ напряженно-деформированного состояния в местах крепления конструкции и действия нагрузок.

Принцип начальных размеров

Любое реальное тело под действием на него внешних сил деформируется, т.е. его размеры и форма определенным образом изменяются. Изменения же габаритных геометрических размеров элементов конструкций под действием допустимых эксплуатационных нагрузок обычно невелики по сравнению с их исходными размерами. Поэтому в сопоставлении материалов деформации или можно пренебрегать, рассматривая тело (элемент конструкции) как недеформированное, имеющее те же габаритные геометрические размеры, как и до нагружения внешними силами. Это допущение получило название принципа начальных размеров. Конечно, этот принцип нельзя применять в случае больших деформаций. Кроме того, он может оказаться неприемлемым при малых перемещениях, приводящих к существенному изменению формы конструкции (мгновенно изменяемые системы).

Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)

Допущение о малости деформаций делает возможным применение принципа независимости действия сил. Этот принцип в сопротивлении материалов формулируется следующим образом: *результат одновременного действия нескольких групп сил совпадает с суммой результатов, обусловленных действием каждой группы сил в отдельности.*

Рассмотрим двухопорную балку, изображенную на рис. 1.14. Приложим в некоторой произвольной точке силу P_1 , которая вызовет в точке А перемещение f_{A1} . Согласно закону Гука это перемещение можно вычислить так $f_{A1} = k_{A1} \cdot P_1$, где k_{A1} - коэффициент пропорциональности. Теперь устраним действие силы P_1 и в некоторой другой произвольной точке приложим силу P_2 , от действия которой точка А переместится на величину $f_{A2} = k_{A2} \cdot P_2$. Очевидно, что коэффициенты пропорциональности k_{A1} и k_{A2} не равны между собой, так как силы P_1 и P_2 приложены в разных точках балки.

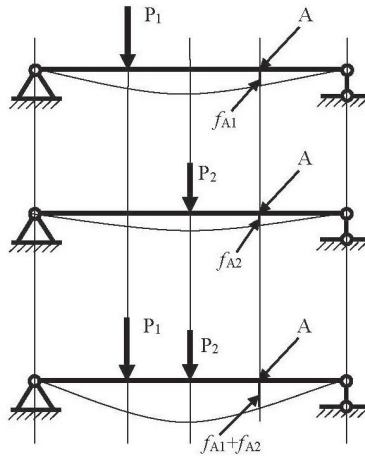


Рис. 1.14. Принцип независимости действия сил

Рассмотрим теперь совместное действие сил P_1 и P_2 . В соответствии с принципом независимости действия сил имеем:

$$f_{\Sigma A} = f_{A1} + f_{A2} = k_{A1} \cdot P_1 + k_{A2} \cdot P_2.$$

Видно, что суммарное перемещение в точке А определяется как сумма перемещений от независимо действующих сил P_1 и P_2 .

Таким образом, принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) можно сформулировать и так: *результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения.*

Закон Гука

При малых деформациях большинство тел можно считать линейно-упругими. Это означает, что при снятии внешней нагрузки тело полностью восстанавливает свою форму и размеры (идеальная упругость), и, кроме того, наблюдается линейная связь между силами P и смещениями Δ :

$$P = k \cdot \Delta,$$

где k – коэффициент пропорциональности (жесткости), зависящий от вида и материала конструкции.

Действующие на упругое тело внешние силы совершают над ним работу. Эта работа, согласно закону сохранения механической энергии, переходит в потенциальную энергию упругой деформации. При сделанных выше допущениях и в предположении о квазистатическом приложении силы P потенциальная энергия легко определяется с помощью теоремы Клапейрона.

При медленном (квазистатическом) нагружении вся работа внешней нагрузки переходит в потенциальную энергию U :

$$A_{\text{нагр}} = U.$$

Рассмотрим пример работы под нагрузкой консольного стержня (рис. 1.15а) или двухопорной балки (рис. 1.15б), на которые действует сила P . При этом характерные точки обеих систем переместятся на величину Δ , а при дополнительном нагружении dP – на $d\Delta$.

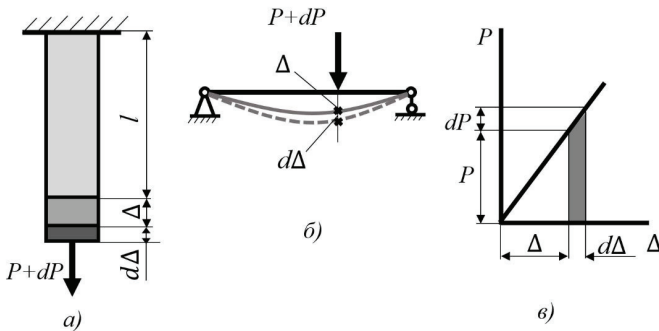


Рис. 1.15. К определению работы внешних сил

Элементарная работа равна (рис. 1.15в) $dA = (P + dP)d\Delta \approx P \cdot d\Delta$.

Полная работа, совершаемая силой P , вызвавшей перемещение Δ , будет

$$A = \int_{\Delta} P \cdot d\Delta.$$

Этот интеграл представляет собой заштрихованную площадь диаграммы, и, значит, для линейно-упругой системы будет численно равен площади треугольника:

$$U = A_{\text{нагр}} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta.$$

Данное равенство называется теоремой Клапейрона и имеет очень большое значение при исследовании перемещений различных упругих систем.

При действии на систему нескольких сил (N) теорема Клапейрона принимает вид:

$$U = A_{\text{нагр}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_i \Delta_i.$$

Тема 2. Метод сечений

2.1. Напряженное и деформированное состояние в точке. Метод сечений

Под действием внешних сил тела изменяют свою форму - деформируются. В телах при внешнем воздействии (нагрузении) возникают внутренние силы взаимодействия между частицами (атомами, молекулами), оказывающие противодействие внешним силам и стремящиеся вернуть частицы тела в положение, которое те занимали до деформации. **Мерой интенсивности внутренних сил является физическая величина, которая называется напряжением.**

В сопротивлении материалов не рассматривают начальные внутренние силы в упругом теле (в ненагруженном состоянии), а изучают дополнительные внутренние силы, которые появляются в результате нагружения тела внешними силами. Внутренние силы часто называются усилиями. Для решения задач о прочности конструкций надо уметь определять внутренние силы. Для этого в сопротивлении материалов широко применяется метод сечений (рис. 2.1).

Суть метода сечений заключается в следующем. Рассматривается упругое тело, нагруженное некоторой системой внешних сил P_1, P_2, \dots, P_N . Так как решается статическая задача, то будем полагать, что под действием заданной системы внешних сил тело находится в состоянии равновесии. Произвольной секущей плоскостью T мысленно разделим исходное тело на две части A и B . В этом случае в секущей плоскости действует некоторая самоуравновешенная система внутренних сил, которые по отношению к частям A и B являются условно внешними. Так как мысленное рассечение тела на части не отменяет условия его равновесия, то новая система сил (включает внутренние силы), действующих на части A и B , также должна быть самоуравновешенной. Распределенные по секущей плоскости элементарные внутренние силы, используя методы теоретической механики, можно привести к главному вектору внутренних сил $P_{\text{вн}}$ и главному моменту внутренних сил $M_{\text{вн}}$. Данные эквивалентные (интегральные) внутренние силы совместно с внешними силами обеспечивают равновесие отсеченной части тела, а значит, составив уравнения его равновесия можно найти неизвестные внутренние силы: главный вектор внутренних сил $P_{\text{вн}}$ и главный момент внутренних сил $M_{\text{вн}}$.

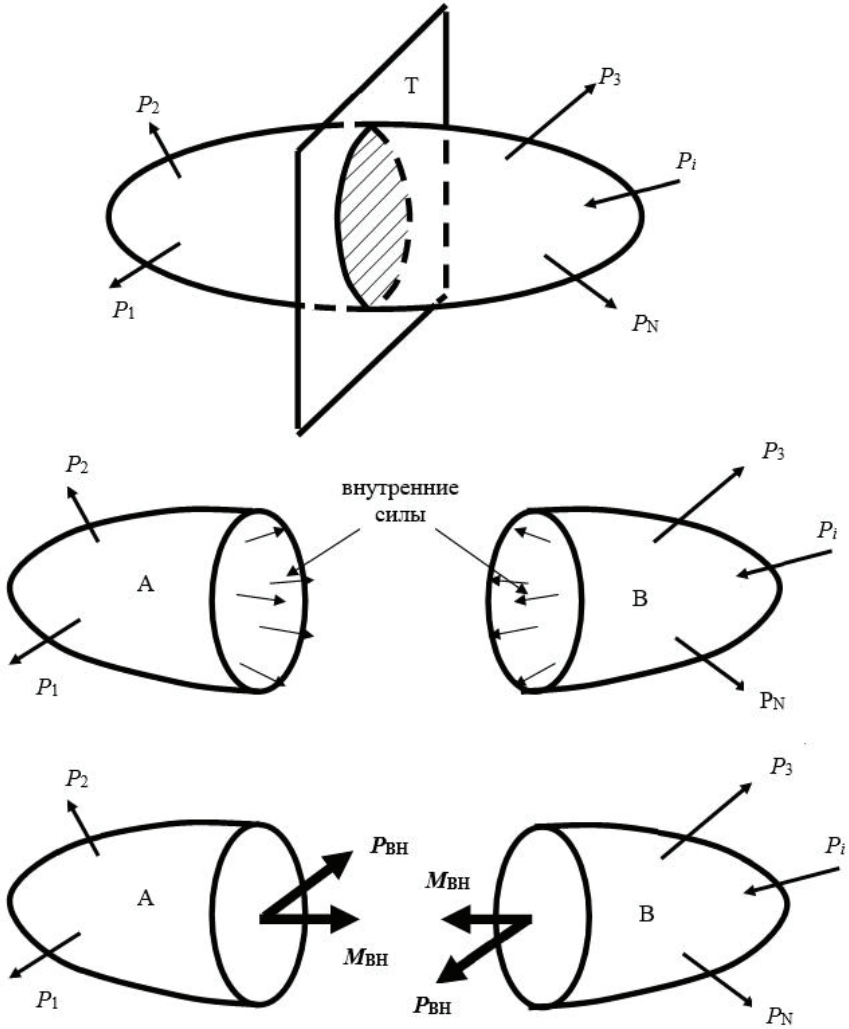


Рис.2.1. Метод сечений

Выделим в рассматриваемом сечении в окрестностях точки K малую площадку ΔF с единичным вектором нормали \mathbf{n} (рис. 2.2a). Главный вектор внутренних сил, действующих на этой элементарной площадке ΔF , обозначим

через $\Delta P_{\text{вн}}$. В общем случае напряжения, как мера интенсивности внутренних сил, по данной площадке распределены неравномерно, однако, уменьшая величину площадки ΔF , можно степень неравномерности этого распределения уменьшить. Среднее напряжение на площадке ΔF тогда будет

$$\frac{\Delta P_{\text{вн}}}{\Delta F} = p_{\text{нсп}}.$$

В пределе при $\Delta F \rightarrow 0$ получим абсолютное значение полного напряжения в точке K

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P_{\text{вн}}}{\Delta F} = p_n.$$

Вектор полных напряжений p_n зависит не только от действующих на тело внешних сил и координат рассматриваемой точки, но и от ориентации в пространстве площадки ΔF , характеризуемой вектором n . Совокупность всех векторов напряжений в точке K для всевозможных направлений вектора n определяет напряженное состояние в точке K .

В общем случае направление вектора полных напряжений p_n не совпадает с направлением вектора нормали n . Проекция вектора p_n на направление нормали к площадке называется нормальным напряжением σ , а проекции на плоскость, проходящую через точку K и ортогональную вектору n — касательным напряжением τ (рис. 2.2б). В совокупности нормальные и касательные напряжения относят к **дифференциальным внутренним силовым факторам**.

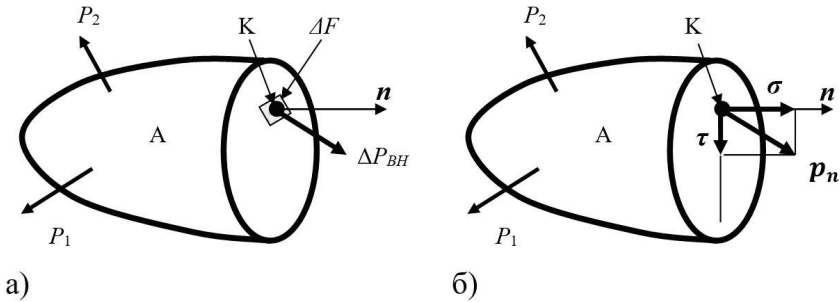


Рис. 2.2: а — полное внутреннее усилие на площадке ΔF в сечении тела, б — нормальные σ и касательные τ напряжения в сечении тела

Нормальное напряжение σ считается положительным, если оно направлено от площадки (на растяжение). Напряжения в системе единиц СИ измеряются в Паскалях (Па): $1 \text{ Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

При действии внешних сил наряду с возникновением напряжений происходит изменение объема тела и его формы, т.е. тело деформируется. При этом различают начальное (недеформированное) и конечное (деформированное) состояния тела. Деформация тела может быть упругой, исчезающей после снятия нагрузки, и пластической - остаточные (не исчезающие) деформации.

Отнесем недеформированное состояние тела к декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 2.3).

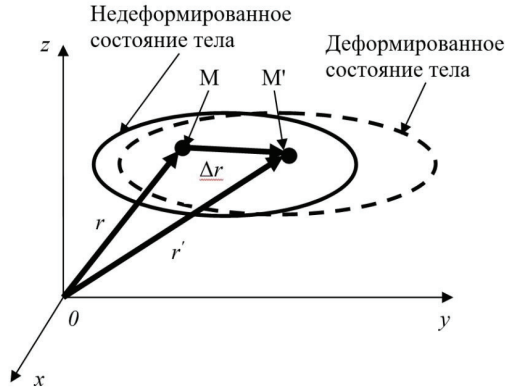


Рис. 2.3. К определению деформации тела

Положение некоторой точки M в недеформированном состоянии тела определяется радиус-вектором $\mathbf{r}(x, y, z)$. После деформации тела точка M занимает положение M' , характеризуемое радиус-вектором $\mathbf{r}'(x, y, z)$. Вектор $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ называется **вектором перемещения точки M** . Проекции вектора $\Delta \mathbf{r}$ на координатные оси определяют его компоненты соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz .

Интенсивность изменения формы и размеров твердого тела характеризуется физической величиной, которая называется деформацией (не путать с самим явлением изменения формы и размеров, которое тоже называют деформацией). Деформация подразделяется на линейную (рис. 2.4 слева) и угловую (рис. 2.4 справа). Угловую деформацию часто называют деформацией сдвига или углом сдвига.

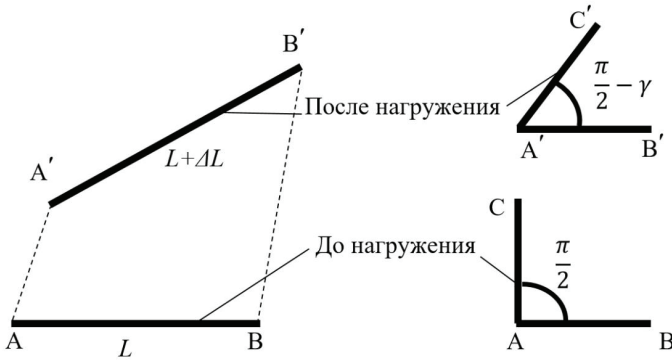


Рис. 2.4. К определению линейной и угловой деформаций в точке A

Числовое значение деформации определяется по приведенным ниже формулам, и, очевидно, является безразмерной величиной:

$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{cp}$ - средняя относительная линейная деформация по направлению AB ;

$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon$ - относительная линейная деформация в точке A по направлению AB ;

$\angle BAC - \angle B'A'C' = \gamma_{cp}$ - средняя относительная угловая деформация в плоскости ABC ;

$\lim_{B, C \rightarrow A} (\angle BAC - \angle B'A'C') = \gamma$ - относительная угловая деформация в точке A в плоскости ABC .

Таким образом, линейная деформация показывает интенсивность изменения длины (положительна при увеличении длины), а угловая - изменение угла, до деформации бывшего прямым (положительна при уменьшении угла).

Совокупность деформаций в точке A по всевозможным направлениям определяет деформированное состояние в точке A . Напряженное и деформированное состояния, рассматриваемые вместе и во взаимосвязи - это напряженно-деформированное состояние (НДС) в данной точке.

Можно доказать, что для нахождения напряжений и деформаций на любой площадке и по любому направлению в данной точке, достаточно знать:

1. Нормальные и касательные напряжения по направлению координатных осей (рис. 2.5)

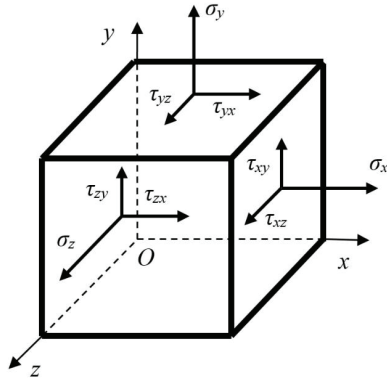


Рис. 2.5. Нормальные и касательные напряжения в окрестности точки А

2. Линейные деформации по направлению координатных осей и угловые деформации в соответствующих координатных плоскостях.

Эти величины образуют соответственно тензор напряжений:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

и тензор деформаций:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

в данной точке упругого тела.

При малых деформациях (при использовании предположений, характерных для сопротивления материалов) напряжения и деформации связаны между собой линейными соотношениями (выполняется так называемый обобщенный закон Гука)

Величина нормальных σ_n и касательных τ_n напряжений, действующих на площадке с вектором нормали \mathbf{n} , зависит от ее ориентации. Среди всех возможных направлений вектора нормали \mathbf{n} , а значит, положения площадки, существует такое направление, при котором полный вектор напряжений \mathbf{p}_n будет параллелен вектору нормали \mathbf{n} . На такой площадке будут действовать только нормальные напряжения, а касательные напряжения будут отсутствовать. Кроме того, среди множества площадок, проходящих через точку тела, всегда можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, касательные напряжения на которых будут равны нулю.

Площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют, называются главными, а действующие на этих площадках нормальные напряжения - главными нормальными напряжениями. Как будет выяснено далее, по величине главных напряжений можно судить о близости наступления предельного состояния (разрушения) в данной точке.

Направления нормалей к этим площадкам называются главными направлениями или главными осями.

Главные напряжения принято обозначать $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Индексы надо расставлять так, чтобы выполнялось неравенство: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (с учетом знаков напряжений). Главные напряжения обладают важным свойством: нормальные напряжения $\sigma_i (i = \overline{1, 3})$ на главных площадках принимают экстремальные значения (σ_1 - наибольшее из всех возможных нормальных напряжений в данной точке, а σ_3 - наименьшее).

Итак, напряженное состояние в любой точке может быть охарактеризовано тремя главными напряжениями, действующими по трем взаимно перпендикулярным направлениям. В частных случаях одно или два главных нормальных напряжения могут быть равными нулю. В зависимости от числа действующих главных нормальных напряжений различают три вида напряженных состояний в точке: линейное (одноосное) (рис. 2.6а), плоское (двухосное) (рис. 2.6б) и объемное (трехосное) (рис. 2.6в).

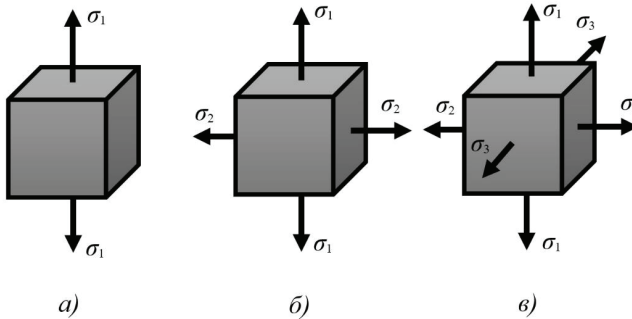


Рис. 2.6. Типы напряженных состояний: одноосное (а), двухосное (б) и трехосное (в)

2.2. Внутренние силовые факторы

Как было показано в п.2.1 действие распределенных по секущей плоскости T внутренних сил (рис. 2.1) можно привести к эквивалентной системе, когда в сечении действует главный вектор внутренних сил \mathbf{P} и главный момент внутренних сил \mathbf{M} (индекс «ВН» опускаем). Если главный вектор \mathbf{P} и главный момент \mathbf{M} внутренних сил разложить по осям координат Ox , Oy и Oz , то в общем случае получим шесть **внутренних интегральных (суммарных) силовых факторов**: три силы N, Q_x, Q_y и три момента M_x, M_y, M_z (рис. 2.7):

N - продольная или нормальная сила;
 Q_x, Q_y - поперечные (перерезывающие) силы;
 $M_z = M_{кр}$ - крутящий момент;
 M_y, M_x - изгибающие моменты.

Заметим, что внутренние силовые факторы имеют ярко выраженный физический смысл. Каждому из них соответствует определенный вид деформации бруса:

- продольной силе N - деформация растяжения (сжатия);
- поперечным силам - деформация сдвига (среза);
- крутящему моменту – деформация кручения;
- изгибающим моментам – деформация изгиба.

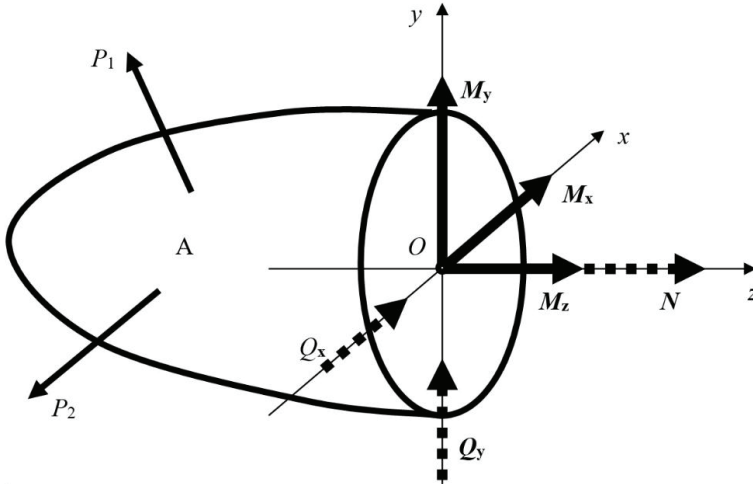


Рис. 2.7. Внутренние интегральные силовые факторы

Любая из отсеченных частей должна находиться в равновесии под действием совокупности внешних сил с одной стороны от сечения и внутренних силовых факторов, возникающих в сечении. Запишем уравнения равновесия (уравнения статики) для левой (индекс «л») отсеченной части А в предположении, что на данную часть тела действует n внешних сил (на рис. 2.7 $n = 2$):

$$\sum_{i=1}^n P_{ix}^l + Q_x = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy}^l + Q_y = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iz}^l + N = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(P_i^l) + M_x = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_y(P_i^l) + M_y = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_z(P_i^l) + M_z = 0,$$

где $P_{ix}^l, P_{iy}^l, P_{iz}^l$ – проекции соответствующих внешних сил P_i на оси связанной с текущим сечением системы координат; $M_x(P_i^l), M_y(P_i^l), M_z(P_i^l)$ – моменты, создаваемые соответствующими внешними силами P_i , относительно осей связанной с текущим сечением системы координат.

Решив эти шесть уравнений, найдем внутренние силовые факторы в любом сечении стержня. Важно понимать, что внутренние силовые факторы заменяют действие мысленно отброшенной части стержня. Так как по третьему закону Ньютона правая часть действует на левую так же, как и левая на правую, то внутренние силовые факторы можно определять из равновесия любой (правой или левой) части стержня, находящегося в равновесии.

2.3. Методы расчета на прочность

В результате расчета на прочность необходимо получить ответ на вопрос, удовлетворяет или нет рассматриваемая конструкция заданным требованиям надежности в реальных условиях эксплуатации. Для этого необходимо сформулировать принципы, которые должны быть положены в основу оценки условий достаточной прочности. Без этого анализ конкретной конструкции сам по себе не имеет целевого назначения. Так, если в конструкции определяются напряжения, то надо предварительно четко представлять, зачем это нужно и что с найденными напряжениями надлежит делать в дальнейшем, как их использовать для оценки надежности конструкции в целом. Аналогично, определяя форму деформированного тела под нагрузкой, нужно понимать, как полученные результаты использовать на практике. Данные вопросы находят свое решение в выборе метода расчета на прочность.

На практике применяются два основных метода расчета на прочность: метод предельных состояний (Н.Н. Стрелецкий) и метод допускаемых напряжений.

Метод предельных состояний (расчет по разрушающим нагрузкам) применяется в основном при расчетах конструкций зданий и сооружений различного назначения. В частности, он используется при расчете на прочность планера ЛА.

При анализе прочности узлов и деталей машиностроительных конструкций, в том числе и авиационных, в основном применяется метод расчета по допускаемым напряжениям. В основу данного метода положено предположение, что критерием надежности конструкции является напряжение или, точнее говоря, напряженное состояние в точке. Общий алгоритм расчета по данному методу состоит в следующем. На основе расчетного анализа конструкции выявляют точку (точки), в которых возникают максимальные внутренние дифференциальные усилия (напряжения) при данной системе внешних сил. Полученное максимальное расчетное напряжение сопоставляют с предельным значением напряжения для материала, из которого изготовлена конструкция. Предельное значение напряжения получают экспериментальным путем для того же материала. Из сопоставления

максимальных расчетных и предельных экспериментальных напряжений делается заключение о прочности конструкции.

Согласно этому методу, вводится понятие *опасного (предельного) напряжения*. Под опасным напряжением при растяжении – сжатии понимается напряжение, соответствующее началу разрушения для хрупких материалов или появлению остаточных деформаций в элементах конструкции для пластичных материалов. Для деталей, изготовленных из пластичного материала, опасным напряжением считают предел текучести σ_T . Для хрупких материалов опасным напряжением считают временное сопротивление (предел прочности) σ_B . Предел текучести σ_T и предел прочности σ_B являются *механическими характеристиками материала*, определяются в процессе эксперимента и приводятся в справочной литературе. Допускаемые напряжения $[\sigma]$ определяют по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}, \quad \sigma_{\text{пред}} = \{\sigma_T, \sigma_B\},$$

где $[n]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности. Он зависит от неоднородности материала, неточности задания внешних нагрузок, приближенности расчетных схем и расчетных формул, тяжести последствий разрушения конструкции. Следует отметить, что элементы конструкции ЛА обычно рассчитываются на прочность по разрушающим нагрузкам. В этом случае используется понятие коэффициента безопасности f , который по своему физическому смыслу подобен допускаемому коэффициенту запаса прочности $[n]$. Для большинства элементов авиационных конструкций этот коэффициент принимается равным 1,5.

Условие прочности при центральном растяжении записывают следующим образом

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma], \quad (1.6)$$

где σ_{max} - максимальное значение расчетных напряжений в стержне. Если известны максимальные расчетные напряжения σ_{max} и допускаемые напряжения $[\sigma]$, то можно вычислить текущий коэффициент запаса прочности n :

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma_{\text{max}}}. \quad (1.7)$$

Очевидно, что если $n > 1$, то стержень удовлетворяет условию прочности при заданной внешней нагрузке и известных геометрических параметрах. **Аналогично могут решаться задачи на жесткость, если задаться опасными значениями перемещений (деформаций). Расчет по условию жесткости базируется на соотношении вида:**

$$n_{\Delta} = \frac{[\Delta l]}{\Delta l_{\text{max}}},$$

где n_{Δ} - коэффициент запаса по жесткости; $[\Delta l]$ - максимальная допускаемая деформация, которая задается по условию задачи (например, из конструктивных соображений); Δl_{max} - максимальная расчетная продольная деформация стержня.

Используя условие прочности (1.6), можно решать три типа задач:

1. По известным нагрузкам и выбранному материалу найти потребные геометрические характеристики элемента конструкции (проектировочный расчет);

2. По известным размерам и материалу элемента конструкции проверить, может ли она выдержать заданную нагрузку (поверочный расчет). При поверочном расчете также определяется фактический коэффициент запаса прочности $n = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}}$, который должен быть больше единицы.

3. По известным размерам, материалу и схеме нагружения элемента конструкции определить величину допускаемой нагрузки.

Тема 3. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении – сжатии

3.1. Нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении стержня. Абсолютная и относительная деформация

Прежде чем исследовать особенности напряженно – деформированного состояния (НДС) стержня при растяжении – сжатии целесообразно сформулировать основные понятия, которые будут использованы в данной теме.

Продольная ось бруса (стержня) – непрерывная линия, проходящая через центры тяжести (центры площади) поперечных сечений бруса.

Поперечное сечение бруса (стержня) - сечение бруса плоскостью, перпендикулярной продольной оси бруса.

Волокно – (понятие вводится для повышения наглядности) цепочка частиц деформируемого тела. Продольные волокна параллельны продольной оси стержня. Реальные волокна существуют в волокнистых материалах, например, дереве. Воображаемые волокна помогают представить картину деформирования.

Центральное растяжение стержня – вид нагружения и деформирования стержня, при котором все внешние силы действуют строго вдоль его продольной оси. Такой вид НДС реализуется лишь в том случае, когда продольная ось стержня прямая линия.

Продольная интегральная сила N является суммой распределенных внутренних сил, действующих в данном поперечном сечении площадью F

$$N = \int_F \sigma dF . \quad (3.1)$$

Если нормальную силу N можно найти, составляя уравнения равновесия для отсеченной части стержня согласно методу сечений (рис.3.1б,в, сечение I-I), то нормальные напряжения σ в каждой точке сечения из соотношения (3.1) найти нельзя, так как в общем случае неизвестно, как они распределены по площади сечения.

Рассмотрим стержень длиной l , на который в общем случае действует сложная система внешних сил: сосредоточенных и направленных вдоль продольной оси (P_1, P_4, P_5, P_6); распределенных q_3 , действующих на участке

длиной l_3 ; сосредоточенных, которые приложены в одной точке продольной оси (P_{21} , P_{22}) и направлены под некоторым углом α к этой оси. В последнем случае силы должны быть равны по величине, чтобы сумма их проекций на поперечную ось равнялась нулю.

Для вычисления нормальных напряжений σ в сечении необходимо знать характер их распределения по сечению. При решении данной задачи применяется обоснованная экспериментальными данными гипотеза плоских сечений (Бернулли). Установлено, что ортогональная система рисок (рис. 3.2а), нанесенная на стержень до нагружения, при малых деформациях остается ортогональной и после его нагружения (рис. 3.2б). Значит, поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси стержня, а продольные волокна не взаимодействуют между собой (остаются прямыми и параллельными оси) и удлиняются на одну и ту же величину.

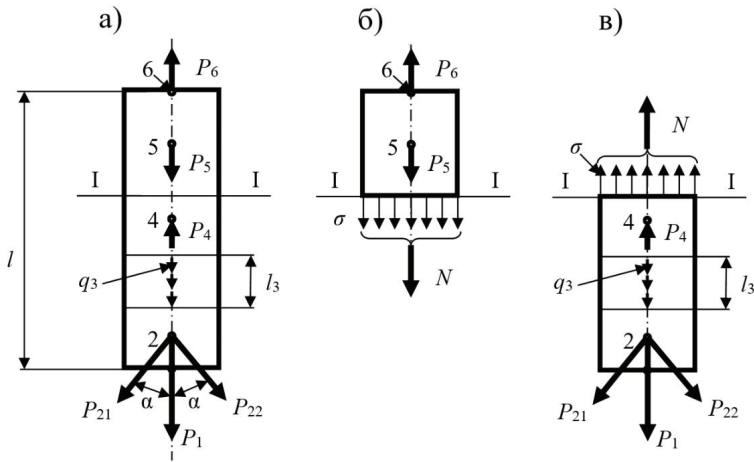


Рис. 3.1. Центральное растяжение стержня

Ортогональность продольных и поперечных рисок свидетельствует также об отсутствии сдвигов, а следовательно, и связанных с ними касательных напряжений τ в поперечных и продольных сечениях стержня. *При этом можно утверждать, что при центральном растяжении – сжатии нормальные напряжения σ равномерно распределены по сечению.* Однако следует учитывать, что такой характер распределения нормальных напряжений (гипотеза Сен-Венана) справедлив лишь на некотором удалении от точки приложения внешней силы.

Тогда нормальные напряжения в текущем сечении стержня с координатой z (ось Oz совпадает с продольной осью стержня) при центральном растяжении – сжатии равны

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F(z)}, \quad (3.2)$$

где $F(z)$ - площадь поперечного сечения стержня в текущем сечении z . При растяжении $\sigma > 0$, а при сжатии $\sigma < 0$.

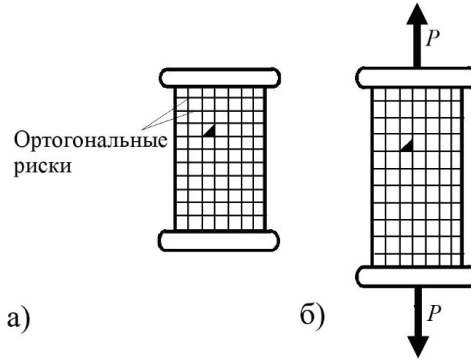


Рис. 3.2. Гипотеза плоских сечений

Рассмотрим подробнее изменение напряжений в сечениях стержня, которые не перпендикулярны его продольной оси, на так называемых наклонных площадках.

Определение напряжений на наклонных площадках при растяжении – сжатии стержня

Рассмотрим однородный растянутый стержень (рис.3.3а), в поперечных сечениях которого действуют равномерно распределенные напряжения σ . Проведем произвольную секущую плоскость а-б, которая наклонена по отношению к поперечному сечению стержня на угол α . Определим напряжения, действующие в этой наклонной плоскости. Очевидно, что полное напряжение p на данной площадке, согласно условию однородности, будет постоянным в любой ее точке.

Равнодействующая внутренних сил в сечении должна быть направлена по оси стержня и равна растягивающей силе в поперечных сечениях, т.е.

$$pF_\alpha = \sigma F,$$

где F_α - площадь наклонного (косого) сечения, причем $F_\alpha = F / \cos \alpha$. Тогда полное напряжение на наклонной площадке равно $p = \sigma \cos \alpha$. Раскладывая это напряжение по нормали и по касательной к наклонной площадке (рис. 3.3б, в), находим

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha, \quad \tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha$$

или, учитывая $p = \sigma \cos \alpha$, имеем

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = 1/2 \cdot \sigma \cdot \sin 2\alpha. \quad (3.3)$$

Видно, что в одной и той же точке А растянутого стержня значения возникающих в сечении напряжений оказываются различными в зависимости от ориентации наклонной площадки (угла α). Поэтому утверждение о том, что при растяжении – сжатии стержня возникают только нормальные напряжения не корректно, это справедливо только для поперечных сечений. Анализ формул (3.3) показывает, что в поперечных сечениях стержня ($\alpha=0^\circ$) нормальные напряжения достигают максимального значения, а касательные равны нулю. В продольных сечениях ($\alpha=90^\circ$) и нормальные, и касательные напряжения равны нулю. Касательные напряжения достигают максимального значения $\tau_{max} = \sigma/2$ на площадках, наклоненных под углом 45° к поперечному сечению стержня.

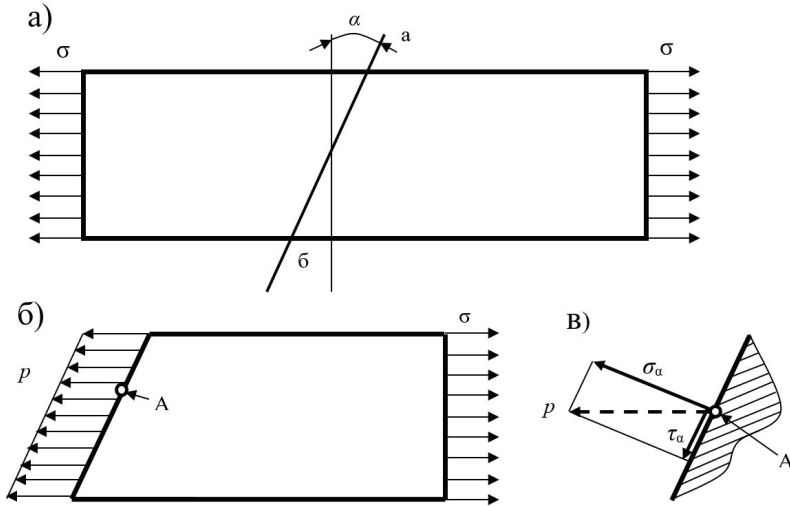


Рис. 3.3. Напряжения на наклонных площадках

Выделим в растянутом стержне (рис. 3.4) прямоугольник ABCD, причем стержень представляет собой пластину толщиной h . Нормальные и касательные напряжения, действующие по граням данного прямоугольника, определяются формулами (3.3). Причем для вычисления напряжений на гранях AB и CD формулу (3.3) необходимо подставить угол α , а для вычисления напряжений по граням BC и DA угол $\alpha+90^\circ$. Важно отметить, что переход от произвольной площадки, наклоненной на угол α , к площадке, наклоненной на угол $\alpha+90^\circ$ не

сказывается на абсолютном значении касательных напряжений, а изменяет лишь их направление.

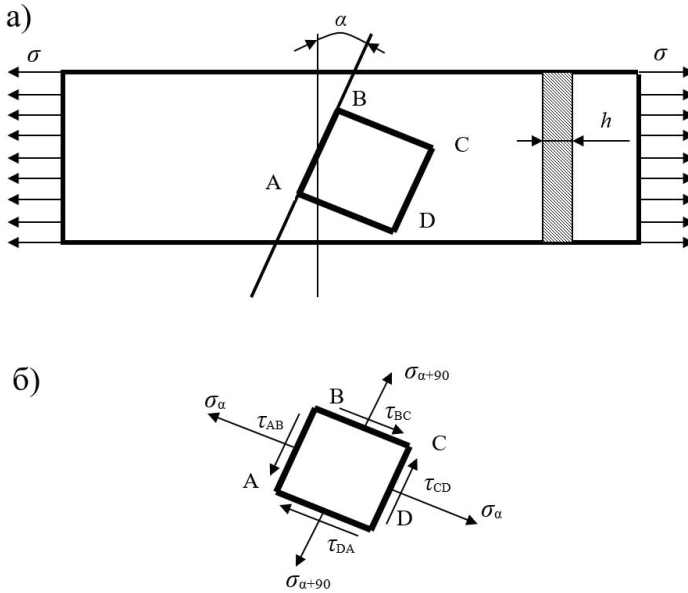


Рис.3.4. К закону парности касательных напряжений

Действительно,

$$\left| \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2\alpha \right| = \left| \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2(\alpha + 90^\circ) \right|.$$

Следовательно, на двух взаимно перпендикулярных площадках (если не учитывать знаки) касательные напряжения должны быть равны. Это условие носит название **закона парности касательных напряжений**. Данное утверждение можно доказать, составив уравнения равновесия прямоугольника ABCD.

Деформированное состояние растянутого (сжатого) стержня

Рассмотрим стержень длиной l и шириной b до нагружения (рис. 3.5a) и после нагружения силой P (рис. 3.5б). Абсолютное продольное удлинение (деформация) равно Δl . При растяжении $\Delta l > 0$, при сжатии $\Delta l < 0$. Если найти отношение абсолютного удлинения стержня к его исходной длине, то получим относительную продольную деформацию стержня $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{\text{прод}}$. Очевидно, что при растяжении $\varepsilon_{\text{прод}} > 0$, при сжатии $\varepsilon_{\text{прод}} < 0$. Одновременно с продольным удлинением стержня для большинства материалов характерно изменение его поперечного сечения, где Δb – абсолютная поперечная деформация, причем при

сжатия $\Delta b > 0$, при растяжении $\Delta b < 0$. Отношение $\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_{\text{попер}}$ называется относительной поперечной деформацией.

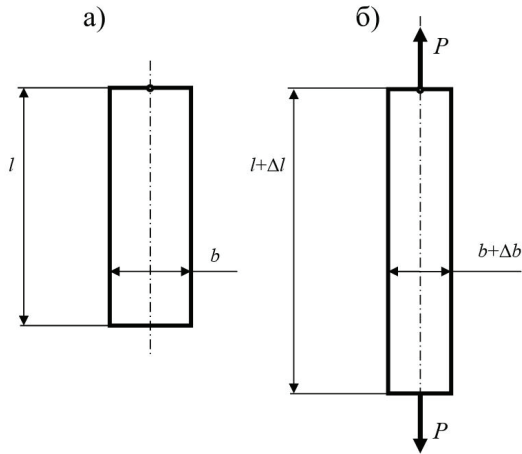


Рис. 3.5. Продольная и поперечная деформации стержня

Эксперименты показывают, что при малых деформациях растяжения - сжатия выполняется закон Гука в виде:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon_{\text{попер}} = -\mu\varepsilon_{\text{прод}},$$

где E - модуль Юнга (модуль упругости первого рода), μ - коэффициент Пуассона (для основных конструкционных материалов - $\mu = 0,3 \dots 0,4$). Модуль Юнга и коэффициент Пуассона являются важнейшими механическими характеристиками материала, из которого изготовлен стержень, и определяются опытным путем. Таким образом, если относительная продольная деформация постоянна по сечению, то и напряжение постоянно по сечению стержня $\sigma = \text{const}$, и тогда из соотношения (3.1) сразу получаем:

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) является основной для расчета на прочность при центральном растяжении (сжатии).

Относительная деформация (далее индекс «продольная» опускаем) в сечении стержня по закону Гука равна

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF}.$$

Произведение EF называют жесткостью стержня на растяжение.

Если на некотором участке стержня длиной l продольная сила постоянна, то постоянна и деформация. Т.к. по определению линейной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, то

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (3.5)$$

Для стержня, состоящего из ряда участков с постоянной жесткостью $(EF)_i$ и продольной силой N_i , производится суммирование по участкам:

$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i l_i}{(EF)_i}. \quad (3.5')$$

В самом общем случае сумма, очевидно, заменяется интегралом по всей длине стержня:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EF}, \quad (3.6)$$

где координата z отсчитывается вдоль оси стержня.

3.2. Экспериментальное изучение свойств материала при растяжении.

Основные механические характеристики материала

Основным видом испытаний конструкционных материалов для оценки их механических свойств является испытание на центральное одноосное растяжение. Одноосное растяжение сравнительно легко подвергается анализу, позволяет по результатам одного опыта определить сразу несколько важных механических характеристик материала, необходимых для расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. Результаты опыта отображаются на специальном графике - *диаграмме растяжения*.

Методы испытания на растяжение стандартизованы, например, ГОСТ 1497-84 «Металлы. Методы испытаний на растяжение» для испытаний на растяжение при температуре 20°C. Регламентированы форма, размеры образцов, основные требования к испытательному оборудованию, методика проведения испытания и обработки его результатов.

На рис. 3.6 показан наиболее часто используемый стандартный образец для исследования при комнатной температуре. Помимо рабочей части (1) образцы имеют торцевые головки различной конфигурации для крепления в испытательных машинах.

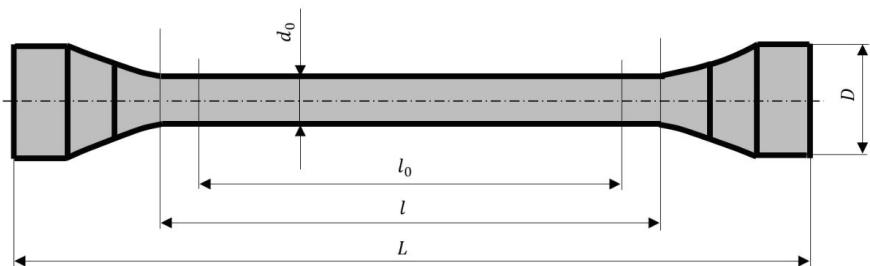


Рис. 3.6. Стандартный образец для испытаний на растяжение

Основные размеры образца:

- рабочая длина l - часть образца между его головками или участками для захвата с постоянной площадью поперечного сечения;

- начальная расчетная длина l_0 - участок рабочей длины, на котором определяется удлинение;

- начальный диаметр рабочей части d_0 - для цилиндрических образцов или начальная толщина d_0 и ширина b_0 рабочей части - у плоских образцов.

Между размерами образца должны существовать определенные соотношения. В частности, для цилиндрических образцов $l \geq l_0 + d_0$, для плоских $l \geq l_0 + b_0/2$. Расчетная длина составляет $l_0 = 11,3\sqrt{F_0}$, где F_0 - начальная площадь поперечного сечения в рабочей части образца. Для цилиндрического образца это равносильно тому, что $l_0 = 10d_0$. Цилиндрические образцы с $d_0=10$ мм и $l_0=100$ мм считаются основными. В некоторых случаях, например, при работе с малогабаритными изделиями или дефицитными материалами, возникает необходимость в определении свойств образцов, меньших по размерам, чем установлено стандартами. Образцы всех остальных диаметров называются пропорциональными.

Испытание образца осуществляется на разрывной машине с записывающим устройством, автоматически вычерчивающим диаграмму растяжения (график, связывающий прикладываемую нагрузку и деформацию образца в процессе его растяжения до момента разрыва).

На рис. 3.7 показана диаграмма растяжения пластичного материала - малоуглеродистой стали. На оси абсцисс откладывается абсолютное удлинение образца Δl , по оси ординат - нагрузка P , соответствующая этому удлинению.

Прямолинейный участок диаграммы OA указывает на пропорциональность между удлинением и нагрузкой (выполняется закон Гука). Нарушение этой пропорциональности при дальнейшем нагружении образца из малоуглеродистой стали сопровождается текучестью материала - возрастанием удлинения при почти постоянной нагрузке. Текучести материала на диаграмме соответствует горизонтальный участок AB , часто называемый площадкой текучести. Напряжение, соответствующее этой площадке, называется пределом текучести и обозначается σ_T . Предел текучести определяется так

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0},$$

где P_T - нагрузка, соответствующая площадке текучести материала образца; F_0 - начальная площадь поперечного сечения образца.

При увеличении нагрузки P после стадии текучести материал вновь сопротивляется возрастающим деформациям, наступает так называемая стадия упрочнения (кривая BC). При максимальной нагрузке P_{max} в образце из малоуглеродистой стали начинает образовываться местное сужение поперечного сечения - шейка, вследствие чего сопротивление образца при дальнейшем нагружении быстро падает, и кривая CD диаграммы идет вниз. Точка D соответствует разрушению образца (разделению его на части).

Условное напряжение, полученное как частное от деления максимальной нагрузки P_{max} на первоначальную площадь поперечного сечения образца F_0 ,

называется временным сопротивлением или пределом прочности материала.

$$\sigma_B = \sigma_{пч} = \frac{P_{max}}{F_0}.$$

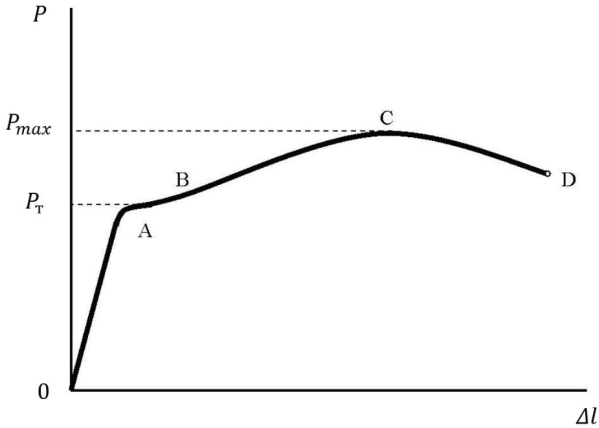


Рис. 3.7. Диаграмма растяжения пластичного материала - малоуглеродистой стали

Нагрузка $P_{разр}$, соответствующая точке D , меньше P_{max} . Но истинное напряжение $\sigma_{разр}$, получающееся при делении нагрузки $P_{разр}$ на минимальную площадь F_1 в поперечном сечении шейки образца, возрастает

$$\sigma_{разр} = \frac{P_{разр}}{F_1}.$$

К моменту разрыва истинное напряжение в шейке имеет наибольшее значение: оно может в несколько раз превышать временное сопротивление.

Одной из важнейших характеристик материала является предел пропорциональности. Стандартизован способ графического определения предела пропорциональности по диаграмме растяжения.

Ряд материалов при растяжении дает диаграмму без выраженной площадки текучести. На рис. 3.8 приведены примеры такой диаграммы. Для подобных материалов вместо предела текучести σ_T устанавливается так называемый условный предел текучести $\sigma_{0,2}$. Он определяется как значение напряжения, при котором остаточная деформация $\varepsilon_{ост} = \frac{\Delta l}{l_0} = 0,2\%$. К материалам, для которых определяется условный предел текучести, относятся дуралюмин, бронза, высокоуглеродистые и легированные стали.

Способность материала разрушаться при незначительных остаточных деформациях называется хрупкостью. Для таких материалов величина остаточного удлинения при разрыве не превышает 2-5%, в ряде случаев

измеряется долями процентов. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, углепластики, стеклопластики и др.

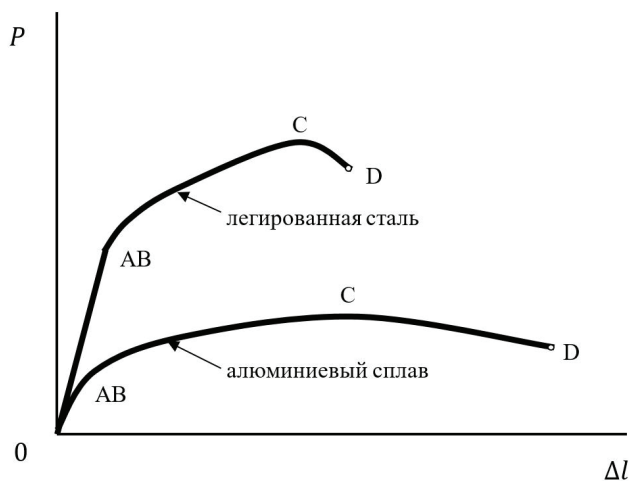


Рис. 3.8. Диаграмма растяжения для легированной стали и алюминиевого сплава

Следует отметить, что деление материалов на пластичные и хрупкие является условным, так как в зависимости от условий испытания (скорость нагружения, температура) и вида напряженного состояния хрупкие материалы способны вести себя как пластичные, а пластичные - как хрупкие. Например, чугунный образец в условиях всестороннего сжатия ведет себя как пластичный материал, т.е. не разрушается даже при значительных деформациях. И напротив, стальной образец с выточкой разрушается при сравнительно небольших деформациях. Таким образом, правильнее говорить о пластичном и хрупком состояниях материала.

К механическим характеристикам относят также модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ , характеризующие соответственно продольную и поперечную деформации материала при растяжении. Их определяют экспериментально при помощи тензометров (измерителей деформации) различной конструкции. При увеличении температуры материала его механические характеристики изменяются. Как правило, характеристики прочности и характеризующий жесткость при растяжении модуль Юнга уменьшаются при нагревании.

3.3. Построение эпюр продольных сил

Рассмотрим порядок построения эпюр продольных сил в стержне, работающем на растяжение – сжатие (рис. 3.9) на конкретном примере.

Условие задачи: Определить из условия прочности диаметры стержня, изображенного на рис. 3.9. Стержень составной, причем в правой по рисунку части стержня выполнено отверстие диаметром $0,5d$ и глубиной $l/2$.

Дано: $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

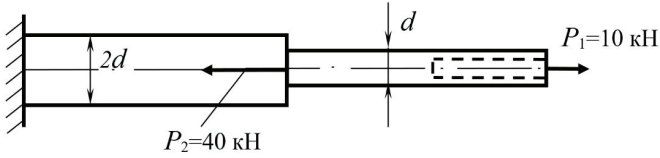


Рис.3.9

Алгоритм решения задачи

1. Определяем реакции опор

Для определения реакций опор необходимо составить уравнения равновесия стержня с учетом реактивных сил и моментов.

В общем плоском случае в жесткой заделке могут возникать две силы реакции R_{Oy} , R_{Oz} и реактивный момент M_O в связанной с заделкой системе координат Oyz (рис. 3.10). Так как все внешние силы P направлены вдоль продольной оси стержня, то очевидно, что $R_{Oy} = M_O = 0$. Тогда неизвестную реакцию R_{Oz} определим так:

$$\sum P_z = R_{Oz} - P_2 + P_1 = 0 \rightarrow R_{Oz} = P_2 - P_1 = 30 \text{ кН}.$$

Данную запись нужно понимать следующим образом: сумма проекций всех сил на ось Oz для статического равновесия стержня должна быть равна нулю. Из уравнения равновесия вычисляем неизвестную реактивную силу R_{Oz} . Силы, действующие по направлению оси Oz , подставляются в уравнение равновесия со знаком «+», а противоположно направленные – со знаком «-».

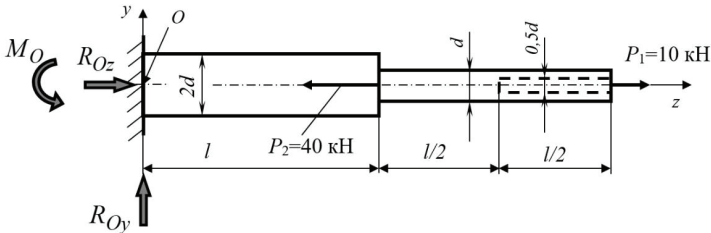


Рис.3.10

Внимание! В данной задаче выполнение п.1 алгоритма (определение реакции опор) необязательно. Удобнее исходную систему координат Oyz связать со свободным концом (правым по рис. 3.9) и строить эпюру продольных сил справа – налево.

Тогда при правильном построении эпюры значение реактивной силы R_{Oz} в заделке вычисляется автоматически.

2. Изображаем расчетную схему стержня

Под расчетной схемой стержня будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры и их действие заменено вычисленными в п.1 силами реакции. Расчетная схема стержня для данной задачи приведена на рис. 3.11.

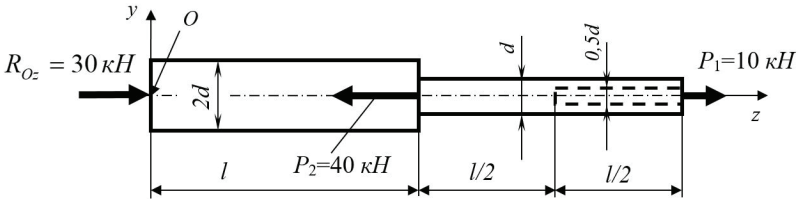


Рис.3.11

3. Разбиваем стержень на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр продольных сил являются сечения, в которых приложены внешние силы (включая силы реакции опор) и (или) изменяется геометрия (площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка продольная сила описывается одним уравнением. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений стержня на вид эпюры продольных сил не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной геометрией, так как в дальнейшем при построении эпюр нормальных напряжений их необходимо будет учитывать.

В данной задаче свяжем систему координат Oyz с левым по рис.3.12 концом стержня. Выделим три характерных участка с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq l$, второй - $l \leq z_2 \leq 1,5l$ и третий - $1,5l \leq z_3 \leq 2l$.

4. Строим эпюру продольных сил N

На 1-ом характерном участке ($0 \leq z_1 \leq l$) уравнение равновесия отсеченной части (рис. 3.12) имеет вид: $\sum P_z = R_{Oz} + N_1 = 0$ (сила, направление действия которой совпадает с направлением оси Oz , в уравнение равновесия подставляется со знаком «+»), а значит $N_1 = -R_{Oz} = -30$ кН. Знак «-» в полученном значении продольной силы на первом характерном участке указывает на то, что сила N_1 направлена не от сечения (как показано на рис. 1.4), а в противоположную сторону – к сечению. Значит, сила N_1 сжимающая и на эпюре продольных сил ее нужно будет отложить вниз от базовой линии ($N = 0$).

На 2-ом характерном участке ($l \leq z_2 \leq 1,5l$) уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum P_z = R_{Oz} - P_2 + N_2 = 0$, а значит

$N_2 = -R_{Oz} + P_2 = 10$ кН. Исходное направление силы N_2 (рис. 1.4) выбрано верно (знак «+»). Она будет направлена от сечения, т.е. является положительной (растягивающей). С учетом полученного значения строим эпюру продольных сил на втором участке.

На 3-ем характерном участке ($1,5l \leq z_3 \leq 2l$) уравнение равновесия отсеченной части имеет тот же вид, что и на втором: $\sum P_z = R_{Oz} - P_2 + N_3 = 0$, а значит $N_3 = N_2 = 10$ кН. Видно, что изменение геометрии стержня (площади поперечного сечения) не оказывает влияния на эпюру продольных сил. С учетом полученного значения строим эпюру продольных сил на третьем участке.

5. Проверяем правильность построения эпюры продольных сил

Простейшим способом проверки правильности построения эпюры является удовлетворение следующему правилу: скачок на эпюре продольных сил может возникать лишь в сечениях приложения сосредоточенных внешних (включая реакции опор) продольных сил, и он численно равен абсолютному значению этих сил. Из рис.3.12 видно, что указанное условие выполняется, а значит эпюра построена верно.

6. Вычисляем нормальные напряжения на характерных участках и строим эпюру

$$\text{На участке 1 имеем } \sigma_1 = \frac{N_1}{\frac{\pi(2d)^2}{4}} = \frac{N_1}{\pi d^2} = \frac{30}{\pi d^2} \text{ Па.}$$

$$\text{На участке 2 имеем } \sigma_2 = \frac{N_2}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4N_2}{\pi d^2} = \frac{40}{\pi d^2} \text{ Па.}$$

$$\text{На участке 3 имеем } \sigma_3 = \frac{N_3}{\left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi(0,5d)^2}{4}\right)} = \frac{16N_3}{3\pi d^2} = \frac{53,3}{\pi d^2} \text{ Па.}$$

Видно, что напряжения на третьем характерном участке больше, а значит, диаметры стержня будем вычислять из условия прочности, записанного для 3-го характерного участка.

7. Вычисляем геометрические параметры стержня

Условия прочности запишем в виде

$$\sigma_{max} = \sigma_3 = \frac{53,3 \cdot 10^3}{\pi d^2} \leq [\sigma].$$

Следовательно, минимально допустимый диаметр стержня, удовлетворяющего условию прочности, равен (округлять полученное число нужно только в большую сторону)

$$d = \sqrt{\frac{53,3 \cdot 10^3}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{53,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1,5 \cdot 10^8}} = 1,07 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Полученное значение диаметра стержня можно использовать для вычисления напряжений на характерных участках (п.6) и построения эпюры нормальных напряжений, как показано на рис. 3.12. Так, максимальные напряжения на третьем участке равны

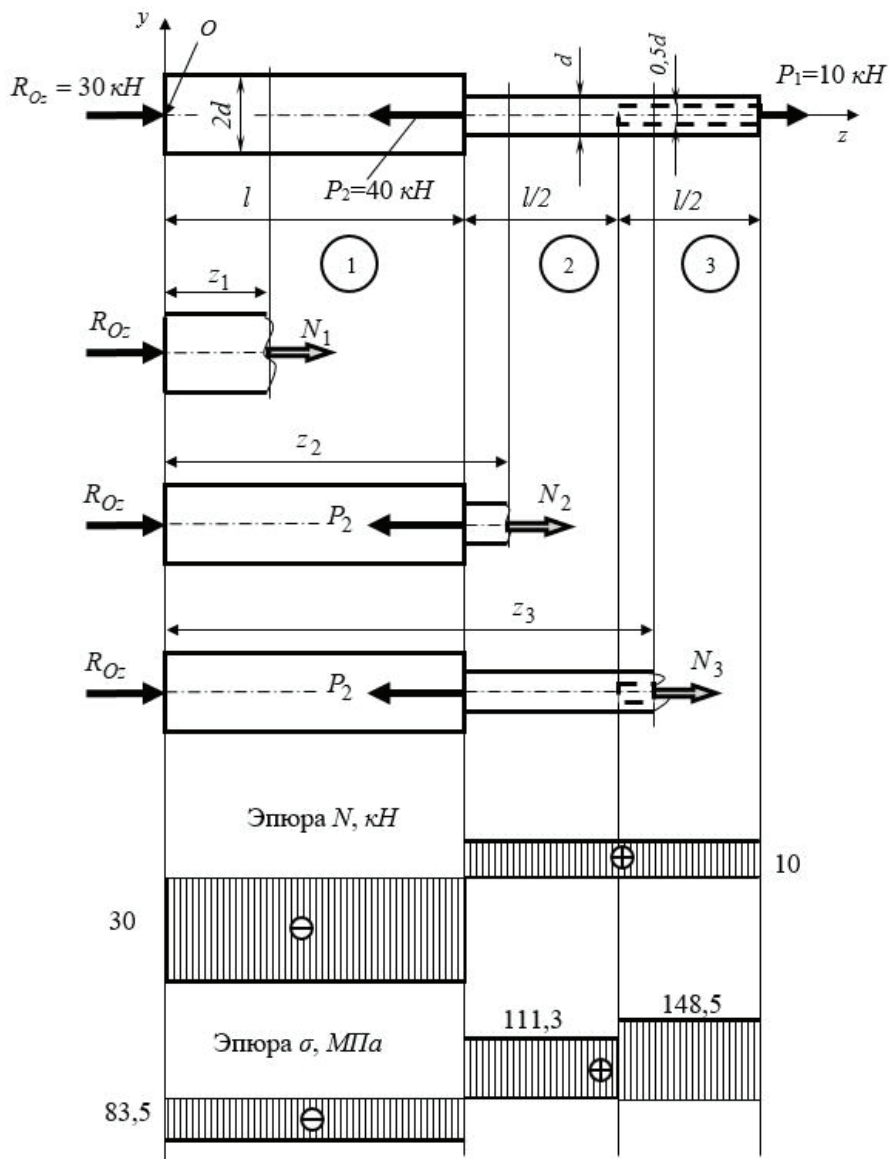


Рис.3.12

$$\sigma_{max} = \sigma_3 = \frac{53,3}{\pi(1,07 \cdot 10^{-2})^2} = 148,5 \text{ МПа.}$$

8. Вычисляем коэффициент запаса прочности

Для вычисления коэффициента запаса прочности используется формула

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}} = \frac{150 \cdot 10^6}{148,5 \cdot 10^6} = 1,01.$$

Тема 4. Кручение

4.1. Основные понятия и определения. Построение эпюр крутящих моментов

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает лишь один интегральный внутренний силовой фактор - крутящий момент $M_k(z)$. Брус, работающий на кручение, обычно называют валом. Правило знаков, применяемое для крутящего момента при построении эпюр и расчете на прочность, показано на рис. 4.1.

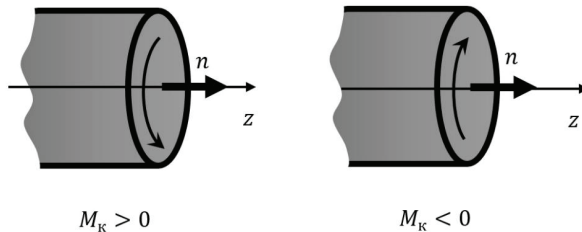


Рис.4.1. Правило знаков для крутящего момента

При расчете вала на кручение надо решить две задачи: определить касательные напряжения в опасных точках и найти угловые смещения в зависимости от действия внешних обобщенных сил.

Рассмотрим кручение вала кругового поперечного сечения с радиусом срединной поверхности R и длиной l (рис. 4.2). На рисунке используются следующие обозначения: γ – угол сдвига, который показывает на какой угол отклонилась образующая вала при действии M_k ; φ – угол поворота (угол закручивания) текущего сечения. Будем использовать следующие допущения:

1) поперечные сечения остаются плоскими после деформации (выполняется гипотеза Бернулли - гипотеза плоских сечений);

2) расстояние между поперечными сечениями вала не изменяется, значит $\varepsilon_z = 0$;

3) контуры поперечных сечений и их радиусы не деформируются. Это значит, что поперечные сечения при деформации ведут себя как жесткие диски,

поворачиваясь, относительно друг друга вокруг оси Oz . Отсюда следует, что деформации в плоскости диска отсутствуют, т.е. $\varepsilon_z = \varepsilon_y = 0$;

4) материал стержня подчиняется закону Гука. Так как $\varepsilon_z = \varepsilon_y = \varepsilon_x = 0$, то из обобщенного закона Гука получаем, что $\sigma_z = \sigma_y = \sigma_x = 0$. А это означает, что в поперечных сечениях вала под действием крутящего момента возникают только касательные напряжения τ . С учетом закона парности касательных напряжений НДС вала - чистый сдвиг.

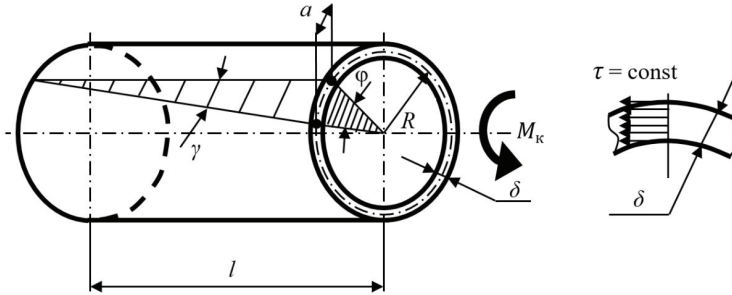


Рис. 4.2. Кручение круглого вала

4.2. Определение напряжений и деформаций бруса круглого поперечного сечения (вала)

Выведем формулу для определения касательных напряжений при кручении. Двумя поперечными и двумя цилиндрическими сечениями, как показано на рис. 4.3, выделим из вала кольцевой фрагмент высотой dz и толщиной $d\rho$.

Рассмотрим элемент кольца, обозначенный по внешней поверхности ABCD. Площадь поперечного сечения, ограниченного радиусами ВО и СО равна dF (на рис. 4.3 заштрихована). При повороте верхней грани кольца относительно нижней на угол закручивания $d\varphi$ точка В переместится в положение B_1 , точка С в C_1 , а сам элемент ABCD будет испытывать деформацию сдвига (рис. 4.3б). Отрезок BB_1 с одной стороны равен γdz , а с другой - $\rho d\varphi$, откуда имеем

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho. \quad (4.1)$$

Иногда в расчетах используется понятие - погонный угол закручивания $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$. Переходя по закону Гука ($\tau = G \cdot \gamma$) к напряжениям, получаем

$$\tau = G \cdot \gamma = G \frac{d\varphi}{dz} \rho, \quad (4.2)$$

где τ - касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении бруса под действием M_k ; G - модуль упругости второго рода (модуль сдвига).

Анализ формулы (4.2) показывает, что при постоянном значении параметра $G \frac{d\varphi}{dz}$, касательные напряжения прямо пропорциональны текущему радиусу ρ .

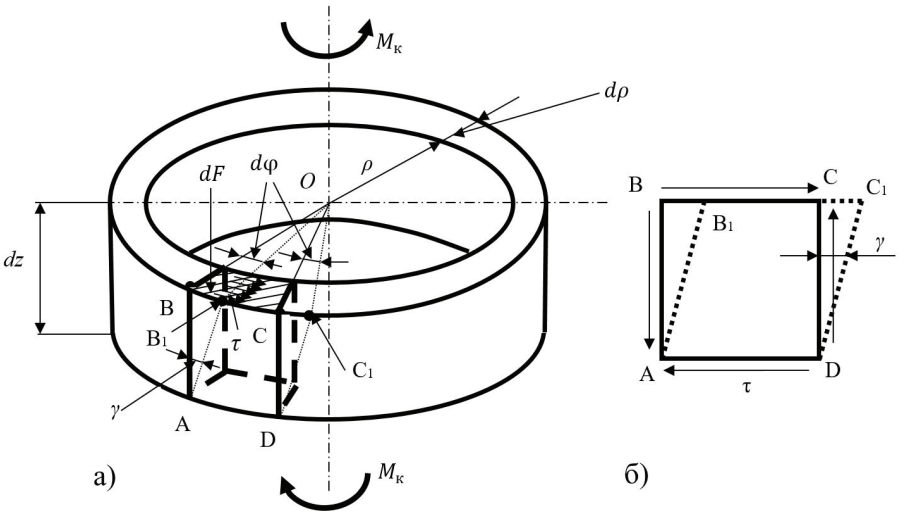


Рис. 4.3. К определению напряжений и деформаций при кручении

Внутренний интегральный силовой фактор - крутящий момент M_k создается элементарными силами τdF , действующими на плече ρ . Интегрируя по всей площади поперечного сечения вала, имеем

$$M_k = \int_F \tau dF \rho = \int_F G \frac{d\varphi}{dz} \rho dF \rho = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} J_p. \quad (4.3)$$

В данной формуле используется важный геометрический параметр сечения – **полярный момент инерции** $J_p = \int_F \rho^2 dF$, от которого во многом зависит значение действующих в вале напряжений и его деформация. Значение полярного момента инерции конкретного сечения можно получить непосредственно, используя приведенное интегральное выражение, а можно взять из справочной литературы для типовых сечений.

Например, для сплошного круглого вала имеем:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}, \quad (4.4)$$

где D – диаметр вала.

Для вала кольцевого сечения с внешним диаметром D и внутренним d в силу свойств интеграла по площади можно вычислить полярный момент инерции как разность соответствующих моментов инерции:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D}. \quad (4.5)$$

Параметр GJ_p называют жесткостью поперечного сечения вала при кручении (крутильной жесткостью). Очевидно, что увеличение жесткости на кручение при прочих равных условиях приводит к уменьшению крутильных (угловых) деформаций конструкции.

Из выражения (4.3) находим относительный (погонный) угол закручивания вала

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в выражение (4.2), находим касательные напряжения в сечении

$$\tau = G \frac{d\varphi}{dz} \rho = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho \quad (4.7)$$

Полученные результаты позволяют сформулировать ряд важных выводов:

- касательные напряжения при кручении направлены перпендикулярно к текущему радиусу ρ ;

- касательные напряжения достигают своего максимального значения в точках, наиболее удаленных от продольной оси вала $\rho = \rho_{max} = R = \frac{D}{2}$.

В этом случае

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{J_p} \rho_{max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (4.8)$$

Параметр $W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}$ называется **полярным моментом сопротивления** и для сплошного круглого вала он равен

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}, \quad (4.9)$$

Взаимный угол поворота сечений можно определить из формулы (4.6), интегрируя по длине вала

$$d\varphi = \frac{M_k}{GJ_p} dz; \quad \varphi = \int_l \frac{M_k}{GJ_p} dz. \quad (4.10)$$

Если по длине вала крутящий момент и полярный момент инерции имеют постоянное значение, то из (8.10) получим

$$\varphi = \frac{M_k}{GJ_p} l. \quad (4.11)$$

Проанализируем напряженное состояние вала при кручении. По граням выделенного элемента вала ABCD (рис. 4.3) действуют только касательные напряжения, определяемые по формуле (4.7). Значит, во всех точках вала при кручении возникает НДС чистого сдвига, т.е. плоское напряженное состояние, при котором главные напряжения равны $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$. Главные

площадки располагаются под углом 45° по отношению к площадкам, по которым действуют касательные напряжения. Однако в отличие от чистого сдвига абсолютные значения напряжений при кручении вала линейно зависят от текущего радиуса ρ (рис. 4.4), т.е. сдвиг будет неоднородным.

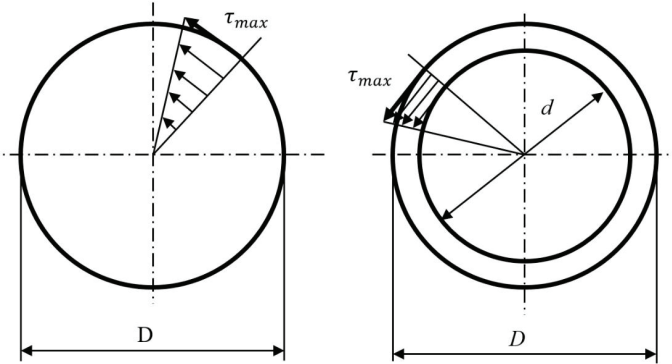


Рис. 4.4. Касательные напряжения при кручении вала

На каждой паре ортогональных площадок, наклоненных к оси стержня под углами $\pm 45^\circ$, будут действовать нормальные напряжения, равные по величине касательному напряжению; при этом одно из них растягивающее, а другое - сжимающее. Площадки, по которым действуют наибольшие растягивающие напряжения σ_1 , располагаются на винтовой поверхности. Именно по этой поверхности и разрушаются хрупкие материалы при кручении, так как они хуже сопротивляются отрыву, чем сдвигу. Пластичные материалы, наоборот, хуже сопротивляются сдвигу, чем отрыву. Поэтому образцы из пластичных материалов разрушаются при кручении по плоскости поперечного сечения, где действуют τ_{max} .

4.3. Потенциальная энергия при кручении

Потенциальная энергия, накопленная в элементе вала длиной dz , численно равна работе моментов M_k , приложенных к торцам данного элемента. Предполагая прямую пропорциональную зависимость между крутящим моментом и углом закручивания, получим выражение для элементарной потенциальной энергии (с учетом формулы (4.10))

$$dU = \frac{1}{2} M_k d\varphi = \frac{M_k^2}{2GJ_p} dz. \quad (4.12)$$

Интегрируя выражение (4.12) по длине вала, получим выражение для потенциальной энергии деформации

$$U = \int_l \frac{M_k^2}{2GJ_p} dz. \quad (4.13)$$

Если $M_k = const$ и $GJ_p = const$ по длине вала, то получим

$$U = \frac{M_k^2}{2GJ_p} l. \quad (4.14)$$

4.4. Условия прочности и жесткости при кручении

Напряженное состояние вала при кручении подобно напряженному состоянию при сдвиге. Условия прочности при использовании метода расчета по допускаемым напряжениям **вала круглого поперечного сечения** имеют вид

$$\tau_{max} = \left(\frac{M_k}{W_p} \right)_{max} \leq [\tau], \quad (4.15)$$

где $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$ - полярный момент сопротивления сечения. Допускаемые напряжения определяются также как при чистом сдвиге $[\tau] = \frac{\tau_{пред}}{[n]}$. Так, для хрупких материалов $\tau_{пред} = \tau_b$, для пластичных материалов $\tau_{пред} = \tau_t$, где $[n]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности.

При оценке жесткости сравнивают максимальный относительный (погонный) угол закручивания сечений с нормируемым $[\theta] = \left[\frac{d\varphi}{dz} \right]$ по каким либо условиям значением (например, эксплуатационные ограничения), т.е.

$$\theta_{max} = \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_{max} = \left(\frac{M_k}{GJ_p} \right)_{max} \leq [\theta]. \quad (4.16)$$

Допускаемый (нормируемый) погонный угол закручивания валов принимают, например, при статической нагрузке равным $[\theta] = 0,3$ град/м; при переменных нагрузках - $[\theta] = 0,25$ град/м; при ударных нагрузках $[\theta] = 0,15$ град/м. Здесь важно подчеркнуть, что в формуле (4.16) погонный угол закручивания вычисляется в рад/м, поэтому для выполнения условий жесткости необходим переход в одинаковые единицы измерения.

В авиации конструкции, работающие на кручение, используются очень широко: коленчатые валы; валы редукторов и электродвигателей; роторы турбин, насосов и др. Все эти детали для обеспечения их нормальной эксплуатации имеют различные концентраторы напряжений (галтели, выточки, отверстия, пазы и т.д.). Очевидно, что наличие концентраторов напряжений должно быть учтено в расчетах на прочность и жесткость.

4.5. Алгоритм решения задач при кручении

Рассмотрим последовательность решения типовых задач на кручение на конкретном примере.

Условие задачи: Определить из условия прочности диаметры ступенчатого вала (рис.4.5). Проверить выполняется ли для данного вала условие

жесткости. Дано: $T = 1$ кНм; $[\tau] = 100$ МПа; $[\theta] = 0,8$ град/м; $l_1 = 0,5$ м; $l_2 = 0,3$ м; $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па

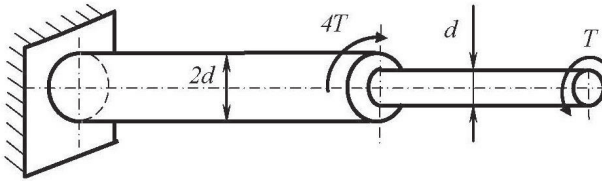


Рис.4.5

Алгоритм решение задачи

Для решения задачи необходимо построить эпюры крутящих моментов M_K по длине балки, выявить опасные сечения и для них записать условия прочности. По условию прочности вычисляются геометрические параметры вала, удовлетворяющие этому условию. Затем при известных геометрических размерах проверяется выполнение условия жесткости.

1. Вычисляем реакции опор

Левый торец вала жестко защемлен. Потенциально в жесткой заделке при заданном нагружении возможно возникновение двух реактивных сил R_{Ox}, R_{Oy} и реактивного момента M_R (рис.4.6)

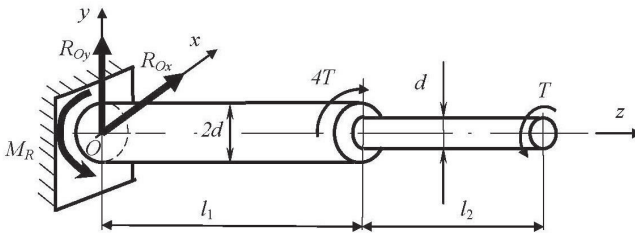


Рис.4.6

Так как нет внешних сил, имеющих ненулевые проекции на оси Ox и Oy , то вычисляем лишь неизвестный реактивный момент (правило знаков теоретической механики): $\sum M_z = M_R - 4T + T = 0 \rightarrow M_R = 3T$.

2. Изображаем расчетную схему вала

Под расчетной схемой (рис.4.7) будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры и их действие заменено соответствующим реактивным моментом. **Важно!!!** Если по условию задачи есть внешние моменты

со знаком минус (например, $M_i = -15 \text{ кНм}$), то на расчетной схеме целесообразно поменять направление действия соответствующего момента M_i .

3. Разбиваем вал на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр крутящих моментов являются сечения, в которых приложены внешние моменты (включая реактивные моменты в опорах) и (или) изменяется геометрия (форма и площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка крутящий момент описывается одним уравнением. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений вала на вид эпюры крутящих моментов не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной геометрией, так как в дальнейшем при построении эпюр касательных напряжений и углов поворота сечений их необходимо будет учитывать.

В данной задаче свяжем систему координат Ouz с левым по рис.4.7 концом вала. Выделим два характерных участка с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq l_1$, второй - $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$.

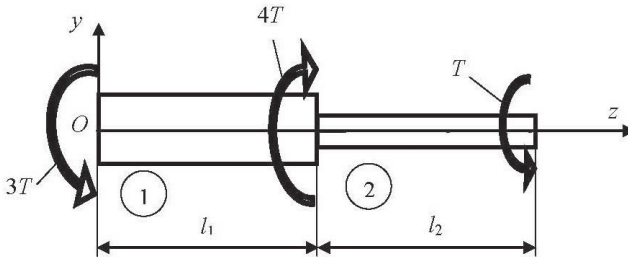


Рис.4.7

4. Построение эпюр крутящих моментов

Вал разделен на два характерных участка 1 и 2, как показано на рис. 4.7 и 4.8. Будем считать внутренний интегральный силовой фактор - крутящий момент положительным, когда он стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора нормали к сечению.

На 1-ом участке $0 \leq z_1 \leq l_1$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum M_z^1 = 3T + M_{k1} = 0$, а значит $M_{k1} = -3T$. Таким образом, направление крутящего момента на участке 1 выбрано неверно. Он будет направлен по часовой стрелке и имеет знак «-».

На 2-ом участке $l_1 \leq z_2 \leq l_1 + l_2$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum M_z^2 = 3T - 4T + M_{k2} = 0$, а значит $M_{k2} = T$. Уравновешивающий крутящий момент имеет знак «+» и направлен по часовой стрелке, как показано на рисунке. По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов на характерных участках (рис.4.8).

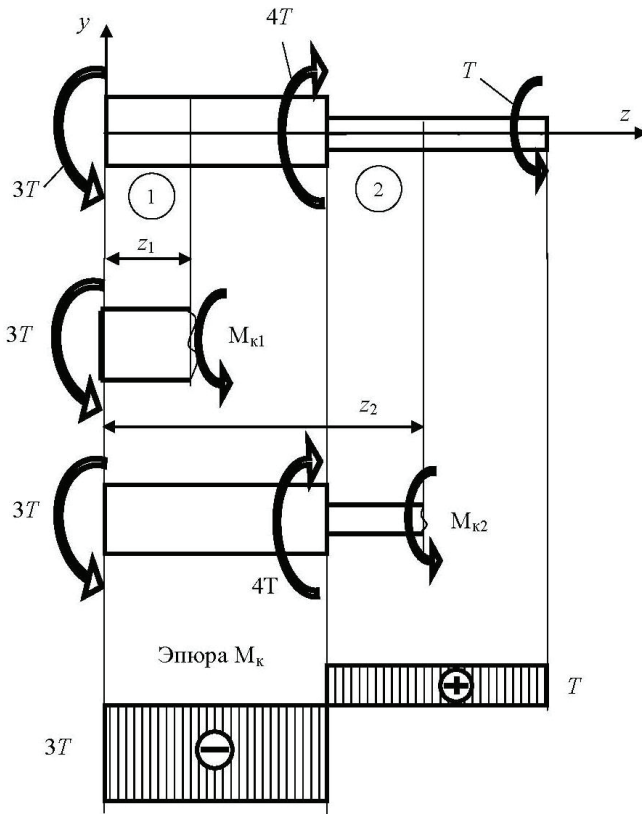


Рис.4.8

Важно! Необходимо проверить правильность построения эпюры. Правило: скачки на эпюре крутящих моментов могут возникать лишь в сечениях, где приложены сосредоточенные моменты, причем абсолютное значение скачка должно быть равно приложенному моменту.

5. Вычисляем максимальные касательные напряжения

В общем случае по эпюре крутящих моментов определить опасное сечение без проведения соответствующих расчетов затруднительно, так как касательные напряжения определяются двумя параметрами: геометрией и значением крутящего момента. При вычислении касательных напряжений крутящий момент берется по абсолютному значению без учета знака.

На 1 участке $\tau_1 = \frac{M_{k1}}{W_{p1}} = \frac{2 \cdot 3T}{\pi \cdot d^3}$, где $W_{p1} = \frac{\pi(2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2}$,

на 2 участке $\tau_2 = \frac{M_{k2}}{W_{p2}} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3}$, где $W_{p2} = \frac{\pi d^3}{16}$.

Из формул видно, что наибольшие касательные напряжения возникают на 2 участке (хотя абсолютное значение крутящего момента в три раза меньше).

Тогда имеем $\tau_{max} = \tau_2 = \frac{M_{k2}}{W_{p2}} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3}$

6. Определяем геометрические параметры вала по условию прочности на кручение

Условие прочности запишем в виде $\tau_{max} \leq [\tau]$. Тогда $\tau_{max} = \frac{16T}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau]$,

следовательно, $d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^8}} = 3,71 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. **Важно!** Округлять вычисленный диаметр вала можно только в сторону его увеличения, иначе условие прочности выполнять не будет.

7. Определяем погонные углы поворота сечений на характерных участках

$\theta_1 = -\frac{M_{k1}}{G \cdot J_{p1}} = -\frac{2 \cdot 3T}{\pi \cdot d^4} = -\frac{6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} = -0,013 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = -0,75 \text{ град/м}$,

где $J_{p1} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2}$,

$\theta_2 = \frac{M_{k2}}{G \cdot J_{p2}} = \frac{32 \cdot T}{\pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} = 0,067 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 3,85 \text{ град/м}$,

где $J_{p2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$.

Важно отметить, что крутящие моменты по характерным участкам необходимо подставлять со своими знаками.

8. Проверяем выполнение условий жесткости для вала

Условия жесткости вала записываются в виде $\theta_{max} \leq [\theta]$.

Из п.7 алгоритма видно, что максимального значения относительный угол поворота сечения достигает на втором характерном участке $\theta_2 = \theta_{max} = 3,85 \text{ град/м} > [\theta] = 0,5 \text{ град/м}$. Из условия жесткости видно, что оно не выполняется, так как максимальный относительный угол поворота сечения существенно больше допускового.

9. Строим эпюру углов поворота сечений по длине вала

При решении ряда задач требуется иметь эпюру углов поворота сечений. В этом случае необходимо выбрать неподвижное сечение. В данной задаче – это сечение в заделке вала. Если в задаче нет заданной опоры, то неподвижное сечение необходимо назначить (например, левое или правое торцевые сечения). **Важно!!!** При вычислении углов поворота сечений крутящий момент в формулу нужно подставлять со своим знаком.

Имеем (рис.4.9):

$$\varphi_A = \varphi_O + \varphi_{OA} = 0 + \frac{(-3 \cdot 10^4) \cdot 0,5 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} = -0,063 \text{ рад,}$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = -0,063 + \frac{10^4 \cdot 0,3 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (3,71 \cdot 10^{-2})^4} \approx 0,14 \text{ рад.}$$

По полученным данным строим эпюру углов поворота сечений вала (рис.4.9). Здесь важно учесть, что между расчетными сечениями угол поворота φ изменяется по линейному закону.

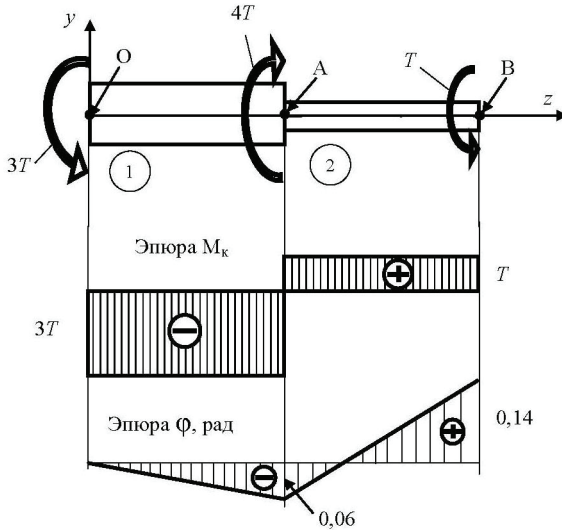


Рис.4.9

Тема 5. Расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе

5.1. Понятие о геометрических характеристиках плоских фигур

Для расчета элементов конструкций на прочность при кручении и изгибе необходимо знать не только площади сечений, но и некоторые другие геометрические характеристики. Так, например, при кручении прочность и жесткость бруса зависит от полярного момента инерции $J_p = \int_F \rho^2 dF$ его сечения (см. тему 4).

Чтобы подробнее изучить эти характеристики, рассмотрим для произвольной плоской фигуры, представляющей сечение стержня (рис. 5.1), следующие интегралы по площади:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF, \quad (5.1)$$

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF, \quad J_{xy} = \int_F xy dF, \quad (5.2)$$

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (5.3)$$

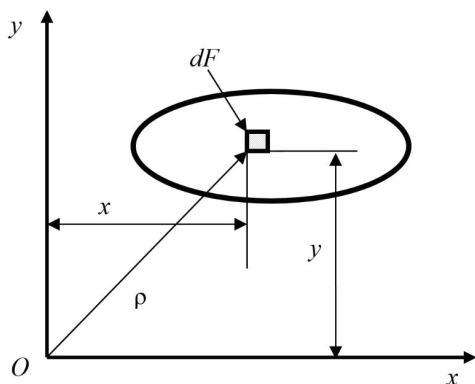


Рис. 5.1. К определению геометрических характеристик плоской фигуры

Формулы (5.1) определяют статические моменты сечения относительно осей Ox и Oy , а формулы (4.2) – осевые моменты инерции сечения J_x и J_y относительно осей Ox и Oy , соответственно, а также центробежный момент инерции J_{xy} . Размерность статических моментов – m^3 , моментов инерции – m^4 . Очевидно, что осевые и полярный моменты инерции всегда положительны (координаты в квадрате).

В отличие от площади плоской фигуры, которая всегда постоянна, статические моменты и моменты инерции изменяются при преобразованиях (параллельном переносе или повороте) системы координат, относительно которой они определяются.

5.2. Изгиб. Определение нормальных напряжений в поперечных сечениях

Изгибом называется такой вид деформации балки, который сопровождается искривлением ее оси (рис. 5.2а), либо изменением ее начальной кривизны (рис. 5.2б).

Изгиб прямого бруса может быть вызван поперечными внешними силами и при некоторых условиях – продольными. Отсюда изгиб, вызванный поперечной нагрузкой, называется поперечным (рис. 5.3а), а изгиб, вызванный продольными силами, называется продольным (рис. 5.3б).

Поперечный изгиб подразделяется на прямой (плоский) и косой. Если силовая плоскость (плоскость действия внешних сил) совпадает с одной из главных плоскостей инерции сечения (плоскостью симметрии) балки, то изгиб называется прямым. В случае, когда это условие не выполняется, но силовая плоскость проходит через центр тяжести сечений, изгиб называется косым.

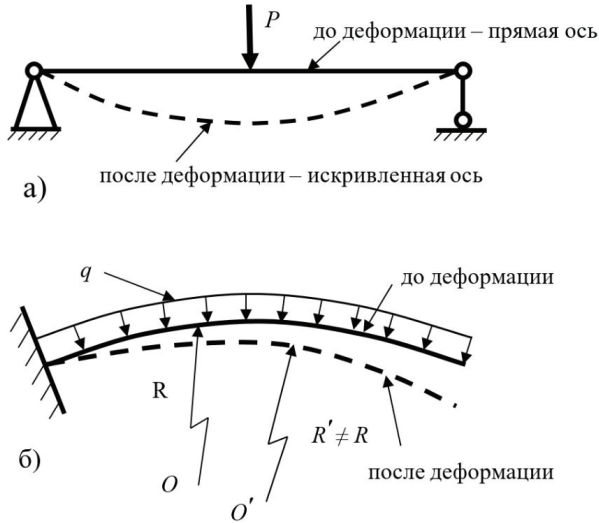


Рис. 5.2 Деформация изгиба

В настоящей теме рассматривается плоский изгиб прямых балок и составленных из них конструкций под действием внешних нагрузок. В общем случае в поперечном сечении балки действуют изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y (тогда изгиб называют поперечным) или только изгибающий момент M_x (тогда изгиб называют чистым).

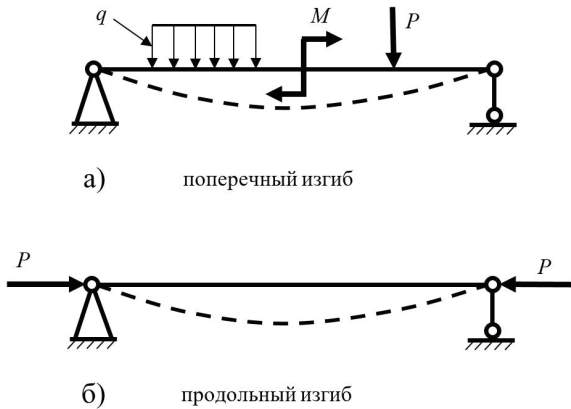


Рис.5.3. Поперечный и продольный изгиб

Получим формулу для определения нормальных напряжений при чистом изгибе. Расчеты и эксперименты показали, что полученные формулы можно использовать для вычисления нормальных напряжений и при поперечном изгибе. Экспериментальные исследования деформации балок при чистом изгибе позволили выявить следующие закономерности:

1. Сечения, перпендикулярные к оси балки до нагружения, остаются плоскими и перпендикулярными к ее оси и после нагружения;

2. Деформации возникают вследствие поворота поперечных сечений друг относительно друга, при этом одни волокна балки удлиняются, а другие – сжимаются. Переход от растянутых волокон к сжатым осуществляется плавно, так что существует слой, длина которого не изменяется. Этот слой называется **нейтральным**. Нейтральный слой пересекается с поперечным сечением по нейтральной линии, причем данная линия перпендикулярна к плоскости кривизны изогнутой балки.

По закону Гука при растяжении - сжатии (в данном случае волокон) напряжения будут равны

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{y}{\rho}, \quad (5.4)$$

где y – расстояние от рассматриваемой точки до нейтральной линии (ось Ox на рис. 5.4).

Из зависимости (5.4) следует, что нормальные напряжения по высоте сечения изменяются по линейному закону пропорционально расстоянию от нейтральной линии.

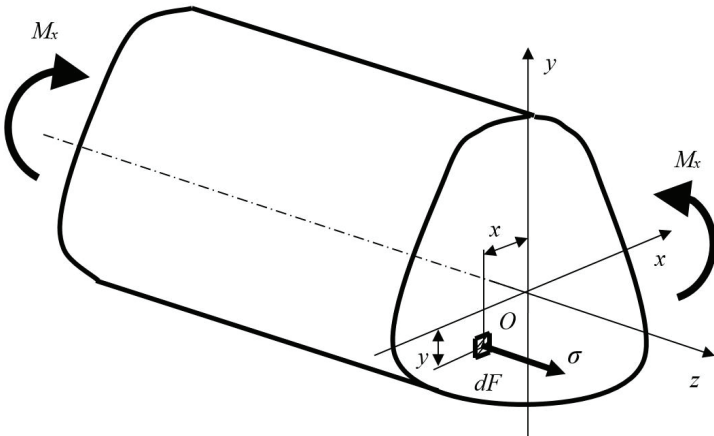


Рис. 5.4. Вычисление изгибающего момента в сечении балки

Выразим значение изгибающего момента M_x через нормальные напряжения:

$$M_x = \int_F \sigma dF y = \int_F E \frac{y}{\rho} dF y = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_x. \quad (5.5)$$

Из выражения (5.5) находим радиус кривизны оси балки при чистом изгибе

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x}. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.4), получим

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (5.7)$$

Анализ формулы (5.7) показывает, что максимальные напряжения при изгибе возникают в точках, максимально удаленных от нейтральной линии. Эти напряжения вычисляют по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} |y|_{\max} = \frac{M_x}{W_x}; \quad W_x = \frac{J_x}{|y|_{\max}}, \quad (5.8)$$

где W_x – момент сопротивления сечения при изгибе, который для наиболее распространенных сечений приводится в справочной литературе. Так, для балки прямоугольного сечения при изгибе относительно центральной оси, параллельной меньшей стороне b имеем:

$$J_x^{\text{прям}} = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{\max} = \frac{h}{2}; \quad W_x^{\text{прям}} = \frac{bh^2}{6}. \quad (5.9)$$

Для балки круглого сечения

$$J_x^{\text{круг}} = \frac{\pi d^4}{64}; \quad y_{\max} = \frac{d}{2}; \quad W_x^{\text{круг}} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (5.10)$$

В рассмотренном выше случае изгибающий момент действовал относительно главной центральной оси, совпадающей с нейтральной линией. При этом плоскость действия момента (силовая плоскость) совпадает с одной из главных плоскостей. Если положение силовой плоскости и главной плоскости балки при деформациях не меняются, то, как указано выше, имеет место чистый прямой изгиб и все деформации происходят в одной плоскости.

5.3. Напряженное состояние. Условия прочности

При изгибе волокна сечения, удаленные от нейтральной линии, испытывают либо напряжения растяжения, либо напряжения сжатия. Соответственно, напряженное состояние в этих волокнах будет таким же, как при простом растяжении – сжатии, т.е. линейным, но в отличие от простого растяжения, неоднородным (напряжения изменяются по мере удаления от нейтральной линии).

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, при проверке прочности самое большое по абсолютной величине напряжение сравнивают с допускаемым, т.е. условия прочности имеют вид

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{M_x}{W_x} \right)_{\max} \leq [\sigma]. \quad (5.11)$$

5.4. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Будем рассматривать прямой поперечный изгиб балки под действием системы внешних сил, причем считаем, что силовая плоскость совпадает с одной из главных ее плоскостей инерции. В общем случае в поперечном сечении балки действуют изгибающий момент и поперечная сила.

Прежде чем исследовать напряженное и деформированное состояние в текущем сечении балки, необходимо знать абсолютные значения внутренних силовых факторов в этих сечениях, которые могут быть получены в процессе построения эпюр. Рассмотрим порядок построения эпюр при прямом поперечном изгибе на конкретном примере.

Задача. Для двухопорной балки постоянного поперечного сечения (см. рис.5.5, исходные данные в табл. 5.1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Таблица 5.1

M ,	P ,	q ,	№	l ,	m ,	κ ,	p ,
кНм	кН	кН/м	вар.	м	м	м	м
20	40	5	х	4,0	1,0	1,0	2,0

Алгоритм решения

1. Разбиваем балку на характерные участки. Учитывая, что геометрические параметры балки не изменяются по ее длине (по условию задачи), границами характерных участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок, а также начало и окончание приложения распределенной нагрузки. В рассматриваемом случае выделяем четыре характерных участка. **ВАЖНО! В пределах характерного участка уравнения, описывающие изменение внутренних силовых факторов, постоянны.**

2. Определяем реакции опор. Составляем уравнения равновесия. В этом случае применяются правила знаков теоретической механики (момент относительно рассматриваемой точки, действующий по часовой стрелке, отрицательный).

2.1. Составляем уравнение моментов относительно точки О

$$\sum M_o = -M - P(l - p) - 2q(l - k)\left(\frac{l - k}{2}\right) - R_A l = 0,$$

откуда получаем

$$R_A = \frac{1}{l}(-M - P(l-p) - 2q(l-k)(\frac{l-k}{2})) =$$

$$= \frac{1}{4}(-20 - 40(4-2) - 2 \cdot 5 \cdot (4-1)(\frac{4-1}{2})) = -36,25 \text{ кН}.$$

Знак минус указывает на то, что предварительно выбранное на схеме направление силы R_A нужно поменять на противоположное.

2.2. Составляем уравнение моментов относительно точки А

$$\sum M_A = -M + P \cdot p + 2q(l-k)(l - \frac{l-k}{2}) + R_O l = 0,$$

откуда получаем

$$R_O = \frac{1}{l}(+M - P \cdot p - 2q(l-k)(l - \frac{l-k}{2})) =$$

$$= \frac{1}{4}(20 - 40 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \cdot (4-1)(4 - \frac{4-1}{2})) = -33,75 \text{ кН}.$$

Знак минус указывает на то, что предварительно выбранное на схеме направление силы R_O нужно поменять на противоположное.

2.3. Проверяем правильность определения реакций опор, составляя сумму проекций всех сил (включая реакции опор) на ось Oy (проекции реакций опор определяются с учетом изменения направления их действия)

$$\sum P_y = R_O - 2q(l-k) - P + R_A = 33,75 - 2 \cdot 5 \cdot 3 - 40 + 36,25 = 0.$$

Равенство выполняется, значит, реакции опор вычислены верно.

3. Построение эпюры поперечных сил Q (индекс «у» опускаем).

Изобразим расчетную схему балки, заменив опоры соответствующими реакциями, как показано на рис. 5.5.

3.1. Первый характерный участок. В этом случае $0 \leq z_1 \leq m$, однако, удобнее оперировать числовыми значениями в метрах $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$. Для вычисления значений поперечных сил на участке используется метод сечений (показано на рис. 5.5 для первого участка). Очевидно, что в общем случае направление уравнивающей поперечной силы Q_1 неизвестно, поэтому выбираем положительное направление (по правилу знаков при изгибе: при движении справа - налево положительна поперечная сила, направленная вниз).

Получаем уравнение равновесия

$$\sum F_y = R_O - 2q \cdot z_1 - Q_1 = 0,$$

откуда

$$Q_1 = R_O - 2q \cdot z_1 = 33,75 - 10 \cdot z_1.$$

Это уравнение прямой, которая на эпюре поперечных сил может быть построена по двум характерным точкам:

$$\text{при } z_1 = 0, \quad Q_1 = R_O = 33,75 \text{ кН},$$

$$\text{при } z_1 = 1 \text{ м}, \quad Q_1 = 33,75 - 10 \cdot 1 = 23,75 \text{ кН}.$$

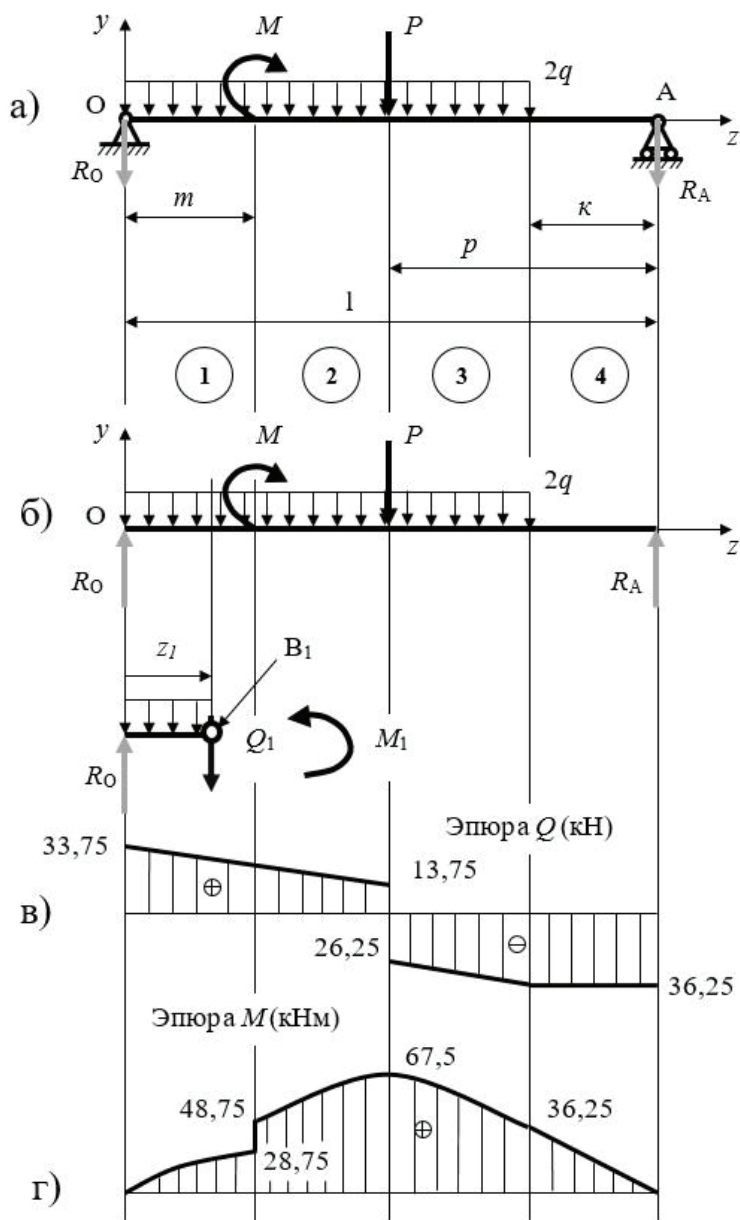


Рис. 5.5

Изображаем эпюру поперечных сил на первом участке.

По аналогии получаем уравнения для поперечных сил на других участках.

3.2. Второй участок ($1\text{ м} \leq z_2 \leq 2\text{ м}$).

$$\sum F_y = R_O - 2q \cdot z_2 - Q_2 = 0,$$

откуда

$$Q_2 = R_O - 2q \cdot z_2 = 33,75 - 10 \cdot z_2.$$

Это уравнение прямой, которая на эпюре поперечных сил может быть построена по двум характерным точкам:

при $z_2 = 1\text{ м}$, $Q_2 = 33,75 - 10 \cdot 1 = 23,75\text{ кН}$, (совпадает с крайней точкой первого участка)

при $z_2 = 2\text{ м}$, $Q_2 = 33,75 - 10 \cdot 2 = 13,75\text{ кН}$.

Изображаем эпюру поперечных сил на втором участке. ВАЖНО! Наличие сосредоточенного изгибающего момента M не оказывает влияния на эпюру поперечных сил.

3.3. Третий участок ($2\text{ м} \leq z_3 \leq 3\text{ м}$).

$$\sum F_y = R_O - 2q \cdot z_3 - P - Q_3 = 0,$$

откуда

$$Q_3 = R_O - 2q \cdot z_3 - P = 33,75 - 10 \cdot z_3 - 40 = -6,25 - 10 \cdot z_3.$$

Это уравнение прямой, которая на эпюре поперечных сил может быть построена по двум характерным точкам:

при $z_3 = 2\text{ м}$, $Q_3 = -6,25 - 10 \cdot 2 = -26,25\text{ кН}$, (не совпадает с крайней точкой второго участка, т.к. в этой точке приложена сосредоточенная сила P и скачек на эпюре поперечных сил должен быть численно равен этой силе)

при $z_3 = 3\text{ м}$, $Q_3 = -6,25 - 10 \cdot 3 = -36,25\text{ кН}$.

Изображаем эпюру поперечных сил на третьем участке.

3.4. Четвертый участок ($3\text{ м} \leq z_4 \leq 4\text{ м}$).

$$\sum F_y = R_O - 2q \cdot 3 - P - Q_4 = 0,$$

откуда

$$Q_4 = R_O - 2q \cdot 3 - P = 33,75 - 10 \cdot 3 - 40 = -36,25\text{ кН}.$$

Это уравнение прямой, параллельной оси Oz . Видно, что скачек на эпюре поперечных сил в точке A численно равен приложенной сосредоточенной силе R_A . Данный факт является косвенным подтверждением правильности построения эпюры.

Изображаем эпюру поперечных сил на четвертом участке.

4. Построение эпюры изгибающих моментов M (индекс «х» опускаем).

4.1. Первый характерный участок. В этом случае $0 \leq z_1 \leq 1\text{ м}$. Для вычисления значений изгибающих моментов на участке используется метод сечений (показано на рис.5.5 для первого участка). Очевидно, что в общем случае направление уравнивающего момента M_1 неизвестно, поэтому

выбираем положительное направление (по правилу знаков при изгибе: при движении справа - налево положителен момент, изгибающий балку вверх).

Получаем уравнение равновесия относительно точки B_1 (знаки для моментов выбираются по правилам теоретической механики: против часовой стрелки - положительный)

$$\sum M_{B_1} = -R_O \cdot z_1 + 2q \cdot \frac{z_1^2}{2} + M_1 = 0,$$

откуда

$$M_1 = R_O \cdot z_1 - 2q \cdot \frac{z_1^2}{2} = 33,75 \cdot z_1 - 10 \cdot \frac{z_1^2}{2}.$$

Это уравнение квадратичной функции (параболы), которую на эпюре изгибающих моментов построим по двум характерным точкам:

$$\text{при } z_1 = 0, \quad M_1 = 0,$$

$$\text{при } z_1 = 1\text{м}, \quad M_1 = 33,75 \cdot z_1 - 10 \cdot \frac{z_1^2}{2} = 33,75 - 5 = 28,75\text{кНм}.$$

Изображаем эпюру изгибающих моментов на первом участке.

По аналогии получаем уравнения для изгибающих моментов на других участках.

4.2. Второй участок ($1\text{м} \leq z_2 \leq 2\text{м}$).

$$\sum M_{B_2} = -R_O \cdot z_2 + 2q \cdot \frac{z_2^2}{2} - M + M_2 = 0,$$

откуда

$$M_2 = R_O \cdot z_2 - 2q \cdot \frac{z_2^2}{2} + M = 33,75 \cdot z_2 - 10 \cdot \frac{z_2^2}{2} + 20.$$

Это уравнение параболы, смещенной относительно оси Oz на значение сосредоточенного момента M . Строим эпюру изгибающих моментов на втором участке по двум характерным точкам:

$$\text{при } z_2 = 1\text{м}, \quad M_2 = 33,75 \cdot 1 - 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 = 48,75\text{кНм}$$

не совпадает с крайней точкой первого участка, т.к. в этой точке приложен сосредоточенный момент M и скачек на эпюре изгибающих моментов должен быть численно равен этому моменту),

$$\text{при } z_2 = 2\text{м} \quad M_2 = 33,75 \cdot 2 - 10 \cdot \frac{4}{2} + 20 = 67,5\text{кНм}.$$

Изображаем эпюру изгибающих моментов на втором участке.

4.3. Третий участок ($2\text{м} \leq z_3 \leq 3\text{м}$).

$$\sum M_{B_3} = -R_O \cdot z_3 + 2q \cdot \frac{z_3^2}{2} - M + P(z_3 - 2) + M_3 = 0,$$

откуда

$$M_3 = 33,75 \cdot z_3 - 10 \cdot \frac{z_3^2}{2} - 40(z_3 - 2) + 20.$$

Уравнение изгибающих моментов на третьем участке описывается квадратичной функцией. Строим эпюру изгибающих моментов на третьем участке по двум характерным точкам (в ряде случаев приходится строить эпюру по большему числу точек, а также анализировать функцию на экстремумы)

при $z_3 = 2м$, $M_3 = 33,75 \cdot 2 - 10 \cdot \frac{4}{2} - 0 + 20 = 67,5кНм$ (совпадает с крайней

правой точкой второго участка). Учитывая дифференциальную зависимость поперечной силы и изгибающего момента, можно утверждать, что в точке, где эпюра Q пересекает ось Oz , на эпюре изгибающих моментов должен наблюдаться экстремум (в нашем случае - максимум),

при $z_3 = 3м$, $M_3 = 33,75 \cdot 3 - 10 \cdot \frac{9}{2} - 40 \cdot 1 + 20 = 36,25кНм$.

Изображаем эпюру изгибающих моментов на третьем участке.

4.4. Четвертый участок ($3м \leq z_4 \leq 4м$).

$$\sum M_{B_i} = -R_O \cdot z_4 + 2q \cdot 3(z_4 - 1,5) - M + P(z_4 - 2) + M_4 = 0,$$

откуда

$$M_4 = 33,75 \cdot z_4 - 30(z_4 - 1,5) - 40(z_4 - 2) + 20.$$

Необходимо отметить, что на четвертом участке изгибающий момент описывается уже не квадратичной функцией, а линейной.

Строим эпюру изгибающих моментов на четвертом участке по двум характерным точкам

при $z_4 = 3м$, $M_4 = 33,75 \cdot 3 - 30 \cdot 1,5 - 40 \cdot 1 + 20 = 36,25кНм$, (совпадает с крайней правой точкой третьего участка),

при $z_4 = 4м$, $M_4 = 33,75 \cdot 4 - 30 \cdot 2,5 - 40 \cdot 2 + 20 = 0$.

ВАЖНО! Если бы по результатам расчетов в шарнирно-подвижной опоре (точка А) изгибающий момент не равнялся нулю, то очевидно наличие ошибок в расчетах.

5.5. Вычисление касательных напряжений от поперечной силы

Касательные напряжения на заданном удалении от нейтральной линии y (рис.5.4) вычисляются по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^*}{J_x b}, \quad (5.12)$$

где $S_x^* = \int_{F^*} y_1 dF$ - статический момент отсеченной части элемента, т.е.

части, находящейся выше продольного сечения с координатой y ; J_x - осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси Ox ; b - ширина

сечения балки в продольном сечении, удаленном на расстояние y от нейтрального слоя.

Исследования показали, что составляющей касательных напряжений τ при анализе прочности массивных сечений можно пренебречь и проверять выполнение условий прочности только для нормальных напряжений.

Тема 6. Расчет статически неопределимых стержневых систем

6.1. Определение перемещений с использованием интеграла Мора

В общем случае нагружения бруса некоторой системой внешних сил в его поперечных сечениях возникают шесть интегральных внутренних силовых факторов (рис.6.1), которые обозначим: M_{xp}, M_{yp} - изгибающие моменты; M_{kp} - крутящий момент; N_p - продольная сила; Q_{xp}, Q_{yp} - поперечные силы. Если в произвольном сечении (точкой C), линейные или угловые перемещения которого нас интересуют, приложить соответствующим образом направленные единичные силы (для определения линейных деформаций) или единичные моменты (для определения углов поворота сечений), то соответствующие обобщенные перемещения δ_C вычисляются с использованием **интегралов Мора** вида:

$$\delta_C = \int_l \frac{M_{kp} M_{k1} dz}{GI_k} + \int_l \frac{M_{xp} M_{x1} dz}{EI_x} + \int_l \frac{M_{yp} M_{y1} dz}{EI_y} + \int_l \frac{N_p N_1 dz}{EF} + \int_l k_x \frac{Q_{xp} Q_{x1} dz}{GF} + \int_l k_y \frac{Q_{yp} Q_{y1} dz}{GF},$$

где $M_{k1}, M_{x1}, M_{y1}, N_1, Q_{x1}, Q_{y1}$ - приращения интегральных внутренних силовых факторов, обусловленные приложением в точке C соответствующих единичных сил и моментов. В практических расчетах вкладом поперечных сил в суммарные деформации элементов конструкции обычно пренебрегают.

6.2. Понятие статической неопределимости

В данной теме рассматриваются кинематически неизменяемые системы соединенных между собой балок и стержней, когда положение в пространстве всех элементов системы зафиксировано. Если элементы системы работают в основном на растяжение и сжатие, то эта стержневая система называется **фермой**, если элементы системы работают в основном на изгиб и кручение, то такую систему будем называть **рамой**.

Рамы и фермы могут быть плоскими, плоскопространственными и пространственными. У плоских систем продольные оси всех ее элементов расположены в одной плоскости. В этой же плоскости действуют все внешние силы (рис. 6.1а). У плоскопространственных систем оси элементов расположены в одной плоскости, а внешние силы действуют в плоскостях, перпендикулярных этой плоскости (рис. 6.1б). Конструкции, не относящиеся к выше перечисленным классам, называются пространственными (рис. 6.1в).

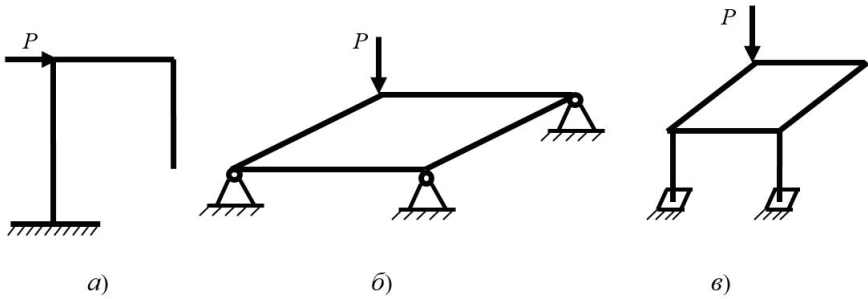


Рис. 6.1. Плоские (а), плоскопространственные (б) и пространственные (в) системы

Ограничения, накладываемые на возможные независимые перемещения свободного тела или на деформации его элементов, называются *связями*. Различают связи внешние и внутренние. Число внешних связей равно числу реакций опор, число внутренних связей – числу внутренних силовых факторов.

Под **статически определимой** системой понимают такую систему, для которой все реакции внешних связей могут быть определены из уравнений статического равновесия, а затем методом сечений могут быть определены все внутренние силовые факторы. Если реакции внешних связей и внутренние силовые факторы не могут быть определены из уравнений статики и методом сечений, то такая система называется **статически неопределимой**.

Если не удастся из условия равновесия определить внешние связи (реакции опор), то систему называют внешне статически неопределимой, если нельзя методом сечений найти внутренние силовые факторы, система является внутренне статически неопределимой. Очевидно, что системы могут быть одновременно внешне и внутренне неопределимыми.

На рис. 6.2а изображена плоская статически определимая система (рама). Реакции находятся из уравнений статики, а внутренние силовые факторы во всех элементах – методом сечений (рис. 6.2б). На рис. 6.2в изображена та же рама, в которой добавлен шарнирно опертый стержень, работающий на растяжение – сжатие. Реакции внешних связей, как и в первом случае, находятся однозначно из уравнений равновесия. Однако определить внутренние силовые факторы методом сечений невозможно, т.к. при рассечении рамы произвольной плоскостью в сечении будет четыре неизвестных внутренних силовых фактора (рис. 6.2г), а для плоской рамы можно составить только три независимых уравнения статики. Следовательно, рама, рассмотренная на рис.6.2в, один раз внутренне статически неопределима.

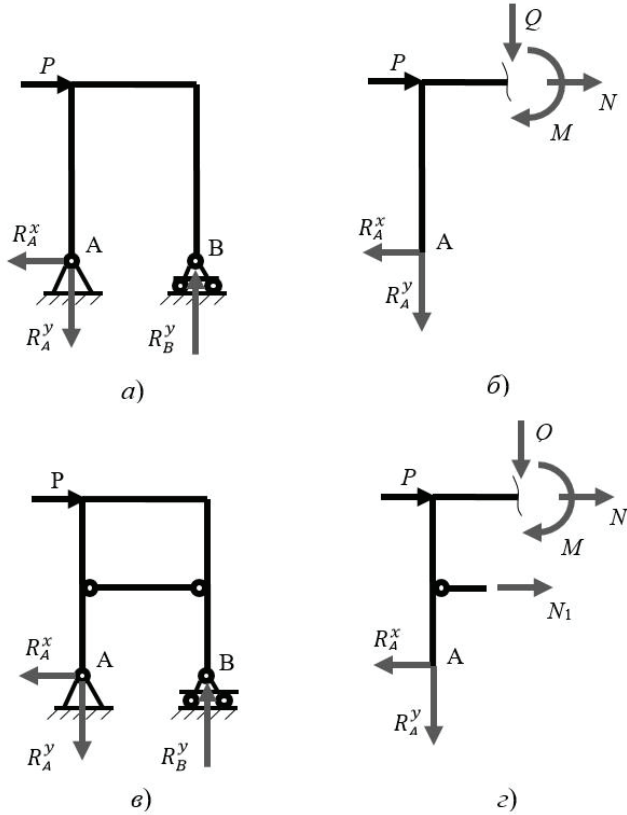


Рис. 6.2. Статически определимые и неопределимые рамы

В рассмотренном примере сверх минимально необходимых для кинематической неизменяемости системы наложена одна «лишняя» связь. Всякую связь, наложенную сверх необходимых, **называют дополнительной**. Степень статической неопределимости системы равна числу дополнительных связей.

6.3. Метод сил

Наиболее распространенным методом раскрытия статической неопределимости системы в машиностроении является метод сил. В соответствии с данным методом система освобождается от дополнительных связей. Исходная система, освобожденная от всех дополнительных связей и с отброшенной системой внешних сил, называется **основной системой**. Действие на систему дополнительных связей заменяют неизвестными на данном этапе расчета силами и моментами. Величину этих сил и моментов подбирают таким

образом, чтобы обобщенные перемещения характерных точек системы соответствовали ограничениям, наложенным на систему отброшенными связями. При таком способе раскрытия статической неопределимости неизвестными являются обобщенные силы. Отсюда и название метода – метод сил. Значит, раскрыть статическую неопределимость – определить обобщенные силы, которые заменяют воздействие на исходную систему отброшенных дополнительных связей.

Алгоритм раскрытия статической неопределимости рассмотрим на простом примере.

Пусть требуется провести расчет на прочность балки, изображенной на рис. 6.3. Будем считать, что изгибная жесткость балки постоянна по ее длине ($EJ_{oc} = const$).

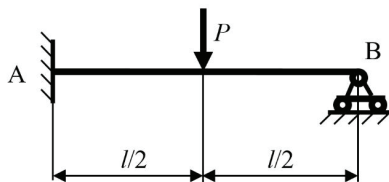


Рис. 6.3. Статически неопределимая балка

Решение.

1. Определяем степень статической неопределимости системы.

В жесткой заделке (слева по рисунку) возникают две реактивные силы и реактивный момент, в шарнирно-подвижной опоре – одна реактивная сила. Итого четыре неизвестных. Для плоской системы можно составить три независимых уравнения статики. Значит, степень внешней статической неопределимости системы равна единице. Внутренне такая балка статически определима, т.к. в ее сечениях действуют два неизвестных силовых фактора (изгибающий момент и поперечная сила, а независимых уравнений статики можно составить три).

2. Выбираем основную систему.

Для этого необходимо отбросить какую-либо дополнительную («лишнюю») связь. Таких основных систем может быть несколько, главное, чтобы после отбрасывания дополнительных связей система оставалась кинематически неизменяемой. В качестве примера на рис. 6.4 приведены два варианта возможных основных систем. В данном расчете в качестве основной выберем систему, показанную на рис. 6.4а.

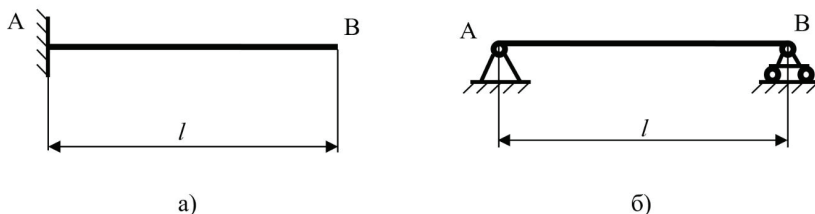


Рис. 6.4. Основные системы статически неопределимой балки

3. Изображаем эквивалентную систему

Эквивалентная система представляет собой основную систему, на которую наложены все внешние нагрузки, действующие на исходную систему, а также прикладываются пока неизвестные обобщенные силы, заменяющие действие отброшенных дополнительных связей. Так как была отброшена одна связь (шарнирно – подвижная опора), то в точке В следует приложить силу X_1 , вертикально направленную (рис. 6.5). Направление (вверх или вниз) действия силы выбирается произвольно. Если оно выбрано неверно, то в процессе расчета будет получено значение силы с минусом. Полученная эквивалентная система отличается от исходной (рис. 6.3) тем, что в исходной системе вертикальное перемещение в точке В запрещено шарнирно – подвижной опорой, а в эквивалентной системе допускается.

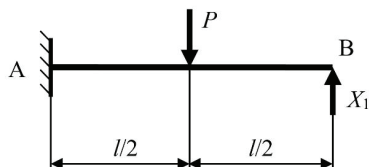


Рис. 6.5. Эквивалентная система

4. Определение значения неизвестной силы X_1 .

Силу X_1 подбирают из условия, чтобы перемещение точки В от совместного действия исходной системы внешних (P) и неизвестной пока силы X_1 было равно нулю, как и в исходной системе. Перемещение будем обозначать греческой буквой Δ_{ij} с двумя индексами. Первый индекс (i) указывает на точку, перемещение которой рассматривается, и направление перемещения (например, $i=1$ – это значит, что рассматривается перемещение точки приложения силы X_1 в направлении ее действия). Второй индекс указывает причину перемещения данной точки (например, $j=P$, т.е. перемещение рассматриваемой точки от действия силы P). В данном случае на основании принципа независимости действия сил имеем

$$\Delta_{1(X_1P)} = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1P} = 0 \quad (6.1)$$

Первый индекс (1) указывает, что рассматривается перемещение точки приложения силы X_1 (на рис.6.5 это точка В) в направлении ее действия. Второй индекс указывает, что рассматривается совместное действие внешней силы P и пока неизвестной силы X_1 .

В соответствии с законом Гука, перемещение точки В от силы X_1 представим в виде

$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11} X_1,$$

где δ_{11} - перемещение точки В, где приложена сила X_1 , в направлении ее действия при $X_1=1$.

Таким образом, условие (6.1) можно записать так

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (6.2)$$

Выражение (6.2) представляет собой **каноническое уравнение метода сил**. Коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1P} по физическому смыслу представляют собой перемещения от действия некоторых обобщенных сил в рассматриваемой точке для статически определимой системы (эквивалентной системы). **Они могут быть определены посредством интегралов Мора.**

Так как при поперечном изгибе балки вкладом в перемещения поперечных сил можно пренебречь, то в интеграле Мора будем учитывать только изгибающий момент. Тогда имеем

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M_p M_1 dz}{EI_{oc}} = \int_l \frac{M_1 M_1 dz}{EI_{oc}} = \frac{1}{EI_{oc}} \int_l M_1^2 dz,$$

$$\Delta_{1P} = \int_l \frac{M_p M_1 dz}{EI_{oc}} = \frac{1}{EI_{oc}} \int_l M_p M_1 dz.$$

В первом интеграле учтено, что перемещение определяется для единичной силы, которая заменяет силу X_1 . Подынтегральные выражения представляют собой произведение функций, одна из которых (M_1) всегда линейна. Следовательно, для вычисления этих интегралов удобно использовать правило Верещагина. Для этого построим эпюры изгибающих моментов от силы P (M_p) и от единичной силы $X_1=1$, как показано на рис. 6.6.

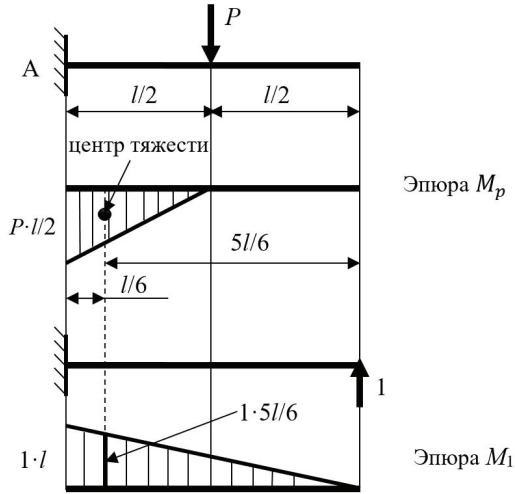


Рис. 6.6. Эпюры изгибающих моментов для консольной балки

В соответствии с правилом вычисления интегралов получим:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_{oc}} \int_l M_1^2 dz = \frac{1}{EI_{oc}} \frac{1}{2} l(1 \cdot l) \frac{2}{3} l(1 \cdot l) = \frac{l^3}{3EI_{oc}} \left[\frac{M}{H} \right],$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI_{oc}} \int_l M_P M_1 dz = -\frac{1}{EI_{oc}} \frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \left(1 \cdot \frac{5l}{6} \right) = -\frac{5Pl^3}{48EI_{oc}} [M].$$

Подставляем найденные коэффициенты в уравнение (6.2) и находим неизвестную силу X_1

$$\frac{l^3}{3EI_{oc}} X_1 - \frac{5Pl^3}{48EI_{oc}} = 0, \quad X_1 = \frac{5}{16} P.$$

Теперь, зная неизвестную ранее реакцию в шарнирно – подвижной опоре исходной системы X_1 , можно перейти от статически неопределимой исходной системы (рис. 6.3) к абсолютно ей эквивалентной, но уже статически определимой системе, изображенной на рис. 6.7. А так как это система статически определимая, то используя метод сечений не представляет труда определить внутренние силовые факторы во всех сечениях и решить задачу прочности.

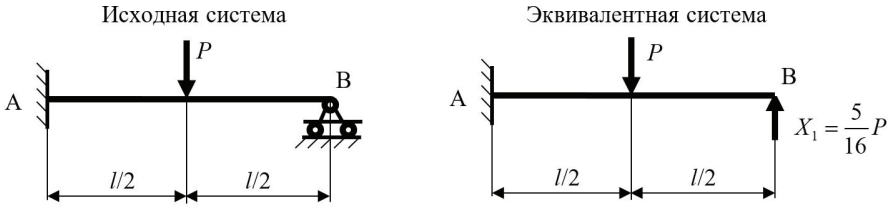


Рис.6.7. Расчетная схема для эквивалентной системы

Содержание

Тема 1. Введение в дисциплину. Основные понятия и гипотезы. Силы и их классификация	
1.1. Введение	3
1.2. Цели и задачи сопротивления материалов	4
1.3. Реальный объект и расчетная схема.....	5
1.4. Основные гипотезы сопротивления материалов	11
Тема 2. Метод сечений	15
2.1. Напряженное и деформированное состояние в точке. Метод сечений	15
2.2. Внутренние силовые факторы	21
2.3. Методы расчета на прочность	23
Тема 3. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении – сжатии	25
3.1. Нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении стержня. Абсолютная и относительная деформация	25
3.2. Экспериментальное изучение свойств материала при растяжении. Основные механические характеристики материала	31
3.3. Построение эпюр продольных сил	34
Тема 4. Кручение.....	39
4.1. Основные понятия и определения. Построение эпюр крутящих моментов	39
4.2. Определение напряжений и деформаций бруса круглого поперечного сечения	40
4.3. Потенциальная энергия при кручении	43
4.4. Условия прочности и жесткости при кручении	44
4.5. Алгоритм решения задач при кручении	44
Тема 5. Расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе	49
5.1. Понятие о геометрических характеристиках плоских фигур	49
5.2. Изгиб. Определение нормальных напряжений в поперечных сечениях	50
5.3. Напряженное состояние. Условия прочности	53
5.4. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	54
5.5. Вычисление касательных напряжений от поперечной силы.....	59
Тема 6. Расчет статически неопределимых стержневых систем.....	60
6.1. Определение перемещений с использованием интеграла Мора	60
6.2. Понятие статической неопределимости	60
6.3. Метод сил.....	62