ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Ю.И. Дементьев, О.Г. Илларионова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических заданий

для студентов I курса
направления 25.03.01 (ГСМ)
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 51
ББК 517
Д30

Рецензент:

Платонова И.В. – канд. экон. наук, доцент

Дементьев Ю.И.

Д30 Высшая математика [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению практических заданий / Ю.И. Дементьев, О.Г. Илларионова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Высшая математика» по учебному плану для студентов I курса направления подготовки 25.03.01 (ГСМ) очной формы обучения.

Учебно-методическое пособие содержит варианты контрольных домашних заданий по темам «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Последовательности, функции и их пределы», «Производные функции одной переменной», «Функции нескольких переменных», «Неопределенный и определенный интеграл», «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы», а также образцы решения некоторых наиболее трудных задач и справочные материалы.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 16.03.2021 г. и методического совета 18.03.2021 г.

УДК 51
ББК 517

В авторской редакции

Подписано в печать 26.05.2021 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ № 765/0429-УМП32 Тираж 40 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

В первом семестре студент должен выполнить контрольное домашнее задание по темам «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Последовательности, функции и их пределы», «Производные функции одной переменной», «Функции нескольких переменных».

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

Задача 1. Решить систему линейных уравнений тремя методами: а) методом Крамера, б) методом Гаусса, в) матричным методом.
Задачи 2 – 4. Решить задачи на вычисление и свойства скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.
Задача 5. Решить задачу на составление уравнений прямых и плоскостей.
Задачи 6 – 9. Найти пределы функций, не применяя правило Лопиталя.
Задачи 10 – 15. Найти производные функций.
Задача 16. Найти y'', если известна функция $y = f(x)$.
Задача 17. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить её график.
Задача 18. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$.

Вариант 1

1) $\begin{cases} 3x - 5y + 3z = -1, \\ x - 2y + 2z = 1, \\ -4x + 6y - 3z = 3. \end{cases}$

2) Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (2 α, α, 2) и $\overline{\mathrm{b}}$ = (2, -3, -1) будут взаимно перпендикулярны.

3) Является ли четырехугольник с вершинами в точках *A*(2, -1, 3), *B*(1, 2, -1), *C*(-4, 7, 5) и *D*(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

4) Лежат ли точки *A*(-1, -1, -1), *B*(-2, 1, -2), *C*(-1, 0, -2) и *D*(3, 2, 1) в одной плоскости? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки *A*(1, 2, -1) и *B*(0, 3, 2) параллельно вектору $\overline{a}$ = (3, 4, 7).

6) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 10x^7 + 2}{x^3 - x - 3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$; 10) $y=\frac{\cos 7x}{\operatorname{tg} x}$; 11) $y=\arccos\sqrt{x}$; 12) $y=2^{\operatorname{arctg} x}$;

13) $y=\ln(x+7x^6)$; 14) $y=\sqrt[5]{x^6}\cdot(x-2)$; 15) $y=(\arccos 4x)^{\ln x}$;

16) $y=\frac{1}{3^x}$; 17) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$; 18) $z=\ln(8x^2+3y)$.

Вариант 2

1) $\begin{cases} x+9y-4z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 4x-3y+2z=9. \end{cases}$

2) Вычислить $(2\overline{a}-5\overline{b})^2$, если $|\overline{a}|=11$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=90^0$.

3) Вычислить синус угла между векторами $\overline{a}=(2, 3, -1)$ и $\overline{b}(1, 2, 3)$.

4) Лежат ли точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$, $C(3, 1, -1)$ и $D(4, -2, -2)$ в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-4, 3, 2)$ и $B(2, 1, -1)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x}{(x^2-x+2)^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg} x}$; 10) $y=\sin^2 3x$; 11) $y=\ln\arccos x$; 12) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$;

13) $y=e^{\sqrt{x}}$; 14) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$; 15) $y=(x^5+2x)^{\sin 3x}$;

16) $y=\operatorname{ctg} x$; 17) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$; 18) $z=\operatorname{arctg}(xy^2)$.

Вариант 3

1) $\begin{cases} x+2y+4z=-4, \\ 5x+y+2z=7, \\ 3x-y+z=3. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=10$. При каком значении α векторы $\overline{a}+\alpha\overline{b}$ и $\overline{a}-\alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

3) При каком значении α векторы $\overline{p}=\alpha\overline{a}+5\overline{b}$ и $\overline{q}=3\overline{a}-\overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

4) При каком значении λ векторы $\overline{a}=(1, 3, \lambda)$, $\overline{b}=(4, 5, -1)$ и $\overline{c}=(2, -1, 5)$ будут компланарны?

5) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A(4, 5, 13) и B(-6, 0, 1).

6) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5x^2-24x-5}{x^3-3x^2-10x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$; 10) $y = x - \ln\sqrt{x}$; 11) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

12) $y = 2^{\sin x}$; 13) $y = \frac{\operatorname{arctg}\, 3x}{x^3+12x}$; 14) $y = \cos 3x \cdot \sqrt[7]{x}$; 15) $y = (\sin 2x)^{x^3+8x}$;

16) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 17) $y = \frac{2}{x^2+2x}$; 18) $z = x^2 \cdot \sin\frac{x}{y}$.

Вариант 4

1) $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 4x + y + 4z = -2, \\ 3x + 4z = -5. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{b} + 3\overline{c})$.

3) Вычислить $|[\overline{a}, \overline{b}]|$, если $|\overline{a}| = 8$, $|\overline{b}| = 15$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.

4) При каком значении λ векторы $\overline{a} = (3\lambda, 1, 4)$, $\overline{b} = (3, 2\lambda, -6)$ и $\overline{c} = (3, 1, -2)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2, 1, -1)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n} = (1, -2, 3)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4 - 1 + 2x}{x + 2x^3 - 10x^5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-9}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-4x}$; 10) $y = 3x^2 \cdot \operatorname{tg} x$; 11) $y = \ln(7x-5)$;

12) $y = 3^{\operatorname{ctg} x}$; 13) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2+x^4}$; 14) $y = \frac{4}{x^3} + \sqrt[5]{x^4}$; 15) $y = (x^3 - 4x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

16) $y = \sin\sqrt{x}$; 17) $y = \dfrac{4x^2}{x^2+3}$; 18) $z = \dfrac{x}{x^2 + 2y^2}$.

Вариант 5

1) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $|\overline{c}| = 2$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (3\overline{a} + \overline{c})$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a} = (3, -2, -2)$ и $\overline{b} = (1, -2, -1)$.

4) При каких значениях λ векторы $\overline{a} = (0, 1, \lambda)$, $\overline{b} = (1, 3, 4\lambda)$ и $\overline{c} = (1, 1, 2\lambda)$ будут компланарны?

5) Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 0, 2)$ параллельно прямой:
$x = 2 + 2t, \quad y = 3 + 3t, \quad z = 7 - 4t.$

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-1}{x^3+2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\cos 4x\cdot\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 10) $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x}}$; 11) $y = \operatorname{arctg} e^x$;

12) $y = 5x\cdot\ln(2x-1)$; 13) $y = \cos^2 24x$; 14) $y = 2^{\sin 2x}$;

15) $y = (\arcsin 3x)^{x^2+5x}$; 16) $y = \sqrt{x}(x-1)$; 17) $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$;

18) $z = \sqrt[3]{3xy + y^2}$.

Вариант 6

1) $\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + y - z = 2, \\ 5x + 3y - 2z = 5. \end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a} = (-4, 2, 4)$ и $\overline{b} = (6, 2, -3)$.

3) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$ и $C(4, 5, -2)$.

4) При каком λ векторы $\overline{a} = (\lambda, 2, -3)$, $\overline{b} = (1, -1, 4)$ и $\overline{c} = (1, -2, 3)$ будут компланарны ?

5) Точка $P(0, -1, -2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2-x-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{10}-11x+2}{(1+x)^{10}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{\operatorname{tg} 5x\cdot\sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$; 10) $y = \dfrac{1+x^8}{12x^{11}}$; 11) $y = 2\sqrt{e^x}$; 12) $y = (x + x^3)\cdot\operatorname{tg} x$;

13) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 14) $y = 3\operatorname{arctg} 2x$; 15) $y = (x^7 - 5x)^{\operatorname{ctg} 2x}$;

16) $y = \log_2(2x-1)$; 17) $y = \frac{4-x^3}{x^2}$; 18) $z = e^{xy}\cdot(2x + y^2)$.

Вариант 7

1) $\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$

2) Вычислить $(\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{b} - 2\overline{c})$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $2\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 30^0$.

4) Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

5) Точка $P(-2, 1, -2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из точки A(1,0,2) на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

6) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 6x + 7x^3}{3 - x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin(x-4)}{x^2 - 16}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+1}$; 10) $y = \operatorname{ctg} 3^x$; 11) $y = \dfrac{x^2 - 6}{\sqrt{x}}$;

12) $y = e^{\sin x}$; 13) $y = 3\operatorname{tg} x - \frac{1}{x}$; 14) $y = \arcsin x \cdot \sqrt[7]{x}$;

15) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^2 + 3\sin x}$; 16) $y = x \cdot \ln x$; 17) $y = \frac{12x}{9 + x^2}$; 18) $z = x \cdot \ln(3x^2 + 2y^2)$.

Вариант 8

1) $\begin{cases} x + 3y + 4z = 7, \\ 2x + 5y + 2z = 3, \\ 3x + 2y - z = 2. \end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a} = (8, 6, 0)$ и $\overline{b} = (1,-2, 2)$.

3) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}$ и $3\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 4$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 45^0$.

4) Выяснить, лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

5) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(2, 3, -1)$ и $B(-1, 2, 3)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x - 4x^2 + 1}{5x^5 + x - 3x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \cdot \sin\frac{x}{3}}{\cos x - 1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2} (3 - x)^{\frac{5}{x^2 - 2x}}$; 10) $y = \ln(3x - 5)$; 11) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{1 - x}}$; 12) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{tg} 3x$;

13) $y = \arccos(-x^2)$; 14) $y = 7x - \dfrac{2^x}{4} + 5$; 15) $y = (\operatorname{tg} 2x + 5)^{\ln 3x}$;

16) $y = x^2 \cdot e^x$; 17) $y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$; 18) $z = (x^2 - y^2) \cdot \cos(xy)$.

Вариант 9

1) $\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + 7y + 9z = 0, \\ x + 3y + 4z = 1. \end{cases}$

2) Дано $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \cdot (2\overline{a} - \overline{b})$.

3) Вычислить $(\overline{a}, \overline{b})$, если $|\overline{a}| = 12$, $|\overline{b}| = 10$, $|[\overline{a}, \overline{b}]| = 72$ и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – острый.

4) Лежат ли точки $A(0, -1, 2)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(5, 3, 7)$ и $D(4, 0, 3)$ в одной плоскости?

5) Через точки $A(0, -1, -2)$ и $B(2, 1, 0)$ проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

6) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x}{1 + 15x - x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to2} (3 - x)^{\frac{x}{2-x}}$; 10) $y = \frac{x^2+9}{6x^3}$; 11) $y = 3\sqrt{x} \cdot \ln(1 - x)$; 12) $y = \arcsin^2 3x$;

13) $y = e^{\mathrm{arctg}\, x}$; 14) $y = 2^x - 17\mathrm{tg}\, x + x^8$; 15) $y = (\cos 2x)^{x^3-6x}$;

16) $y = (5 - 2x)^6$; 17) $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$; 18) $z = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$.

Вариант 10

1) $\begin{cases} x + 2y + 4z = -4, \\ 5x + y + 2z = 7, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a} = (4, 2, 4)$ и $\overline{b} = (3, 4, 0)$.

3) Найти $(\overline{a}, \overline{b})$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 6$, $|[\overline{a}, \overline{b}]| = 15$ и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – острый.

4) Лежат ли точки $A(-1, -1, -1)$, $B(1, -2, -2)$, $C(0, -2, -1)$ и $D(2, -3, -2)$ в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 2, 0)$ параллельно векторам $\overline{a} = (1, -1, 0)$ и $\overline{b} = (0, 4, -2)$.

6) $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{4 - 2x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2x^2 \cdot \sin 3x}{(1 - \cos x) \cdot \sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}$; 10) $y=\frac{4+3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}$; 11) $y=\operatorname{tg}x\cdot\ln(18-x)$; 12) $y=2^{-x^7}$;

13) $y=3-\frac{1}{x^4}+x^4$; 14) $y=\arccos\frac{1}{x^3}$; 15) $y(x)=(\operatorname{arctg}3x)^{x^2-5x}$;

16) $y=\cos^2 3x$; 17) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$; 18) $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$.

Вариант 11

1) $\begin{cases} x+y-z=2, \\ -2x+4y-8z=-2, \\ 5x-3y+7z=6. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=1$. При каком значении α векторы $\overline{a}+\alpha\overline{b}$ и $\overline{a}-\alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

3) Вычислить площадь треугольника с вершинами A(-1, 2, 3), B(5, 1, 4) и C(3, 2, 2).

4) При каком значении λ векторы $\overline{a}=(0, 1, \lambda)$, $\overline{b}=(1, 0, \lambda)$ и $\overline{c}=(1, 1, 2)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\overline{n}$ = (-1, 0, 2).

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^2-1)x^4}{x+1-6x^6}$; 7) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}}\frac{15x^2-2x-1}{5x^2-4x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}$; 10) $y=2\sqrt{x}+\ln x$; 11) $y=\frac{3x^3+15x-1}{x^2-1}$;

12) $y=e^x\cdot\arcsin x$; 13) $y=3^{-x^4}$; 14) $y=\sqrt[5]{2+x-x^2}$;

15) $y=(\operatorname{arctg}2x)^{x^4+3x}$; 16) $y=\sin^2 x$; 17) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$; 18) $z=\frac{y}{x^2-y^2}$.

Вариант 12

1) $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=1$, $|\overline{c}|=8$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})=(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})=60^0$.
Найти $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, если $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=60^0$.

4) При каком значении λ векторы $\overline{a} = (\lambda, 3, 2)$, $\overline{b} = (2, -3, -4)$ и $\overline{c} = (-3, 12, 6)$ будут компланарны?

5) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(0, -2, 3)$ и $B(3, -2, 1)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^{10}+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\ln(1+x^2)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$; 10) $y=\frac{2x^2-1}{3x^3}$; 11) $y=\ln(x+\sqrt{x})$;

12) $y=\cos^2 28x$; 13) $y=e^{2x}\sqrt{1-x}$; 14) $y=\arccos\frac{1}{x}$;

15) $y=(x^5+2x)^{\operatorname{ctg}3x}$; 16) $y=(2x+1)^{15}$; 17) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$;

18) $z=x\cdot\arcsin(xy)$.

Вариант 13

1) $\begin{cases} x+2y+3z=1,\\ 5x+8y-z=7,\\ 2x-3y+2z=9.\end{cases}$

2) Вычислить $(3\overline{a} - 2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=3\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{q}=2\overline{a}-3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$.

4) При каком значении y точки $M(2, y, 0)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x-z-4=0$ и $x+y-2z+1=0$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-6x^3-1}{2x^3-x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; 10) $y=\frac{x^2-2}{24x^3}$; 11) $y=\cos^2 18x$; 12) $y=\frac{3+x}{2}\cdot\operatorname{tg}x$;

13) $y=5^{\sin x}$; 14) $y=\arcsin\sqrt{x}$; 15) $y=(\sin 3x)^{x^4-2x}$; 16) $y=\ln(x^2-1)$;

17) $y=\frac{3-x^2}{x+2}$; 18) $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$.

Вариант 14

1) $\begin{cases} x + y - 2z = -6, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$

2) Определить, при каких значениях α векторы $\overline{a}$ = (1, 3α, 2) и $\overline{b}$ = (2, 3α, -3) будут взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (0, 1, 2) и $\overline{b}$(2, 0, 1), образует тупой угол с осью *OX* и $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.

4) При каком значении x точки *M*(x, 0, 1), *A*(1, 3, 0), *B*(0, 1, -2) и *C*(-4, 0, 1) будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки *A*(-1, 0, 2) и *B*(3, 2, 5) параллельно оси *OZ*.

6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{5x^3-x+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot \operatorname{tg} 2x}{5x\cdot\sin 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{8x+1}$; 10) $y=\frac{x^6+8x^3+1}{x^2+3}$; 11) $y = 5x\cdot\operatorname{tg}3x$; 12) $y=\cos\ln x$;

13) $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x}$; 14) $y=\frac{1}{e^x}$; 15) $y=(x^5-3x)^{\operatorname{ctg}2x}$; 16) $y=\arccos 2x$;

17) $y=\frac{x^2+6x+3}{x+4}$; 18) $z=\ln(5x^2+4y^2)$.

Вариант 15

1) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$

2) Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 45^0$.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (1, α, 1) и $\overline{b}$ = (2, 1, 0), равна $\sqrt{6}$.

4) При каком значении x точки *M*(x, 1, 0), *A*(2, 1, 5), *B*(-2, 1, 0) и *C*(1, 0, 2) лежат в одной плоскости?

5) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x+4y-7z+8=0$ и $5x+2y-5z-2=0$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2-2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{\ln(1+\sin 3x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x+3}{x-2}}$; 10) $y=\ln(\operatorname{sh}x)$; 11) $y=\arccos\sqrt{x}$;

12) $y = 5x^4 \cdot \sin x^3$; 13) $y = 5^{1-x}$; 14) $y = \frac{3x+2}{\operatorname{tg} x}$; 15) $y = (\arcsin 4x)^{x^3-2x}$;

16) $y = \frac{1}{x^8}$; 17) $y = \frac{-8x}{x^2+4}$; 18) $z = y \cdot \ln(x^2 - y^2)$.

Вариант 16

1) $\begin{cases} 2x - 8y + 5z = 5, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

2) Определить, при каком α векторы $\overline{a} = (2\alpha, 4\alpha, 1)$ и $\overline{b}(2, 4, 2)$ будут взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a} = (1, -2, 3)$ и $\overline{b}(2, 1, 1)$, образует острый угол с осью OZ и $|\overline{c}| = 2$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 3)$, $A(2, 1, 4)$, $B(3, 2, 0)$ и $C(2, 0, -2)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5, 3, 1)$ и $B(1, 1, 2)$ параллельно оси OZ.

6) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1 + x - 100x^{10}}{3x^{10}+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^x$; 10) $y = \frac{x^6+8x^3+12}{\sqrt{8-x}}$; 11) $y = \ln^2(x - 6x^2)$;

12) $y = \sqrt[4]{x^3} \cdot \arcsin x$; 13) $y = 2^{-x}$; 14) $y = \operatorname{arcctg} 4x$;

15) $y = (x^6 - 7x)^{\ln 2x}$; 16) $y = \sin^2 2x$; 17) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 18) $z = \arccos\frac{x}{\sqrt{y}}$.

Вариант 17

1) $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ x - 12y + 4z = -7, \\ 3x - 5y + 3z = 1. \end{cases}$

2) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a} = (-2, -2, 1)$, образует острый угол с осью OY и $|\overline{c}| = 27$.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (3, 0, 1)$ и $\overline{b} = (\alpha, 2, 2)$, равна $\sqrt{76}$.

4) При каком значении z точки $M(1, 0, z)$, A(2, 3, 2), B(-4, 0, 3) и $C(0, 4, 2)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку $A(2, -1, 6)$.

6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}\cdot x}{2x^3-12x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x-x^2)}{\operatorname{arctg} x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1+x}{x}}$; 10) $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{7x+5}$; 11) $y=\operatorname{arctg}(3x+x^2)$;

12) $y=\ln(1-4x)$; 13) $y=\sqrt[5]{x^7}\sin 6x$; 14) $y=(x^8-1)^4$;

15) $y=(\operatorname{tg}4x)^{x^2+2\cos x}$; 16) $y=e^{-x}$; 17) $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$; 18) $z=\dfrac{4x}{x^3-y^3}$.

Вариант 18

1) $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 2x-4y+z=-4, \\ 4x-3y+z=1. \end{cases}$

2) Найти угол между единичными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если векторы $\overline{p}=2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-3\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он образует острый угол с осью OX, перпендикулярен векторам $\overline{a}=(0, 0, 1)$ и $\overline{b}=(8, -15, 3)$ и $|\overline{c}|=51$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 0)$, $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 0)$ и $C(2, 0, 3)$ лежат в одной плоскости ?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку $A(-1, 3, -3)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+3}{x-x^2+5x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}^2(2x-1)}{(2x-1)^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-6}$; 10) $y=5^{\operatorname{arctg} x}$; 11) $y=e^{-x^3}$; 12) $y=\frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x}$;

13) $y=\sin^2\frac{x}{3}$; 14) $y=x\cdot\sqrt{x^2-1}$; 15) $y=(\ln 2x+3)^{5x^2}$;

16) $y=x^2\cdot(15+x)$; 17) $y=\frac{3x-2}{x^3}$; 18) $z=12\cos^2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}\right)$.

Вариант 19

1) $\begin{cases} 2x+y+z=3, \\ 2x+2y+z=0, \\ 3x+3y+z=-2. \end{cases}$

2) Доказать, что векторы $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}+7\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}-5\overline{j}+2\overline{k}$ взаимно перпендикулярны.

3) В треугольнике с вершинами $A(2, -1, 6)$, $B(3, 0, 5)$ и $C(5, 2, 6)$ найти длину высоты AM.

4) Можно ли векторы $\overline{a}$ = (1, 0, 2), $\overline{b}$ = (-1, 1, 0) и $\overline{c}$ = (1, -1, 2) взять за базисные в трехмерном пространстве? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку A(1, 4, -3).

6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+2x-3}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x+3}{2x^3+3x+4}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3^x-1}$; 10) $y=\frac{3x-7}{2x^4-1}$; 11) $y=(1-x+5x^2)^{20}$; 12) $y=5x^3\cdot\operatorname{tg}x$;

13) $y=\sin 8x$; 14) $y=\arccos(\sqrt{x}+1)$; 15) $y(x)=(\arccos x)^{x+3x^2}$;

16) $y=x\cdot e^x$; 17) $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$; 18) $z=(2x+y)\cdot e^{xy^2}$.

Вариант 20

1) $\begin{cases} x-5y-z=-14,\\ x-2y+3z=6,\\ 2x+3y-4z=20.\end{cases}$

2) Найти вектор $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (2, 1, -1) и скалярное произведение $(\overline{c},\overline{a})$ = 3.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (2, -1, 2) и $\overline{b}$ = (1, α, -1), равна $3\sqrt{2}$.

4) Можно ли векторы $\overline{a}$(-1, 1, 0), $\overline{b}$(1, -1, 1) и $\overline{c}$(0, 2, 1) взять за базисные в трехмерном пространстве? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку A(-1, 0, -7).

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{2x^2-3x-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x}{1-x-x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{x-3}{x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$;

10) $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{1-x^4}}$; 11) $y=e^{-3x}$; 12) $y=(2x^3-1)\cdot x^4$; 13) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

14) $y=\ln\operatorname{ctg}x$; 15) $y=(\sin 3x)^{x^2-4x}$; 16) $y=\arcsin x$; 17) $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$;

18) $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

Вариант 21

1) $\begin{cases} 2x+y-z=3,\\ 2x-3y=-1,\\ x+y-z=5.\end{cases}$

2) Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он составляет тупой угол с осью OY, перпендикулярен к векторам $\overline{a} = (4, -2, -3)$ и $\overline{b} = (0, 1, 3)$ и $|\overline{c}| = 26$.

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ и $D(4, 1, 3)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 4, 1)$, $B(2, 3, -1)$ и $C(0, -1, 0)$.

6) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{15x^2 - 2x - 1}{3x - 1}$; 7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{11} - x^5 + x}{100x^3 + 1}$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{4x \cdot \sin 5x}$;

9) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2 + x^2}{x^2}\right)^{3x^2}$; 10) $y = \dfrac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{x^3 - 1}}$; 11) $y = \arccos\sqrt{x}$; 12) $y = 3x^2 \cdot \ln x$;

13) $y = 2^{-x} + \dfrac{1}{x}$; 14) $y = \mathrm{tg}^3\, 8x$; 15) $y = (\mathrm{arcctg}\, 7x)^{x^5 + 2x}$;

16) $y = \log_2(3x)$; 17) $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$; 18) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x^2}{y}$.

Вариант 22

1) $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = -1, \\ x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2. \end{cases}$

2) Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{b} - \overline{a} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.

3) При каких α и β вектор $\overline{c} = \alpha\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$, будет коллинеарен вектору $[\overline{a}, \overline{b}]$, если $\overline{a} = (3, -1, 1)$ и $\overline{b} = (1, 2, 0)$?

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(1, 2, 3)$, $B(6, 0, 0)$, $C(1, 4, 9)$ и $D(1, 8, 3)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, 0, 1)$ и $B(2, 3, 4)$ параллельно оси OZ.

6) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2 - 3}{x^4 - x^2 - 6}$; 7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^4 - x^2 + 5}$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\, 4x}}$;

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{7x \cdot \sin 3x}$; 10) $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^3 - 1}$; 11) $y = ln(1 - x^2)$; 12) $y = \mathrm{ctg}\sqrt{x}$;

13) $y = \sqrt[4]{1 - x} \cdot \cos x$; 14) $y = 5^{\sin x}$; 15) $y = (x^3 + 5x)^{\mathrm{tg}\, 7x}$;

16) $y = (7x - 3x^2)^5$; 17) $y = -\left(\frac{x}{x + 2}\right)^2$; 18) $z = \sqrt{xy + y^2}$.

Вариант 23

1) $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

2) Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$ и векторы $\overline{a} + 3\overline{b}$ и $7\overline{a} - 5\overline{b}$ перпендикулярны.

3) Найти модуль вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$, $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$.

4) Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(2, 1, 3)$, $B(4, -2, 0)$, $C(1, 3, -8)$ и $D(7, 5, 2)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$ и $C(0, 3, 2)$.

6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2 - 24x - 5}{x^2 - 25}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{15x^2 - 2x - 1}{5x^3 + 1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2 - 3x + 2)\cos \pi x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-2)}}$; 10) $y = 3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 16x$; 11) $y = \frac{\sqrt{2x-5}}{x^2+x-1}$; 12) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$;

13) $y = \cos 7x$; 14) $y = x^5 \ln x$; 15) $y = (\sin 3x)^{x^2-7x}$; 16) $y = 2^{x^2}$;

17) $y = \frac{x^3-32}{x^2}$; 18) $z = \sin^2(4x + y)$.

Вариант 24

1) $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2) Вычислить длину вектора $\overline{p} + 2\,\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\,\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 120^0$.

3) Найти наименьший внутренний угол треугольника с вершинами в точках $A(-1, 3, 1)$, $B(0, 2, -3)$ и $C(3, -1, 0)$.

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, -2)$, $C(2, 0, 2)$ и $D(0, 2, 2)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0, -1, 0)$, $B(2, 1, -2)$, и $C(1, 4, 1)$.

6) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x - 6x^2 - 2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi - 5x)}{e^{2x} - 1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2 - \dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$; 10) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x^2+5}$; 11) $y = 7x \arcsin x$; 12) $y = 2x - \dfrac{1}{x} + \sqrt[5]{x}$;

13) $y = e^{\operatorname{ctg} x}$; 14) $y = 5^{12x^2}$; 15) $y = (x^2 + 5x)^{\operatorname{tg} 3x}$; 16) $y = \operatorname{ctg} 5x$;

17) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; 18) $z = \arcsin(x \cdot \sqrt{y})$.

Вариант 25

1) $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

2) Вычислить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 45^0$.

3) Длина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC* равна *c*. Вычислить $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.

4) Даны координаты точек *A*(5, 0, 3), *B*(3, 3, -2) и *C*(4, 2, 2). Найти координаты вершины *D* тетраэдра *ABCD*, если известно, что она лежит на оси *OX*, а объем тетраэдра равен 3.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки *A*(0, 3, 2), *B*(1, 0, 4) и *C*(1, 5, -1).

6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{8-x^3}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{6x^2-6x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(3x+1)}{\left(e^{5\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{5x-1}$; 10) $y = \frac{2x-1}{x^2+5}$; 11) $y = 3^{x^2} \cdot \cos x$; 12) $y = \sqrt{5x - 4 - x^2}$;

13) $y = \ln 2 \operatorname{tg} x$; 14) $y = e^{x^3}$; 15) $y = (x^4 - 2x)^{\ln 3x}$; 16) $y = \operatorname{arcctg}(-x)$;

17) $y = \frac{x^3}{x-1}$; 18) $z = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^2$.

Вариант 26

1) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -4, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

2) Определить при каком α векторы $\overline{a} = (5\alpha, \alpha, 2)$ и $\overline{b} = (2, -6, -1)$ будут взаимно перпендикулярны.

3) Является ли четырехугольник с вершинами в точках *A*(2, -1, 3), *B*(1, 2, -1), *C*(-4, 7, 5) и *D*(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

4) Лежат ли точки *A*(-1, -1, -1), *B*(-2, 1, 3), *C*(-1, 0, -2) и *D*(3, 2, 1) в одной плоскости? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, -1)$ и $B(0, 3, 2)$ параллельно вектору $\overline{a} = (1, 0, 5)$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-10x^3+2}{x^3-x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$; 10) $y=\dfrac{\cos 5x}{\operatorname{tg} x}$; 11) $y=\arccos\sqrt{x}$; 12) $y=7^{\operatorname{arctg} x}$;

13) $y=\ln(x+3x^5)$; 14) $y=\sqrt[3]{x^5}\cdot(x-2)$; 15) $y=(x^3-7x)^{\cos 2x}$;

16) $y=\dfrac{1}{3^x}$; 17) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; 18) $z=x^2e^{x^2-y^2}$.

Вариант 27

1) $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 4x+3y-2z=4, \\ 7x+5y-z=14. \end{cases}$

2) Вычислить $(3\overline{a}-4\overline{b})^2$, если $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=60^0$.

3) Вычислить синус угла между векторами $\overline{a}=(2, -3, 1)$ и $\overline{b}=(1, 2, 3)$.

4) Лежат ли точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$, $C(3, 1, -1)$ и $D(4, -2, -2)$ в одной плоскости? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3, 2, 3)$ и $B(2, 1, -1)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-1}$.

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-6x+8}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x}{(x^2-x+2)^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; 10) $y=\sin^2 3x$; 11) $y=\ln\arccos x$; 12) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$;

13) $y=e^{\sqrt{x}}$; 14) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$; 15) $y=(\ln 3x)^{x^2+2\sin x}$; 16) $y=\operatorname{ctg} x$;

17) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$; 18) $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

Вариант 28

1) $\begin{cases} x-4y-2z=-3, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-9. \end{cases}$

2) Вычислить $(\overline{a}-2\overline{b})\cdot(3\overline{b}+\overline{c})$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=6$, $|\overline{c}|=4$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})=(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})=60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=5\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{q}=3\overline{a}-3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=30^0$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 4)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x - z - 4 = 0$ и $x + y - 2z + 1 = 0$.

6) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{-x + x^3}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x - 6x^3 + 1}{2x^3 - x + 1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1} (3 - 2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-3x} - 1}{x}$; 10) $y = \frac{x^2 - 2}{24x^3}$; 11) $y = \cos^2 18x$; 12) $y = \frac{3+x}{2} \cdot \operatorname{tg} x$;

13) $y = 5^{\sin x}$; 14) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 15) $y = (\operatorname{ctg} 5x + 1)^{\ln 2x}$;

16) $y = \ln(x^2 - 1)$; 17) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$; 18) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y^2}{x}$.

Вариант 29

1) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2) Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и выполняется условие $(\overline{a} - \overline{b})^2 + (\overline{a} + 2\overline{b})^2 = 20$.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a} = (0, 1, 2)$ и $\overline{b} = (2, 0, 1)$, образует тупой угол с осью OX и $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 2)$, $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, 3)$ и $C(1, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 2, 5)$ параллельно оси OZ.

6) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{5x^3 - x + 3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 2x}{5x \cdot \sin 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x + 5}\right)^{8x+1}$; 10) $y = \frac{x^6 + 8x^3 + 1}{x^2 + 3}$; 11) $y = 5x \cdot \operatorname{tg} 3x$; 12) $y = \cos\ln x$;

13) $y = \operatorname{ctg}\sqrt{x}$; 14) $y = \frac{1}{e^x}$; 15) $y = (\cos 3x)^{x^2 + 5x}$; 16) $y = \arccos 2x$;

17) $y = \frac{x^2 + 6x + 3}{x + 4}$; 18) $z = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

Вариант 30

1) $\begin{cases} x - 4y - 2z = -5, \\ 3x + y + z = 5, \\ -3x + 5y + 6z = 8. \end{cases}$

2) Определить, при каких значениях α векторы $\overline{a} = (\alpha -4,\ \alpha,\ 4)$ и $\overline{b} = (\alpha, -1, 1)$ будут взаимно перпендикулярны.
3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (1, \alpha, 1)$ и $\overline{b} = (2, 1, 0)$, равна $\sqrt{6}$.
4) При каком значении x точки $M(x, 3, 0)$, $A(4, -1, 1)$, $B(2, 1, 0)$ и $C(1, 0, 2)$ лежат в одной плоскости?
5) Составить параметрические и канонические уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x + 4y - 7z + 8 = 0$ и $5x + 2y - 5z - 2 = 0$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^2-(4+3x)}{x^2-2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^4+4x^2+3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\ln(1+\sin 3x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x-3}{x-2}}$; 10) $y = \ln(1+2e^x)$; 11) $y = \arccos\sqrt{x}$;

12) $y = 5x^4 \cdot \sin x^3$; 13) $y = 5^{1-x}$; 14) $y = \frac{3x+2}{\operatorname{tg} x}$; 15) $y = (\operatorname{arcctg} 5x)^{x^2+7x}$;

16) $y = \frac{1}{x^8}$; 17) $y = \frac{-8x}{x^2+4}$; 18) $z = \dfrac{xy}{x-y}$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ №1 – 5, 17 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №1

Задача 1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$ тремя методами: а) методом Крамера, б) методом Гаусса, в) матричным методом.

а) *Решение системы методом Крамера.*

Метод Крамера применяется для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными, у которых главный определитель не равен нулю. В нашем случае $n=3$.

Выписываем матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ системы уравнений, она состоит из коэффициентов при неизвестных.

Вычисляем определитель этой матрицы $\det A = \Delta$ (главный определитель системы), например, методом треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot4+2\cdot(-1)\cdot1+2\cdot3\cdot3-3\cdot(-1)\cdot1-2\cdot2\cdot4-3\cdot(-1)\cdot1=$$

$$=-4-2+18+3-16+3=2.$$

Определитель $\Delta=2\neq0$, следовательно, система имеет единственное решение. Далее вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, которые получаются из главного определителя заменой соответствующего столбца при неизвестных на столбец свободных членов:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 6 & 3 & 4\end{vmatrix}=2,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 6 & 4\end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=4.$$

Находим решение системы по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{2}{2}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-2}{2}=-1,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

б) *Решение системы методом Гаусса.*

Рассмотрим матрицу C – расширенную матрицу системы. С помощью элементарных преобразований строк приведём матрицу C к треугольному виду. Для этого умножаем первую строку на (–2) и прибавляем ко второй, затем умножаем первую строку на (–1) и прибавляем к третьей:

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -5 & -7 & -9\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Далее меняем местами вторую и третью строки, умножаем вторую строку на 5 и прибавляем к третьей:

$$C\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -7 & -9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -4\end{array}\right).$$

Таким образом, $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}C=3$, значит, система совместна и имеет единственное решение. Последняя матрица есть расширенная матрица системы, равносильной исходной системе:

$$\begin{cases}x+2y+3z=5,\\ \quad y+z=1,\\ \quad -2z=-4,\end{cases}\qquad \text{откуда } z=2,\ y=-1,\ x=1.$$

Ответ: $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

в) *Решение системы матричным методом.*

Данную систему уравнений можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Если главный определитель системы $\det A$ отличен от нуля, то решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$. У нас $\det A = 2 \neq 0$.

Найдём A^{-1}. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5+1+6 \\ -45+1+42 \\ 35-1-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1,\ y = -1,\ z = 2.$

Задача 2. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2, 1, -2\}$ и удовлетворяющий условию $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = 27$.

Решение. В силу коллинеарности вектор $\overline{x}$ можно представить в виде $\overline{x} = \lambda\overline{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия: $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = \lambda\overline{a}^2 = \lambda(4 + 1 + 4) = 9\lambda = 27$.

Получаем $\lambda = 3$ и $\overline{x} = 3\overline{a} = \{6, 3, -6\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{6, 3, -6\}$

Задача 3. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\overline{b} = \{2, 0, 1\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $|\overline{x}| = \sqrt{6}$.

Решение. Найдем вектор $\overline{c}$ такой, что $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$. Можно положить $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}.$

Поскольку вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то он коллинеарен вектору $\overline{c}$. Следовательно, $\overline{x} = \lambda \cdot \overline{c} = \{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$.

Так как $\left|\overline{x}\right| = \sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2} = \sqrt{6}\left|\lambda\right| = \sqrt{6}$, то $\lambda = \pm 1$. Вектор $\overline{x}$ образует тупой угол с осью OX, поэтому его проекция (координата) на эту ось должна быть отрицательной, отсюда $\lambda = -1$ и $\overline{x} = -\overline{c} = \{-1,-1,2\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{-1,-1,2\}$.

Задача 4. Определить, лежат ли точки A(1, 2, 3); B(0, 5, 5); C(3, -1, -1) и D(-2, 14, 9) в одной плоскости.

Решение. Рассмотрим три вектора $\overline{AB} = \{-1,3,2\}$, $\overline{AC} = \{2,-3,-4\}$ и $\overline{AD} = \{-3,12,\ 6\}$. Если точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ компланарны. Для проверки компланарности вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18+36+43-18-36-48 = 0.$$

Оно равно нулю, следовательно, векторы $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ компланарны и точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости.

Ответ: точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости.

Задача 5. Найти длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если D(1, 6, 3), A(4, 5, 2), B(-1, 11, 6) и C(2, -1, 3).

Решение. Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение этой плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -1-4 & 11-5 & -6-2 \\ 2-4 & -1-5 & 3-2 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y-5)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-42(x-4)+21(y-5)+42(z-2) = 0 \ \Rightarrow\ 2x-y-2z+1 = 0.$$

Находим теперь расстояние от *D* до плоскости *ABC*:

$$h = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 6 - 2\cdot 3 + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: *h* = 3.

Задача 17. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$ и построить её график.

Решение.

1. Функция определена всюду, кроме точки $x = 2$, так как знаменатель дроби не должен обращаться в нуль. Следовательно, область определения функции $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Функция общего вида (не является ни чётной, ни нечётной, не является периодической, не является ограниченной).

3. Находим асимптоты графика функции.

3а). Исследуем на наличие вертикальной асимптоты функцию в точке $x = 2$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2+0-2} = \frac{-4}{+0}\right\} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2-0-2} = \frac{-4}{-0}\right\} = +\infty.$$

Эти пределы бесконечны, следовательно, в точке $x = 2$ функция имеет разрыв второго рода и прямая $x = 2$ является для графика этой функции вертикальной асимптотой.

3б). Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$, коэффициенты которого определяются по формулам:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-6}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x-6}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1.$$

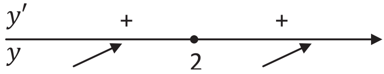
График имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

4. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x-6)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}.$$

Найдем критические точки. Производная не существует при $x = 2$. Выясним, при каких значениях x производная равна нулю. Решим уравнение $x^2 - 4x + 8 = 0$. Вычисляя дискриминант, получаем $D = 16 - 32 = -16 < 0$, поэтому у этого уравнения нет корней.

Отметим критические точки на числовой оси OX и определим знак производной в каждом их полученных интервалов:

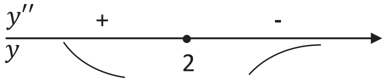


Производная всюду положительна, экстремумов у графика функции нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

5. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)\left(x^2-4x+8\right)}{(x-2)^4} = \frac{-8}{(x-2)^3}$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому функция не имеет точек перегиба.



При $x \in (-\infty; 2)$ выполнено неравенство $y'' > 0$, поэтому на интервале $(-\infty; 2)$ график функции является вогнутым. При $x \in (2; +\infty)$ выполняется неравенство $y'' < 0$, поэтому на интервале $(2; +\infty)$ график функции является выпуклым.

6. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Имеем $y(0) = \frac{0^2-0-6}{0-2} = 3$, поэтому с осью y функция пересекается в точке $(0; 3)$.

Далее, $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$, $\;x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, $\;x_1 = -2$, $x_2 = 3$, следовательно, с осью $0x$ функция пересекается в точках $(-2; 0)$ и $(3; 0)$.

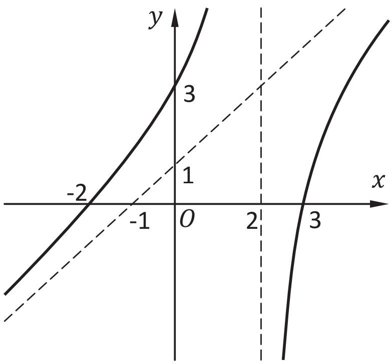


Рис. 1. График функции $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Во втором семестре студент должен выполнить КДЗ №2 по темам «Неопределённый и определённый интегралы», «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы».

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

Задачи 1 – 5 . Найти неопределённые интегралы.

Задачи 6, 7. Вычислить определённые интегралы.

Задачи 8, 9. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

Задача 10. С помощью определенного интеграла найти площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями.

Задача 11. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

Задача 12. Вычислить двойной интеграл по описываемой области D или по области D, ограниченной указанными линиями.

Задача 13. С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Задача 14. Вычислить массу плоской пластины D. Пластина D задана ограничивающими её кривыми в указанных областях, μ – поверхностная плотность.

Задача 15. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

Задача 16. Найти работу, совершаемую силой $\bar{F}$ при перемещении материальной точки вдоль указанной кривой (пути) L.

Вариант 1

1) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\displaystyle\int \left(2\sin 6x+\cos\frac{x}{4}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x+5}}$;

4) $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 5) $\displaystyle\int (4-3x)\,e^{-3x}\,dx$; 6) $\displaystyle\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$;

7) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx$; 8) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$; 9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$; 10) $y=(x-2)^2$, $y=x$;

11) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx+\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx$; 12) $\displaystyle\iint_D x\,y\,dx\,dy$; $D:\begin{cases} xy=1\\ x+y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$;

13) $y^2-2y+x^2=0,\quad y^2-4y+x^2=0,\ \ y=x/\sqrt{3},\quad y=\sqrt{3}x$;

14) D: $x=1, y=0,\ y^2=4x\ (y\geq 0)$; $\mu=5x^2+y$; 15) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$;

16) $\overline{F}=\{x-2y, 3x+5y\}$, L – ломаная ABC, где $A(1,-2)$, $B(1, 3)$, $C(5,3)$.

Вариант 2

1) $\int\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int(6e^{-3x}+3\cos 2x)\,dx$; 3) $\int\frac{dx}{(1+2x)^3}$;

4) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$; 5) $\int(4x-1)\,e^{4x}\,dx$; 6) $\int\limits_0^2\frac{x\,dx}{16+x^4}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\cos 4x\cdot dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$; 9) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\cdot\ln x}$; 10) $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$;

11) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}dx\int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}f(x,y)\,dy+\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}f(x,y)\,dy$;

12) $\iint\limits_D(9x^2y^2+48x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{x} \\ y=-x^2 \end{cases}$;

13) $x^2+4x+y^2=0,\quad x^2+8x+y^2=0,\ \ y=-x/\sqrt{3},\quad y=0$;

14) D: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y\geq 0,\ x\geq 0$; $\mu=(x+y)/(x^2+y^2)$;

15) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y-3=0,\ z=4x^2+2y^2+1$;

16) $\overline{F}=\{-y^2, x+y\}$, L – верхняя полуокружность окружности $x^2+y^2=4$, направление движения – против часовой стрелки.

Вариант 3

1) $\int\left(\frac{4}{5x}-\frac{2}{x^3}+4\sqrt[3]{x}\right)dx$; 2) $\int\left(6e^{2x}+\sin\frac{x}{2}\right)dx$; 3) $\int 2^{2x+1}\,dx$;

4) $\int\frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx$; 5) $\int(2+3x)\,e^{2x}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^5 x\cdot\sin 2x\cdot dx$; 7) $\int\limits_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$;

8) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$; 9) $\int\limits_0^1\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $y=0,\ y=x\cdot\sqrt{9-x^2}\ \ (0\leq x\leq 3)$;

11) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$; 12) $\iint_D e^{x/y}\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 0,\ y = 1 \end{cases}$;

13) $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$;

14) D: $x = 1$, $y = 0$, $y^2 = 3x\ (y \geq 0)$; $\mu = 3{,}5x^2 + 6y$;

15) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y - 2 = 0$, $4x + 3y - 2z = 0$;

16) $\overline{F} = \{xy,\ x - 3y\}$, L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки B(2,4).

Вариант 4

1) $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x}\right) dx$; 2) $\int (12\cos 4x + e^{-x})\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{(3+4x)^2}$;

4) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; 5) $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$; 6) $\int_0^1 \frac{x+4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$; 7) $\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin 4x \cdot dx$;

8) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$; 9) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$; 10) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$;

11) $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$; 12) $\iint_D (x + 2y)\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$;

13) $x^2 + 4x + y^2 = 0$, $x^2 + 2x + y^2 = 0$, $y = -x$, $y = 0$;

14) D: $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$, $y \geq 0$, $x \geq 0$; $\mu = (2x + 5y)/(x^2 + y^2)$;

15) $x + y = 3$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 9 - x^2$;

16) $\overline{F} = (x^2 + y)\,\bar{i} + (x + y^2)\,\bar{j}$, L – отрезок прямой от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,1)$.

Вариант 5

1) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}\right) dx$; 2) $\int \left(2\sin 6x + 4e^{\frac{x}{2}}\right) dx$; 3) $\int 2^{1-5x}\,dx$;

4) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{16 - e^{2x}}}$; 5) $\int (4 - 16x)\sin 4x\,dx$; 6) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$; 7) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \cdot dx$;

8) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$; 9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; 10) $y = \sin x \cdot \cos^2 x$, $y = 0$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$;

11) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$; 12) $\iint\limits_{D} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} x = 1 \\ y = x^3 \\ y = -\sqrt[3]{x} \end{cases}$;

13) $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $x = y/\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}y$;

14) D: $x = 2, y = 0$, $y^2 = 2x$ $(y \geq 0)$; $\mu = \frac{7x^2}{8} + 2y$;

15) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $x + y = 2$, $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$;

16) $\overline{F} = x^4\,\overline{i} - 3xy\,\overline{j}$, L – дуга параболы кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(2,8)$.

Вариант 6

1) $\int 2^x \cdot \left(5 - \frac{2^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx$; 2) $\int (2\cos 3x + e^{-5x})\,dx$; 3) $\int \sin(4x-1)\,dx$;

4) $\int x \cdot e^{-5x^2}\,dx$; 5) $\int (5x-2)\cdot\cos 10x\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$; 7) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$;

8) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$; 9) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; 10) $y = \sqrt{x+4}$, $x = 0$, $y = 0$;

11) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$; 12) $\iint\limits_{D} x\,y\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} y = x - 4 \\ y^2 = 2x \end{cases}$

13) $x^2 - 7x + y^2 = 0$, $x^2 - 9x + y^2 = 0$, $y = x$, $y = 0$;

14) D: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 16$, $y \geq 0$, $x \geq 0$; $\mu = (x+y)/(x^2+y^2)$;

15) $z = 0$, $x^2 + y^2 = 16$, $z + x + y = 12$;

16) $\overline{F} = (x + 2y)\overline{i} - (x + y^2)\overline{j}$, L – дуга параболы $y = x^2 + 1$ от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,5)$.

Вариант 7

1) $\int \left(4\sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} + 1\right) dx$; 2) $\int \left(4\sin 4x - 3e^{\frac{x}{3}}\right) dx$; 3) $\int 5^{4-3x}\,dx$;

4) $\int \frac{\arcsin^5 x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 5) $\int (1-6x)\,e^{2x}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx$; 7) $\int\limits_{1}^{e} \ln x \cdot dx$;

8) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-3)^3}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x} \cdot dx$; 10) $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$ $(0 \le x \le 2)$;

11) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$; 12) $\iint\limits_D x\,y^2\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} y^2 = 8x \\ x = 4 \end{cases}$;

13) $y^2+6y+x^2=0$, $y^2+4y+x^2=0$, $y=-x$, $x=0$;

14) D: $x=1, y=0$, $y^2=\frac{x}{2}(y \ge 0)$; $\mu=\frac{7x^2}{2}+6y$;

15) $y=0$, $y=5$, $z=0$, $z=4-x^2$;

16) $\overline{F}=(x^2-y)\overline{i}-(x+y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Вариант 8

1) $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$; 2) $\int \left(5e^{-2x}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$; 3) $\int \sin(8x+3)\,dx$;

4) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}dx$; 5) $\int (3x+2)\cos 3x\,dx$; 6) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+3}dx$; 10) $y=x^2-4x$, $y=x$;

11) $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$; 12) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2 \le 6y$;

13) $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-10x+y^2=0$, $y=\sqrt{3}x$ $y=0$.

14) D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=25$, $y \le 0$, $x \ge 0$; $\mu=(2x-3y)/(x^2+y^2)$;

15) $x=0$, $y^2+z^2=4x$, $y^2+z^2=4z$;

16) $\overline{F}=(x^2+y)\overline{i}+(x-3y)\overline{j}$, L – дуга параболы $y=2x^2+1$ от точки $A(0,1)$ до точки B (2,9).

Вариант 9

1) $\int \frac{7x+x^2-\sqrt{x}}{x^2}dx$; 2) $\int \left(4\cos 6x - 2e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int (4+5x)^9\,dx$;

4) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$; 5) $\int (x-5)\cdot\sin 5x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;

8) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 10) $y=\frac{1}{4}x^2,\ \ y=5-x^2$;

11) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\cdot dy$; 12) $\iint\limits_D y\cdot\cos(x\cdot y)\cdot dx\cdot dy$, D: $\begin{cases} x=1,\ x=2, \\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi; \end{cases}$

13) $y^2-6y+x^2=0,\ \ y^2-10y+x^2=0,\ \ y=x,\ \ x=0$;

14) D: $x=0, y=1,\ y^2=x\ (y\geq 0)$; $\mu=3x^2+6y$;

15) $x^2=y,\ x^2=4-3y,\ z=0,\ z=9$;

16) $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+(x^2-2y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=2t,\ y=t^3,\ 0\leq t\leq 2$.

Вариант 10

1) $\int e^x\cdot\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}}-8\right)dx$; 2) $\int\left(10\sin\frac{x}{2}+3e^{-3x}\right)dx$; 3) $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{5-3x}}$; 4) $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

5) $\int (2-4x)\cdot\sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\,(1+\ln x)^2}$; 7) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-2x}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4x^2+1}$; 10) $y=-x^2+1,\ \ y=x-1$;

11) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)\,dy$; 12) $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} y=2 \\ x=\frac{1}{y} \\ x=y \end{cases}$;

13) $x^2+2x+y^2=0,\ \ x^2+4x+y^2=0,\ \ y=-x/\sqrt{3},\ \ y=-\sqrt{3}x$.

14) D: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ y\leq 0,\ x\geq 0$; $\mu=(2x-y)/(x^2+y^2)$;

15) $2z=x^2+y^2,\ \ y+z=4$;

16) $\overline{F}=(x^2+y^2)\overline{i}-(x+2y^2)\overline{j}$, L – часть кривой $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$.

Вариант 11

1) $\int\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$; 2) $\int\left(\dfrac{1}{5\sin^2 5x}+2e^{-8x}\right)dx$; 3) $\int 4^{3x-1}\cdot dx$; 4) $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$;

5) $\int(3-2x)\cos\dfrac{x}{2}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/6}\cos 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 7) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-2x}\cdot dx$; 8) $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{(x-1)^4}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+5}$; 10) $y=(x+1)^2,\ \ x=0,\ \ y=0$;

11) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2x}^{2x+3} f(x,y)\cdot dy$; 12) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $\begin{cases}x^2+y^2=\pi^2\\ x^2+y^2=4\pi^2\end{cases}$;

13) $y^2-2y+x^2=0,\ \ y^2-4y+x^2=0,\ \ y=\sqrt{3}x\ \ x=0$;

14) D: $x=1, y=1,\ x^2=4y\ (x\geq 0)$; $\mu=x^2+3y$;

15) $y=x^2+z^2,\ \ y=1$;

16) $\overline{F}=(2xy-y)\overline{i}+(x^2-y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=2y^2$ от $A(0,0)$ до $B(8,2)$.

Вариант 12

1) $\int\dfrac{(2-x)^2}{x^3}dx$; 2) $\int\left(\dfrac{1}{2\sin^2 2x}-4e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int\dfrac{4\,dx}{(2x-5)^5}$; 4) $\int\dfrac{(5+3\ln x)^4}{x}dx$;

5) $\int(4x-3)\cdot\cos 4x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4\dfrac{dx}{\sqrt{x}+1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/6}\sin 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 8) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{(x-1)^2}$;

9) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-2x+5}$; 10) $y=x^2-4x+3,\ \ y=3-x$;

11) $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{2x^2}^{x+3} f(x,y)\,dy$; 12) $\iint\limits_D\dfrac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, D: $\begin{cases}2y=x^2\\ y=x\end{cases}$;

13) $x^2-2x+y^2=0,\ \ x^2-6x+y^2=0,\ \ y=x/\sqrt{3},\ \ y=\sqrt{3}x$;

14) D: $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=25,\ y\geq 0,\ x\leq 0$; $\mu=(2y-x)/(x^2+y^2)$;

15) $x=6-z^2-y^2,\ \ x^2=y^2+z^2$;

16) $\overline{F}=(x^2-2y)\overline{i}+(x-4y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=4\cos t,\ y=3\sin t,\ \ 0\leq t\leq\pi$.

Вариант 13

1) $\int\left(\frac{x^4}{2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+1\right)dx$; 2) $\int\left(2\sin 3x\cos 3x+e^{\frac{x}{10}}\right)dx$; 3) $\int(4x+1)^3\,dx$;

4) $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\cdot dx$; 5) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e x\cdot\ln x\,dx$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{9x^2+4}$; 9) $\int\limits_1^e\frac{1}{x\cdot\ln x}dx$; 10) $y=\frac{6}{x}$, $y=7-x$;

11) $\int\limits_0^{3/2}dy\int\limits_{2y^2}^{y+3}f(x,y)\,dx$; 12) $\iint\limits_D(x^2+2y)\,dx\,dy$, D: $\begin{cases}x=1\\ y=-x\\ y=x^2\end{cases}$;

13) $y^2+3y+x^2=0$, $y^2+6y+x^2=0$, $y=-\sqrt{3}x$ $x=0$;

14) D: $x=3, y=0$, $y^2=\frac{x}{2}(y\geq 0)$; $\mu=2x^2+3y$;

15) $y^2+z^2=3x$, $x^2+y^2+z^2=4$;

16) $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+(x^2-2y)\overline{j}$, L – часть кривой $x^2+y^2=4$ от $A(0,2)$ до $B(2,0)$.

Вариант 14

1) $\int\frac{x^3\cdot\cos x-2x^2+7x}{x^3}dx$; 2) $\int\left(4\cos\frac{x}{3}-\frac{2}{e^x}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}}$;

4) $\int\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\mathrm{tg}^2x+3}}dx$; 5) $\int\frac{x\cdot\sin x}{\cos^3 x}dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 x\cdot dx$;

8) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{x^4}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+8x+17}$; 10) $y=x^2$, $y=2-x^2$;

11) $\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-(2+x)}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0}f(x,y)dy$; 12) $\iint\limits_D\sqrt{4+x+y}\,dx\,dy$; D: $\begin{cases}x=0\\ y=0\\ x+y=5\end{cases}$;

13) $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=x/\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x$;

14) D: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$, $y\geq 0$, $x\leq 0$; $\mu=(2y-3x)/(x^2+y^2)$;

15) $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$;

16) $\overline{F}=(xy^2)\overline{i}+(x^2-2y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, $0\leq t\leq\frac{3\pi}{2}$.

Вариант 15

1) $\int \frac{2x^3-4x^2\sin x+7}{x^2}dx$; 2) $\int\left(5\sin\frac{2x}{5}+e^{-2x}\right)dx$; 3) $\int 2^{3-4x}dx$; 4) $\int \frac{x^3dx}{4+x^8}$;

5) $\int (4x+5)e^{\frac{x}{2}}dx$; 6) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2x^2+1}$; 7) $\int_0^{\pi/8} x\cdot\cos 4x\cdot dx$; 8) $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{x^2}$;

9) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$; 10) $y=\ln x,\quad x=e,\quad y=0$; 11) $\int_0^4 dx\int_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$;

12) $\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, где D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(1,1)$;

13) $x^2-5x+y^2=0,\quad x^2-7x+y^2=0,\quad y=x/\sqrt{3},\quad y=\sqrt{3}x$;

14) D: $x=\frac{1}{2}, y=0,\ y^2=8x\ (y\geq 0)$; $\mu=7x^2+3y$;

15) $x=1,\quad x=y^2,\ z=0,\ z=2-x$;

16) $\overline{F}=(x-3xy)\overline{i}+(x^2-y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ 0\leq t\leq\pi$.

Вариант 16

1) $\int\left(3x^5+\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{e^{2x}}+2\cos\frac{2x}{3}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{8x+6}$; 4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$;

5) $\int(2-x)e^{-x}dx$; 6) $\int_1^e\frac{dx}{x\cdot(1+\ln x)^2}$; 7) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^2 x\cdot dx$; 8) $\int_0^2\frac{dx}{1-x}$;

9) $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{3x^2+4}$; 10) $y=\sin x,\quad y=x^2-\pi x$;

11) $\int_0^1 dy\int_{-y}^0 f(x,y)\cdot dx+\int_1^{\sqrt{2}}dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)\cdot dx$;

12) $\iint_D\sqrt{25-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2\leq 9$;

13) $y^2+2y+x^2=0,\quad y^2+5y+x^2=0,\quad y=x/\sqrt{3},\quad y=-\sqrt{3}x$;

14) D: $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=36,\ y\leq 0,\ x\geq 0$; $\mu=(2x-8y)/(x^2+y^2)$;

15) $z=0,\ z=\sqrt{1-y},\ y=x^2$;

16) $\overline{F}=(x+y)\overline{i}-(x^2-4y)\overline{j}$, L – часть кривой $y=x^3$ от $A(1,1)$ до $B(2,8)$.

Вариант 17

1) $\int\left(6x^5-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int\left(e^{10x}-\frac{10}{\sin^2 10x}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{(5x+1)^6}$;

4) $\int\frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$; 5) $\int(5x+6)\cdot\cos 2x\cdot dx$; 6) $\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$; 7) $\int_0^{\pi/2}\sin x\cdot\cos^2 x\cdot dx$.

8) $\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$; 9) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{9x^2+1}$; 10) $y=x^2-3x,\quad y=x$;

11) $\int_0^1 dx\int_{-1}^{x^2+1}f(x,y)\cdot dy$; 12) $\iint_D(xy-4x^3y^3)\,dx\,dy$, D: $\begin{cases}x=1\\ y=x^3\\ y=-\sqrt{x}\end{cases}$;

13) $x^2-7x+y^2=0,\quad x^2-12x+y^2=0,\quad y=-x/\sqrt{3},\quad y=0$;

14) D: $x=0, y=5,\ x^2=4y\ (x\geq 0)$; $\mu=7x^2+2y$;

15) $z=0,\ z=1-y^2,\ x=y^2,\ x=2y^2+1$;

16) $\overline{F}=(x^2-y)\overline{i}-(x+3y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$.

Вариант 18

1) $\int\frac{x-2x^2\cos x+1}{x^2}dx$; 2) $\int\left(\cos\frac{x}{3}+\frac{2}{\cos^2 3x}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{(2x-7)^3}$;

4) $\int\frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$; 5) $\int(3x-2)\sin 6x\cdot dx$; 6) $\int_0^4\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}}$; 7) $\int_0^{\pi/4}\cos x\cdot\cos 3x\cdot dx$;

8) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 9) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}$; 10) $y=\frac{4}{x},\quad y=5-x$;

11) $\int_{-2}^1 dx\int_{-\sqrt{2+x}}^0 f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{-x}}^0 f(x,y)dy$; 12) $\iint_D 2y\,dx\,dy$, D: $\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ y=0\\ x+y=2\end{cases}$;

13) $y^2+6y+x^2=0,\quad y^2+8y+x^2=0,\quad y=x/\sqrt{3},\quad y=-\sqrt{3}x$;

14) D: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=49,\ y\geq 0,\ x\leq 0$; $\mu=(2y-5x)/(x^2+y^2)$;

15) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ y+z=1,\ x=y^2+1$;

16) $\overline{F}=(x^3+y)\overline{i}-(2xy-y)\overline{j}$, L – часть кривой $y=x^2$ от $A(0,0)$ до $B(2,4)$.

Вариант 19

1) $\int\left(5x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}\right)dx$; 2) $\int(2\sin 4x\cos 4x+6e^{5x})\,dx$; 3) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+x}}$;

4) $\int\frac{\sin x}{2+\cos^2 x}dx$; 5) $\int(2x-3)\cos 4x\cdot dx$; 6) $\int\limits_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; 7) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}\cdot dx$;

8) $\int\limits_4^5\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^0\frac{dx}{16x^2+9}$; 10) $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$;

11) $\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{2+x}}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{-x}}^{0}f(x,y)dy$;

12) $\iint\limits_D(2x-y)\,dx\,dy$, где D – треугольник с вершинами $A(0,2)$, $B(1,0)$, $C(2,4)$;

13) $x^2+12x+y^2=0$, $x^2+16x+y^2=0$, $y=-x$, $y=0$;

14) D: $x=0, y=4$, $x^2=6y$ $(x\ge 0)$; $\mu=3x^2+y$;

15) $x=0$, $z=0$, $y=3x$, $z=\sqrt{y}$, $y=2$;

16) $\overline{F}=(x+y)\bar{i}+(x^2-1)\bar{j}$, L – часть кривой $x=2t$, $y=t^3$, $0\le t\le 2$.

Вариант 20

1) $\int\frac{7x^2+5x\cdot 3^x-3}{x}dx$; 2) $\int(2\sin^2 3x+4e^{-4x})\,dx$; 3) $\int\sqrt[3]{1+5x}\,dx$;

4) $\int\frac{x^3+x}{\sqrt{x^4-9}}dx$; 5) $\int(4x+7)\sin\frac{x}{3}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin^2 x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e\ln x\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^1\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+10}$; 10) $y^2=2x$, $x=8$;

11) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}f(x,y)dy$

12) $\iint\limits_D(3x-4y)dxdy$, где D – треугольник с вершинами $A(2,2)$, $B(3,3)$, $C(0,3)$;

13) $y^2-10y+x^2=0$, $y^2-20y+x^2=0$, $x=-y/\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}y$;

14) D: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y\ge 0$, $x\ge 0$; $\mu=(3x+7y)/(x^2+y^2)$;

15) $x=3$, $z=0$, $y=2x$, $z=y^2$;

16) $\overline{F}=(x^2+y^2)\bar{i}-(x+y)\bar{j}$, L – часть кривой $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Вариант 21

1) $\displaystyle\int\frac{3x^3+\sqrt{x}-2}{x}dx$; 2) $\displaystyle\int(2\cos^2 5x-e^{8x})\,dx$; 3) $\displaystyle\int\sqrt{5x-4}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{1-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

5) $\displaystyle\int(2x-5)\cos\frac{x}{4}\,dx$; 6) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx$; 7) $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{25-3x}}$; 8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$;

9) $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\cdot\ln x}$; 10) $y=\ln x,\quad y=0,\quad x=e$;

11) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}dx\int_0^{x+2}f(x,y)dy+\int_{-1}^{0}dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$;

12) $\displaystyle\iint_D\sqrt{100-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2\le 64$;

13) $x^2-7x+y^2=0,\ \ x^2-12x+y^2=0,\ \ y=-x\ \ y=0$;

14) D: $x=2, y=0,\ y^2=6x\ (y\ge 0)$; $\mu=\dfrac{7x^2}{4}+y$;

15) $x=2,\ z=0,\ y=3x,\ z=\sqrt{y}$;

16) $\overline{F}=(2xy+1)\bar{i}+(x^2-y)\bar{j}$, L – часть кривой $x=2y^2$ от $A(0,0)$ до $B(8,2)$.

Вариант 22

1) $\displaystyle\int\left(7x^6-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{3x}\right)dx$; 2) $\displaystyle\int\left(\frac{14}{\cos^2 7x}-e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int(1-8x)^8\,dx$;

4) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x}{x^2-1}dx$; 5) $\displaystyle\int(8-3x)\cdot\sin 3x\cdot dx$; 6) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{4-x^6}}$; 7) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cdot\cos^2 x\cdot dx$;

8) $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$; 9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; 10) $y=3-2x,\quad y=x^2$;

11) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}dx\int_0^{(x+2)^2}f(x,y)dy+\int_{-1}^{0}dx\int_0^{-x}f(x,y)dy$;

12) $\displaystyle\iint_D(x-5y)dxdy$, где D – треугольник с вершинами $A(1,2)$, $B(-1,3)$, $C(3,4)$;

13) $y^2+14y+x^2=0,\ \ y^2+16y+x^2=0,\ \ y=-x,\ \ x=0;$

14) $D\colon\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=64,\ \ y\le 0,\ x\ge 0;\ \mu=(x-5y)/\left(x^2+y^2\right);$

15) $x=0,\ z=0,\ x+y=2,\ z=y^2;$

16) $\overline{F}=(x^2-y)\overline{i}-(x+2y^2)\overline{j}$, L – часть кривой $x=4\cos t,\ y=\sin t,\ \ 0\le t\le\dfrac{3\pi}{2}.$

Вариант 23

1) $\displaystyle\int\frac{3x+2x^2\cdot\sin x-7}{x^2}dx$; 2) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{\sin^2 10x}+8e^{-\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{5-3x}$;

4) $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos^2 x}{\cos^4 x}dx$; 5) $\displaystyle\int(x+5)\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx$; 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; 7) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\operatorname{ctg}x}{\sin^2 x}dx$;

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot dx$; 9) $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 10) $y=x^2,\ \ y=\dfrac{x^2}{2},\ \ x=3$;

11) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{2+x}}^{0}f(x,y)dy+\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{0}f(x,y)dy$; 12) $\displaystyle\iint_D\sqrt{5+x+y}\,dx\,dy$, D: $\begin{cases}x=0\\ y=0\\ x+y=4\end{cases}$;

13) $x^2-9x+y^2=0,\ \ x^2-x+y^2=0,\ \ y=-\sqrt{3}x,\ \ y=0;$

14) $D\colon\ x=2, y=0,\ y^2=\frac{x}{3}\,(y\ge 0);\ \ \mu=7x^2+8y;$

15) $x=0,\ z=0,\ x+y=4,\ z=4\sqrt{y};$

16) $\overline{F}=(x^2+y)\overline{i}+(x-2y)\overline{j}$, L – часть кривой $x^2+y^2=9$ от $A(0,3)$ до $B(3,0)$.

Вариант 24

1) $\displaystyle\int\frac{x^6+3x^3\cdot 5^x-5}{x^3}dx$; 2) $\displaystyle\int\left(\sin\frac{x}{5}+9e^{3x}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{5\,dx}{\sqrt{1-5x}}$; 4) $\displaystyle\int\frac{2+\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}dx$;

5) $\displaystyle\int(x-10)\sin 7x\,dx$; 6) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; 7) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\frac{x-1}{x^2+6x+13}dx$; 8) $\displaystyle\int_0^1\ln x\cdot dx$;

9) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^3}$; 10) $y=\dfrac{x^2}{3},\ \ y=4-\dfrac{2}{3}x^2$;

11) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{0}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0}f(x,y)dy$;

12) $\iint\limits_D (5x+7y)\,dx\,dy$, где D – треугольник с вершинами $A(4,3)$, $B(3,2)$, $C(0,0)$;

13) $y^2+6y+x^2=0,\ \ y^2+10y+x^2=0,\ \ y=-x,\ \ x=0;$

14) $D\colon\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=25,\ y\le 0,\ x\ge 0;\ \mu=(2x-3y)/(x^2+y^2);$

15) $z=0,\ z=3x,\ y^2=2-x;$

16) $\overline{F}=(xy^2)\overline{i}+(x+2y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=3\cos t,\ y=5\sin t,\ \ 0\le t\le\dfrac{3\pi}{2}.$

Вариант 25

1) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x^2}dx$; 2) $\displaystyle\int\left(\cos\frac{x}{6}-12e^{-3x}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int(4x+2)^5\,dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{x^2-4\ln^3 x}{x}dx$;

5) $\displaystyle\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 7) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot dx$; 8) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{ctg}x\cdot dx$;

9) $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$; 10) $y=x\cdot\sqrt{4-x^2},\ \ y=0\ \ (0\le x\le 2);$

11) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{(x-2)^2} f(x,y)dy$; 12) $\displaystyle\iint\limits_D 6y\,dx\,dy$, $D\colon\begin{cases}y=-\sqrt{x}\\ x=0\\ x+y=2\end{cases}$;

13) $x^2+12x+y^2=0,\ \ x^2+14x+y^2=0,\ \ y=x/\sqrt{3},\ \ y=-\sqrt{3}x;$

14) $D\colon\ x=1, y=0,\ x^2=4y\ (x\ge 0);\ \ \mu=9x^2+y;$

15) $z=0,\ 2x-y=0,\ 4z=y^2,\ x+y=9;$

16) $\overline{F}=(2xy-y)\overline{i}+(x+y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=2\cos t,\ y=6\sin t,\ \ 0\le t\le\pi.$

Вариант 26

1 $\displaystyle\int\left(\frac{1}{5\sin^2 5x}+2e^{-8x}\right)dx$; 2) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2dx$; 3) $\displaystyle\int 4^{3x-1}\cdot dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$;

5) $\displaystyle\int(3-2x)\cos\frac{x}{2}dx$; 6) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/6}\cos 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 7) $\displaystyle\int\limits_0^1 x\cdot e^{-2x}\cdot dx$; 8) $\displaystyle\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^4}$;

9) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$; 10) $y=(x+1)^2,\ \ x=0,\ \ y=0;$

11) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^0 f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x^2-2x}^0 f(x,y)dy$;

12) $\iint\limits_D (4x-3y)dxdy$, где $D-$ треугольник с вершинами $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(4,5)$;

13) $y^2-5y+x^2=0,\ \ y^2-9y+x^2=0,\ \ y=-\sqrt{3}x,\ \ x=0;$

14) $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ \ y\le 0,\ x\ge 0;\ \mu=(7x-y)/(x^2+y^2);$

15) $y=0,\ z=0,\ x+y=2,\ z=x^2$;

16) $\overline{F}=(2xy+1)\overline{i}+(x^2-y)\overline{j}$, $L-$ часть кривой $x=3y^2$ от $A(0,0)$ до $B(3,1)$.

Вариант 27

1) $\int \frac{(2-x)^2}{x^3}dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{2\sin^2 2x}-4e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int \frac{4\,dx}{(2x-5)^5}$; 4) $\int \frac{(5+3\ln x)^4}{x}dx$;

5) $\int (4x-3)\cdot\cos 4x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

9) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$; 10) $y=x^2-4x+3,\ \ y=3-x$;

11) $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy$;

12) $\iint\limits_D (12xy+9x^2y^2)\,dx\,dy$, D: $\begin{cases} x=1 \\ y=-x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$;

13) $x^2-22x+y^2=0,\ \ x^2-16x+y^2=0,\ \ y=x/\sqrt{3},\ \ y=-\sqrt{3}x;$

14) D: $x=2, y=0,\ y^2=x/4\ (y\ge 0);\ \ \mu=5x^2+2y;$

15) $x=2,\ z=0,\ y=3x,\ z=\sqrt{y}$;

16) $\overline{F}=(x-y^2)\overline{i}-(x+3y)\overline{j}$, $L-$ часть кривой $x=2\cos t,\ y=4\sin t,\ \ 0\le t\le \frac{3\pi}{2}$.

Вариант 28

1) $\int\left(\frac{x^4}{2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+1\right)dx$; 2) $\int\left(2\sin 3x\cos 3x+e^{\frac{x}{10}}\right)dx$; 3) $\int(4x+1)^3\,dx$;

4) $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\cdot dx$; 5) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e x\cdot\ln x\;dx$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{9x^2+4}$; 9) $\int\limits_1^e\frac{1}{x\cdot\ln x}dx$; 10) $y=\frac{6}{x}$, $y=7-x$;

11) $\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-\sqrt{2+x}}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{-x}}^{0}f(x,y)dy$;

12) $\iint\limits_D(x^2-2y)\,dx\,dy$, где D – треугольник с вершинами $A(0,2)$, $B(1,2)$, $C(0,3)$;

13) $y^2+10y+x^2=0$, $y^2+16y+x^2=0$, $y=-\sqrt{3}x$, $x=0$;

14) D: $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$, $x\leq 0$; $\mu=(2y-8x)/\left(x^2+y^2\right)$;

15) $x=2$, $z=0$, $y=3x$, $z=\sqrt{y}$;

16) $\overline{F}=(2xy+y)\overline{i}+(x-5y)\overline{j}$, L – часть кривой $x=2y^2$ от $A(0,0)$ до $B(8,2)$.

Вариант 29

1) $\int\frac{x^3\cdot\cos x-2x^2+7x}{x^3}dx$; 2) $\int\left(4\cos\frac{x}{3}-\frac{2}{e^x}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}}$;

4) $\int\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+3}}dx$; 5) $\int\frac{x\cdot\sin x}{\cos^3 x}dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 x\cdot dx$;

8) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{x^4}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+8x+17}$; 10) $y=x^2$, $y=2-x^2$;

11) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{(x-2)^2}f(x,y)dy$;

12) $\iint\limits_D(4xy+3x^2y^2)\,dx\,dy$, D: $\begin{cases}x=1\\ y=x^2\\ y=-\sqrt{x}\end{cases}$;

13) $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-14x+y^2=0$, $y=-x/\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x$;

14) D: $x = 1/2, y = 0,\ x^2 = 4y\ (x \geq 0);\ \mu = 4x^2 + 5y$;

15) $x = 2,\ z = 0,\ y = 3x,\ z = \sqrt{y}$;

16) $\overline{F} = (2x - y)\overline{i} + x^2\overline{j}$, L – часть кривой $x = 2t,\ \ y = t^3,\ 0 \leq t \leq 2$.

Вариант 30

1) $\int \frac{x^2 - 4x^3 \cos x + 1}{x^3} dx$; 2) $\int \left(2\sin 5x \cdot \cos 5x + \frac{1}{e^{5x}}\right) dx$; 3) $\int 2^{3-4x}\, dx$;

4) $\int \frac{x^3 dx}{4 + x^8}$; 5) $\int (4x + 5)\, e^{\frac{x}{2}}\, dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{2x^2 + 1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/8} x \cdot \cos 4x \cdot dx$;

8) $\int\limits_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$; 10) $y = \ln x,\ \ x = e,\ \ y = 0$;

11) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y) dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y) dy$;

12) $\iint\limits_D (2x + 3y) dxdy$, где D – треугольник с вершинами $A(1,1), B(2,2), C(0,3)$;

13) $x^2 - 15x + y^2 = 0,\ \ x^2 - 7x + y^2 = 0,\ \ y = -x/\sqrt{3},\ \ y = \sqrt{3}x$;

14) D: $x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 36,\ \ y \geq 0,\ x \leq 0;\ \mu = (2y - 5x)/(x^2 + y^2)$;

15) $x = 2,\ z = 0,\ y = 3x,\ z = \sqrt{y}$;

16) $\overline{F} = (x + y^2)\overline{i} + (x^2 - 4y)\overline{j}$, L – часть кривой $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ №8, 9, 11, 13 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №2

Задачи № 8, 9. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

8. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x^4} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim\limits_{\delta \to 0} \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Bigg|_{0+\delta}^{1} =$

$= -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{1}{(0-\varepsilon)^3} - \frac{1}{(-1)^3}\right] - \frac{1}{3}\lim\limits_{\delta \to 0}\left[\frac{1}{(1)^3} - \frac{1}{(0+\delta)^3}\right] = \infty$

Следовательно, интеграл расходится. (Здесь подынтегральная функция $\frac{1}{x^4}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$).

Ответ: интеграл расходится.

9. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^M =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{M}{2} - \mathrm{arctg}\,0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Известно, что $\mathrm{arctg}\, x \underset{x\to+\infty}{\to} \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \mathrm{arctg}\, x \underset{x\to-\infty}{\to} -\dfrac{\pi}{2}$, $\quad \mathrm{arctg}\, 0 = 0.$

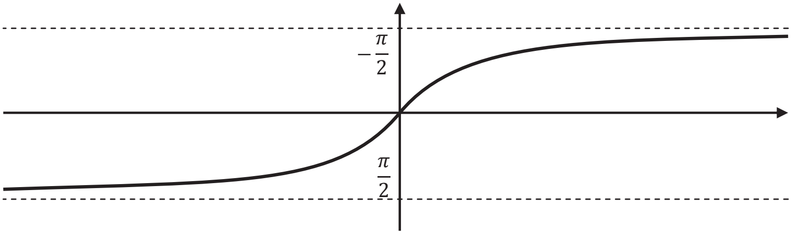


Рис. 2. График функции $y = arctg\ x$

Ответ: интеграл сходится и равен $\dfrac{\pi}{4}$**.**

Задача 11. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{2} dx \int_{x}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Построим области

$$D_1: \begin{cases} -2 \le x \le -1, \\ -\sqrt{x+2} \le y \le \sqrt{x+2} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad D_2: \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x \le y \le \sqrt{x+2} \end{cases}.$$

Граница области D_1 определяется уравнением $y = \pm\sqrt{x+2}.$ Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение параболы $y^2 = x+2$, вершина которой находится в точке $(-2;\,0)$, а осью симметрии является ось Ox.

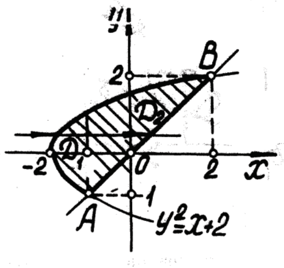


Рис.3.

Граница области D_2 задается следующими уравнениями: $y = x -$ прямая, проходящая через начало координат, и $y = \sqrt{x+2}$ $-$ верхняя ветвь параболы $y^2 = x+2.$ Таким образом, область интегрирования $D = D_1 \cup D_2$ (рис.3.)

Чтобы расставить пределы интегрирования, найдем координаты точек пересечения линий границы. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x+2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2. \text{ Отсюда } y_1 = -1, y_2 = 2.$$

Таким образом, $A(-1;-1), B(2;2)$.

При перемене порядка интегрирования внешний интеграл будем брать по переменной y, внутренний – по x. Зафиксируем y и проведем прямую, пересекающую область D и параллельную оси Ox. На этой прямой x меняется от линии $y^2 = x+2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2$ до линии $y = x \Leftrightarrow x = y$.

Итак, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy = \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2-2}^{y} f(x,y)dx.$$

Задача 13. С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$, и расположенной вне первой окружности.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ задает окружность радиусом 2 с центром в начале координат. Уравнение $x^2 + y^2 = 4x$, задает окружность радиуса 2 с центром в точке (2;0) (рис.4.)

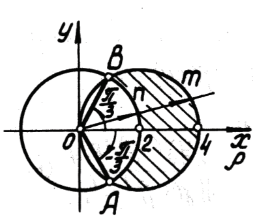


Рис.4.

Требуется найти площадь фигуры $AmBnA$.

Здесь удобно перейти к полярным координатам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда первое уравнение примет вид:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2.$$

Второе уравнение:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2 - 4\rho\cos\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 4\cos\varphi.$$

Чтобы определить координаты точек A и B, решим совместную систему уравнений

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \rho = 4\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow 2 = 4\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Итак, $A=(-\frac{\pi}{3};2)$, $B(\frac{\pi}{3};2)$.

Область $AmBn$ можно задать неравенствами $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}, \\ 2\le\rho\le 4\cos\varphi. \end{cases}$

Вычисляем площадь фигуры

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\begin{bmatrix} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \\ dx\,dy=\rho\cdot d\rho\, d\varphi \end{bmatrix}=\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_{2}^{4\cos\varphi}\rho d\rho=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{4\cos\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}(16\cos^2\varphi-4)d\varphi=8\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2\varphi d\varphi-2\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}d\varphi=8\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi)d\varphi-2\varphi\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3}=$$

$$=4(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3}-2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{2\pi}{3}+2\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}.$$

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Замечательные пределы и эквивалентности

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to0}}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to0}}\left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$$

Если при $x\to a$ $\varphi(x)\to0$, то

$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\qquad e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$,

$\operatorname{tg}\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\qquad a^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)\cdot\ln a$,

$1-\cos\varphi(x)\sim\frac{1}{2}\varphi(x)^2$, $\qquad \ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$,

$\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\qquad \log_a\left(1+\varphi(x)\right)\sim\frac{1}{\ln a}\varphi(x)$,

$\operatorname{arctg}\varphi(x)\sim\varphi(x)$, $\qquad \left(1+\varphi(x)\right)^m-1\sim m\,\varphi(x)$.

Таблица производных

1. $(C)'=0$

2. $(u^n)' = n\cdot\ u^{n-1}\cdot u'$;

3. $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$;

4. $(e^u)' = e^u\cdot u'$;

5. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$;

6. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$;

7. $(\sin u)' = \cos\ u\cdot u'$;

8. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$;

9. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;

10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;

11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

13. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;

14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;

15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u\cdot u'$;

16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u\cdot u'$;

17. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\cdot u'$;

18. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\cdot u'$;

Правила дифференцирования

$(u\pm v)' = u'\pm v'$; $(u\cdot v)' = u'v+uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; $(cu)' = cu'$ (c – число).

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = \int 1\cdot dx = x + C$;

2) $\int x^n\cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n\neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\cdot dx = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x\cdot dx = e^x + C$;

5) $\int a^x\cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

6) $\int \cos x\cdot dx = \sin\ x + C$;

7) $\int \sin\ x\cdot dx = -\cos x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2\ x}\cdot dx = \operatorname{tg}\ x + C$;

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C$;

11) $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \mathrm{arctg}\, x + C$;

12) $\int \frac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$;

13) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

14) $\int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

15) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}} \cdot dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$;

16) $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$;

17) $\int \sqrt{x^2+A} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$;

18) $\int \mathrm{sh}\, x \cdot dx = \mathrm{ch}\, x + C$;

19) $\int \mathrm{ch}\, x \cdot dx = \mathrm{sh}\, x + C$;

20) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

21) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Правила интегрирования

$$\int A \cdot f(x) \cdot dx = A \cdot \int f(x)\, dx;$$

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

Формула интегрирования по частям для неопределенного и определенного интегралов

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du; \qquad \int_a^b u\, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Две полезные формулы

1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$;

2) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$.

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2014.
2. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2012.
3. Шипачёв В.С. Задачи по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2011.
4. Данко П.Е., Кожевникова Т.Я., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. I, II – М.: Айрис-пресс, 2006 .
5. Самохин А.В., Жулёва Л.Д и др. Сборник задач по высшей математике, ч. II. Пределы, производные и графики функций. – М.: РИО МГТУ ГА, 2003, №536.
6. Жулёва Л.Д., Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике, ч. IV. Интегралы. Дифференциальные уравнения. – М.: РИО МГТУГА, 2005, №1448.

Содержание

Первый семестр

Второй семестр