ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра аэродинамики, конструкций и прочности
летательных аппаратов

М.С. Кубланов

МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебно-методическое пособие
по изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы

для студентов IV курса
направления 25.03.01
заочной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 004
ББК 517.8
К88

Рецензент:
Киселев М.А. – д-р техн. наук, профессор

Кубланов М.С.
К88 Моделирование систем и процессов [Текст] : учебно-методическое пособие по изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / М.С. Кубланов. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 36 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Моделирование систем и процессов» по учебному плану для студентов IV курса направления 25.03.01 заочной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 20.01.2021 г. и методического совета 26.01.2021 г.

УДК 004
ББК 517.8

В авторской редакции

Подписано в печать 24.05.2021 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 2,25 Усл. печ. л. 2,09
Заказ № 735/0330-УМП07 Тираж 50 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

СОДЕРЖАНИЕ

1. УЧЕБНЫЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Курс IV, Форма обучения заочная .
Общий объем учебных часов на дисциплину 108 часов.
Аудиторные занятия 8 часов,
в том числе:
лекции 4 часа (7 семестр),
лабораторные работы 4 часа (8 семестр)
Самостоятельная работа 100 часов,
в том числе:
контрольная работа 12 часов,
работа с учебной литературой и подготовка к дифференцированному зачету 88 часов.
Дифференцированный зачет 8 семестр.

2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСЦИПЛИНЕ

2.1. Предмет дисциплины

До середины XX века при решении прикладных задач приходилось (и это было допустимо) ограничиваться известными классическими примерами, допускающими простейшее, аналитическое представление с однозначным решением. Сегодняшний уровень развития техники требует более точного, более глубокого анализа, как реальности, так и создаваемых человеком систем. Широкая компьютеризация предоставляет такую возможность, однако, процедура получения качественных, достоверных результатов оказывается не столь испытанной, не столь очевидной и простой, как в случае однозначного аналитического решения.

Это потребовало объединения усилий прикладников и математиков в новом научном направлении – математическом моделировании, соединившем в себе, с одной стороны, грамотность описания изучаемого явления и постановки задачи исследований, а с другой стороны, строгость математических методов, обеспечивающих достоверность результатов. Возникла необходимость резко расширить круг инженерных и научных работников, обладающих серьезной математической подготовкой и достаточно высоким уровнем математической культуры.

Данный курс предназначен для формирования математической культуры применения математического моделирования, необходимой для обеспечения физически правильного отражения основных функций и поведения сложных "плохо организованных систем", занимающих в современной технике все большее место.

2.2. Цель и задачи дисциплины

2.2.1. Цель преподавания дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование у студентов знаний методических основ разработки и применения моделей процессов и систем в гражданской авиации.

2.2.2. Задачи изучения дисциплины

2.2.2.1. Знать:

– основные понятия теории моделирования;
– основные типы моделей процессов и систем;
– основные требования, предъявляемые к разработке математических моделей;
– способы построения математических моделей простейших систем и процессов в естествознании и технике;

2.2.2.2. Уметь:

– составлять математическое описание математических моделей;

– проводить вычислительный эксперимент на детерминированной математической модели;

– проводить вычислительный эксперимент на математической модели случайного процесса.

2.2.2.3. Владеть представлением:

– о классификации моделей;

– о методике разработки моделей в научных и инженерных исследованиях;

– о методике применения моделей в научных и инженерных исследованиях;

– о методах оценки адекватности моделей поведению изучаемого объекта;

– о математических методах, применяемых в моделировании;

– о задачах идентификации и оптимизации.

2.3. Перечень базовых (формирующих) дисциплин

Требования к входным знаниям студента, необходимым для изучения дисциплины:

– по дисциплине философия – знать роль науки в развитии цивилизации, соотношение науки и техники, объективной реальности и субъективного восприятия;

– по дисциплине высшая математика (математика)– знать и уметь применять методы следующих разделов: линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика;

– по дисциплине физика – знать фундаментальные физические законы, описывающие процессы и явления в природе и понимать их место;

– по дисциплине метрология, стандартизация и сертификация – знать международную систему единиц физических величин; физические основы и методы измерений, методы оценки погрешностей измерения;

– по дисциплине теоретическая механика (механика) – знать основные понятия и модели;

2.4. Перечень формируемых дисциплин

Дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей:

– технологические процессы технического обслуживания ЛА;

– конструкция и прочность воздушных судов (самолетов, вертолетов);

– конструкция и прочность авиационных (вертолетных) двигателей;

– исследование операций и системный анализ;

– основы теории технической эксплуатации ЛА;

– дисциплины магистерской подготовки.

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

	А в т о р	Наименование, издательство, год издания
1	2	3
Основная литература:		
1	Кубланов М.С.	Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть I. Издание четвертое: учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2013. – 108 с.
2	Кубланов М.С.	Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть II. Издание четвертое: учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2013. – 124 с.
Учебно-методическая литература:		
3	Кубланов М.С.	Моделирование систем и процессов: Пособие по изучению дисциплины, выполнению лабораторных работ и домашних заданий для студентов IV курса направления 25.03.01 и III курса направления 25.05.05 дневного обучения. – М.: МГТУ ГА, 2021. – 47 с.
Дополнительная литература		
4	Советов Б.Я., Яковлев С.Я.	Моделирование систем: Учебник для вузов. – М.: "Высшая школа", 1998. – 320 с.
5	Лебедев А.Н.	Моделирование в научно-технических исследованиях. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
6	Ибрагимов И.А. и др.	Моделирование систем: Учебное пособие. – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.
7	Дыхненко Л.М. и др.	Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для втузов. – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.
8	Корн Г., Корн Т.	Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
9	Годунов С.К., Рябенький В.С.	Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, 1973. – 400 с.
10	Добров Г.М. и др.	Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. – Киев: Наукова Думка, 1974. – 160 с.
11	Барзилович Е.Ю.	Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения (теоретические основы эксплуатации авиационных систем по состоянию). – Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996. – 299 с.

4. ЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА ИНФОРМАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

База электронной информотеки МГТУ ГА – электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК), а также сайт кафедры АКПЛА akpla.ucoz.com – содержит всю информацию, необходимую для изучения дисциплины:

– учебное пособие;
– слайды для лекционного материала;
– пособие по изучению дисциплины.

5. ЭЛЕКТРОННЫЙ АДРЕС КАФЕДРЫ ДЛЯ КОНСУЛЬТАЦИЙ

akpla-study@yandex.ru

6. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Общая теория моделирования

Тема 1.1. Введение

Реальность, познанное, абстракции, модель. Множественность моделей. "Хорошо" и "плохо" организованные системы. Законы и закономерности. Особенность сложных систем и процессов. Сходство объектов. Цели научных и инженерных исследований. Место моделирования в них.

Понятия оригинала и модели. Примеры моделей.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] введение, § 1.1.

Центральные вопросы раздела: Понятия оригинала и модели.

Контрольные вопросы:

1. Модель и оригинал.
2. Что такое модель?
3. Что такое моделирование?

Тема 1.2. Понятие моделирования

Понятие моделирования. Процесс моделирования и необходимая последовательность этапов этого процесса. Причины, вынуждающие применять моделирование.

Два аспекта отношения модели к оригиналу. Классификация моделей по особенностям выражения свойств оригинала и особенности функционирования модели. Классификация моделей по основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала. Пример: маятник.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 1.1, 1.2.

Центральные вопросы раздела: Понятие моделирования. Два аспекта отношения модели к оригиналу.

Контрольные вопросы:

4. Для чего необходим этап постановки задачи в процессе моделирования?
5. На какие условия следует обратить внимание при выборе модели?
6. По каким аспектам классифицируются модели?
7. Что такое логические модели и как они подразделяются?
8. Что такое материальные модели и как они подразделяются?
9. Что такое условные модели?
10. Что такое аналогичные модели?
11. На чем основаны математические модели?

Тема 1.3. Математические модели и их виды

Математическое описание. Виды математического описания. Полнота математического описания. Отличие математической модели от ее математического описания. Состав математического описания моделей.

Виды математических моделей. Понятие имитационной (стохастической) математической модели. Особенности математического описания имитационных математических моделей. Основа разработки стохастических ММ – дисперсионные и регрессионные модели.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.1.

Центральные вопросы раздела: Математическое описание. Состав математического описания и математической модели.

Контрольные вопросы:

12. Какие бывают виды математического описания?
13. Что входит в математическое описание?
14. Что входит в математическую модель помимо математического описания?
15. Отличие математического описания от математической модели.
16. Какие бывают виды математических моделей, определяемые их природой?
17. Особенности имитационной (стохастической) математической модели.

Тема 1.4. Подобная детерминированная модель

Понятие детерминированной математической модели. Пример разработки детерминированной математической модели. Пример: математическая модель разбега самолета Ан-2 при взлете.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.1.

Центральные вопросы раздела: Математическое описание. Состав математического описания и математической модели.

Контрольные вопросы:

18. Особенности детерминированной математической модели.
19. Каково назначение элементов математической модели?
20. Какими свойствами должны обладать элементы математической модели?

Тема 1.5. Адекватность математических моделей

Вычислительный эксперимент. Достоверность результата. Понятие адекватности математических моделей механических систем и процессов, точность и непротиворечивость. Статистическая основа проверки адекватности. Необходимые данные для проверки адекватности. Факторы, которые необходимо учитывать при проверке адекватности. Пример ошибки при оценке адекватности. Точность и погрешность. Абсолютная и приведенная погрешности. Понятие грубой, случайной и систематической погрешности. Причины возникновения погрешности при математическом моделировании. Оценка погрешности математических операций.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.2

Центральные вопросы раздела: Понятие вычислительного эксперимента. Понятие адекватности модели, точность и непротиворечивость. Статистическая основа проверки адекватности.

Контрольные вопросы:

21. Что такое вычислительный эксперимент?
22. Может ли вычислительный эксперимент включать в себя неоднократные расчеты?
23. Что такое достоверность результата вычислительного эксперимента?
24. Что такое адекватность математической модели?
25. Что надо сравнивать для оценки адекватности математической модели?
26. Чем определяется точность моделирования?
27. Что такое грубая, случайная и систематическая погрешности?
28. Причины погрешности математического моделирования.
29. Из-за чего появляется погрешность математической модели?
30. Как используется и интерпретируется доверительный интервал в качестве критерия точности моделирования?
31. Оценка погрешности основных арифметических действий.

Тема 1.6. Алгоритм оценки адекватности модели

Оценка адекватности математической модели как задача математической статистики. Статистический аппарат для оценки точности. Доверительные интервалы. Необходимость знания закона распределения рассогласования для построения доверительного интервала. Механизм выполнения требований по точности математической модели. Систематическая погрешность. Проверка критерия значимости гипотезы о равенстве нулю математического ожидания рассогласования. Статистический аппарат для оценки непротиворечивости. Проверка критерия согласия между наблюдаемым и нормальным законами распределения. Алгоритм проверки адекватности математической модели реальному поведению оригинала с помощью статистических критериев.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [2] § 5.7

Центральные вопросы раздела: Статистическая основа оценки точности и непротиворечивости модели. Алгоритм оценки адекватности модели.

Контрольные вопросы:

32. Почему проверку адекватности необходимо проводить с применением математической статистики?
33. Какой математический аппарат используется для оценки адекватности математической модели?
34. Что необходимо иметь для оценки адекватности математической модели?
35. Что надо учитывать при оценке адекватности математической модели?
36. При решении проблемы адекватности математической модели следует расширять или сужать область ее применимости? Почему?
37. Может ли математическая модель считаться адекватной поведению оригинала, если рассогласование соответствующих параметров неслучайно?
38. Какой вывод о рассогласовании соответствующих параметров модели и оригинала можно сделать с помощью проверки статистической гипотезы о нормальном распределении рассогласования?
39. К какому значению статистического среднего случайной величины рассогласования соответствующих параметров модели и оригинала следует стремиться для улучшения степени адекватности?
40. Какую погрешность характеризует закон распределения с нулевым математическим ожиданием?
41. Какую оценку рассогласования соответствующих параметров модели и оригинала дает доверительный интервал для математического ожидания?
42. Нужно ли знать закон распределения рассогласования для оценки точности математической модели?
43. Нужно ли знать закон распределения рассогласования для оценки систематической погрешности математической модели?
44. Что необходимо проверить сначала: точность или непротиворечивость?

Тема 1.7. Понятие об обратных задачах. Алгоритм научных исследований с помощью моделирования

Задача идентификации при построении математической модели. Простейший пример задачи идентификации. Методы решения задач идентификации. Понятие об обратных задачах.

Строгость процесса математического моделирования. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования. Процессы построения математической модели и ее идентификации.

Основные принципы моделирования механических систем и процессов.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.3, 2.4, 2.5.

Центральные вопросы раздела: Понятие задачи идентификации. Обратные задачи. Строгость процесса математического моделирования. Процессы построения математической модели и ее идентификации.

Контрольные вопросы:

45. Что такое обратные задачи?
46. Что такое задача идентификации?
47. Для чего проводится идентификация математической модели?
48. В чем суть задачи идентификации математической модели?
49. Какой метод лежит в основе решения задачи идентификации?
50. Почему применение математического моделирования требует выполнения определенных этапов?
51. В чем состоит цель этапа изучения оригинала?
52. В чем состоит суть этапа феноменологического описания оригинала?
53. Какой этап необходим после составления математического описания?
54. Для чего проводится контрольный вычислительный эксперимент?
55. Что необходимо делать, если получена неудовлетворительная оценка адекватности?
56. Каким этапом завершается процесс построения математической модели?
57. Какой этап предшествует проведению эксперимента на построенной модели?
58. Чем завершается алгоритм научных исследований?
59. Для чего служат принципы математического моделирования?
60. Принцип адекватности математической модели.
61. Принцип гибкости, инвариантности и динамичности; чем он обеспечивается?
62. Принцип состоятельности результатов вычислительного эксперимента; чем он обеспечивается?
63. Принцип удобства исследователя; чем он обеспечивается?
64. Чем обеспечивается принцип планирования вычислительного эксперимента?
65. Суть принципа конкретизации условий и области применения разрабатываемой математической модели.
66. Принцип опережающей математической строгости и глубины феноменологического описания явления.

Раздел 2. Методы разработки моделей

Тема 2.1. Подобие и анализ размерностей

Сложные и простые математические модели. Построение математической модели как компромисс между простотой и адекватностью. Проблемы построения математических моделей. "Многокритериальность", "проклятие размерности". Проблема адекватности. Методы математического моделирования. Ранжирование, агрегирование. Теория катастроф. Методы последовательных приближений, проб и ошибок, перебора. Метод проверки гипотез.

Подобие. Понятие подобных объектов. Размерные величины, единицы измерения. Анализ размерностей как метод математического моделирования. Системы единиц измерения. Основные и производные единицы измерения. Степенной комплекс. П-теорема. Критерии подобия. Примеры применения П-теоремы для разработки детерминированных математических моделей.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 3.1, 3.2.

Центральные вопросы раздела: Проблемы многокритериальности, большой размерности и адекватности. Основные характеристики методов математического моделирования. Понятие подобия объектов. Степенной комплекс. Критерий подобия.

Контрольные вопросы:

67. Какой компромисс необходим при построении математической модели?
68. Что понимается под многокритериальностью?
69. Что понимается под "проклятием размерности"?
70. С помощью каких методов решается проблема многокритериальности?
71. С помощью каких методов решается проблема "проклятия размерности"?
72. Краткая характеристика приема ранжирования.
73. Краткая характеристика приема агрегирования.
74. Краткая характеристика теории катастроф.
75. Общая характеристика метода последовательных приближений.
76. Метод проб и ошибок.
77. Метод перебора.
78. Характеристика метода проверки гипотез.
79. Понятие подобия объектов.
80. Какова особенность математических описаний подобных объектов?
81. Как связаны соответствующие переменные подобных объектов?
82. Что такое степенной комплекс?
83. Какое место в описании законов природы занимают степенные комплексы?
84. Что такое критерий подобия?
85. Каким образом безразмерный степенной комплекс помогает строить математическое описание?

86. С помощью уравнений какого вида определяется точный вид безразмерного степенного комплекса?
87. С точностью до какой величины может быть найдена функциональная зависимость при помощи ПИ-теоремы?
88. Какой факт лежит в основе уравнений для отыскания показателей степеней в степенном комплексе при помощи ПИ-теоремы?
89. Что такое размерные и безразмерные величины?
90. Как используется единица размерности в обозначении размерной величины?
91. Каковы свойства основных единиц измерения в системах единиц?
92. Что такое производные единицы измерения?
93. Основные механические единицы измерения в системе единиц СИ.

Тема 2.2. Методы экспертных оценок и теории графов

Методы экспертных оценок. Понятие о теории графов.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 3.3, [2] § 8.2.

Центральные вопросы раздела: Назначение методов экспертных оценок. Структура графов.

Контрольные вопросы:

94. Для решения каких задач теории моделирования применяются методы экспертных оценок?
95. Какие виды оценок применяются в методах экспертных оценок?
96. Каким условиям должны удовлетворять аопросы экспертизы?
97. Какие виды графов существуют?
98. Какие существуют элементы графов?

Тема 2.3. Понятие о стохастических моделях

Понятие о теории массового обслуживания. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) как прием для имитации работы системы. Суть метода Монте-Карло. Случайное число. Единичный жребий и процедуры его реализации. Пример построения имитационной математической модели работы аэродрома. Возможность выявления новых свойств объекта при имитационном моделировании. Особенность математического описания имитационной модели и вопрос об адекватности.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 3.4, 3.5.

Центральные вопросы раздела: Единичный жребий. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Особенности имитационных моделей.

Контрольные вопросы:

99. Для построения каких моделей применяется метод статистических испытаний?

100. Какова суть метода статистических испытаний?
101. Что такое единичный жребий?
102. Какова методика розыгрыша единичного жребия?
103. С помощью какого приема в имитационных моделях воспроизводиться событие?
104. Позволяет ли имитационное моделирование воспроизводить процесс функционирования оригинала?
105. Можно ли с помощью имитационной модели выявить свойства оригинала, явно не участвовавшие в построении модели?
106. Необходима ли оценка адекватности имитационной модели и почему?
107. Из чего состоит математическое описание имитационных моделей?

Раздел 3. Математические методы в моделях

Тема 3.1. Понятие о вычислительных методах алгебры

Системы линейных алгебраических уравнений – методы исключения. Системы нелинейных алгебраических уравнений – итерационные методы. Понятие о рекуррентных формулах и процедуре отделения корней. Методы: секущих (хорд), деления отрезка пополам, золотого сечения, касательных (Ньютона). Методы интерполяции (кусочно-постоянная, линейная, квадратичная, полиномиальная, сплайновая, пример). Аппроксимация (сглаживание).

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 4.1.

Центральные вопросы раздела: Существование и единственность решения уравнений итерационными методами. Интерполяция. Аппроксимация.

Контрольные вопросы:

108. Для решения каких задач применяются итерационные методы?
109. Общая характеристика итерационных методов.
110. В каких методах применяется пошаговое уточнение искомого параметра?
111. Что такое рекуррентная формула для решения нелинейного уравнения?
112. Для чего служат условия сходимости итерационного метода?
113. Каким свойствам должна удовлетворять зависимость на исходном интервале для применимости методов деления отрезка пополам, секущих, золотого сечения?
114. Характеристика метода секущих.
115. Характеристика метода деления отрезка пополам.
116. Характеристика метода золотого сечения.
117. Характеристика метода касательных (Ньютона).
118. Для чего служат методы интерполяции функций?
119. Характеристика линейной интерполяции.
120. Характеристика полиномиальной интерполяции.
121. Характеристика сплайновой интерполяции.

122. Общий принцип методов аппроксимации.
123. В чем принципиальное различие между понятиями интерполяции и аппроксимации?

Тема 3.2. Понятие о вычислительных методах решения дифференциальных уравнений

Разностные схемы. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (решения задачи Коши) – разностные методы: Эйлера, Адамса, "прогноз-коррекция", Рунге-Кутта. Порядок разностных методов. Понятие о возможности контроля погрешности и изменения шага интегрирования. Сравнение методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Подходы к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков.

Краевые задачи. Методы сеток – метод прогонки. Пример. Метод стрельбы (пристрелки).

Особенности разностных методов интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 4.2.

Центральные вопросы раздела: Разностные схемы. Понятие о возможности контроля погрешности и изменения шага интегрирования.

Контрольные вопросы:

124. На чем основаны разностные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений?
125. Какой вид дифференциальных уравнений решается методом Эйлера?
126. Чем определяется порядок разностных методов?
127. Основная идея метода Эйлера для решения задачи Коши.
128. Характеристика методов Рунге-Кутта.
129. Характеристика метода Адамса.
130. Характеристика методов "прогноза-коррекции".
131. Какие методы допускают оценку погрешности на шаге интегрирования?
132. Какие методы допускают изменение шага интегрирования в процессе вычислений?
133. С какой целью применяется изменение шага интегрирования в процессе вычислений?
134. Что такое краевая задача?
135. Какие методы применяются для решения краевых задач?
136. Краткая характеристика метода прогонки.
137. Краткая характеристика метода стрельбы.
138. На чем основываются методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными?

Тема 3.3. Математические методы оптимизации

Уравнения связей, фазовые координаты, управления, критерий оптимальности (целевая функция). Общая формулировка задач оптимизации. Пример.

Задача линейного программирования. Описание симплекс-метода (формы записи и виды решений). Пример.

Задача нелинейного программирования. Классический подход. Пример. Методы решения задач нелинейного программирования для унимодального критерия оптимальности от одного переменного: методы деления отрезка пополам и золотого сечения. Общий случай задачи нелинейного программирования и градиентные методы.

Задача вариационного исчисления, "прямые" и "непрямые" методы.

Задача оптимального управления, Принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана. Примеры.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 4.5.

Центральные вопросы раздела: Критерий оптимальности. Задачи линейного и нелинейного программирования. Задачи вариационного исчисления и оптимального управления.

Контрольные вопросы:

139. Какие элементы могут входить в формулировку задачи оптимизации?
140. Для чего служит критерий оптимальности в задаче оптимизации?
141. Какому условию удовлетворяет оптимальное управление?
142. Каковы уравнения связей, ограничения и критерий оптимальности в задаче линейного программирования?
143. В какой части допустимой области лежит решение задачи линейного программирования?
144. Каким методом решаются задачи линейного программирования?
145. Характеристика симплекс-метода.
146. Каковы должны быть уравнения связей, ограничения и критерий оптимальности для того, чтобы задача оптимизации называлась задачей нелинейного программирования?
147. Какими методами решаются задачи нелинейного программирования?
148. Характеристика метода деления отрезка пополам.
149. Характеристика метода золотого сечения.
150. Краткая характеристика градиентных методов.
151. В каких частях допустимой области может располагаться решение задачи нелинейного программирования?
152. Каковы особенности задачи вариационного исчисления?
153. На каких математических условиях основаны "непрямые" методы решения задач вариационного исчисления?
154. На каком приеме основаны "прямые" методы решения задач вариационного исчисления?

155. Каковы особенности задачи оптимального управления?
156. Какими методами решаются задачи оптимального управления?
157. На каких математических условиях основывается решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума?
158. На каких математических условиях основывается решение задач оптимального управления методом динамического программирования?

Тема 3.4. Приемы упрощения и контроля моделей

Упрощение феноменологического описания: установившееся движение, плоскопараллельное движение, осесимметрическое движение, автомодельное движение. Упрощение уравнений: переход к безразмерным величинам, приближенная замена переменных величин постоянными значениями, пренебрежение малыми членами. Пример. Линеаризация. Пример. Метод малого параметра (метод возмущений).

Методы вычисления как замена исходной задачи на упрощенную. Свойства методов вычисления. Устойчивость. Пример. Сходимость. Аппроксимация. Связь устойчивости и аппроксимации со сходимостью.

Контроль размерностей. Контроль основных законов природы. Контроль качественного поведения зависимостей. Контроль математической замкнутости. Проверка на контрольных примерах.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] §§ 4.3, 4.4, 4.6.

Центральные вопросы раздела: Методы упрощения моделей. Методы упрощения уравнений. Свойства методов вычисления.

Контрольные вопросы:

159. Какие элементы математических моделей подвергаются упрощению?
160. Приемы упрощения феноменологического описания.
161. Характеристика установившегося движения.
162. Характеристика плоскопараллельного движения
163. Характеристика осесимметрического движения
164. Характеристика автомодельного движения.
165. Приемы упрощения уравнений.
166. Характеристика приема линеаризации.
167. Характеристика метода малого параметра (метода возмущений).
168. Для чего от методов вычисления требуют определенных свойств?
169. Характеристика свойства устойчивости решения.
170. Характеристика свойства устойчивости метода вычисления.
171. Характеристика свойства сходимости метода вычисления.
172. Характеристика свойства аппроксимации метода вычисления.
173. Связь устойчивости и аппроксимации со сходимостью.

7. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы следует строго придерживаться указанных правил. Работы, выполненные с нарушениями этих правил, не подлежат зачету и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольную работу следует выполнять в тетради чернилами или шариковой ручкой любого цвета, **кроме красного, оставляя поля** для замечаний рецензента. Допустимо оформление контрольной работы производить на компьютере, **оставляя поля** для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия и инициалы студента, **учебный номер зачетки (шифр),** название контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует проставить дату ее выполнения и **расписаться**.

3. В работу должны быть включены **все** задачи контрольного задания **строго по положенному варианту**. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не рецензируются и не подлежат зачету.

4. Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, вставив числовые данные своего варианта.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя ход решения.

7. После получения прорецензированной работы, как зачтенной, так и незачтенной, студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в кратчайший срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, **вся работа** должна быть выполнена заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа с рецензией на нее. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. **Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается!**

8. МЕТОДИКА ВЫБОРА ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ

Номер выполняемого студентом варианта соответствует двум последним цифрам номера зачетной книжки.

9. ЗАДАЧА № 1

Раздел 2. Математическое моделирование
Тема. Математическое описание

Типовая задача. Разработка математической модели для определения скорости отрыва, времени и дистанции разбега самолета Ан-2 по горизонтальной взлетно-посадочной полосе (ВПП) в стандартных атмосферных условиях без возмущений.

Указание: проработать теоретический материал [1, § 2.1].

Замечание. В этом разделе приводится детальное изложение с объяснением последовательности действий всей ПРОЦЕДУРЫ разработки математической модели. Контрольное задание этого не требует, а предлагает студенту лишь ЗАПОЛНИТЬ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗДЕЛЫ математической модели продуманными ВЫПИСКАМИ из предлагаемого материала.

В качестве феноменологического описания разрабатываемой модели используем сведения из аэродинамики и динамики полета самолетов с вспомогательной хвостовой стойкой шасси и с винтовым двигателем.

Разбег такого самолета вплоть до момента отрыва от ВПП производится при постоянном (стояночном) угле атаки α, который однозначно определяет значения основных аэродинамических коэффициентов: c_{xa} – коэффициента лобового сопротивления и c_{ya} – коэффициента аэродинамической подъемной силы. С их помощью можно определить соответствующие составляющие аэродинамической силы, действующей на самолет. Для этого достаточно умножить их на S – площадь крыла самолета и на $q = \dfrac{\rho V^2}{2}$ – скоростной напор, где ρ – плотность атмосферы, V – воздушная скорость движения:

$$X_a = c_{xa} \cdot \frac{\rho V^2}{2} S$$

– сила лобового сопротивления (по направлению набегающего потока) и

$$Y_a = c_{ya} \cdot \frac{\rho V^2}{2} S$$

– аэродинамическая подъемная сила (перпендикулярная X_a и направленная вверх).

Из теории авиационных двигателей известно, что при разбеге самолета следует учитывать зависимость силы тяги P двигателя от скорости движения. В первом приближении для винтовых двигателей можно принять эту зависимость в виде:

$$P = P_0 \cdot (1 - aV - bV^2),$$

где P_0 – взлетная тяга двигателя при нулевой скорости и при заданном положении РУД (рукоятки управления двигателем), a и b – коэффициенты, получаемые эмпирически. Здесь и далее будем полагать, что направление вектора тяги P совпадает с направлением движения самолета.

Используем знания динамики полета и составим уравнения движения самолета в вертикальной плоскости. Поскольку в вертикальном направлении во время разбега вплоть до скорости отрыва не происходит заметного движения, то соответствующее уравнение движения вырождается в уравнение баланса сил: вниз действует сила тяжести mg, вверх – аэродинамическая подъемная сила Y_a и сила N реакции ВПП. Таким образом, уравнение принимает вид

$$mg = Y_a + N.$$

Из этого уравнения можно определить скорость самолета в момент отрыва от ВПП $V_{отр}$, т.е. в момент обращения N в нуль: $mg = c_{ya} \cdot \frac{\rho V_{отр}^2}{2} S$, откуда окончательно можно вычислить

$$V_{отр} = \sqrt{\frac{2mg}{c_{ya} \rho S}}.$$

Составим уравнение движения самолета в продольном направлении. В этом направлении сила тяги двигателя P разгоняет самолет, а сила лобового сопротивления X_a и сила сопротивления трения качения колес шасси по ВПП $F = f \cdot N = f \cdot (mg - Y_a)$ стремятся его затормозить. Тогда по второму закону Ньютона

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = P - X_a - F.$$

Для отыскания дистанции разбега $L_{разб}$ понадобится еще одно известное кинематическое уравнение:

$$V = \frac{dL}{dt}.$$

Таким образом, выписаны все соотношения, представляющие физическую взаимосвязь элементов и параметров объекта (законы движения, **функциональные соотношения**, функции), входящие в математическое описание модели. Однако это еще не все математическое описание и не вся модель. Необходимо разработать методы вычисления требуемых от модели величин, которые можно было бы реализовать аналитически или с помощью ЭВМ. Для этого исследуем подробнее структуру полученных дифференциальных уравнений с точки зрения определения времени $T_{разб}$ и дистанции разбега $L_{разб}$. Из уравнения движения в продольном направлении следует

$$m\cdot\frac{dV}{dt}=P-X_a-F=P_0(1-aV-bV^2)-c_{xa}\cdot\frac{\rho V^2}{2}S-fmg+fc_{ya}\cdot\frac{\rho V^2}{2}S,$$

или $$\frac{dV}{dt}=\frac{P_0}{m}(1-aV-bV^2)-fg-\frac{\rho V^2}{2m}S(c_{xa}-fc_{ya})=A+BV+CV^2,$$

где $$A=\frac{P_0}{m}-fg;\quad B=-\frac{P_0}{m}a;\quad C=-\frac{P_0}{m}b-\frac{\rho S}{2m}(c_{xa}-fc_{ya}),$$

т.е. дифференциальное уравнение разрешимо в квадратурах аналитически, как уравнение с разделяющимися переменными:

$$dt=\frac{dV}{A+BV+CV^2},$$

откуда: $$T_{разб}=\int\limits_0^{V_{отр}}\frac{dV}{A+BV+CV^2}=$$

$$=\left.\begin{cases}\frac{1}{B}(\ln|A+BV|) & \text{при}\quad C=0,\\ \dfrac{-2}{B+2CV} & \text{при}\quad C\neq 0\quad\text{и}\quad B^2=4AC,\\ \dfrac{1}{\sqrt{B^2-4AC}}\ln\left|\dfrac{2CV+B-\sqrt{B^2-4AC}}{2CV+B+\sqrt{B^2-4AC}}\right| & \text{при}\quad C\neq 0\quad\text{и}\quad B^2>4AC,\\ \dfrac{2}{\sqrt{4AC-B^2}}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{2CV+B}{\sqrt{4AC-B^2}}\right| & \text{при}\quad C\neq 0\quad\text{и}\quad B^2<4AC.\end{cases}\right|_0^{V_{отр}}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{B}(\ln|A+BV_{отр}|)-\frac{1}{B}\ln|A| & \text{при}\quad C=0,\\ \dfrac{-2}{B+2CV_{отр}}+\dfrac{2}{B} & \text{при}\quad C\neq 0\quad\text{и}\quad B^2=4AC,\\ \dfrac{1}{\sqrt{B^2-4AC}}\left(\ln\left|\dfrac{2CV_{отр}+B-\sqrt{B^2-4AC}}{2CV_{отр}+B+\sqrt{B^2-4AC}}\right|-\ln\left|\dfrac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{B+\sqrt{B^2-4AC}}\right|\right) & \text{при}\quad C\neq 0\quad\text{и}\quad B^2>4AC,\\ \dfrac{2}{\sqrt{4AC-B^2}}\left(\operatorname{arctg}\left|\dfrac{2CV_{отр}+B}{\sqrt{4AC-B^2}}\right|-\operatorname{arctg}\left|\dfrac{B}{\sqrt{4AC-B^2}}\right|\right) & \text{при}\quad C\neq 0\quad\text{и}\quad B^2<4AC.\end{cases}$$

Из кинематического дифференциального уравнения в силу полученного выражения для dt следует:

$$dL=Vdt=\frac{VdV}{A+BV+CV^2},$$

откуда: $$L_{разб}=\int\limits_0^{V_{отр}}\frac{VdV}{A+BV+CV^2}=$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{V}{B} - \frac{A}{B^2} \ln\left| A + BV \right| \right) \Bigg|_0^{V_{отр}} & \text{при} \quad C = 0, \\ \frac{1}{2C} \ln\left| A + BV + CV^2 \right| \Bigg|_0^{V_{отр}} - \frac{B}{2C} \int\limits_0^{V_{отр}} \frac{dV}{A + BV + CV^2} & \text{при} \quad C \neq 0. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{B}\left(V_{отр} - AT_{разб} \right) & \text{при} \quad C = 0, \\ \frac{1}{2C}\left(\ln\left| A + BV_{отр} + CV_{отр}^2 \right| - \ln|A| - BT_{разб} \right) & \text{при} \quad C \neq 0. \end{cases}$$

На этом завершается описание **<u>методов вычисления</u>** требуемых величин $V_{отр}$, $T_{разб}$ и $L_{разб}$. Вместе с предыдущими соотношениями они составляют сердцевину математического описания модели для заданной цели.

Для завершения математического описания к функциональным взаимосвязям и методам вычисления следует добавить числовые и функциональные **<u>данные</u>** параметров объекта, которые позволят вычислить требуемые величины:

– плотность воздуха ρ = 1,225 кг/м ;

– коэффициент трения качения колес шасси по ВПП f = 0,035;

– массу самолета m = 5250 кг;

– площадь крыла S = 71,5 м ;

– аэродинамические коэффициенты: c_{xa} = 0,3; c_{ya} = 1,5;

– взлетную тягу двигателя в стандартных атмосферных условиях при нулевой скорости P_0 = 2000 кгс;

– коэффициенты зависимости тяги от скорости: a = 0,002 с/м, b = 0,0002 $с^2/м^2$;

– **и начальные условия** для интегрирования дифференциальных уравнений: при $t = 0$: $V = 0$, $L = 0$, которые уже использованы для записи определенных интегралов.

Как нетрудно видеть, полнота математического описания модели позволяет произвести расчеты и получить значения требуемых величин в заданных условиях.

Кроме математического описания в математическую модель входит описание всех **<u>допущений</u>**, использованных в процессе ее построения (в том числе и из дисциплин аэродинамики, динамики полета ЛА и т.п., а также предположения и допущения, сделанные по тексту в процессе выбора функциональных соотношений и разработки методов вычисления), и **<u>алгоритмы перевода</u>** исходных и выходных данных с модели на оригинал и обратно (в данном простом примере этот перевод осуществляется с коэффициентами подобия равными единице, т.е. непосредственно, если не считать правила округления в пределах точности измерений).

Для результатов вычислительного эксперимента соответствующие методы вычисления дают следующие значения всех необходимых величин:

$$V_{отр} = 28{,}0 \text{ м/с} = 100{,}8 \text{ км/ч};$$

$$A = 3{,}393 \text{ м/с}^2;\ B = –0{,}007472 \text{ 1/с};\ C = –0{,}002812 \text{ 1/м},$$

$T_{разб}$ = 12 с; $L_{разб}$ = 205 м.

Условие задачи контрольной работы

Напоминание: Требуется лишь ЗАПОЛНИТЬ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗДЕЛЫ математической модели (обозначенные ниже •) продуманными ВЫПИСКАМИ из предложенного материала – все содержание предыдущих страниц переписывать не надо.

Требуется составить основные элементы математической модели для определения скорости отрыва, времени и дистанции разбега самолета Ан-2 по горизонтальной взлетно-посадочной полосе (ВПП) в стандартных атмосферных условиях без возмущений:

1) выписать все необходимые составляющие математического описания модели:

- числовые данные математической модели,
- функциональные соотношения, на которых основана модель,
- методы вычисления требуемых параметров;

2) перечислить лежащие в основе математической модели:

- основные допущения и предположения (кроме ссылок на использованные дисциплины привести не менее 4 конкретных предположений, использованных в вышеприведенном тексте при разработке математического описания),
- способы перевода исходных и выходных данных с оригинала на модель и обратно;

3) вычислить требуемые параметры контрольного варианта взлета.

Общие данные для всех вариантов:

– плотность воздуха ρ = 1,225 кг/м^3;

– площадь крыла S = 71,5 м^2;

– коэффициенты зависимости тяги от скорости: a = 0,002 с/м, b = 0,0002 с^2/м^2.

Индивидуальные данные вариантов:

№ вар.	m, кг	$f_{тр}$	c_{xa}	c_{ya}	P_0, кгс
1	4500	0, 020	0, 25	1,30	1500
2	4625	0, 020	0, 30	1,30	2000
3	5000	0, 020	0, 25	1,30	2000
4	4125	0, 035	0, 25	1,30	1500
5	5000	0, 020	0, 35	1,70	1500
6	5000	0, 035	0, 25	1,30	1500

№ вар.	m кг	$f_{тр}$	c_{xa}	c_{ya}	P_0 кгс
7	5250	0, 035	0, 25	1,50	2000
8	5000	0, 020	0, 30	1,70	1800
9	4500	0, 050	0, 25	1,30	1800
10	4750	0, 050	0, 25	1,30	1500
11	5125	0, 050	0, 25	1,30	2000
12	5500	0, 050	0, 20	1,30	1400
13	4500	0, 020	0, 25	1,50	1400
14	4500	0, 020	0, 25	1,70	2000
15	5000	0, 020	0, 25	1,50	1500
16	5250	0, 020	0, 30	1,50	1400
17	4000	0, 035	0, 25	1,50	1500
18	4375	0, 035	0, 25	1,70	2000
19	5000	0, 035	0, 25	1,50	1800
20	5125	0, 035	0, 20	1,50	1300
21	5500	0, 035	0, 25	1,50	1500
22	4250	0, 050	0, 25	1,50	1500
23	4000	0, 050	0, 25	1,50	1500
24	5000	0, 050	0, 20	1,50	2000
25	4500	0, 050	0, 25	1,50	1900
26	4000	0, 020	0, 25	1,70	1500
27	4375	0, 020	0, 25	1,30	1500
28	4750	0, 020	0, 35	1,70	1400
29	4500	0, 020	0, 25	1,70	1900
30	5500	0, 020	0, 25	1,70	1500
31	4250	0, 035	0, 25	1,70	2000
32	5000	0, 035	0, 25	1,70	1900
33	5000	0, 035	0, 35	1,70	2000
34	5000	0, 035	0, 25	1,70	1500
35	4125	0, 050	0, 35	1,70	1300

№ вар.	m кг	$f_{тр}$	c_{xa}	c_{ya}	P_0 кгс
36	4500	0, 050	0, 25	1,70	1500
37	4875	0, 050	0, 25	1,30	1500
38	4500	0, 050	0, 25	1,70	2000
39	4250	0, 020	0, 30	1,30	2000
40	4625	0, 020	0, 20	1,30	1500
41	5000	0, 020	0, 30	1,70	2000
42	5375	0, 020	0, 30	1,30	1500
43	5000	0, 035	0, 30	1,30	1500
44	4500	0, 035	0, 20	1,30	2000
45	4875	0, 035	0, 30	1,30	1500
46	4500	0, 035	0, 30	1,30	2000
47	4000	0, 050	0, 20	1,30	1400
48	4375	0, 050	0, 30	1,70	2000
49	4000	0, 050	0, 30	1,30	1800
50	5500	0, 050	0, 30	1,30	1500
51	4125	0, 020	0, 30	1,30	1300
52	4500	0, 020	0, 20	1,50	2000
53	4500	0, 020	0, 30	1,50	1500
54	5250	0, 020	0, 30	1,50	1500
55	4000	0, 035	0, 30	1,30	2000
56	5000	0, 035	0, 30	1,50	1500
57	4750	0, 035	0, 30	1,30	1400
58	5125	0, 035	0, 30	1,50	1500
59	4500	0, 035	0, 35	1,30	2000
60	4250	0, 050	0, 25	1,50	1400
61	4000	0, 050	0, 30	1,50	1900
62	5000	0, 050	0, 30	1,50	1500
63	4500	0, 050	0, 30	1,50	1500
64	5000	0, 020	0, 30	1,70	1300

№ вар.	m кг	$f_{тр}$	c_{xa}	c_{ya}	P_0 кгс
65	4375	0, 020	0, 20	1,70	2000
66	4750	0, 020	0, 30	1,30	2000
67	5125	0, 020	0, 30	1,70	2000
68	5250	0, 020	0, 35	1,70	1400
69	5000	0, 035	0, 30	1,70	1500
70	4750	0, 035	0, 30	1,70	1500
71	5000	0, 035	0, 25	1,70	2000
72	4500	0, 035	0, 30	1,70	1900
73	4125	0, 050	0, 30	1,30	1400
74	5000	0, 050	0, 30	1,70	1900
75	4875	0, 050	0, 30	1,70	1500
76	4500	0, 050	0, 30	1,70	1400
77	4125	0, 020	0, 20	1,30	1400
78	5000	0, 020	0, 35	1,30	1900
79	4875	0, 020	0, 35	1,70	2000
80	5250	0, 020	0, 35	1,30	1500
81	5000	0, 035	0, 35	1,30	1800
82	5125	0, 035	0, 35	1,30	1500
83	4250	0, 050	0, 35	1,70	1500
84	4625	0, 050	0, 25	1,30	2000
85	4500	0, 020	0, 35	1,30	1900
86	4000	0, 020	0, 35	1,50	2000
87	4375	0, 020	0, 35	1,30	1900
88	4750	0, 020	0, 20	1,50	1800
89	4250	0, 035	0, 35	1,50	1500
90	5500	0, 035	0, 35	1,50	1500
91	5000	0, 035	0, 35	1,50	1500
92	5375	0, 035	0, 20	1,50	1900
93	4500	0, 035	0, 35	1,50	2000

94	4125	0, 050	0, 35	1,50	2000
95	4500	0, 050	0, 35	1,70	2000
96	4000	0, 050	0, 35	1,50	1900
97	4250	0, 020	0, 35	1,70	2000
98	4625	0, 020	0, 35	1,30	2000
99	4000	0, 050	0, 30	1,30	1300
100	5000	0, 025	0, 30	1,60	1800

10. ЗАДАЧА № 2

Раздел 3. Методы математического моделирования
Тема. Анализ размерностей как метод математического моделирования

Типовая задача. Составление функциональной зависимости с помощью пи-теоремы.

Указание: проработать теоретический материал [1, § 3.2].

Анализ размерностей является мощным средством для построения математических описаний моделей природных объектов, соотношения между параметрами которых по тем или иным причинам не известны. Принципиальная возможность этого основывается на том факте, что все основные законы природы описываются степенными комплексами:

$$\Pi = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{y_n}$$

– произведениями n физических параметров x_i с некоторыми показателями степени y_i. Из аналогичных комплексов построены и размерности всех физических параметров, если под П понимать размерность физического параметра, а под x_i – основные единицы размерности. Например, в СИ приняты следующие основные единицы размерности величин: длина – м, масса – кг, время – с, сила тока – А, температура – °К, количество вещества – моль, сила света – кд. А размерности других величин, таких, например, как сила, выражаются через эти основные единицы размерности в виде: Н = кг·м/с^2 = кг^1·м^1·с$^{-2}$.

Опуская полную формулировку "**пи-теоремы**" (по названию греческой буквы П – "пи"), приведем лишь одно из ее следствий: из параметров, характерных (определяющих) для исследуемого природного явления, всегда можно составить не менее одного безразмерного степенного комплекса (размерность которого равна 1).

В теории математического моделирования применение пи-теоремы позволяет составить математическое описание нового явления. С помощью определенного по пи-теореме степенного комплекса можно найти вид характерной функциональной зависимости с точностью до числового (безразмерного) коэффициента. По завершении разработки полного математического описания данного явления недостающие числовые коэффициенты могут быть найдены эмпирически (из опыта) в процессе решения задачи идентификации.

Пример составления зависимости с помощью пи-теоремы.

В условиях невесомости (при этом ускорение силы тяжести несущественно) рассматривается шар диаметром d в вязкой жидкости. Для очень медленного равномерного движения шара в жидкости (при этом плотность жидкости и масса шара несущественны) требуется определить зависимость силы сопротивления W от существенных параметров явления.

Из условия задачи следует, что масса шара, ускорение силы тяжести и плотность жидкости не являются для данного процесса существенными параметрами. Составим список других физических параметров, которые могут претендовать на существенные. Вязкость жидкости характеризуется коэффициентом динамической вязкости μ, который в СИ имеет размерность [кг/(м·с)]. Существенно влияние диаметра шара d и скорости движения V. Возможно влияние и температуры T. Таким образом, выявлены следующие параметры, которые могут быть существенными для определения W в исследуемом явлении: d, μ, V, T. Их размерности, выраженные через основные единицы измерений: [d] = м, [μ] = кг/(м·с), [V] = м/с, [T] = °K, а размерность силы [W] = кг·м/с^2.

Найдем вид возможных степенных комплексов П, которые согласно пи-теореме должны быть безразмерными: [П] = 1, т.е. такие показатели степеней y_i при существенных физических параметрах задачи, которые составляют безразмерное произведение:

$$\Pi = d^{y_1} \cdot \mu^{y_2} \cdot V^{y_3} \cdot W^{y_4} \cdot T^{y_5}.$$

Из приведенных размерностей следует:

$$\begin{aligned}[\Pi] = 1 = [d]^{y_1} \cdot [\mu]^{y_2} \cdot [V]^{y_3} \cdot [W]^{y_4} \cdot [T]^{y_5} = \\ = \text{м}^{y_1}\text{кг}^{y_2}\text{м}^{-y_2}\text{с}^{-y_2}\text{м}^{y_3}\text{с}^{-y_3}\text{кг}^{y_4}\text{м}^{y_4}\text{с}^{-2y_4}(^\circ\text{K})^{y_5} = \\ = \text{м}^{y_1-y_2+y_3+y_4} \cdot \text{кг}^{y_2+y_4} \cdot \text{с}^{-y_2-y_3-2y_4} \cdot (^\circ\text{K})^{y_5}.\end{aligned}$$

Поскольку м, с, кг и °K – основные единицы измерений в СИ, т.е. имеют независимые размерности (не сокращаются друг с другом), то для получения единицы суммы показателей степеней при каждой из них должны независимо обращаться в нуль:

$$\left.\begin{array}{lr} (\text{м}): & y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ (\text{кг}): & y_2 + y_4 = 0 \\ (\text{с}): & -y_2 - y_3 - 2y_4 = 0 \\ (^\circ\text{K}) & y_5 = 0 \end{array}\right\}.$$

Далее из (кг) следует: $y_2 = -y_4$, затем из (с): $y_3 = -y_4$, а из (м): $y_1 = -y_4$. Итак:

$$\Pi = \left(d^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot V^{-1} \cdot W^{1} \cdot T^{0}\right)^{y_4}.$$

Отсюда ввиду произвольности y_4 и безразмерности П вытекает функциональная зависимость:

$$\frac{W}{\mu dV} = k \text{ или } W = k\mu dV,$$

где k – безразмерное число.

Итак, искомая зависимость силы сопротивления вязкой жидкости при медленном движении шара в невесомости имеет вид $W = k\mu dV$.

Условие задачи контрольной работы

Требуется с помощью пи-теоремы составить вид функциональной зависимости для математического описания модели следующего природного явления. В атмосфере происходит некоторое взрывное воздействие. Для контрольной точки, находящейся на расстоянии R от взрыва, требуется выявить вид функциональной зависимости характеристики ударной волны от характеристики взрывного воздействия, расстояния R, температуры T и еще одного параметра атмосферы, ВЫБИРАЕМОГО СТУДЕНТОМ произвольно.

Примечание 1. Ударная волна в контрольной точке в различных вариантах характеризуется одной из следующих величин (их размерности СТУДЕНТ ОПРЕДЕЛЯЕТ САМОСТОЯТЕЛЬНО): t – время прихода ударной волны; Δp – интенсивность ударной волны (разность давлений перед волной и после); V – скорость прохождения ударной волны.

Примечание 2 (общие сведения, не использующиеся при решении). В таблице вариантов заданий взрывное воздействие характеризуется одной из следующих величин: W – энергия; N – мощность; J – импульс силы; F – сила; m – изменение массы; q – скорость изменения массы; w – плотность энергии; n – плотность мощности; i – плотность импульса; f – плотность силы; β – изменение плотности массы; τ – скорость изменения плотности массы. Размерности этих характеристик в зависимости от вида взрыва (точечного, линейного, плоского) указаны в таблице.

Таблица вариантов заданий

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность		вид взрыва (для справки)
1	t	W	Дж	точечный
2	Δp	W	Дж	точечный
3	V	W	Дж	точечный
4	t	N	Вт	точечный
5	Δp	N	Вт	точечный

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность		вид взрыва (для справки)
6	V	N	Вт	точечный
7	t	J	Н·с	точечный
8	Δp	J	Н·с	точечный
9	V	J	Н·с	точечный
10	t	F	Н	точечный
11	Δp	F	Н	точечный
12	V	F	Н	точечный
13	t	m	кг	точечный
14	Δp	m	кг	точечный
15	V	m	кг	точечный
16	t	q	кг/с	точечный
17	Δp	q	кг/с	точечный
18	V	q	кг/с	точечный
19	t	w	Дж/м^3	точечный
20	Δp	w	Дж/м^3	точечный
21	V	w	Дж/м^3	точечный
22	t	n	Вт/м^3	точечный
23	Δp	n	Вт/м^3	точечный
24	V	n	Вт/м^3	точечный
25	t	i	Н·с/м^3	точечный
26	Δp	i	Н·с/м^3	точечный
27	V	i	Н·с/м^3	точечный
28	t	f	Н/м^3	точечный
29	Δp	f	Н/м^3	точечный
30	V	f	Н/м^3	точечный
31	t	β	кг/м^3	точечный
32	Δp	β	кг/м^3	точечный
33	V	β	кг/м^3	точечный
34	t	τ	кг/(с· м^3)	точечный

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность		вид взрыва (для справки)
35	Δp	τ	кг/(с· м^3)	точечный
36	V	τ	кг/(с· м^3)	точечный
37	t	W	Дж/м	линейный
38	Δp	W	Дж/м	линейный
39	V	W	Дж/м	линейный
40	t	N	Вт/м	линейный
41	Δp	N	Вт/м	линейный
42	V	N	Вт/м	линейный
43	t	J	Н·с/м	линейный
44	Δp	J	Н·с/м	линейный
45	V	J	Н·с/м	линейный
46	t	F	Н/м	линейный
47	Δp	F	Н/м	линейный
48	V	F	Н/м	линейный
49	t	m	кг/м	линейный
50	Δp	m	кг/м	линейный
51	V	m	кг/м	линейный
52	t	q	кг/(с·м)	линейный
53	Δp	q	кг/(с·м)	линейный
54	V	q	кг/(с·м)	линейный
55	t	w	Дж/м^4	линейный
56	Δp	w	Дж/м^4	линейный
57	V	w	Дж/м^4	линейный
58	t	n	Вт/м^4	линейный
59	Δp	n	Вт/м^4	линейный
60	V	n	Вт/м^4	линейный
61	t	i	Н·с/м^4	линейный
62	Δp	i	Н·с/м^4	линейный
63	V	i	Н·с/м^4	линейный

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность		вид взрыва (для справки)
64	t	f	$Н/м^4$	линейный
65	Δp	f	$Н/м^4$	линейный
66	V	f	$Н/м^4$	линейный
67	t	β	$кг/м^4$	линейный
68	Δp	β	$кг/м^4$	линейный
69	V	β	$кг/м^4$	линейный
70	t	τ	$кг/(с \cdot м^4)$	линейный
71	Δp	τ	$кг/(с \cdot м^4)$	линейный
72	V	τ	$кг/(с \cdot м^4)$	линейный
73	t	W	$Дж/м^2$	плоский
74	Δp	W	$Дж/м^2$	плоский
75	V	W	$Дж/м^2$	плоский
76	t	N	$Вт/м^2$	плоский
77	Δp	N	$Вт/м^2$	плоский
78	V	N	$Вт/м^2$	плоский
79	t	J	$Н \cdot с/м^2$	плоский
80	Δp	J	$Н \cdot с/м^2$	плоский
81	V	J	$Н \cdot с/м^2$	плоский
82	t	F	$Н/м^2$	плоский
83	Δp	F	$Н/м^2$	плоский
84	V	F	$Н/м^2$	плоский
85	t	m	$кг/м^2$	плоский
86	Δp	m	$кг/м^2$	плоский
87	V	m	$кг/м^2$	плоский
88	t	q	$кг/(с \cdot м^2)$	плоский
89	Δp	q	$кг/(с \cdot м^2)$	плоский
90	V	q	$кг/(с \cdot м^2)$	плоский
91	t	w	$Дж/м^5$	плоский
92	Δp	w	$Дж/м^5$	плоский

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность		вид взрыва (для справки)
93	V	w	Дж/м^5	плоский
94	t	n	Вт/м^5	плоский
95	Δp	n	Вт/м^5	плоский
96	V	n	Вт/м^5	плоский
97	t	i	Н·с/м^5	плоский
98	Δp	i	Н·с/м^5	плоский
99	V	i	Н·с/м^5	плоский
100	t	f	Н/м^5	плоский

11. ЗАДАЧА № 3

Раздел 3. Методы математического моделирования
Тема. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) как прием для имитации работы системы

Типовая задача. Имитация случайного процесса.

Указание: проработать теоретический материал [1, § 3.5].

Построение имитационных математических моделей необходимо в тех случаях, когда для математического описания недостаточно аналитического вида зависимостей, поскольку явление подвержено влиянию случайных факторов. В этом случае используются математические описания случайных величин, т.е. законы их распределения. (Законом распределения случайной величины в теории вероятностей называется функциональная зависимость

$$P = P(\xi \le x) = F(x),$$

где x – значение из диапазона реализации случайной величины ξ, P – вероятность того, что очередная реализация случайной величины ξ окажется не превосходящей значения x. Законы распределения находят из статистической обработки результатов наблюдения за процессом).

Случайная величина имитируется с помощью датчика случайных чисел. В ЭВМ датчик случайных чисел – это специальная программа, при каждом обращении к которой получается случайное число, заключенное между 0 и 1. (Его можно получить и без ЭВМ с помощью таблицы случайных чисел). Так как вероятность появления события определяется величиной, тоже заключенной между 0 и 1, то их отождествляют. Далее, пользуясь законами распределения требуемых случайных величин рассматриваемого процесса, определяют их имитационные значения. Многократным повторением такой процедуры имитируется весь случайный процесс так, как он МОГ БЫ произойти на самом деле. Описанный метод имитационного моделирования носит название метода статистических испытаний (метода Монте-Карло).

Пример имитации случайного процесса.

Требуется сымитировать работу аэродрома методом Монте-Карло. Найти время, за которое совершат посадку и освободят ВПП 10 самолетов. Выделить интервалы времени, в течение которых ВПП свободна более 5 минут, т.е. когда вылетающий самолет может произвести взлет. Выделить номера самолетов, которым будет отказано в посадке по причине занятости ВПП.

Интервалы времени между очередными подлетами самолетов к ВПП Δt_C – случайная величина. Время, в течение которого ВПП занята совершающим посадку самолетом, $\Delta t_З$ – тоже случайная величина. Статистической обработкой результатов наблюдения за этими процессами получены интегральные функции распределения:

Δt_C, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(\Delta t_C)$	0	0,02	0,02	0,23	0,40	0,56	0,71	0,83	0,92	0,97	1

$\Delta t_З$, мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_З)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

При реализации метода Монте-Карло предлагается использовать следующую последовательность случайных чисел:
0,31 0,91 0,06 0,49 0,01 0,08 0,91 0,05 0,45 0,86 0,54 0,79 0,94 0,90 0,75 0,85 0,08 0,39 0,99 0,23.

Для имитации работы аэродрома методом Монте-Карло построим расчетную таблицу вычисления моментов подлета самолетов t_C и моментов освобождения ВПП $t_З$. Для определения момента освобождения ВПП каждым самолетом $t_З$ следует к моменту его подлета t_C прибавить время занятости ВПП $\Delta t_З$, определенное по таблице функции распределения $F_2(\Delta t_З)$ с помощью очередного случайного числа. Момент подлета очередного самолета определится с помощью прибавления к t_C предыдущего самолета интервала времени подлета очередного Δt_C, определенного по таблице распределения $F_1(\Delta t_C)$ с помощью очередного случайного числа. В том случае, если на каком-то шаге t_C очередного самолета окажется меньше $t_З$ предыдущего (очередной самолет подлетел раньше, чем освободилась ВПП), этот подлетевший самолет не получает разрешения на посадку (ему предписывается уход на второй круг). Если на каком-то шаге время подлета очередного самолета окажется $t_C > t_З + 5$ (очередной самолет подлетает к аэродрому таким образом, что свободная ВПП ему понадобится не ранее, чем через 5 минут), то можно произвести взлет вылетающего самолета.

Расчетная таблица имитационного моделирования

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
F_1	Δt_C	t_C	F_2	$\Delta t_З$	$t_З$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8
0,01	0,5	6,2	*– посадка запрещена*		
0,08	2,3	8,5	0,91	1,5	10,0
0,05	2,1	10,6	0,45	1,0	11,6
0,86	7,3	17,9	0,54	1,1	19,0
0,79	6,7	24,6	0,94	1,6	26,2
0,90	7,8	32,4	0,75	1,3	33,7
0,85	7,2	39,6	0,08	0,6	40,2
0,39	3,9	43,5	0,99	1,8	45,3

Вывод по результатам имитации: 10 самолетов будут приняты диспетчером посадки за 45,3 минуты. 4 интервала времени, когда ВПП свободна более 5 минут, позволяют произвести взлет вылетающих самолетов в следующие периоды времени (в минутах): с 11,6 по 17,9; с 19,0 по 24,6; с 26,2 по 32,4; с 33,7 по 39,6. Третий самолет, подлетевший на 6,2 минуте, не получил разрешения на посадку, т.к. ВПП оказалась занятой предыдущим самолетом до 6,8 минуты.

Условие задачи контрольной работы

Требуется сымитировать работу аэродрома методом Монте-Карло. Найти время, за которое совершат посадку и освободят ВПП 10 самолетов. Выделить интервалы времени, в течение которых ВПП свободна более 5 минут, т.е. когда вылетающий самолет может произвести взлет. Выделить номера самолетов, которым будет отказано в посадке по причине занятости ВПП.

Интервалы времени между очередными подлетами самолетов к ВПП Δt_C – случайная величина. Время, в течение которого ВПП занята совершающим посадку самолетом, $\Delta t_З$ – тоже случайная величина. Статистической обработкой результатов наблюдения за этими процессами получены интегральные функции распределения:

Δt_C, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(\Delta t_C)$	0	0,02	0,02	0,23	0,40	0,56	0,71	0,83	0,92	0,97	1

$\Delta t_З$, мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_З)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

При реализации метода Монте-Карло следует использовать последовательность случайных чисел, ЧИТАЕМУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ПО СТРОКАМ из следующей таблицы, НАЧИНАЯ С МЕСТА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ строки с номером предпоследней цифры зачетной книжки студента и столбца с номером последней цифры. (В таблице выделено первое случайное число для 48-го варианта). Для получения случайного числа следует каждую пару цифр использовать в качестве двух десятичных знаков после нуля целых.

Таблица для формирования последовательности случайных чисел

		последняя цифра зачетки									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
предпоследняя цифра зачетки	**0**	94	96	37	43	14	33	90	79	99	69
	1	59	31	55	23	09	93	34	22	14	35
	2	82	41	97	44	19	83	34	85	78	37
	3	44	51	82	05	89	33	64	03	38	58
	4	14	58	66	38	28	24	47	$\boxed{02}$	61	19
	5	17	98	21	00	74	05	88	18	03	62
	6	10	75	06	27	90	19	24	60	67	11
	7	69	12	39	40	81	73	02	12	53	54
	8	25	16	51	99	81	01	03	41	32	29
	9	18	30	50	40	39	30	66	89	95	37
		62	14	64	98	06	08	59	62	82	15
		23	94	79	03	68	49	67	73	85	