

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра электротехники
и авиационного электрооборудования

С.П. Халютин, А.А. Титов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Тексты лекций

*Утверждено редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия*

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 621.3.01
ББК 6П2.12
Х17

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

Давидов А.О. (МГТУ ГА) – д-р техн. наук;
Грузков С.А. (НИУ «МЭИ») – канд. техн. наук, профессор

Халютин С.П.

X17 Теоретические основы электротехнического оборудования воздушных судов [Текст] : тексты лекций / С.П. Халютин, А.А. Титов. – М. : ИД Академии Жуковского, 2020. – 160 с.

ISBN 978-5-907275-71-3

Тексты лекций предназначены для обучающихся по направлению подготовки 25.04.02 «Техническая эксплуатация авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов», изучающих дисциплину «Теоретические основы электротехнического оборудования воздушных судов». Данные тексты лекций издаются в соответствии с тематическим планом издания учебной литературы МГТУ ГА.

В текстах лекций содержится теоретический материал первого раздела дисциплины, включающий материал по базовым понятиям теоретической электротехники. Методы расчета электрических цепей рассматриваются в матричном виде, отдельно представлен аналитический метод расчета токов и напряжений, основанный на исследовании предельных состояний элементов – метод предельных состояний.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 15.09.2020 г. и методического совета 15.09.2020 г.

УДК 621.3.01
ББК 6П2.12

Доп. тем. план 2020 г.
поз. 5

ХАЛЮТИН Сергей Петрович, ТИТОВ Александр Анатольевич
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОГО
ОБОРУДОВАНИЯ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Тексты лекций

В авторской редакции

Подписано в печать 04.12.2020 г.

Формат 60x84/16 Печ. л. 10 Усл. печ. л. 9,3

Заказ № 716/1008-УП14 Тираж 90 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А

Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907275-71-3

© Московский государственный технический
университет гражданской авиации, 2020

| | |
|---|-----|
| ОГЛАВЛЕНИЕ | 3 |
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ | 5 |
| 1.1. Общие понятия, определения и законы электротехники | 5 |
| 1.2. Классические методы расчета электрических цепей. Матричная форма представления..... | 18 |
| 2. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ | 34 |
| 2.1. Главные определители электрических схем. Начальная универсальная формула для расчёта электрических цепей..... | 34 |
| 2.2. Универсальная формула при размыкании и коротком замыкании произвольного числа сопротивлений..... | 50 |
| 2.3. Метод предельных состояний для установившихся режимов в электрических цепях. | 55 |
| 2.4. Метод предельных состояний для расчёта электрических цепей в частотной и во временной областях..... | 65 |
| 3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ..... | 92 |
| 3.1. Возникновение переходных процессов и законы коммутации..... | 92 |
| 3.2. Переходный, установившийся и свободные процессы. Характеристическое уравнение..... | 94 |
| 3.3. Математические модели индуктивных L и ёмкостных C элементов для временной области. Эквивалентные схемы с дополнительными источниками. | 104 |
| 3.4. Составление полного симметричного дифференциального уравнения с математическими моделями индуктивного и ёмкостного элементов. | 109 |
| 3.5. Рекуррентные формулы. Нахождение зависимых начальных условий по коэффициентам полного симметричного дифференциального уравнения. | 111 |
| 3.6. Расчёт переходных процессов при синусоидальных источниках. | 118 |
| 3.7. Нахождение предыстории по истории переходного процесса..... | 125 |
| 3.8. Единство частотных и временных областей. | 133 |
| 3.9. Переходные процессы при «некорректных» коммутациях..... | 144 |
| РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА | 159 |

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Теоретические основы электротехнического оборудования воздушных судов» является формирование знаний студентов направления 25.04.02 – Техническая эксплуатация авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов, необходимых для понимания физических основ функционирования, используемых в гражданской авиации электрифицированных систем и авионики, принципов построения, анализа режимов работы и их грамотной эксплуатации.

Задачи изучения дисциплины – приобретение знаний основных физических процессов и законов, на которых основана работа современного электрооборудования воздушных судов, а именно основы электротехники, электроники и электрических машин, овладение методами расчета различных электротехнических систем и объектов, анализа их режимов работы, а также практическими приемами безопасной работы с ними в процессе эксплуатации.

Представленные материалы лекций включают теоретический материал, необходимый для усвоения первого раздела дисциплины – «Теоретические основы современной электротехники».

Кроме базовых понятий электротехники достаточно подробно рассмотрен метод предельных состояний – обобщенный аналитический метод расчета электрических цепей постоянного и переменного тока, приведены учебные примеры. Показана связь метода предельных состояний с классическими методами расчета.

Для более глубокого изучения отдельных разделов дисциплины приведен рекомендуемый список литературы, который включает не только классические учебники по курсу «Теоретические основы электротехники», но и новые публикации, раскрывающие метод предельных состояний.

Данное учебное пособие полезно для студентов, обучающихся в магистратуре, и не имеющих базовое образование по авиационному оборудованию.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

1.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЗАКОН ОМА

Электрическая схема (цепь) есть совокупность устройств и элементов, предназначенных для передачи и преобразования электрической энергии. При изучении процессов в электрической схеме эту реальную схему заменяют расчётной схемой (цепью) замещения и вводят понятия элементов схемы (цепи). Основные элементы электрической схемы (цепи) – источники и приёмники электрической энергии (электрических сигналов), соединённые проводами.

Основные элементы электрической схемы в цепях постоянного тока.

1. Приёмники электрической энергии. Закон Ома.

В электрических цепях постоянного тока приёмниками электрической энергии являются резисторы (или просто «сопротивления»). Размерность – Ом. Их обратными величинами являются проводимости. Размерность – Сименс. На схемах обозначают (рис. 1.1):

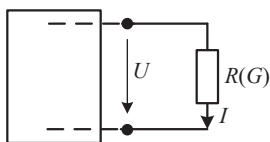


Рис. 1.1.

Напряжение U на сопротивлении (проводимости) и ток I , протекающий через него (рис. 1.1), связаны законом Ома. Две формы записи закона Ома:

$$\text{первая форма записи} \quad U = RI,$$

$$\text{вторая форма записи} \quad I = GU.$$

Если стрелочки тока и напряжения (условно выбранные направления) направлены в разные стороны, то закон Ома записывается с отрицательным знаком « \rightarrow »:

$$U = -RI \quad \text{и} \quad I = -GU.$$

Поэтому в дальнейшем, чтобы не иметь отрицательного знака, мы будем (по возможности) на схемах стрелочки напряжения и тока направлять в одном

направлении. Мы говорим «направлять» потому, что когда мы будем искать напряжения, токи в разветвлённых схемах, то будем выбирать сами и указывать на схемах стрелочками искомые напряжения и токи.

2. Идеальные источники.

2.1. Источник ЭДС есть источник с заданным значением напряжения (электродвижущей силы E). Размерность – Вольт.

Источник ЭДС E обозначают кружочком со *сплошной* стрелочкой (рис.1.2). Полярность источника определяется направлением стрелочки. Если в схеме один источник, то направление стрелочки источника ЭДС совпадает с направлением тока I , создаваемом этим источником. Пусть этот источник подсоединён к резистору R , сопротивление которого изменяется.

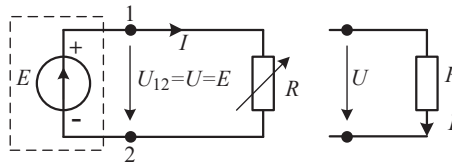


Рис. 1.2.

При изменении (увеличении или уменьшении) сопротивления R ток I изменяется. Но разность потенциалов на зажимах (полюсах) источника E остаётся постоянной величиной:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = E = const. \quad (1.1)$$

По выражению (1.1) определяется ЭДС источника E .

Электродвижущая сила E равна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ (напряжению $U = U_{12}$ между положительным и отрицательным выводами).

Величина ЭДС источника E является величиной постоянной и не зависит от протекающего тока.

Если индексы «12» у напряжения опускают, то на схеме обязательно рисуют стрелочку направления этого напряжения. Обратим особое внимание на направление стрелочек у ЭДС E (в кружочке) и у напряжения $U = U_{12}$. Они соответствуют той договорённости, которая была принята в России. Это разумно, потому что при такой договорённости направление напряжения U и направление тока I на резисторе R совпадают (стрелочки напряжения и тока в одном направлении). Во Франции принята другая договорённость.

Внешняя вольт-амперная характеристика (ВАХ) источника E приведена на рис. 1.3. Она представляет собой прямую линию без угла наклона. При любом токе напряжение на зажимах источника E постоянно.

Эта характеристика свидетельствует о том, что такой источник *не имеет внутреннего сопротивления*.

Если источник E равен нулю, то для схемы $E = 0$ означает равенство потенциалов φ_1 и φ_2 . Это следует из определения (1.1) источника. Равенство потенциалов точек 1 и 2 эквивалентно короткому замыканию этих точек (рис. 1.4).

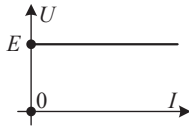


Рис. 1.3.

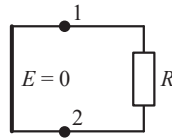


Рис. 1.4.

Источники напряжения E соединяются *только последовательно!* Это следует из определения источника. На рис. 1.5 приведено последовательное соединение трёх источников E_1 , E_2 и E_3 . На рисунке справа показан эквивалентный источник E_3 .

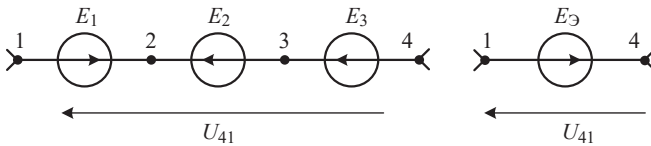


Рис. 1.5.

По определению запишем:

$$\begin{aligned}\varphi_2 - \varphi_1 &= E_1, \\ \varphi_3 - \varphi_2 &= -E_2, \\ \varphi_4 - \varphi_3 &= E_3.\end{aligned}$$

Складывая три уравнения, получим:

$$\varphi_4 - \varphi_1 = E_1 - E_2 + E_3 = E_3 = U_{41}.$$

Источник напряжения никогда не рисуют короткозамкнутым!

2.2. Источник тока J есть источник с заданным током. Размерность – Ампер.

Обозначение и направление. Определение.

На рисунке 1.6. представлен такой источник.

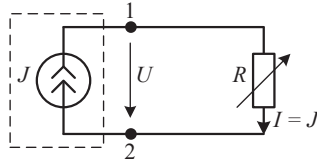


Рис. 1.6.

Источник тока J обозначают кружочком с *разрывной* стрелочкой. Направление разрывной стрелочки соответствует направлению тока I , создаваемому этим источником $I = J$. Пусть этот источник подсоединён к сопротивлению (резистору) R , которое изменяется. При изменении (увеличении или уменьшении) сопротивления R напряжение U изменяется. Но ток I в ветви с источником J не зависит от напряжения U и остаётся постоянной величиной:

$$I = J \text{ — постоянная величина.} \quad (1.2)$$

Выражение (1.2) является определением источника тока J .

Внешняя вольт-амперная характеристика (ВАХ) источника J приведена на рис. 1.7. Она представляет собой прямую линию без угла наклона. При любом напряжении на зажимах источника J ток I остаётся постоянным. Эта характеристика свидетельствует о том, что такой источник *имеет бесконечно большое внутреннее сопротивление*. Источник тока на схемах иногда изображают с обрывом (рис. 1.8). Если источник J равен нулю, то для схемы $J = 0$ эквивалентно размыканию. Нет тока (рис. 1.9). Это следует из определения (1.2) источника.

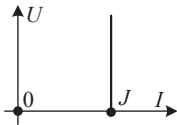


Рис. 1.7.

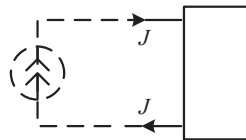


Рис. 1.8.

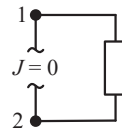


Рис. 1.9.

Источники тока J соединяются *только параллельно!* Это следует из определения источника. На рис. 1.10 приведено параллельное соединение трёх источников J_1, J_2 и J_3 . На рисунке справа показан эквивалентный источник $J_3 = J_1 - J_2 + J_3$.

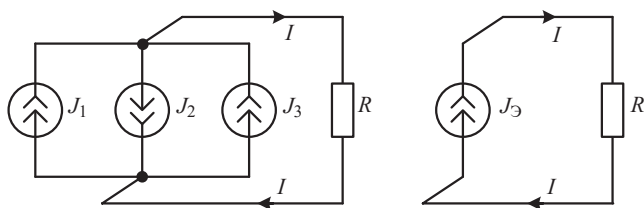


Рис. 1.10.

Источник тока никогда не рисуют разомкнутым!

Источник E нельзя заменить источником J . Источник J нельзя заменить источником E .

Нельзя *заменить*, но можно *преобразовать*.

Примечание. Обозначение источника напряжения кружочком со *сплошной* стрелочкой подсказывает нам (сплошная стрелочка), что его внутреннее сопротивление равно нулю. Обозначение источника тока кружочком с *разрывной* стрелочкой подсказывает нам (разрывная стрелочка), что его внутреннее сопротивление равно бесконечности.

3. Реальный источник электрической энергии и две его схемы замещения.

Источник электрической энергии – реальный источник. Он может быть представлен двумя эквивалентными схемами замещения: последовательной и параллельной (рис. 1.11).

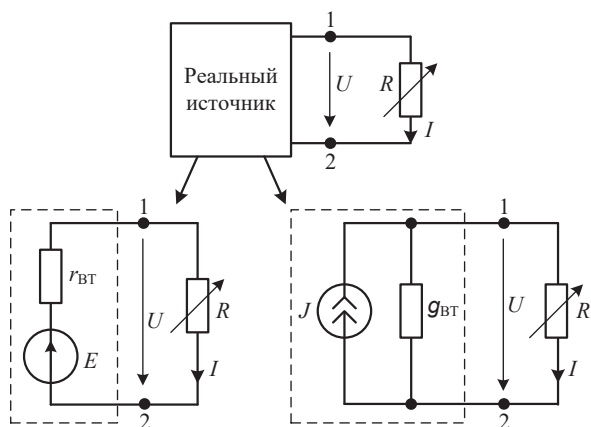


Рис. 1.11.

На рис. 1.11 обозначены:

$r_{вТ}$ ($g_{вТ}$) – внутреннее сопротивление (проводимость) источника,

E и $r_{\text{вТ}}$ (J и $g_{\text{вТ}}$) – параметры последовательной (параллельной) схемы замещения.

Внешняя характеристика (ВАХ) реального источника – прямая линия с углом наклона. Она приведена на рис. 1.12.



Рис. 1.12.

Эта характеристика описывается уравнением прямой в отрезках;

$$\frac{U}{U_{\text{хх}}} + \frac{I}{I_{\text{кз}}} = 1. \quad (1.3)$$

В этом уравнении:

$U_{\text{хх}}$ – напряжение холостого хода (напряжение разрыва) на разомкнутых зажимах 1-2 источника (при отключённой нагрузке – сопротивлении R);

$I_{\text{кз}}$ – ток короткого замыкания при короткозамкнутых зажимах 1-2 (при короткозамкнутой нагрузке – сопротивлении R).

Умножим уравнение (1.3) на $U_{\text{хх}}$:

$$U + I U_{\text{хх}}/I_{\text{кз}} = U_{\text{хх}}.$$

Учитывая, что $U_{\text{хх}} = E$ и $r_{\text{вТ}} = U_{\text{хх}}/I_{\text{кз}}$ получим:

$$U = E - r_{\text{вТ}} I. \quad (1.4)$$

Полученному уравнению (1.4) соответствует последовательная схема замещения реального источника с параметрами E и $r_{\text{вТ}}$.

Умножим теперь уравнение (1.3) на ток $I_{\text{кз}}$:

$$U I_{\text{кз}}/U_{\text{хх}} + I = I_{\text{кз}}.$$

Учитывая, что $I_{\text{кз}} = J$ и $g_{\text{вТ}} = I_{\text{кз}}/U_{\text{хх}}$ получим:

$$I = J - g_{\text{вТ}} U. \quad (1.5)$$

Полученному уравнению (1.5) соответствует параллельная схема замещения реального источника с параметрами J и $g_{\text{вТ}}$.

Условие эквивалентности двух схем непосредственно следует из уравнения (1.3) и полученных из него двух уравнений (1.4) и (1.5). Запишем это условие эквивалентности двумя равенствами:

1. $r_{\text{вТ}} = 1/g_{\text{вТ}}$ или $g_{\text{вТ}} = 1/r_{\text{вТ}}$;
2. $E = r_{\text{вТ}} J$ или $J = g_{\text{вТ}} E$.

ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Определения ветви (В), узла (У), контура (К) электрической цепи для составления уравнений Кирхгофа.

Ветвью электрической цепи и её схемы называется участок, состоящий только из последовательно включённых источников ЭДС и приёмников с одним и тем же током. На рис. 1.13 приведены примеры ветвей согласно введённому определению.



Рис. 1.13

Равенство нулю и источников E и приёмников R по определению не является ветвью. Её называют соединительной линией («закороткой»). Она соединяет два узла в один узел.

Узлом электрической цепи и её схемы называется место или точка соединения трёх и более ветвей (узлом иногда называют и точку соединения двух ветвей).

Контуром электрической цепи и её схемы называется замкнутый путь, проходящий по нескольким соединённым в узлах ветвям.

Контуры называют независимыми, если они отличаются от других контуров наличием хотя бы одной новой ветви.

Режим электрической цепи произвольной конфигурации полностью описывается *первым* и *вторым* законами Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа.

Применяется к узлам и формулируется: *алгебраическая сумма токов в узле равна нулю*. Имеет две формы записи:

$$\text{первая форма записи} \quad \sum I = 0, \tag{1.6.1}$$

$$\text{вторая форма записи} \quad \sum I = \sum J. \tag{1.6.2}$$

Вторая форма записи обусловлена переносом в правую часть равенства известных токов источников J .

Условились: токи, направленные *от* узла записывать со знаком «+»;

токи, направленные *к* узлу записывать со знаком «-».

Число независимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно: $У - 1$.

Если направления токов не известны, то для составления уравнений выбирают направления токов произвольно – положительные (расчётные)

направления токов и указывают стрелочкой на схеме. В дальнейшем направления стрелочек не меняют. Если в результате расчёта у тока получен отрицательный знак, это всего лишь означает, что реальный ток в ветви течёт в противоположную сторону выбранного расчётного (искомого) тока.

Первый закон Кирхгофа можно применить не только к какому-либо узлу, но и к любой замкнутой поверхности – сечению.

Второй закон Кирхгофа.

Применяется к контурам и формулируется: *в любом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех элементах и участках цепи, входящих в этот контур, равна нулю.*

Имеет две формы записи:

$$\text{первая форма записи} \quad \sum U = 0, \quad (1.7.1)$$

$$\text{вторая форма записи} \quad \sum RI = \sum E. \quad (1.7.2)$$

Вторая форма записи обусловлена переносом в правую часть равенства известных источников напряжения E .

Число независимых уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, равно разности числа ветвей (B) и числа уравнений уже составленных по первому закону Кирхгофа ($Y - 1$):

$$B - (Y - 1) = K.$$

В дальнейшем под буквой K будем понимать число независимых контуров.

Таким образом, общее число линейно независимых уравнений, составляемых по первому и по второму законам Кирхгофа равно числу ветвей электрической цепи.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа произвольно выбирают направление обхода независимого контура. Если направление расчётного тока (его стрелочка) совпадает с направлением обхода контура, то слагаемое RI записывается со знаком «+»; в противном случае (не совпадает) – записывается со знаком «-». Аналогично для источников E . Если направление E (стрелочка в кружочке) совпадает с направлением обхода контура, то записывается в уравнении со знаком «+»; в противном случае (не совпадает) – записывается со знаком «-».

Пример 1.1. Рассмотрим электрическую цепь произвольной конфигурации, представленную на рисунке 1.14.

Будем считать известными все источники напряжения и тока, известны все сопротивления. Требуется составить систему уравнений по законам Кирхгофа для нахождения всех токов и записать выражение для нахождения напряжения на источнике J_1 .

Решение. Если направления токов не указаны, мы сами выбираем произвольно направления расчётных токов и показываем их стрелочками на схеме. Теперь возникает вопрос, сколько в схеме узлов, для которых будем записывать уравнения по первому закону Кирхгофа и сколько контуров, для которых запишем уравнения по второму закону Кирхгофа.

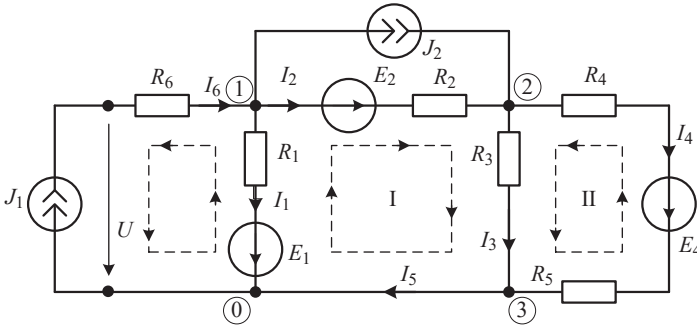


Рис. 1.14.

Для ответа на эти вопросы мы сначала должны определить, сколько же всего уравнений мы должны составить. Всего уравнений должно быть столько, сколько искомым токов. Считаем их: I_1, I_2, I_3, I_4 . Ток $I_6 = J_1$ известен. Следовательно, всего уравнений должно быть четыре. Что сначала будем считать: число узлов или число независимых контуров? Всё зависит от схемы, её конфигурации. Для определения числа контуров удобно все источники приравнять нулю. Вспоминаем: источники напряжения со сплошными стрелочками, значит вместо них закоротки; источники тока с разрывными стрелочками, значит вместо них размыкание. Теперь хорошо видно, что число независимых контуров в схеме – два. Следовательно, число узлов должно быть равно трём. Считаем узлы. Верно. Точки «0» и «3» стянуты в один узел соединительной линией («закороткой»). Окончательно:

$$U - 1 = 3 - 1 = 2, \quad B - (U - 1) = 4 - 2 = 2.$$

$$\text{Для узла 1: } I_1 + I_2 - J_1 + J_2 = 0,$$

$$\text{Для узла 2: } -I_2 + I_3 + I_4 - J_2 = 0.$$

При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа выбрали первую форму записи.

Для записи уравнений по второму закону Кирхгофа в каждом из контуров выбрали направления обхода и указали их на схеме пунктирной линией.

$$\text{Для контура I: } -R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = -E_1 + E_2,$$

$$\text{Для контура II: } R_3 I_3 - (R_4 + R_5) I_4 = E_4.$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа выбрали вторую форму записи.

Из этой системы четырёх уравнений найдём четыре неизвестных тока.

Для нахождения напряжения на источнике тока J_1 прежде всего необходимо на схеме обозначить стрелочкой и буквой искомое напряжение. Затем записать второй закон Кирхгофа (его вторую форму записи) для воображаемого контура. Таким образом, второй закон Кирхгофа годится и для «воображаемого» контура. При выбранном направлении обхода против часовой стрелки запишем:

$$U - R_1 I_1 - R_6 J_1 = -E_1.$$

Отсюда находим искомое напряжение:

$$U = -E_1 + R_1 I_1 + R_6 J_1.$$

Поставленная задача решена.

Здесь интересно отметить, что найденное напряжение U есть разность потенциалов между точкой 4 и точкой 0. Но ведь точка 4 не является узлом, так как источник тока по введённому определению не является ветвью.

Решим ещё одну задачу. Найдём ток $I_{кз} = I_5$ в соединительной линии («закоротке»). На практике часто возникает задача нахождения тока короткого замыкания. Как нам поступить? Прежде всего, надо обозначить искомый ток на схеме стрелочкой. Опыт подсказывает, что надо составить уравнение по первому закону Кирхгофа либо для точки 0, либо для точки 3. По определению соединительная линия не является ветвью, но, поставив стрелочку, мы, похоже, сделали её ветвью. Тогда для узла 0 (точки 0) запишем по первому закону Кирхгофа:

$$J_1 - I_1 - I_5 = 0.$$

Отсюда найдём ток в закоротке:

$$I_5 = J_1 - I_1.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ

Преобразование источников напряжения в источники тока и источников тока в источники напряжения является важным материалом при расчётах электрических цепей. Схему рис. 1.11 можно считать простейшей схемой преобразования источников. Это преобразование показано на рис. 1.15.

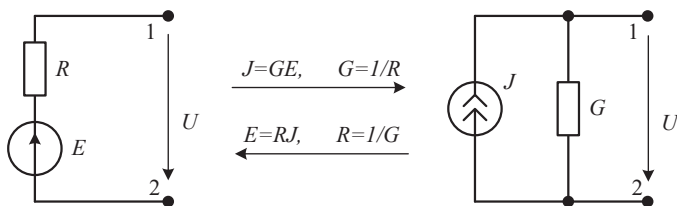


Рис. 1.15.

При таком эквивалентном преобразовании: напряжения на зажимах обеих схем одинаковы $U = U_{12}$; равны и входные сопротивления (проводимости).

Рассмотрим преобразования источников на примерах.

Пример 1.2. На рис. 1.16 представлена схема с источниками E_1 и J_3 .

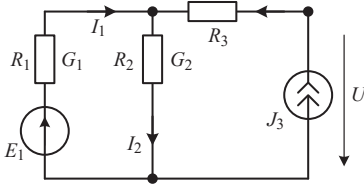


Рис. 1.16.

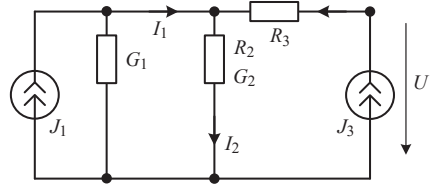


Рис. 1.17.

Требуется найти токи I_1 , I_2 и напряжение U на источнике тока J_3 , применяя различные варианты преобразования источников.

Решение. Вариант 1. Преобразуем источник напряжения E_1 с последовательно включённым сопротивлением R_1 в источник тока $J_1 = G_1 E_1$ с параллельно включённой проводимостью G_1 (сопротивлением R_1). Это преобразование показано на рис. 1.17.

По методу наложения токи от каждого из источников J_1 и J_3 равны:

$$I_1 = J_1 \frac{G_2}{G_1 + G_2} - J_3 \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} - J_3 \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$I_2 = J_1 \frac{G_2}{G_1 + G_2} + J_3 \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + J_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Результат проверим по первому закону Кирхгофа: $-I_1 + I_2 - J_3 = 0$.

Напряжение U на источнике тока J_3 найдём, применяя второй закон Кирхгофа для воображаемого контура с источником J_3 . Вспомним, что источник тока не является ветвью. Поэтому нет замкнутого контура с источником J_3 . Тогда, например, для правого воображаемого контура запишем:

$$U - R_2 I_2 - R_3 J_3 = 0.$$

Отсюда находим:

$$U = R_2 I_2 + R_3 J_3.$$

Вариант 2. Преобразуем источник тока J_3 в источник напряжения $E_2 = R_2 J_3$ и $E_3 = R_3 J_3$. Это преобразование показано на рис. 1.18.

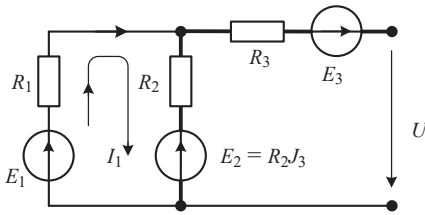


Рис. 1.18.

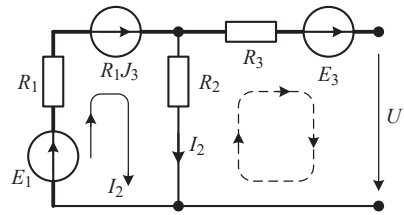


Рис. 1.19.

Чтобы лучше объяснить слушателю (курсанту), приведём правило:

«Пропускаем» ток источника тока J по любому замкнутому пути. Там, где он прошёл по сопротивлениям R_i и R_j , там оставил след — оставил после себя источники напряжения $E_i = R_i J$ и $E_j = R_j J$, направления которых соответствуют падениям напряжения на сопротивлениях.

В примере варианта 2 (рис. 1.18) источник J_3 «пропустили» через сопротивления R_2 и R_3 . В результате появились источники напряжения $E_2 = R_2 J_3$ и $E_3 = R_3 J_3$. Их направления (стрелочки) соответствуют падениям напряжения на этих сопротивлениях. «Соответствуют» не означает, что стрелочки E и U одинаково направлены (смотри определение источников напряжения).

Ветви с сопротивлениями R_2 и R_3 стали преобразованными. Находим сначала ток в непреобразованной ветви I_1 . Записав уравнение по второму закону Кирхгофа, найдем ток:

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{E_1 - R_2 J_3}{R_1 + R_2}.$$

Получили тот же результат.

Ток I_2 найдём, возвращаясь к исходной схеме (рис. 1.16). По первому закону Кирхгофа найдём $I_2 = I_1 + J_3$. Читатель может проверить, что получим тот же результат.

Напряжение U на источнике тока J_3 найдём, применяя второй закон Кирхгофа для воображаемого контура уже без источника J_3 . Например, для воображаемого внешнего контура, обходя по часовой стрелке, запишем:

$$U + R_1 I_1 = E_1 + E_3.$$

Отсюда находим

$$U = E_1 + E_3 - R_1 I_1.$$

Подставив в это выражение E_3 и I_1 , убедимся, что получим тот же результат.

Вариант 3. Преобразуем источник тока J_3 в источники напряжения $E = R_1 J_3$ и $E_3 = R_3 J_3$. Это преобразование показано на рис. 1.19.

Ветви с сопротивлениями R_1 и R_3 стали преобразованными. Находим сначала ток в преобразованной ветви I_2 . Записав уравнение по второму закону Кирхгофа, найдем ток:

$$I_2 = \frac{E_1 + E}{R_1 + R_2} = \frac{E_1 + R_1 J_3}{R_1 + R_2}.$$

Получили тот же результат.

Ток I_1 найдём, возвращаясь к исходной схеме (рис. 1.16). По первому закону Кирхгофа найдём $I_1 = I_2 - J_3$. Читатель может проверить, что получим тот же результат.

Напряжение U на источнике тока J_3 найдём, применяя второй закон Кирхгофа для воображаемого контура уже без источника J_3 . Например, для воображаемого правого контура, обходя по часовой стрелке, запишем:

$$U - R_2 I_2 = E_3.$$

Отсюда искомое напряжение равно:

$$U = R_2 I_2 + E_3.$$

В примере варианта 3 (рис. 1.19) источник J_3 «пропустили» через сопротивления R_1 и R_3 . В результате появились источники напряжения $E = R_1 J_3$ и $E_3 = R_3 J_3$.

Как видно из примеров, преобразование источника тока J в эквивалентные источники напряжения, возможны не только при параллельном соединении источника J с сопротивлением (проводимостью), но и при последовательном соединении с сопротивлением (см. схемы рис. 1.18 и 1.19).

1.2. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов следует из уравнений Кирхгофа при приведении их к числу уравнений равному числу независимых контуров K . Считается, что для расчёта режима сложной электрической цепи этим методом можно ограничиться совместным решением лишь этих полученных K уравнений [7]. Рассмотрим электрическую цепь, изображённую на рис. 1.20.

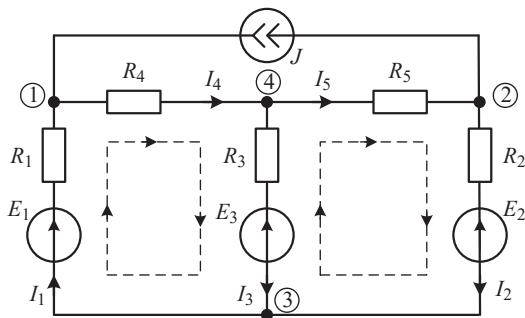


Рис. 1.20.

В этой схеме пять неизвестных токов в пяти ветвях. Следовательно, число уравнений по законам Кирхгофа, должно быть равно пяти. При всех источниках, равных нулю, хорошо видны два контура ($K = 2$). Таким образом, по второму закону Кирхгофа будем составлять два уравнения. Следовательно, по первому закону Кирхгофа должны составить оставшиеся три уравнения. Считаем число узлов ($Y = 4$). Верно.

$$\text{Для узла 1: } -I_1 - J + I_4 = 0, \quad (1.8)$$

$$\text{Для узла 2: } I_2 + J - I_5 = 0, \quad (1.9)$$

$$\text{Для узла 3: } I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (1.10)$$

$$\text{Для левого контура: } R_1 I_1 + R_4 I_4 + R_3 I_3 = E_1 - E_3, \quad (1.11)$$

$$\text{Для правого контура: } R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_5 I_5 = E_2 + E_3. \quad (1.12)$$

Направления обхода в обоих контурах выбрано произвольно, например, по часовой стрелке.

Для приведения системы пяти уравнений к системе двух уравнений ($K = 2$) мы должны исключить три тока из пяти неизвестных токов. Выбор этих исключаемых токов зависит от того, какие два тока нам необходимо найти, а

какие три не обязательно находить. Пусть необходимо найти токи I_1 и I_2 . Тогда из системы уравнений Кирхгофа будем исключать токи I_3 , I_4 и I_5 .

Эту алгебраическую процедуру исключения трёх токов приводить не будем.

Запишем сразу, что в результате получим. Исключая в уравнении (1.11) токи I_3 и I_4 , получим:

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_1 - R_3I_2 + R_4J = E_1 - E_3. \quad (1.13)$$

Исключая в уравнении (1.12) токи I_3 и I_5 , получим:

$$(R_2 + R_3 + R_5)I_2 - R_3I_1 + R_5J = E_2 + E_3. \quad (1.14)$$

Получив два уравнения с двумя искомыми неизвестными реальными токами I_1 и I_2 , назвали их контурными (нереальными токами контуров) увидев, что они умножаются на суммы сопротивлений соответствующих контуров и обозначили их соответственно:

$I_1 = I_{1К}$ – контурный ток первого контура. Он умножается на сумму сопротивлений первого контура $(R_1 + R_3 + R_4)$.

$I_2 = I_{2К}$ – контурный ток второго контура. Он умножается на сумму сопротивлений второго контура $(R_2 + R_3 + R_5)$.

Перепишем эти уравнения (1.13) и (1.14) с новыми обозначениями, переноса свободные члены R_4J и R_5J в правые части уравнений:

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_{1К} - R_3I_{2К} = E_1 - E_3 - R_4J, \quad (1.15)$$

$$-R_3I_{1К} + (R_2 + R_3 + R_5)I_{2К} = E_2 + E_3 - R_5J. \quad (1.16)$$

Переноса слагаемые R_4J и R_5J в правые части уравнений, мы тем самым провели эквивалентное преобразование источников: $R_4J = E_4$ и $R_5J = E_5$.

Тогда правая часть уравнений будет иметь единую форму записи, и этим уравнениям будет соответствовать схема, представленная на рис. 1.21.

В этой схеме ветви 4 и 5 – преобразованные ветви. В них протекают реальные токи: I_1 в ветви 4 и I_2 в ветви 5.

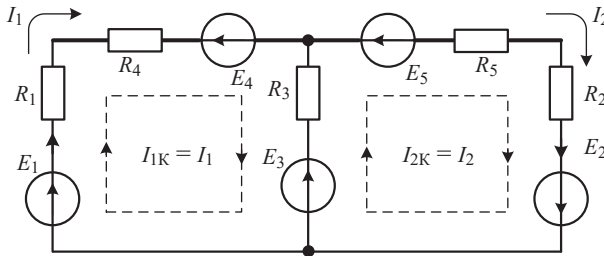


Рис. 1.21.

Итак, задача расчёта двух токов по двум уравнениям решена. Если необходимо найти все пять реальных токов во всех ветвях, то нам понадобятся ещё

три уравнения. И этими уравнениями и будут три уравнения по первому закону Кирхгофа. Вернёмся к ним снова.

Из уравнения (1.8) найдём ток I_4 : $I_4 = I_1 + J = I_{1K} + J$.

Из уравнения (1.9) найдём ток $I_5 = I_2 + J = I_{2K} + J$.

Из уравнения (1.10) найдём ток $I_3 = I_1 - I_2 = I_{1K} - I_{2K}$.

Уравнения (1.15) и (1.16) сокращённо называют «контурными уравнениями». Запишем их в компактной матричной форме записи.

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1K} \\ I_{2K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - E_3 - E_4 \\ E_2 + E_3 - E_5 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

В уравнении (1.17)

$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{pmatrix}$ – симметричная относительно главной

диагонали квадратная матрица контурных сопротивлений.

Элемент первого столбца и первой строки

$R_{11} = R_1 + R_3 + R_4$ – сумма сопротивлений первого контура – *собственное сопротивление первого контура*.

Элемент второго столбца и второй строки

$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5$ – сумма сопротивлений второго контура – *собственное сопротивление второго контура*.

Элементы вне главной диагонали

$R_{12} = R_{21} = -R_3$ – *общее сопротивление двух контуров*. Со знаком «-», так как контурные токи в этом общем сопротивлении R_3 направлены в разные стороны.

В правой части уравнения

$\begin{pmatrix} E_1 - E_3 - E_4 \\ E_2 + E_3 - E_5 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец *контурных источников* – источников

напряжения в контуре. Записываются со знаком «+», если источник (его стрелочка) направлен по направлению контурного тока и записывается со знаком «-», если направление источника (его стрелочка) и направление контурного тока противоположны.

Контурный ток первого контура I_{1K} равен расчётному (реальному) току I_1 в непреобразованной ветви.

Контурный ток второго контура I_{2K} равен расчётному (реальному) току I_2 в непреобразованной ветви.

Контурный определитель

$$\Delta^{(K)} = (R_1 + R_3 + R_4)(R_2 + R_3 + R_5) - R_3^2 = R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_5 + R_3R_2 + R_3R_5 + R_4R_2 + R_4R_3 + R_4R_5.$$

Пример 1.3. Для схемы рис. 1.20 (той же исходной схемы) требуется составить контурные уравнения для нахождения реальных токов I_4 и I_5 .

Решение. Преобразуем схему рис. 1.20 так, чтобы не преобразованными остались ветви, по которым протекают токи I_4 и I_5 . Эта схема приведена на

рис. 1.22. В этой схеме в преобразованных ветвях с сопротивлениями R_1 и R_2 появились источники напряжения R_1J и R_2J .

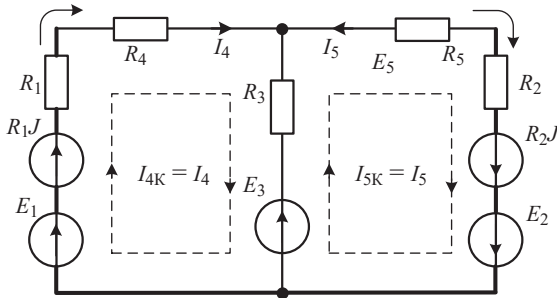


Рис. 1.22.

Запишем контурные уравнения сразу в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{4K} \\ I_{5K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - E_3 + R_1J \\ E_2 + E_3 + R_2J \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Левая часть уравнения (1.18) – матрица контурных сопротивлений, осталась прежней, такой же, как и в уравнении (1.17). Так и должно быть, так как при источниках, равных нулю, схема не изменилась. Контурный определитель не изменился.

Контурный ток первого контура I_{4K} равен расчётному (реальному) току I_4 в непреобразованной ветви.

Контурный ток второго контура I_{5K} равен расчётному (реальному) току I_5 в непреобразованной ветви.

Если потребуется найти остальные токи I_1 , I_2 и I_3 , то применим уравнения по первому закону Кирхгофа.

На рассмотренных двух примерах показано, что, по существу, контурные токи есть реальные токи в непреобразованных и не в смежных ветвях. Для них составляются контурные уравнения. Для нахождения остальных токов применяется первый закон Кирхгофа.

В общем виде для любого числа контуров матричное уравнение метода контурных токов имеет вид:

$$(\mathbf{R})(\mathbf{I}) = (\mathbf{E}). \quad (1.19)$$

В этом уравнении:

(\mathbf{R}) – симметричная относительно главной диагонали матрица контурных сопротивлений,

(\mathbf{I}) – матрица-столбец контурных токов – реальных токов в непреобразованных и не в смежных ветвях,

(E) – матрица-столбец контурных источников напряжения вместе с преобразованными источниками.

Большая заслуга *контурных уравнений* в том, что контурные уравнения высветили *контурный определитель*. Контурные уравнения дали имя этому важному определителю – «контурный», выраженный через сопротивления определитель.

Перепишем полученный контурный определитель нашей задачи, расставляя его слагаемые с индексами сопротивлений, образующих строгую сочетательную закономерность. Запишем также и отсутствующие (нулевые) слагаемые.

$$\Delta^{(к)} = R_1R_2 + R_1R_3 + 0_{14} + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_4 + 0_{25} + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5$$

Оставим пока такую запись определителя без комментариев. Вернёмся к ней во втором разделе.

Как увидим в дальнейшем, *нулевые слагаемые* несут в себе важную информацию и поэтому важны не только в определителях алгебраических уравнений, но и в дифференциальных уравнениях.

МЕТОД УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Считается, что число уравнений, подлежащих решению, можно сократить, если пользоваться методом узловых напряжений (потенциалов) [8]. В литературе этот метод называют либо методом узловых напряжений [3], либо методом узловых потенциалов [7, 8]. Сущность этого метода и физику лучше отражает название «метод узловых напряжений».

Метод узловых напряжений может быть получен применением первого закона Кирхгофа и закона Ома. Получим уравнения метода узловых напряжений на примере электрической цепи, приведённой на рис. 1.23.

Пример 1.4. В схеме даны все источники и известны все сопротивления (проводимости). Требуется найти все токи по методу узловых напряжений.

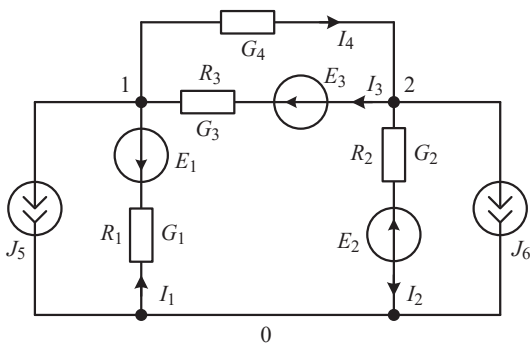


Рис. 1.23.

Решение. В данной схеме число неизвестных токов в ветвях – четыре. Считаем число узлов. Число узлов равно трём ($U - 1 = 2$).

Выбираем один из узлов схемы за базовый и обозначаем его индексом «0».

Потенциал этого базового узла в методе, названном методом узловых потенциалов, принимается равным нулю ($\varphi_0 = 0$). В методе, названном методом узловых напряжений φ_0 не обязательно должен быть равным нулю, так как речь идёт о разности потенциалов.

Для оставшихся узлов записываем уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\text{Для узла 1: } -I_1 - I_3 + I_4 + J_5 = 0, \quad (1.20)$$

$$\text{Для узла 2: } I_2 + I_3 - I_4 - J_6 = 0. \quad (1.21)$$

По закону Ома для участка цепи с ЭДС запишем для искомым четырёх токов:

$$I_1 = (\varphi_0 - \varphi_1 - E_1)G_1 = (-U_{10} - E_1)G_1, \quad (1.22)$$

$$I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0 - E_2)G_2 = (U_{20} - E_2)G_2, \quad (1.23)$$

$$I_3 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_3)G_3 = (U_{20} - U_{10} + E_3)G_3, \quad (1.24)$$

$$I_4 = (\varphi_1 - \varphi_2)G_4 = (U_{10} - U_{20})G_4. \quad (1.25)$$

Здесь напряжения U_{10} и U_{20} есть разности потенциалов, соответствующих узлов относительно базовой точки «0». Эти напряжения названы узловыми напряжениями.

Подставляя выражения (1.22), (1.23), (1.24) и (1.25) в уравнения (1.20) и (1.21) и группируя слагаемые при одинаковых узловых напряжений, получим:

$$(G_1 + G_3 + G_4)U_{10} - (G_3 + G_4)U_{20} = -E_1G_1 + E_3G_3 - J_5, \quad (1.26)$$

$$-(G_3 + G_4)U_{10} + (G_2 + G_3 + G_4)U_{20} = E_2G_2 - E_3G_3 + J_6. \quad (1.27)$$

Полученные уравнения есть уравнения метода узловых напряжений, составление которых имеет закономерность. Чтобы лучше понять эту закономерность, приведём слагаемые правой части уравнений к единой форме записи. Произведения ЭДС на проводимости соответствующих ветвей есть эквивалентное преобразование источников. Обозначим их:

$$J_1 = E_1G_1, \quad J_2 = E_2G_2 \quad \text{и} \quad J_3 = E_3G_3.$$

С преобразованными источниками напряжения в эквивалентные источники тока уравнения узловых напряжений принимает вид:

$$(G_1 + G_3 + G_4)U_{10} - (G_3 + G_4)U_{20} = -J_1 + J_3 - J_5, \quad (1.28)$$

$$-(G_3 + G_4)U_{10} + (G_2 + G_3 + G_4)U_{20} = J_2 - J_3 + J_6. \quad (1.29)$$

В компактной матричной форме записи уравнения узловых напряжений:

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + G_4 & -(G_3 + G_4) \\ -(G_3 + G_4) & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_1 + J_3 + J_5 \\ J_2 - J_3 + J_6 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Этим уравнениям соответствует схема, представленная на рис. 1.24.

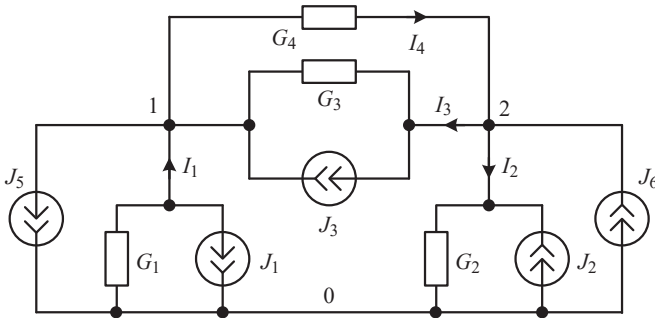


Рис. 1.24.

В этой схеме ветви 1, 2 и 3 – преобразованные ветви.

В уравнении (1.30):

$\begin{pmatrix} G_1 + G_3 + R_4 & -(G_3 + G_4) \\ -(G_3 + G_4) & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix}$ – симметричная относительно главной

диагонали квадратная матрица узловых проводимостей.

Элемент первого столбца и первой строки

$G_{11} = G_1 + G_3 + G_4$ – сумма проводимостей ветвей, присоединённых к первому узлу – *собственная узловая проводимость первого узла*.

Элемент второго столбца и второй строки

$G_{22} = G_2 + G_3 + G_4$ – сумма проводимостей ветвей, присоединённых ко второму узлу – *собственная узловая проводимость второго узла*.

Элементы вне главной диагонали

$G_{12} = G_{21} = -(G_3 + G_4)$ – *общая узловая проводимость узлов 1 и 2* – сумма проводимостей ветвей, соединяющих эти два узла. Всегда со знаком «-». По методу узловых напряжений все элементы вне главной диагонали записываются со знаком «-».

В правой части уравнений

$\begin{pmatrix} -J_1 + J_3 + J_5 \\ J_2 - J_3 + J_6 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец *узловых источников* – источников

тока, присоединённых к соответствующему узлу. Записывается со знаком «+», если источник (его стрелочка) направлен к узлу и записывается со знаком «-», если источник (его стрелочка) направлен от узла.

Решив эту систему уравнений (1.29), найдём два узловых напряжения U_{10} и U_{20} . Нахождение этих напряжений является промежуточным этапом при решении задачи. Эти уравнения нам нужны для дальнейшего нахождения всех токов. Все токи найдём с помощью четырёх уравнений (1.22), (1.23), (1.24) и (1.25).

Итак, для решения задачи нахождения всех токов решать надо два уравнения по методу узловых напряжений и ещё четыре уравнения, составленные

по закону Ома. Итого получим систему из шести уравнений. Задача нахождения токов по уравнениям Кирхгофа решается с помощью четырёх уравнений.

Большая заслуга *узловых уравнений* в том, что узловые уравнения высветили *узловой определитель*. Узловые уравнения дали имя этому важному определителю – «узловой», выраженный через проводимости определитель.

Узловой определитель $\Delta^{(y)}$ равен:

$$\Delta^{(y)} = (G_1 + G_3 + G_4)(G_2 + G_3 + G_4) - (G_3 + G_4)^2 = G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_4 + G_3G_2 + G_3^2 + G_3G_4 + G_4G_2 + G_4G_3 + G_4^2 - (G_3 + G_4)^2 = G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_4 + G_3G_2 + G_4G_2.$$

Перепишем полученный узловой определитель, расставляя его слагаемые с индексами проводимостей, образующих строгую сочетательную закономерность. Запишем также и отсутствующие (нулевые) слагаемые.

$$\Delta^{(y)} = G_1G_2 + G_1G_3 + G_1G_4 + G_2G_3 + G_2G_4 + 0_{34}.$$

Оставим пока такую запись определителя с нулевым слагаемым без комментариев. Вернёмся к ней во втором разделе.

В общем виде для любого числа узлов матричное уравнение метода узловых напряжений имеет вид:

$$\mathbf{(G)}(\mathbf{U}) = \mathbf{(J)}. \quad (1.31)$$

В этом уравнении:

$\mathbf{(G)}$ – симметричная относительно главной диагонали матрица узловых проводимостей,

$\mathbf{(U)}$ – матрица-столбец узловых напряжений,

$\mathbf{(J)}$ – матрица-столбец узловых источников вместе с преобразованными источниками.

МЕТОД ДВУХ УЗЛОВ

Метод двух узлов является частным случаем метода узловых напряжений. Метод двух узлов применяется для схем, имеющих всего два узла. Рассмотрим метод на примере.

Пример 1.5. На рис. 1.25 приведена схема, для которой требуется найти напряжение U_{21} (разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$) между двумя имеющимися узлами. Даны все источники и известны все сопротивления (проводимости).

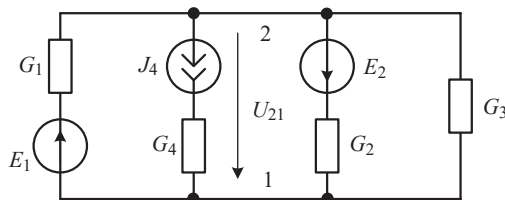


Рис. 1.25.

Решение. По методу двух узлов ответ записывается сразу и дробью:

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sum J}{\sum G} = \frac{J_1 - J_2 - J_4}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2 - J_4}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (1.32)$$

Здесь: $J_1 = E_1 G_1$, $J_2 = E_2 G_2$ – преобразованные источники.

РАСШИРЕННЫЕ УЗЛОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Одни учёные сто с лишним лет назад пытались уменьшить число уравнений. И правильно делали. Другие современные учёные специально их расширяют.

Рассмотрим метод расширенных узловых уравнений и цель, которая ставится при их составлении.

При составлении *расширенных узловых уравнений* вводят понятие *обобщённой ветви* – двухполюсника вида, приведённого на рис. 1.26.

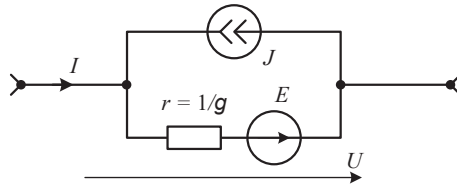


Рис. 1.26.

При этом все ветви схемы разделяются на два подмножества: g -ветви и r -ветви (рис. 1.27 и 1.28), которые являются частными случаями обобщённой ветви рис. 1.26.

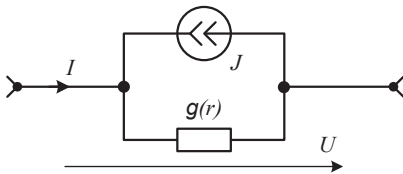


Рис. 1.27.

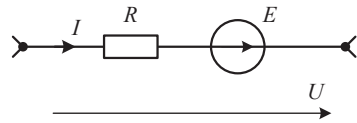


Рис. 1.28.

Ветвь с идеальным источником тока следует считать g -ветвью, у которой проводимость $g = 0$ (рис. 1.29). Ветвь с идеальным источником ЭДС следует считать r -ветвью (рис. 1.30), у которой $r = 0$ [10, стр. 37]. По какому-то недоразумению авторы учебника требуют от нас называть ветви *по отсутствующему элементу* (проводимости, сопротивлению).

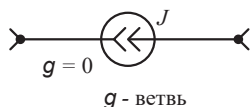


Рис. 1.29.

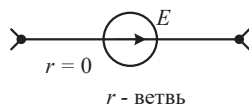


Рис. 1.30.

В общей форме записи матричное расширенное узловое уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}^{(Y)} & \mathbf{A}_r \\ -\mathbf{A}_r^T & \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{I}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(Y)} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

В этом уравнении:

$\mathbf{g}^{(Y)}$ – узловая матрица проводимостей, но не всех ветвей, а только g - ветвей;

\mathbf{A}_r – матрица соединений r - ветвей;

\mathbf{A}_r^T – транспонированная матрица соединений r - ветвей;

\mathbf{r} – диагональная матрица сопротивлений r - ветвей;

$\mathbf{J}^{(Y)}$ – матрица-столбец узловых источников – источников тока;

\mathbf{E} – матрица-столбец ЭДС r - ветвей.

В этой формуле (1.33) за этими матрицами спрятана физика.

Пример 1.6. Приведём пример 1.6 из учебника [10]. На рис. 1.31 приведена схема, для которой требуется составить матричное уравнение методом расширенных узловых уравнений при заданных параметрах схемы: $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $r_3 = 3$ Ом, $E_4 = 4$ В, $J_1 = 4$ А.

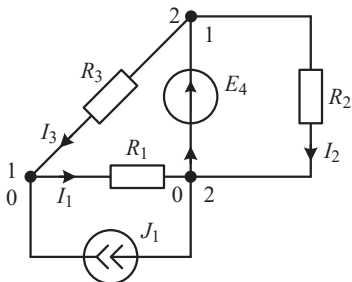


Рис. 1.31.

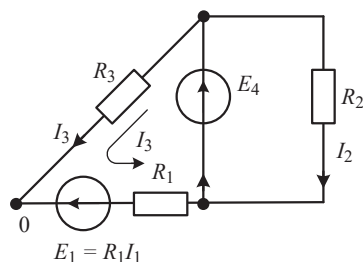


Рис. 1.32.

Решение. Схема состоит из трёх g - ветвей и одной r - ветви с источником напряжения E_4 . По методу расширенных узловых уравнений составляется матричное уравнение третьего порядка, расширенное для нахождения не только двух потенциалов, но и тока I_4 в r - ветви с источником напряжения E_4 :

$$\begin{pmatrix} g_2 + g_3 & -g_2 & -1 \\ -g_2 & g_1 + g_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -J_1 \\ E_4 \end{pmatrix}.$$

По расширенному уравнению определяются потенциалы узлов φ_1 и φ_2 и ток I_4 . Решая это уравнение, находим: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -4$ и $I_4 = 2$ А.

Здесь отметим, что традиционно при решении задач потенциалы нужны для нахождения токов ветвей. В нашем примере остались неизвестными токи в трёх ветвях 1, 2 и 3. Для нахождения оставшихся трёх токов I_1 , I_2 , I_3 необходимо составить ещё три уравнения. Итого, для нахождения четырёх токов, методом расширенных узловых уравнений необходимо составить и решить шесть уравнений.

Там, где одна математика (смотри названия элементов матричного уравнения) и запрятана физика, ничего хорошего ожидать не приходится (смотри число уравнений).

Решим эту же задачу, составляя уравнения по законам Кирхгофа и методом контурных токов.

Решение 1. Схема (рис. 1.31) имеет три узла и два контура для составления уравнений по законам Кирхгофа. Запишем четыре уравнения по законам Кирхгофа. Для узлов запишем:

$$\text{для узла } 0 : I_1 - I_3 - J_1 = 0,$$

$$\text{для узла } 1 : I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

$$\text{Для левого контура: } R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_4,$$

$$\text{для правого контура: } R_2 I_2 = E_4.$$

Из этой системы уравнений находим все четыре тока:

$$I_1 = \frac{E_4}{R_1 + R_3} + J_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3}.$$

Решение для тока I_1 проверяется (хорошо видно) по методу наложения – наложение частичных токов от каждого из двух источников. Из последнего уравнения в системе уравнений:

$$I_2 = E_4 / R_2.$$

Здесь скажем, что можно было остановиться, составив систему четырёх уравнений с четырьмя искомыми токами. Но уж очень хочется их решить таким подстановочным способом, как обычно решают задачи студенты. Поэтому продолжим. Ток I_3 находится из любого из первых трёх уравнений.

$$I_3 = I_1 - J_1 = \frac{E_4}{R_1 + R_3} - J_1 \frac{R_1}{R_1 + R_3}.$$

И, наконец, последний ток I_4 из второго уравнения равен:

$$I_4 = I_2 + I_3.$$

Решение 2. Решим задачу нахождения всех токов методом контурных токов. Сначала преобразуем источник тока в эквивалентный источник напряжения. Эта схема с преобразованной ветвью 1 представлена на рис. 1.32. Запишем два уравнения по числу двух независимых контуров. Здесь же отметим, что ветвь с источником E_4 , не является той общей ветвью, о которой говорилось в методе. Она не содержит общего сопротивления. Для левого контура запишем:

$$(R_1 + R_3)I_3 = E_4 - E_1 = E_4 - R_1J_1.$$

Отсюда находим ток в преобразованной ветви I_3 :

$$I_3 = \frac{E_4 - R_1J_1}{(R_1 + R_3)}.$$

Получили тот же результат.

Для правого контура:

$$R_2I_2 = E_4.$$

Отсюда находим ток

$$I_2 = E_4/R_2.$$

Токи I_1 и I_4 найдём по первому закону Кирхгофа. Итак, число уравнений по методу контурных токов было составлено два, не считая уравнений по первому закону Кирхгофа.

Пример 1.7. На рис. 1.33. представлена схема с двумя -ветвями с источниками E_5 и E_6 . Требуется записать для этой схемы узловые уравнения и найти определитель.

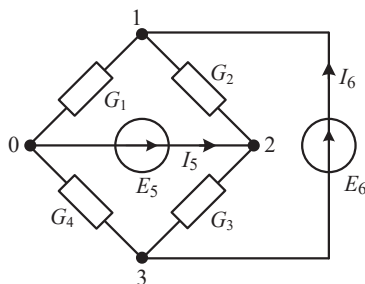


Рис. 1.33.

Решение. Для этой схемы узловые уравнения будем расширять. Для этого введём в уравнения два тока I_5 в r -ветви с источником E_5 и I_6 в r -ветви с источником E_6 . Направления этих токов необходимо выбрать в направлении стрелочек источников. В противном случае в формуле (1.33)

транспонированная матрица соединений r -ветвей A_r^T будет положительная (без знака «-»).

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 & -1 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_5 \\ E_6 \end{pmatrix}.$$

Получили матричное расширенное узловое уравнение, в котором матрица коэффициентов при матрице искомым переменных имеет размер 5×5 . Здесь узловой определитель запрятан так, что понадобится значительное время для его нахождения. Тем не менее, проделаем все математические выкладки для его нахождения. В результате получим:

$$\Delta^{(y)} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4.$$

Найденный определитель говорит нам, что схема содержит всего два узла и должна описываться ОДНИМ уравнением, а не пятью уравнениями. Современные методы расчёта электрических цепей вместе с расширенными узловыми уравнениями говорят нам о том, что пока нет таких методов, с помощью которых можно, например, для этой схемы, записать одно уравнение. Записать одно уравнение с наглядно выраженным, а не запрятанным в матрицах и подматрицах определителем.

ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ИСТОЧНИКЕ (АКТИВНОМ ДВУХПОЛЮСНИКЕ)

Этот метод расчета имеет название = теорема Гельмгольца-Тевенена. Он широко применяется в электротехнике и является (заслуженно) одним из основных методов расчёта. Метод применяется в случае, когда требуется рассчитать ток *только в одной* какой-либо ветви электрической цепи. Расчёт состоит из трёх этапов.

Первый этап. Ветвь с искомым током I выделяется из рассматриваемой схемы. Оставшаяся часть схемы представляется активным двухполюсником (рис. 1.34).

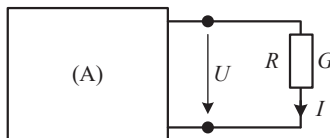


Рис. 1.34.

Второй этап. Активный двухполюсник может быть представлен двумя эквивалентными схемами замещения (смотри схемы эквивалентного преобразования источников):

- последовательной схемой замещения, представленной на рис. 1.35 (схемой Тевенена) с параметрами: $E_{\text{Э}}$ и $r_{\text{Э}}$;
- параллельной схемой замещения, представленной на рис. 1.36 (схемой Норттона) с параметрами: $J_{\text{Э}}$ и $g_{\text{Э}}$.

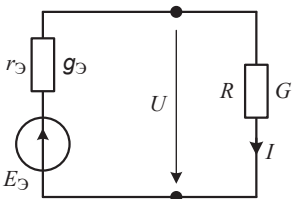


Рис. 1.35.

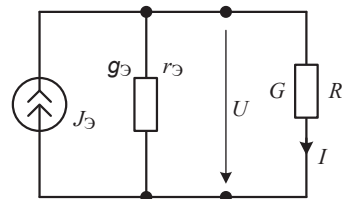


Рис. 1.36.

Приведём для этих схем расчётные формулы:

Для последовательной схемы (рис. 1.35):

$$I = \frac{E_{\text{Э}}}{r_{\text{Э}} + R}; \quad U = \frac{RE_{\text{Э}}}{r_{\text{Э}} + R}. \quad (1.34)$$

Для параллельной схемы (рис. 1.36):

$$I = J_{\text{Э}} \frac{G}{g_{\text{Э}} + G}; \quad U = RI = J_{\text{Э}} \frac{1}{g_{\text{Э}} + G}. \quad (1.35)$$

Третий этап. Нахождение параметров схем замещения.

На рисунках 1.37, 1.38, 1.39 и 1.40 приведены схемы определения параметров схем замещения.

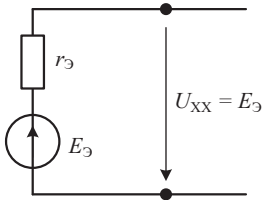


Рис. 1.37

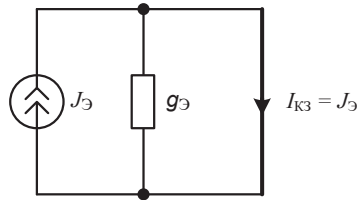


Рис. 1.38.

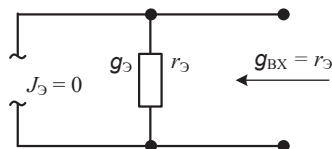
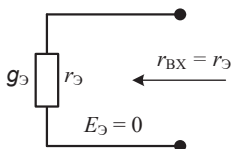


Рис. 1.39.

Рис. 1.40.

Тут же возникает вопрос: когда и какую из схем замещения применять? Применение либо последовательной, либо параллельной схемы замещения зависит от конфигурации схемы и от того, в каком месте (на каком сопротивлении) требуется найти ток. Приведём два примера.

Пример 1.8. В схеме рис. 1.41 требуется найти ток в сопротивлении R_1

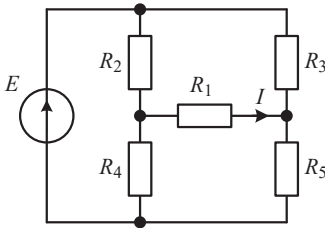


Рис. 1.41.

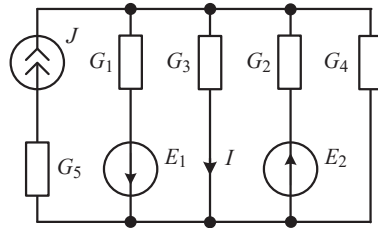


Рис. 1.42.

Решение. Глядя на схему, видим, что задача решается проще, если сопротивление R_1 разомкнуть. Для этой схемы применим первую схему замещения активного двухполюсника. Найдём её параметры $U_{\text{хх}} = E_3$ и $r_{\text{вх}} = r_3$. По расчётной формуле (1.34) определим ток и напряжение.

Пример 1.9. В схеме рис. 1.42 требуется найти ток в сопротивлении R_3 .

Решение. В этой схеме задача решается проще, если замкнуть ветвь с сопротивлением R_3 . Для этой схемы применим вторую схему замещения и найдём её параметры $I_{\text{кз}} = J_3$ и $g_{\text{вх}} = g_3$. Ток короткого замыкания $I_{\text{кз}}$ найдём по методу наложения от каждого из источников в коротке

$$I_{\text{кз}} = J - E_1 G_1 + E_2 G_2.$$

Входная проводимость

$$g_{\text{вх}} = G_1 + G_2 + G_4.$$

По расчётной формуле (1.35) определим ток и напряжение.

Приведённые методы контурных токов, узловых напряжений и метод активного двухполюсника отражают физику. Для этого достаточно посмотреть на их матричные уравнения. Их внешний вид – закон Ома:

Контурное уравнение:

$$(\mathbf{R})(\mathbf{I}) = (\mathbf{E}), \tag{1.16}$$

Узловое уравнение:

$$(\mathbf{G})(\mathbf{U}) = (\mathbf{J}). \quad (1.31)$$

В них заложена и математика и хорошо видна физика.

2. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

2.1. ГЛАВНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ. НАЧАЛЬНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.

ГЛАВНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Понятие «определитель» («детерминант») возникло тогда, когда появились уравнения (системы уравнений) и прежде всего в математике при решении систем уравнений. В электротехнике при составлении и решении уравнений по методам контурных токов и узловых напряжений приходится иметь дело с определителями, выраженными через сопротивления (контурными определителями) и определителями, выраженными через проводимости (узловыми определителями). И с возникновением науки электротехники (на стыке двух наук математики и физики) учёные стремились записать эти главные определители – контурные и узловые, не составляя систем контурных и узловых уравнений.

До сих пор этот вопрос является актуальным. Многое ещё не познано и предстоит сделать в электротехнике и, в частности, в решении задачи нахождения не только определителя, но и записи в символьной форме самого решения.

Вернёмся к схемам первого раздела (рис. 1.20 и рис. 1.23) и нарисуем их при источниках напряжения и тока, равных нулю. Они представлены на рис. 2.1 и рис. 2.2.

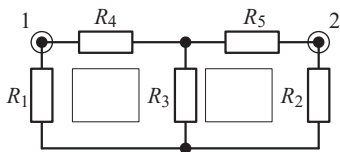


Рис. 2.1.

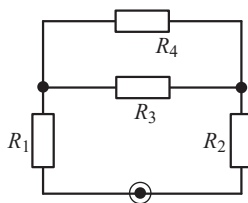


Рис. 2.2.

Начнём со схемы рис. 2.1. Для этой схемы был получен контурный определитель, слагаемые которого были упорядочены:

$$\Delta^{(к)} = R_1 R_2 + R_1 R_3 + 0_{14} + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + \\ + 0_{25} + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5$$

В этом определителе слагаемые были расставлены в соответствии с их индексами сопротивлений так, чтобы была видна сочетательная

закономерность, заложенная в определителе. В этой сочетательной математической упорядоченности стало видно, какие сочетания сопротивлений в определителе отсутствуют. В определителе отсутствуют два слагаемых (нулевые слагаемые) R_1R_4 и R_2R_5 ($R_1R_4 = 0_{14}$ и $R_2R_5 = 0_{25}$).

Попробуем объяснить отсутствие этих произведений сопротивлений.

Если каждому полюсу сопротивления дать по узлу и эти узлы отметить на схеме, то видно, что при размыкании сопротивлений R_1 и R_4 образуется изолированный левый узел 1. При размыкании сопротивлений R_2 и R_5 образуется изолированный правый узел 2.

Таким образом, отсутствие этих слагаемых может быть объяснено тем, что электрическая цепь не терпит изолирования её узлов и элементов.

Применим теперь к контурному определителю известную формулу перехода от контурного определителя к узловому определителю [8]. Для этого умножим наш контурный с упорядоченными слагаемыми определитель на произведение всех проводимостей схемы. В результате получим:

$$\Delta^{(y)} = \Delta^{(k)} \prod_{k=1}^B G_k = \Delta^{(k)} G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 = G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4 + G_1 G_2 G_5 + 0_{134} + G_1 G_3 G_5 + G_1 G_4 G_5 + G_2 G_3 G_4 + 0_{235} + G_2 G_4 G_5 + G_3 G_4 G_5.$$

Благодаря этой упорядоченности в узловом определителе слагаемые тоже стали упорядочены – индексы проводимостей образуют сочетания из пяти элементов по три. В этой сумме упорядоченных слагаемых отсутствуют два слагаемых с произведениями проводимостей:

$$G_1 G_3 G_4 = 0_{134} \text{ и } G_2 G_3 G_5 = 0_{235}.$$

Попробуем объяснить отсутствие этих произведений проводимостей. Смотрим на схему и видим, что при коротком замыкании проводимостей G_1, G_3 , и G_4 образуется левый короткозамкнутый контур. При коротком замыкании проводимостей G_2, G_3 , и G_5 образуется правый короткозамкнутый контур. Отсутствие этих слагаемых может быть объяснено тем, что электрическая цепь не терпит короткозамкнутых контуров.

Для подтверждения этих особенностей электрических цепей рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис. 2.2. Для этой схемы был получен узловый определитель, и его слагаемые были упорядочены:

$$\Delta^{(y)} = G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_1 G_4 + G_2 G_3 + G_2 G_4 + 0_{34}.$$

В этом определителе слагаемые были расставлены с индексами проводимостей, образующими строгую сочетательную закономерность.

В этой сумме упорядоченных слагаемых отсутствует слагаемое с произведением проводимостей $G_3 G_4$ (определитель имеет нулевое слагаемое $G_3 G_4 = 0_{34}$). Смотрим на схему и видим ту же картину: при коротком замыкании проводимостей G_3 и G_4 образуется верхний короткозамкнутый контур.

Применим теперь к узловому определителю известную формулу перехода от узлового определителя к контурному определителю [11]. Для этого

умножим наш узловой с упорядоченными слагаемыми определитель на произведение всех сопротивлений схемы. В результате получим:

$$\Delta^{(K)} = \Delta^{(y)} \prod_{k=1}^B R_k = \Delta^{(y)} R_1 R_2 R_3 R_4 = \\ = 0_{12} + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_2 R_4 + + R_3 R_4.$$

Благодаря этой упорядоченности в контурном определителе слагаемые тоже стали упорядочены – индексы сопротивлений образуют сочетания из четырёх элементов по два. В этой сумме упорядоченных слагаемых отсутствует слагаемое с произведением сопротивлений $R_1 R_2$ (определитель имеет нулевое слагаемое $R_1 R_2 = 0_{12}$). Смотрим на схему и видим, что размыкание этих сопротивлений даёт нижний изолированный узел. И в этом случае имеем подтверждение двух важнейших особенностей электрических цепей:

- электрическая цепь не терпит изолирования её узлов и элементов;
- электрическая цепь не терпит короткозамкнутых контуров.

Знание этих особенностей позволят нам в дальнейшем записывать контурные и узловые определители, не составляя систем уравнений. В этом нам будет помогать математика и сама схема с размеченными узлами.

Теперь надо убедиться, известна ли эта особенность электрических цепей. Для этого обратимся к учебникам по электротехнике. Во всех приведённых учебниках (в рекомендуемой литературе) можно найти запись определителей, слагаемые которых не упорядочены в соответствии с сочетательной закономерностью. Ни в одном учебнике не говорится об отсутствующих (нулевых) слагаемых.

Но, может быть, всё-таки есть такой учебник, где об этом сказано? Поэтому обратим особое внимание на учебник по теоретической электротехнике [8], удостоенный государственной премии.

Для нахождения (записи) решения передаточной функции, её числителя и знаменателя (определителя) без составления систем уравнений были разработаны топологические методы. Были введены понятия графа электрической цепи, понятия деревьев и ветвей связи графа.

Известна топологическая формула для расчёта определителя матрицы узловых проводимостей. Согласно этой формуле, узловой определитель $\Delta^{(y)}$ равен сумме произведений проводимостей ветвей всех деревьев схемы [11, стр. 223]. Формула в учебнике приведена под номером (8.1):

$$\Delta^{(y)} = \sum_{i=1}^{n_d} Y_{j_1} Y_{j_2} \dots Y_{j_{(y-1)}} \quad (2.1)$$

В этой формуле:

$Y_{j_1} Y_{j_2} \dots Y_{j_{(y-1)}}$ – произведение ветвей j дерева;

n_d – число всех возможных деревьев схемы.

Выражение (2.1), говорится в учебнике [11], представляет собой топологическую формулу расчёта узлового определителя. Но авторы не делятся с

читателем, как применяется эта расчётная формула. Приводят пример схемы (рис. 8.1,а в учебнике). Для приведённой схемы записан определитель в соответствии с приведённой формулой (2.1):

$$\Delta^{(y)} = Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_2 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_4 Y_6 + Y_1 Y_2 Y_5 + Y_1 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_5 Y_6 + Y_2 Y_3 Y_6 + Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_5 Y_6 + Y_2 Y_4 Y_5 + Y_3 Y_4 Y_6 + Y_3 Y_4 Y_5 + Y_3 Y_5 Y_6 + Y_4 Y_5 \quad (2.2)$$

Хорошо видно, что слагаемые произведений проводимостей расставлены в беспорядке. Можно только догадываться, как авторы нашли все деревья схемы. Этот беспорядок говорит о том, что авторам учебника неизвестны особенности определителей электрических цепей, о которых говорилось выше. О своём правиле они не рассказывают.

Решим обратную задачу, используя важнейшие особенности электрических цепей, о которых было сказано выше.

Пример 2.1. Задан узловой определитель (2.2). Требуется по этому определителю нарисовать схему, для которой он записан.

Решение. Начнём с того, что расставим все слагаемые определителя по порядку – в строгой сочетательной последовательности. Не забудем и про нулевые слагаемые:

$$\Delta^{(y)} = Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_2 Y_5 + Y_1 Y_2 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_3 Y_5 + 0_{136} + 0_{145} + Y_1 Y_4 Y_6 + Y_1 Y_5 Y_6 + Y_2 Y_3 Y_4 + 0_{235} + Y_2 Y_3 Y_6 + Y_2 Y_4 Y_5 + 0_{246} + Y_2 Y_5 Y_6 + Y_3 Y_4 Y_5 + Y_3 Y_4 Y_6 + Y_3 Y_5 Y_6 + Y_4 Y_5 Y_6.$$

Определитель содержит произведения проводимостей по три. Следовательно, матрица узловых проводимостей 3×3 . То есть, схема имеет четыре узла. Схема содержит шесть элементов. Отсутствие в определителе произведений проводимостей $Y_1 Y_3 Y_6$, $Y_1 Y_4 Y_5$, $Y_2 Y_3 Y_5$ и $Y_2 Y_4 Y_6$ говорит нам о том, что их соответствующее короткое замыкание (по три проводимости) образует четыре короткозамкнутых контура (по числу нулевых слагаемых).

С учётом сказанного рисуем узлы и расставляем элементы. Получили схему рис. 2.3.

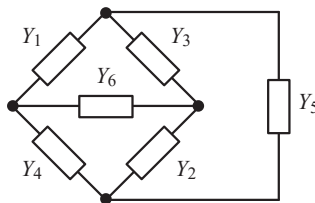


Рис. 2.3.

Сравниваем со схемой, приведённой в учебнике, и видим, что мы решили задачу правильно. Решение этой задачи является третьим примером, где подтверждаются две важнейшие особенности электрических цепей.

На стр. 234 и 247 указанного учебника [11] приводятся разложения узлового и контурного определителей по ветви без ссылки на автора. Приведём эти разложения немецкого учёного Вильгельма Фойснера [17, 18]:

Разложение контурного определителя по ветви Z_j :

$$\Delta^{(к)} = Z_j \Delta^{(к)j} + \Delta_j^{(к)}, \quad (2.3)$$

где: $\Delta^{(к)j}$ – контурный определитель схемы при разомкнутой ветви Z_j ;

$\Delta_j^{(к)}$ – контурный определитель схемы при короткозамкнутой ветви Z_j .

Разложение узлового определителя по ветви Y_j :

$$\Delta^{(у)} = Y_j \Delta_j^{(у)} + \Delta^{(у)j}, \quad (2.4)$$

где: $\Delta_j^{(у)}$ – узловой определитель схемы при короткозамкнутой ветви Y_j ;

$\Delta^{(у)j}$ – узловой определитель схемы при разомкнутой ветви Y_j .

Затем приводятся *разложения определителей по узлу*.

Для двух ветвей, имеющих *только один общий узел*, разложение имеет вид:

$$\Delta^{(у)} = Y_i \Delta_i^j + Y_j \Delta_j^i + Y_i Y_j \Delta_{ij}. \quad (2.5)$$

В этой формуле у узловых определителей правой части равенства индекс «у» опущен для простоты записи. Нижние индексы у определителей соответствуют короткозамкнутым ветвям, верхние индексы соответствуют разомкнутым ветвям.

Если схема содержит три ветви Y_i , Y_j и Y_k , имеющие *только один общий узел*, с которым другие ветви не соединены, то разложение имеет вид:

$$\Delta^{(у)} = Y_i \Delta_i^{jk} + Y_j \Delta_j^{ik} + Y_k \Delta_k^{ij} + Y_i Y_j \Delta_{ij}^k + Y_i Y_k \Delta_{ik}^j + Y_j Y_k \Delta_{jk}^i + Y_i Y_j Y_k \Delta_{ijk}. \quad (2.6)$$

Формулу (2.6) можно обобщить на случай любого числа ветвей, имеющих один общий узел.

Приведённые формулы *разложения определителей по узлу* и разложение по ним ограничивается числом ветвей, присоединённых к узлу.

Далее в учебнике [11] приводится пример под номером 8.3, в котором требуется вычислить узловой определитель по формуле (2.6). Решая пример, делается вывод: «Разложение (2.6) по отношению к трём ветвям приводит к неверному результату...». Таким образом, по мнению авторов, разложение уже по трём ветвям не всегда приводит к верному результату. Учебнику, тем более примеру в учебнике, трудно не верить. Видимо, и сам Фойснер не знал, а может быть, не дал правила применения формулы. А может быть, правы авторы учебника? Поговорим о тех формулах, которые не вызывают сомнений. Покажем на примере справедливость разложения контурного определителя по одной ветви (формула 2.3).

Пример 2.2. На рисунке 2.4 приведена схема электрической цепи.

В этой схеме все источники равны нулю. Требуется для заданного примера показать справедливость формулы разложения (2.3) и разложить контурный определитель по ветви с сопротивлением R_1 .

Решение. Схема содержит два контура. Запишем контурный определитель матрицы контурных сопротивлений.

$$\Delta^{(к)} = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{vmatrix}$$

Добавим «0» во вторую строку первого столбца и по свойству определителей запишем:

$$\begin{aligned} \Delta^{(к)} &= \begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} R_1 & -R_3 \\ 0 & R_2 + R_3 + R_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{vmatrix} = R_1(R_2 + R_3 + R_5) + \\ &+ (R_3 + R_4)(R_2 + R_3 + R_5) - R_3^2 = R_1\Delta^{1(к)} + \Delta^{(к)}. \end{aligned}$$

На рисунках 2.5 и 2.6 приведены две подсхемы. На рис. 2.5 – подсхема короткозамкнутым сопротивлением R_1 . На рис. 2.6 приведена подсхема с разомкнутым сопротивлением R_1 .

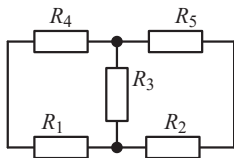


Рис. 2.4.

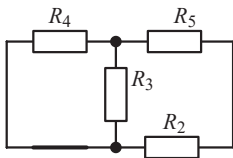


Рис. 2.5.

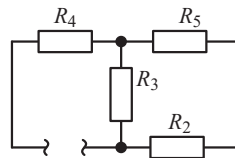


Рис. 2.6.

Итак, пример решён. Показана справедливость формулы разложения.

Аналогично показывается справедливость разложения узлового определителя (2.4).

Пока говорилось только об определителе. Получение в символьной форме решения для тока, напряжения, передаточной функции – задача более важная, чем нахождение одного только определителя.

Передаточную функцию принято записывать дробью. Когда формула (выражение) записана дробью, а не в строчку, то не бросается в глаза несимметрия формулы. Примером тому могут служить расчётные формулы в методе активного двухполюсника: в знаменателе имеются два слагаемых, в числителе

– одно слагаемое. При записи формулы в строчку несимметрия становится видна.

Как увидим в дальнейшем, симметричная формула, когда число слагаемых в левой и в правой частях равны, симметричное уравнение (алгебраическое и дифференциальное), симметричная таблица основных параметров четырёхполосников, симметричные схемы (в согласующих устройствах) дают многое.

НАЧАЛЬНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЁТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Формула применяется для нахождения любой переменной X (напряжения U , тока I) на любом участке электрической цепи при коротком замыкании и размыкании одного произвольного сопротивления R_i . Пусть в произвольной линейной активной (A) электрической цепи (рис. 2.7) необходимо найти напряжение U или ток I на произвольном сопротивлении R .

Выделим в этой цепи какое-то произвольное сопротивление R_i , которое будем закорачивать и размыкать. Тем самым заданную схему раскладываем на две более простые схемы – подсхемы: подсхема с короткозамкнутым сопротивлением R_i (рис. 2.8) и подсхема с разомкнутым сопротивлением R_i (рис. 2.9).

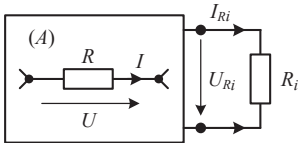


Рис. 2.7.

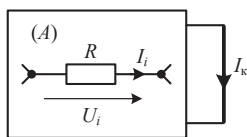


Рис. 2.8.

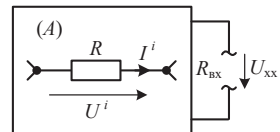


Рис. 2.9.

Искомая переменная X (U или I) заданной (исходной) схемы рис. 2.7 может быть найдена по двум её составляющим:

X_i (U_i или I_i) в подсхеме (рис. 2.8) с нижними индексами и

X^i (U^i или I^i) в подсхеме (рис. 2.9) с верхними индексами,

применяя исходную универсальную формулу. Первую (условно) форму записи универсальной формулы запишем через сопротивления:

$$X = \frac{\Delta_i X_i + R_i \Delta^i X^i}{\Delta_i + R_i \Delta^i}. \quad (2.7)$$

Доказательство формулы.

По методу наложения для напряжения U , используя принцип компенсации, запишем для произвольной схемы (рис.2.7):

$$U = U_{Ri} H_U + U^{(A)}, \quad (2.8)$$

где: H_U – коэффициент передачи напряжения;
 $U^{(A)}$ – составляющая напряжения от активного двухполюсника.
 Для подсхемы (рис. 2.8)

$$U_i = U^{(A)}. \quad (2.9)$$

Для подсхемы (рис. 2.9)

$$U^i = U_{xx}H_U + U^{(A)}. \quad (2.10)$$

По методу эквивалентного генератора (формула Тевенена)

$$U_{Ri} = \frac{R_i}{R_{вх}+R_i}U_{xx} = \frac{R_i\Delta^i}{\Delta_i+R_i\Delta^i}U_{xx} \text{ (учитывая, что } \Delta_i/\Delta^i = R_{вх}). \quad (2.11)$$

Решая совместно уравнения (2.8), (2.9), (2.10) и (2.11) получим начальную универсальную формулу (2.7) для напряжения U .

Для тока I доказательство начальной универсальной формулы (2.7) проводится аналогично. По методу наложения для тока I , используя принцип компенсации, для той же схемы (рис. 2.7)

$$I = I_{Ri}H_I + I^{(A)}, \quad (2.12)$$

где: H_I – коэффициент передачи тока;

$I^{(A)}$ – составляющая тока от активного двухполюсника.

Для подсхемы (рис. 2.8)

$$I_i = I_{кз}H_I + I^{(A)}. \quad (2.13)$$

Для подсхемы (рис. 2.9)

$$I^i = I^{(A)}. \quad (2.14)$$

По методу эквивалентного генератора (формула Нортон)

$$I_{Ri} = \frac{R_{вх}}{R_{вх}+R_i}I_{кз} = \frac{\Delta_i}{\Delta_i+R_i\Delta^i}I_{кз} \text{ (учитывая, что } \Delta_i/\Delta^i = R_{вх}). \quad (2.15)$$

Решая совместно уравнения (2.12), (2.13), (2.14) и (2.15), получим начальную универсальную формулу (2.7) для тока I .

Умножив числитель и знаменатель этой универсальной формулы (2.7) на G_i , получим вторую форму записи универсальной формулы, записанную через проводимости:

$$X = \frac{G_i\Delta_i X_i + \Delta^i X^i}{G_i\Delta_i + \Delta^i}. \quad (2.16)$$

В этих формулах (2.7) и (2.16) (по существу, одной и той же):

– *с нижними индексами:*

X_i – составляющая искомой переменной X в подсхеме (рис. 2.8) при короткозамкнутом сопротивлении R_i ;

Δ_i – контурный, выраженный через сопротивления, или узловой, выраженный через проводимости, определитель этой подсхемы (рис. 2.8);

– *с верхними индексами:*

X^i – составляющая искомой переменной X в подсхеме (рис. 2.9) при разомкнутом сопротивлении R_i ;

Δ^i – контурный или узловый определитель этой подсхемы (рис. 2.9).

Важно то, что в приведённых формулах определителя Δ_i и Δ^i – либо *оба контурные*, либо *оба узловые*. В этом состоит важное отличие определителей: $\Delta_i + R_i \Delta^i$ в формуле (2.7) и $G_i \Delta_i + \Delta^i$ в формуле (2.16) от контурных и узловых определителей в разложениях Фойснера.

Разделив числитель и знаменатель формулы (2.7) на определитель Δ^i , первая форма записи универсальной формулы принимает вид:

$$X = \frac{R_{ex} X_i + R_i X^i}{R_{ex} + R_i}. \quad (2.17)$$

Умножив числитель и знаменатель формулы (2.17) на произведение $G_i G_{ex}$, получим вторую форму записи универсальной формулы:

$$X = \frac{G_i X_i + G_{ex} X^i}{G_i + G_{ex}}. \quad (2.18)$$

Покажем, что формулы Тевенена и Нортонна (в методе эквивалентного генератора) являются частными случаями этой исходной универсальной формулы. Рассмотрим частные случаи универсальной формулы (2.17).

1. Пусть требуется найти напряжение именно на том сопротивлении $R = R_i$, которое будем закорачивать и размыкать. Тогда

$$X_i = U_i = 0 \quad (\text{при коротком замыкании}) \text{ и}$$

$$X^i = U^i = U_{xx} \quad (\text{при размыкании}).$$

Формула (2.17) для напряжения ($X = U$):

$$U = \frac{R_{ex} U_i + R_i U^i}{R_{ex} + R_i} = \frac{0 + R_i U_{xx}}{R_{ex} + R_i}. \quad \text{Расчётная формула схемы Тевенена.}$$

2. Пусть требуется найти ток именно через сопротивление $R = R_i$, которое будем закорачивать и размыкать. Тогда

$$X_i = I_i = I_{кз} \quad (\text{при коротком замыкании}) \text{ и}$$

$$X^i = I^i = 0 \quad (\text{при размыкании}).$$

Формула (2.17) для другой переменной – тока ($X = I$):

$$I = \frac{R_{ex} I_i + R_i I^i}{R_{ex} + R_i} = \frac{R_{ex} I_{кз} + 0}{R_{ex} + R_i}. \quad \text{Расчётная формула схемы Нортонна.}$$

Таким образом, формула (2.17) является *общей* формулой и *универсальной*. Одна и та же формула – (2.17) либо (2.18) – позволяет получить в символьной форме и ток, и напряжение по двум упрощённым подсхемам.

В электрической цепи (рис. 2.7) это произвольное сопротивление обозначим R_1 ($R_i = R_1$). Тогда формула (2.7) принимает вид (запишем её в строчку):

$$(\Delta_1 + R_1 \Delta^1) X = \Delta_1 X_1 + R_1 \Delta^1 X^1. \quad \text{Формула с определителями, } \Delta_1 \text{ и } \Delta^1 \quad (2.7)$$

либо оба контурными, либо оба узловыми.

$$(R_{ex} + R_1) X = R_{ex} X_1 + R_1 X^1. \quad \text{Формула с сопротивлением } R_{ex}. \quad (2.17)$$

Формулы (2.7) и (2.17) – симметричные формулы. В левых и в правых частях этих формул содержатся по два слагаемых.

Рассмотрим применение исходной универсальной формулы к простейшим электрическим цепям.

Пример 2.3. Рассмотрим схему делителя напряжения (рис. 2.10). Требуется найти напряжение U на сопротивлении R_2 при коротком замыкании и размыкании сопротивления R_1 .

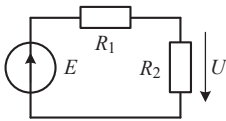


Рис. 2.10.

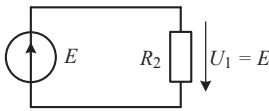


Рис.2.11.

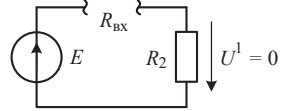


Рис.2.12.

Решение. Формула (2.17) для напряжения U ($X = U$) имеет вид:

$$(R_{\text{ex}} + R_1)U = R_{\text{ex}}U_1 + R_1U^1. \quad (2.19)$$

Короткому замыканию произвольного сопротивления (обозначили его R_1) соответствует подсхема (рис. 2.11), где $U_1 = E$ (U_1 – с нижним индексом).

Размыканию сопротивления R_1 соответствует подсхема (рис. 2.12), где $U^1 = 0$ (U^1 – с верхним индексом) и $R_{\text{ex}} = R_2$. Подставляя эти значения в формулу (2.19) получим ответ:

$$U = \frac{R_{\text{ex}}U_1 + R_1U^1}{R_{\text{ex}} + R_1} = \frac{R_2E}{R_2 + R_1}.$$

Такой же результат будем иметь при решении двух уравнений: сначала найдём ток, который не требуется находить, применив второй закон Кирхгофа, затем по закону Ома найдём напряжение.

Пример 2.4. Рассмотрим схему делителя тока (рис. 2.13). Требуется найти ток I через сопротивление R_2 при коротком замыкании и размыкании сопротивления R_1 .

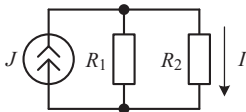


Рис. 2.13.

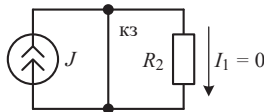


Рис.2.14.

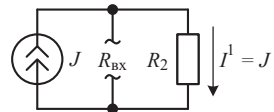


Рис.2.15.

Решение. Та же формула (2.17), только теперь для тока I ($X = I$):

$$(R_{\text{ex}} + R_1)I = R_{\text{ex}}I_1 + R_1I^1. \quad (2.20)$$

Короткому замыканию сопротивления R_1 соответствует подхема (рис. 2.14), где: $I_1 = 0$.

Размыканию сопротивления R_1 соответствует подхема (рис. 2.15), где: $I^1 = J$ и $R_{\text{ex}} = R_2$. Подставляя эти значения в формулу (2.20) получим ответ:

$$I = \frac{R_{\text{ex}}I_1 + R_1I^1}{R_{\text{ex}} + R_1} = \frac{R_1J}{R_2 + R_1} = J \frac{G_2}{G_1 + G_2}.$$

Такой же результат будем иметь, применяя формулу разброса.

Пример 2.5. На рис 2.16 приведена более сложная электрическая цепь с источниками E и J .

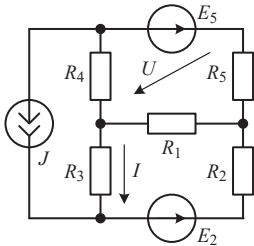


Рис.2.16.

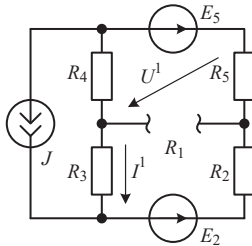


Рис. 2.17.

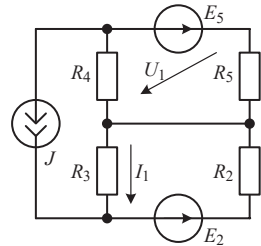


Рис. 2.18.

Даны числовые значения всех элементов: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 6$ Ом, $E_2 = 5$ В, $E_5 = 10$ В, $J = 1$ А. Требуется найти напряжение и ток на любом участке электрической цепи, например, те, которые указаны на рисунке, применяя универсальную формулу (2.17).

Решение. Выберем произвольное сопротивление, (обозначим его R_1), которое будем размыкать и закорачивать. Конечно, этот выбор будет зависеть от схемы. Для приведённой схемы выбор именно R_1 обусловлен упрощением расчёта полученных подсхем, которые приведены на рис. 2.17 и рис. 2.18.

В подсхеме (рис. 2.17) верхними индексами обозначены: U^1 и I^1 – составляющие искомого напряжения U и тока I при размыкании сопротивления R_1 . В подсхеме (рис. 2.18) нижними индексами обозначены: U_1 и I_1 – составляющие искомого напряжения U и тока I при коротком замыкании сопротивления R_1 . Для этих упрощённых подсхем любым известным методом, например, методом наложения, находим составляющие токов и напряжений:

Для подсхемы (рис. 2.17)

$$I^1 = -J \frac{R_2 + R_5}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} + \frac{E_2 - E_5}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = -0.8 \text{ А}, \quad U^1 = R_4 I^1 + E_5 = 6.8 \text{ В}.$$

Для подсхемы (рис. 2.18)

$$I_1 = -J \frac{R_2}{R_2 + R_3} + \frac{E_2}{R_2 + R_3} = 0, \quad U_1 = R_5 \left(-J \frac{R_4}{R_4 + R_5} + \frac{E_5}{R_4 + R_5} \right) = 3.6 \text{ В}.$$

$$R_{\text{вх}} = \frac{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 5 \text{ Ом.}$$

$$\text{При } X = I: \quad I = \frac{R_{\text{вх}} I_1 + R_1 I^1}{R_{\text{вх}} + R_1} = -0.64 \text{ А,}$$

$$\text{при } X = U: \quad U = \frac{R_{\text{вх}} U_1 + R_1 U^1}{R_{\text{вх}} + R_1} = 6.16 \text{ В.}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПРОСТЕЙШИХ СОЕДИНЕНИЙ

1. Для простейшей схемы (рис. 2.19) запишем контурное уравнение:

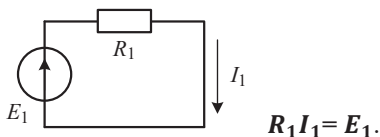


Рис. 2.19

В этой схеме $y = 1$, $k = 1$.

Из математики известно, что определителем этого одного контурного уравнения является элемент R_1 . То есть $\Delta^{(k)} = |R_1| = R_1$. Узловой определитель получим по формуле перехода: $\Delta^{(y)} = \Delta^{(k)} G_1 = R_1 G_1 = 1$.

Для контурного определителя справедливо:

$\Delta^{(k)} = \Delta_{1(k)} + R_1 \Delta^{1(k)} = R_1$, который должен быть равен (для приведённой схемы) R_1 . Из этого равенства следует, что в этих двух слагаемых контурные определители должны быть равны:

- первый $\Delta_{1(k)} = 0$; для схемы (рис. 2.19) это означает (при закороченном сопротивлении R_1 – нижние индексы у определителя) наличие короткозамкнутого контура при $E_1 = 0$ (рис. 2.20);

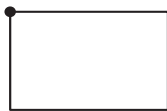


Рис. 2.20.

- второй $\Delta^{1(k)} = 1$; для схемы (рис. 2.19) это означает (при разомкнутом сопротивлении – верхние индексы у определителя) наличие одного узла. Как был один узел, так он и остался (рис. 2.21).

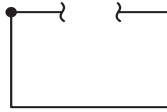


Рис. 2 21.

Для *узлового определителя* той же схемы (рис. 2.19) справедливо: $\Delta^{(y)} = \Delta^{1(y)} + G_1 \Delta_{1(y)} = 1$, который должен быть равен (для приведённой схемы) единице. Из этого равенства следует, что в этих двух слагаемых узловые определители должны быть равны:

- первый $\Delta^{1(y)} = 1$ для схемы (рис. 2.19) это означает наличие одного узла;
- второй $\Delta_{1(y)} = 0$; для схемы (рис. 2.19) это означает наличие короткозамкнутого контура.

2. Для простейшей схемы (рис. 2.22) запишем *узловое уравнение*:

$$G_1 u_{10} = G_1 \varphi_1 = J_1.$$

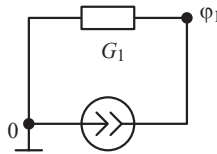


Рис. 2.22.

В этой схеме $y = 2, k = 0$.

Из математики известно, что определителем этого одного уравнения является элемент G_1 . То есть $\Delta^{(y)} = |G_1| = G_1$. Контурный определитель получим по формуле перехода: $\Delta^{(k)} = \Delta^{(y)} R_1 = G_1 R_1 = 1$.

Для узлового определителя:

$\Delta^{(y)} = \Delta^{1(y)} + G_1 \Delta_{1(y)} = G_1$, который должен быть равен (для приведённой схемы) G_1 . Из этого равенства следует, что в этих двух слагаемых узловые определители должны быть равны:

- первый $\Delta^{1(y)} = 0$; для схемы (рис. 2.22) это означает (при разомкнутом сопротивлении – верхние индексы у определителя) появление изолированных узлов;
- второй $\Delta_{1(y)} = 1$; для схемы (рис. 2.22) это означает (при коротком замыкании проводимости – нижние индексы у определителя), что два узла стянуты в один узел (при $J = 0$).

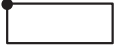


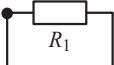
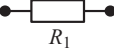
Для контурного определителя:

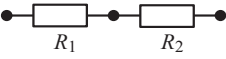
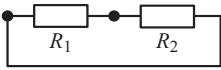
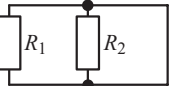
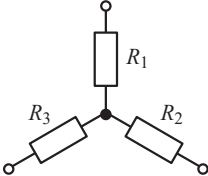
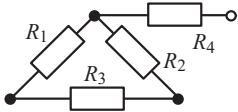
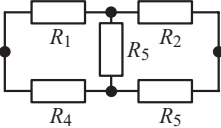
$\Delta^{(k)} = \Delta_{1(k)} + R_1 \Delta^{1(k)} = 1$, который должен быть равен (для приведённой схемы) единице. Из этого равенства следует, что в этих двух слагаемых контурные определители должны быть равны:

- первый $\Delta_{1(k)} = 1$; для схемы (рис. 2.22) это означает, что два узла стянуты в один узел;
- второй $\Delta^{1(k)} = 0$; для схемы (рис. 2.22) это означает появление изолированных узлов (при $J = 0$).

Сведём полученные результаты в таблицу. В этой же таблице приведём определители простейших соединений при источниках равных нулю.

ТАБЛИЦА КОНТУРНЫХ И УЗЛОВЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

| Соединения | $\Delta^{(k)}$ и $\Delta^{(y)}$ определители |
|--|--|
| 1. Короткозамкнутый контур  | $\Delta^{(k)} = 0$ $\Delta^{(y)} = 0$ |
| 2. Изолированные узлы или под-схемы  | $\Delta^{(k)} = 0$ $\Delta^{(y)} = 0$ |
| 3. Узлы стянуты в один узел  | $\Delta^{(k)} = 1$ $\Delta^{(y)} = 1$ |
| <p><i>Примечание.</i> Схемы «сами себя берегут» от некорректностей: Источник ЭДС не может быть закорочен (см. короткозамкнутый контур), источник тока не должен быть разомкнут (см. изолированные узлы). Их определители в формулах полагаем равными нулю (отсутствуют).</p> | |
| 4.  $k = 1, y - 1 = 0, n = 1.$ | $\Delta^{(k)} = R_1$. Контур с R_1 . $\Delta^{(y)} = 1$. Один узел. |
| 5.  $k = 0, y - 1 = 1, n = 1.$ | $\Delta^{(k)} = 1$. Нет контура. $\Delta^{(y)} = G_1$. Два узла. |

| | |
|---|---|
| <p>6.</p>  <p>$k = 0, y - 1 = 2, n = 2.$</p> | <p>$\Delta^{(k)} = 1.$ Нет контура. $\Delta^{(y)} = G_1 G_2.$ Сочетание по два ($y - 1 = 2$) из двух.</p> |
| <p>7.</p>  <p>$k = 1, y - 1 = 1, n = 2.$</p> | <p>$\Delta^{(k)} = R_1 + R_2.$ Сочетание по <u>одному</u> из двух (все сопротивления этого <u>одного</u> контура). $\Delta^{(y)} = G_1 + G_2.$ Сочетание по <u>одному</u> из двух ($y - 1 = \underline{1}$).</p> |
| <p>8.</p>  <p>$k = 2, y - 1 = 0, n = 2.$</p> | <p>$\Delta^{(k)} = R_1 R_2.$ Сочетание по <u>два</u> из двух (<u>два</u> контура). $\Delta^{(y)} = 1.$ Один узел.</p> |
| <p>9.</p>  <p>$k = 0, y - 1 = 3, n = 3.$</p> | <p>$\Delta^{(k)} = 1.$ Нет контура. $\Delta^{(y)} = G_1 G_2 G_3.$ Сочетание по <u>три</u> ($y - 1 = \underline{3}$) из трёх.</p> |
| <p>10.</p>  <p>$k = 1, y - 1 = 3, n = 4.$</p> | <p>$\Delta^{(k)} = R_1 + R_2 + R_3 + 0_4$ Сочетание по <u>одному</u> из трёх (все сопротивления этого <u>одного</u> контура). Сопротивление R_4 отсутствует в контурном определителе. $\Delta^{(y)} = 0_{123} + G_1 G_2 G_4 + G_1 G_3 G_4 + G_2 G_3 G_4.$ Проводимость G_4 присутствует в узловом определителе.</p> |
| <p>11.</p>  <p>$k = 2, y - 1 = 3, n = 5.$</p> | <p>$\Delta^{(k)} = R_1 R_2 + R_1 R_3 + 0_{14} + R_1 R_5 + 0_{23} + R_2 R_4 + R_2 R_5 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5.$ $\Delta^{(y)} = G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4 + G_1 G_2 G_5 + G_1 G_3 G_4 + G_1 G_3 G_5 + 0_{145} + G_2 G_3 G_4 + 0_{235} + G_2 G_4 G_5 + G_3 G_4 G_5.$</p> |

Рассмотрим пример (рис. 2.23) и покажем, что определители в исходной универсальной формуле (2.7) могут быть либо оба контурные (выраженные через сопротивления), либо оба узловые (выраженные через проводимости), либо представлять смешанный тип – «гибридный» (состоять из сопротивлений и проводимостей).

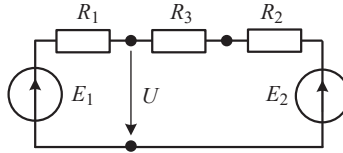
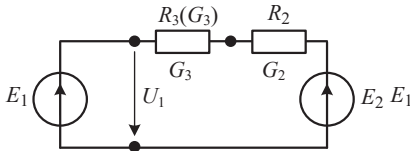


Рис. 2.23

Применим к этой схеме исходную начальную формулу:

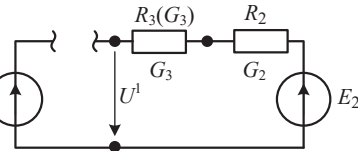
$$(\Delta_1 + R_1 \Delta^1)U = \Delta_1 U_1 + R_1 \Delta^1 U^1. \quad (2.7)$$

Для подсхем с короткозамкнутым сопротивлением R_1 (рис. 2.24) и разомкнутым сопротивлением R_1 (рис. 2.25) запишем контурные и узловые определители. Они могут быть взяты из таблицы определителей (№ 7 и № 6).



$$\begin{aligned} \Delta_{1(k)} &= R_2 + R_3, & U_1 &= E_1 \\ \Delta_{1(y)} &= G_2 + G_3, & \text{Рис. 2.22.} & \end{aligned}$$

Рис. 2.24



$$\begin{aligned} \Delta^{1(k)} &= 1, & U^1 &= E_2 \\ \Delta^{1(y)} &= G_2 G_3, & \text{Рис. 2.23.} & \end{aligned}$$

Рис 2.25

Подставим в формулу (2.7) сначала контурные определители:

$$(R_2 + R_3 + R_1 \cdot 1)U = (R_2 + R_3)E_1 + R_1 \cdot 1 \cdot E_2.$$

Получили тот же результат.

Теперь подставим в формулу (2.7) узловые определители:

$$(G_2 + G_3 + R_1(G_2 G_3))U = (G_2 + G_3)E_1 + R_1 G_2 G_3 E_2.$$

Умножая это уравнение на произведение $R_2 R_3$, получим тот же результат:

$$(R_3 + R_2 + R_1)U = (R_3 + R_2)E_1 + R_1 E_2.$$

Это и естественно. Такие «чудеса» творить с определителем (определителями) нам позволяет симметричное уравнение (симметричные уравнения).

Таким образом, во всех формулах метода определителя могут быть и контурными, и узловыми, и смешанными (гибридными) в отличие от формул разложения Фойснера. Можно «сделать» их «гибридными», умножив последнее равенство, например, на проводимость G_3 . В результате получим:

$$(1 + R_2 G_3 + R_1 G_3)U = E_1 + R_2 G_3 E_1 + R_1 G_3 E_2.$$

Здесь $(1 + R_2 G_3 + R_1 G_3) = \Delta_{\text{гибридный}}$ – смешанный определитель.

Этому смешанному определителю соответствует та же схема, но с другим обозначением («гибридным») элементов на схеме: вместо сопротивления R_3 обозначена проводимость G_3 .

Решая задачу традиционным способом, найдём сначала ток, затем – напряжение. Для получения определителя достаточно найти только ток. Он нам даст определитель.

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + 1/G_3} = \frac{(E_1 - E_2)G_3}{R_1 G_3 + R_2 G_3 + 1}.$$

2.2. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ПРИ РАЗМЫКАНИИ И КОРОТКОМ ЗАМЫКАНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОПРОТИВЛЕНИЙ

Вернёмся к параграфу 2.2 и двум подсхемам: с короткозамкнутым сопротивлением R_1 и разомкнутым сопротивлением R_1 .

В двух подсхемах выберем следующее после R_1 произвольное сопротивление (обозначим его R_2) и будем его закорачивать и размыкать. Эта процедура будет соответствовать разложению:

$$\underbrace{(\Delta_{12} + R_2 \Delta_1^2)}_{\Delta_1} + \underbrace{R_1 (\Delta_1^2 + R_2 \Delta_1^{12})}_{\Delta^1} X + \underbrace{\Delta_{12} X_{12} + R_2 \Delta_1^2 X_1^2}_{\Delta_1 X_1} + R_1 \underbrace{(\Delta_2^1 X_2^1 + R_2 \Delta_1^{12} X^{12})}_{\Delta^1 X^1}$$

Индекс «1» (нижний и верхний) остаётся от предыдущего разложения; индекс «2» добавляется. Для определителей в левой части уравнения:

- с нижним индексом: $\Delta_{(1)} = \Delta_{(1)2} + R_2 \Delta_{(1)}^2$;
- с верхним индексом: $\Delta^{(1)} = \Delta_2^{(1)} + R_2 \Delta^{(1)2}$.

Для правой части уравнения:

- первое слагаемое $\Delta_1 X_1 = (\Delta_{1(2)} + R_2 \Delta_1^{(2)}) X_1 = \Delta_{12} X_{12} + R_2 \Delta_1^2 X_1^2$;
- второе слагаемое $\Delta^1 X^1 = (\Delta_{(2)}^1 + R_2 \Delta^{1(2)}) X^1 = \Delta_2^1 X_2^1 + R_2 \Delta_1^{12} X^{12}$.

Перепишем уравнение, раскрывая скобки и переставляя слагаемые:

$$(\Delta_{12} + R_1 \Delta_2^1 + R_2 \Delta_1^2 + R_1 R_2 \Delta_1^{12}) X = \Delta_{12} X_{12} + R_1 \Delta_2^1 X_2^1 + R_2 \Delta_1^2 X_1^2 + R_1 R_2 \Delta_1^{12} X^{12}. \quad (2.21)$$

Эту формулу разложения при размыкании и коротком замыкании двух сопротивлений назовём первой (условно) формой записи.

Умножив это уравнение на произведение $G_1 G_2$, получим другую – вторую – форму записи формулы разложения:

$$(\Delta^{12} + G_1 \Delta_1^2 + G_2 \Delta_2^1 + G_1 G_2 \Delta_{12})X = \Delta^{12} X^{12} + G_1 \Delta_1^2 X_1^2 + G_2 \Delta_2^1 X_2^1 + G_1 G_2 \Delta_{12} X_{12}. \quad (2.22)$$

Тем самым мы получили четыре подсхемы, в которых отсутствуют сопроотивления R_1 и R_2 . Они вошли в формулу (2.21). В этих четырёх подсхемах выбираем следующее сопроотивление R_3 , которое будем закорачивать и размыкать.

Запишем уже без вывода одну из форм записи (например, первую) формулы разложения:

$$(\Delta_{123} + R_1 \Delta_{23}^1 + R_2 \Delta_{13}^2 + R_3 \Delta_{12}^3 + R_1 R_2 \Delta_3^{12} + R_1 R_3 \Delta_2^{13} + R_2 R_3 \Delta_1^{23} + R_1 R_2 R_3 \Delta^{123})X = \Delta_{123} X_{123} + R_1 \Delta_{23}^1 X_{23}^1 + R_2 \Delta_{13}^2 X_{13}^2 + R_3 \Delta_{12}^3 X_{12}^3 + R_1 R_2 \Delta_3^{12} X_3^{12} + R_1 R_3 \Delta_2^{13} X_2^{13} + R_2 R_3 \Delta_1^{23} X_1^{23} + R_1 R_2 R_3 \Delta^{123} X^{123}. \quad (2.23)$$

В этой формуле уже хорошо видна математическая сочетательная закономерность сопроотивлений, стоящих в слагаемых левой и правой частях уравнения. Хорошо видно, что сопроотивления в формуле занимают место в строгой математической сочетательной последовательности: сначала они стоят с определителями подсхем по одному R_1, R_2, R_3 , образуя сочетание из трёх сопроотивлений по одному; затем сопроотивления стоят по два в сочетательной последовательности $R_1 R_2, R_1 R_3, R_2 R_3$; наконец, слагаемое $R_1 R_2 R_3$ образует сочетание из трёх сопроотивлений по три.

Но пока ещё сопроотивления стоят множителями при определителях подсхем, имеющих верхними индексами индексы соответствующих сопроотивлений. Эти определители нам напоминают, что сопроотивления надо размыкать. Когда определителей при сопроотивлениях не станет (они вырождаются, то есть будут равны единице) в предельном состоянии цепи, нам придётся самим помнить, что сопроотивления надо размыкать.

Умножив левые и правые части уравнения (2.23) на произведение $G_1 G_2 G_3$, и переставляя местами слагаемые, получим формулу $(\Delta^{123} + G_1 \Delta_1^{23} + G_2 \Delta_2^{13} + G_3 \Delta_3^{12} + G_1 G_2 \Delta_{12}^3 + G_1 G_3 \Delta_{13}^2 + G_2 G_3 \Delta_{23}^1 + G_1 G_2 G_3 \Delta_{123})X = \Delta^{123} X^{123} + G_1 \Delta_1^{23} X_1^{23} + G_2 \Delta_2^{13} X_2^{13} + G_3 \Delta_3^{12} X_3^{12} + G_1 G_2 \Delta_{12}^3 X_{12}^3 + G_1 G_3 \Delta_{13}^2 X_{13}^2 + G_2 G_3 \Delta_{23}^1 X_{23}^1 + G_1 G_2 G_3 \Delta_{123} X_{123}. \quad (2.24)$

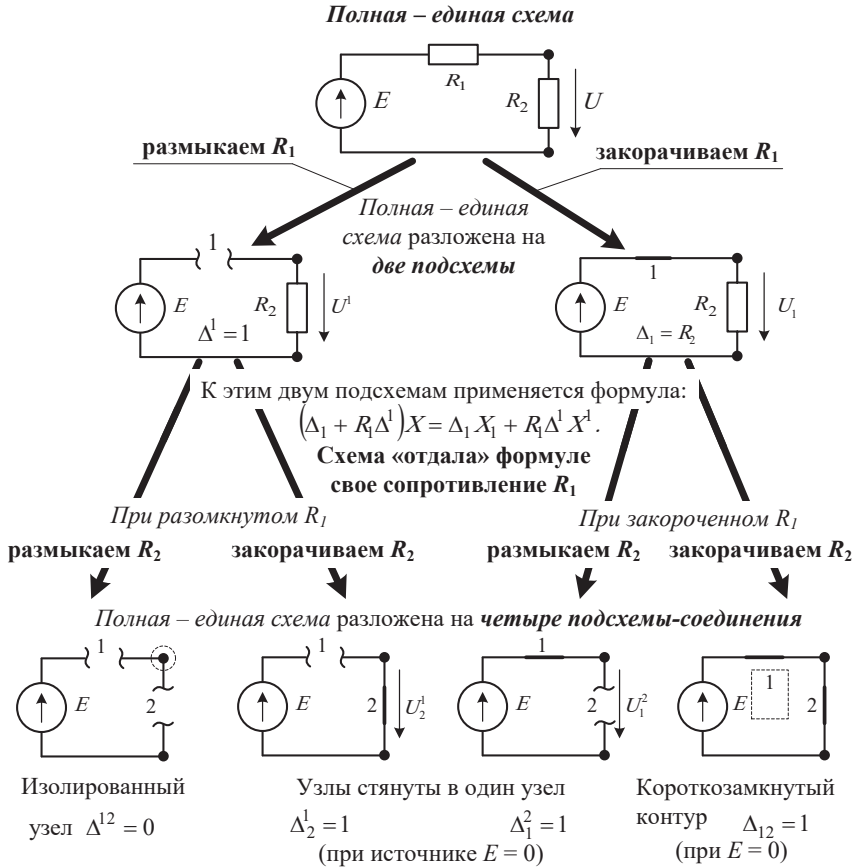
Всё, что было сказано выше о сочетательных свойствах сопроотивлений в формуле (2.23) справедливо и для проводимостей в формуле (2.24). Важное отличие состоит в том, что при проводимостях множителями встали определители с нижними индексами, которые требуют короткого замыкания этих проводимостей. Запомним это, когда проводимости останутся одни без определителей (определители будут равны единице) в предельном состоянии цепи.

Затем выберем последовательно сопроотивления R_4, R_5 и так далее. Выберем для размыкания и короткого замыкания m сопроотивлений из общего числа n сопроотивлений. В результате получим:

- «пирамиду разложения» полной-единой схемы на подсхемы и
- формулу разложения переменной X по слагаемым своего определителя.

«ПИРАМИДА (ТРЕУГОЛЬНИК) РАЗЛОЖЕНИЯ»

Разложение «Полной – единой» схемы на подсхемы.



Основание пирамиды. Все соединения имеют определители равные 1, либо 0 (отсутствуют). Получили предельное состояние исходной цепи: разложена до «E-соединений». Схема «отдала» **все** свои сопротивления R_1 и R_2 формуле

$$(\Delta_{12} + R_1 \Delta_2^1 + R_2 \Delta_1^2 + R_1 R_2 \Delta^{12}) X = \Delta_{12} X_{12} + R_1 \Delta_2^1 X_2^1 + R_2 \Delta_1^2 X_1^2 + R_1 R_2 \Delta^{12} X^{12}.$$

Подставляя в эту формулу значения определителей и составляющих искомого напряжения $U_2^1 = 0$ и $U_1^2 = E$, получим:

$$(0 + R_1 \cdot 1 + R_2 \cdot 1 + R_1 R_2 \cdot 0) U = R_1 U_2^1 + R_2 U_1^2.$$

или:

$$(R_1 + R_2) U = R_2 E.$$

Здесь $R_1 + R_2$ – контурный определитель полной исходной схемы.

Формула разложения имеет несколько различных форм записи, которые могут быть условно названы:

Первая форма записи с множителями R (R размыкаются), и определителями подсхем, которые либо *все контурные*, либо *все узловые* (либо все «гибридные» – смешанный тип) имеет вид:

$$(\Delta_{12\dots m} + \sum_i^m R_i \Delta^i + \sum_{i,j}^m R_i R_j \Delta^{ij} + \dots + R_1 R_2 \dots R_m \Delta^{12\dots m})X = \\ = \Delta_{12\dots m} X_{12\dots m} + \sum_i^m R_i \Delta^i X^i + \sum_{i,j}^m R_i R_j \Delta^{ij} X^{ij} + \dots + R_1 R_2 \dots R_m \Delta^{12\dots m} X^{12\dots m}. \quad (2.25)$$

В этой формуле для простоты записи у всех составляющих X^m , а также у определителей Δ^m , оставлены только верхние индексы, соответствующие тем размыкаемым сопротивлениям, которые стоят множителями у определителей. Нижние индексы, соответствующие сопротивлениям, которые закорачиваем, опущены.

Вторая форма записи с множителями G (G закорачиваются), и определителями подсхем, которые либо *все узловые*, либо *все контурные* (либо все «гибридные» - смешанный тип) имеет вид:

$$(\Delta^{12\dots m} + \sum_i^m G_i \Delta_i + \sum_{i,j}^m G_i G_j \Delta_{ij} + \dots + G_1 G_2 \dots G_m \Delta_{12\dots m})X = \\ = \Delta^{12\dots m} X^{12\dots m} + \sum_i^m G_i \Delta_i X_i + \sum_{i,j}^m G_i G_j \Delta_{ij} X_{ij} + \dots + G_1 G_2 \dots G_m \Delta_{12\dots m} X_{12\dots m}. \quad (2.26)$$

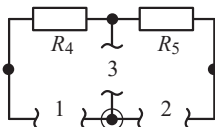
В этой формуле для простоты записи у всех составляющих X_m , а также у определителей Δ_m , оставлены только нижние индексы, соответствующие тем короткозамкнутым проводимостям, которые стоят множителями у определителей. Верхние индексы, соответствующие тем проводимостям, которые размыкаются, опущены.

Выделим из формулы (2.26) определитель и его рассмотрим при $m = 3$:

$$\Delta = \Delta^{123} + G_1 \Delta_1^{23} + G_2 \Delta_2^{13} + G_3 \Delta_3^{12} + G_1 G_2 \Delta_{12}^3 + G_1 G_3 \Delta_{13}^2 + G_2 G_3 \Delta_{23}^1 + \\ + G_1 G_2 G_3 \Delta_{123}.$$

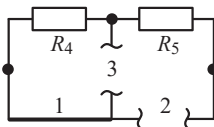
Видим, что определитель похож на разложение Фойснера по узлу. Однако разложение Фойснера по узлу не только количественно (отсутствием первого слагаемого), но и качественно отличается от рассматриваемого определителя.

Найдём этот определитель для схемы (рис. 2.4). Нарисуем все 8 подсхем. Под каждой из них запишем узловые и контурные определители.



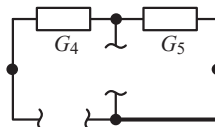
Изолированный узел $\Delta^{123} = 0$

Рис. 2.26.



$\Delta_1^{23} = G_4 G_5$
 $\Delta_1^{23} = 1$

Рис. 2.27.



$\Delta_2^{13} = G_4 G_5$
 $\Delta_2^{13} = 1$

Рис. 2.28.

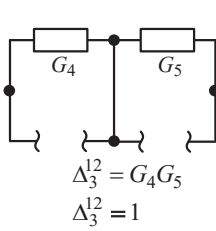


Рис. 2.29.

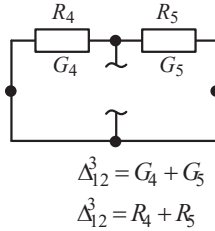


Рис. 2.30.

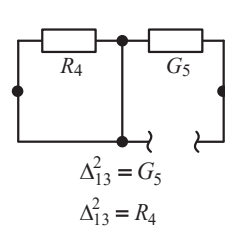


Рис. 2.31.

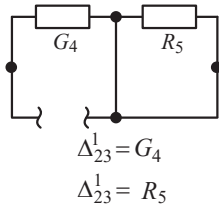


Рис. 2.32.

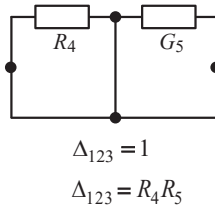


Рис. 2.33.

Подставим в формулу для определителя сначала узловые определители подсхем. В результате получим:

$$\Delta = \Delta^{123} + G_1\Delta_1^{23} + G_2\Delta_2^{13} + G_3\Delta_3^{12} + G_1G_2\Delta_{12}^3 + G_1G_3\Delta_{13}^2 + G_2G_3\Delta_{23}^1 + G_1G_2G_3\Delta_{123} = 0 + G_1G_4G_5 + G_2G_4G_5 + G_3G_4G_5 + G_1G_2(G_4 + G_5) + G_1G_3G_5 + G_2G_3G_4 + G_1G_2G_3 \cdot 1.$$

Раскрывая скобки и упорядочивая слагаемые, запишем:

$$\Delta = G_1G_2G_3 + G_1G_2G_4 + G_1G_2G_5 + 0_{134} + G_1G_3G_5 + G_1G_4G_5 + G_2G_3G_4 + 0_{235} + G_2G_4G_5 + G_3G_4G_5.$$

В этом узловом определителе слагаемые стоят в порядке строгой сочетательной последовательности. Отсутствуют сочетания проводимостей $G_1G_3G_4$ и $G_2G_3G_5$ те, при коротком замыкании которых образуются короткозамкнутые контуры. Левый короткозамкнутый контур образуется при коротком замыкании проводимостей G_1 , G_3 и G_4 . Правый короткозамкнутый контур образуется при коротком замыкании проводимостей G_2 , G_3 и G_5 .

Результат не изменится, если каждую из проводимостей рассматривать как сумму проводимостей параллельно включённых проводимостей (сопротивлений).

Подставим в формулу для определителя теперь контурные определители подсхем. В результате получим:

$$\Delta = \Delta^{123} + G_1\Delta_1^{23} + G_2\Delta_2^{13} + G_3\Delta_3^{12} + G_1G_2\Delta_{12}^3 + G_1G_3\Delta_{13}^2 + G_2G_3\Delta_{23}^1 + G_1G_2G_3\Delta_{123} = 0 + G_1 \cdot 1 + G_2 \cdot 1 + G_3 \cdot 1 + G_1G_2(R_4 + R_5) + G_1G_3R_4 + G_2G_3R_5 + G_1G_2G_3R_4R_5.$$

Получили гибридный определитель, слагаемые которого содержат и проводимости, и сопротивления. В этом гибридном определителе, нет никакой упорядоченности. И не должно быть. Отдельно от уравнения он даже не смотрится. Определитель необходимо рассматривать неразрывно с уравнением. Только в уравнении, только в этой неразрывной записи левой и правой частей уравнения определитель оживает. Именно в уравнении он получил своё имя. Посмотрим на уравнения (2.25) и (2.26) ещё раз. Видим, что правая часть уравнений содержит все составные части (слагаемые) левой – определителя. Если в левой части уравнения каждое слагаемое определителя умножается на искомую переменную, то в правой части каждое слагаемое определителя умножается на соответствующую составляющую искомой переменной.

Умножая левую и правую части уравнения на произведение G_3G_4 получим тот же узловой определитель.

Умножая левую и правую части уравнения с гибридным определителем на произведение сопротивлений $R_1R_2R_3$, получим контурный определитель. Упорядочивая его слагаемые, запишем:

$$\Delta = R_1R_2 + R_1R_3 + 0_{14} + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_4 + 0_{25} + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5.$$

Получили ту же строгую сочетательную закономерность. Только уже с сопротивлениями: число контуров – два, поэтому имеем сочетания сопротивлений по два; отсутствуют (нулевые) те слагаемые, при размыкании сопротивлений которых образуются изолированные узлы. При размыкании сопротивлений R_1 и R_4 образуется левый изолированный узел. При размыкании сопротивлений R_2 и R_5 образуется правый изолированный узел.

2.3. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Метод применяется для получения любой переменной X в символьной форме при размыкании и коротком замыкании **всех** сопротивлений ($m=n$).

Тогда будем иметь полностью выстроенную «пирамиду разложения», основанием которой будут либо « E –соединения», либо « J –соединения».

При этом полная – единая схема «отдаст» **все** свои сопротивления (проводимости) формулам. Пример такой «пирамиды» приведён на стр. 19.

Если число независимых контуров равно единице ($k = 1$), то в формуле (2.25) остаются только слагаемые, определители которых Δ^i равны единице:

$$(\sum_i^n R_i)X = \sum_i^n R_i X^i. \quad (2.27)$$

Остальные слагаемые в формуле (2.25) превращаются в нули из-за отсутствия (равенства нулю) остальных, кроме Δ^i , определителей.

У составляющих X^i нижние индексы опущены для простоты записи. Здесь контурный определитель

$\sum_i^n R_i = \Delta^{(k)}$ – сумма сопротивлений, образующих сочетания по одному ($k=1$) из всего числа n за исключением тех сопротивлений, при размыкании которых образуются изолированные узлы: в определителе остаются только сопротивления контура (см. таблицу определителей № 10).

Если число независимых контуров равно двум ($k = 2$), то в формуле (2.25) остаются только слагаемые, определители которых Δ^{ij} равны единице:

$$(\sum_{i,j}^n R_i R_j)X = \sum_{i,j}^n R_i R_j X^{ij}. \quad (2.28)$$

Остальные слагаемые в формуле (2.25) превращаются в нули из-за отсутствия (равенства нулю) остальных, кроме Δ^{ij} , определителей.

У составляющих X^{ij} нижние индексы опущены для простоты записи. Здесь контурный определитель

$\sum_{i,j}^n R_i R_j = \Delta^{(k)}$ – сумма произведений сопротивлений, образующих сочетания по два ($k = 2$) из всего числа n за исключением тех произведений сопротивлений, при размыкании которых образуются изолированные узлы или под-схемы (см. таблицу определителей № 11).

И так далее.

Когда мы говорим о размыкании каких-либо сопротивлений, то при этом помним, что все остальные сопротивления закорачиваем. При этом, если образуются изолированные узлы (при размыкании одних), то, как правило, образуются и короткозамкнутые контуры (при закорачивании остальных сопротивлений).

Если число размеченных узлов равно двум ($y-1=1$), то в формуле (2.26) остаются только слагаемые, определители которых Δ_i равны единице:

$$(\sum_i^n G_i)X = \sum_i^n G_i X_i. \quad (2.29)$$

Остальные слагаемые в формуле (2.26) превращаются в нули из-за отсутствия (равенства нулю) остальных, кроме Δ_i , определителей.

У составляющих X_i верхние индексы опущены для простоты записи. Здесь узловой определитель

$\sum_i^n G_i = \Delta^{(y)}$ – сумма проводимостей, образующих сочетания по одному ($y-1=1$) из всего числа n за исключением тех проводимостей, при коротком замыкании которых образуются короткозамкнутые контуры.

Если число размеченных узлов $y = 3$ ($y-1=2$), то в формуле (2.26) остаются только слагаемые, определители которых Δ_{ij} равны единице:

$$(\sum_{i,j}^n G_i G_j)X = \sum_{i,j}^n G_i G_j X_{ij}. \quad (2.30)$$

У составляющих X_{ij} верхние индексы опущены для простоты записи. Здесь узловой определитель

$\sum_{i,j}^n G_i G_j = \Delta^{(y)}$ – сумма произведений проводимостей, образующих сочетания по два ($y-1=2$) из всего числа n за исключением тех произведений проводимостей, при коротком замыкании которых образуются короткозамкнутые контуры.

И так далее.

Когда мы говорим о коротком замыкании каких-либо проводимостей, то все остальные проводимости размыкаем. При этом, если образуются короткозамкнутые контуры (при коротком замыкании одних), то, как правило, образуются и изолированные узлы (при размыкании остальных проводимостей).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

Введём понятие узлов для записи определителя и применения универсальной формулы.

Узлы (y) – есть нами размеченные полюсы (выводы) сопротивлений (R , Z), индуктивностей и ёмкостей.

Каждому полюсу даём по узлу при всех источниках равных нулю.

Независимые контуры (k) связаны с числом сопротивлений (n) (проводимостей) и числом размеченных узлов (y) равенством:

$$k = n - y + 1.$$

Из введённого определения следует, что при разметке узлов существует определённый произвол, позволяющий нам в одних случаях уменьшать их число, объединяя сопротивления, по которым течёт один и тот же ток (если не требуется находить напряжения между этими сопротивлениями), в других случаях – увеличивать, разделяя сопротивления Z , например, на R и pL .

Мы можем в некоторых случаях уменьшать число контуров, объединяя проводимости, к которым приложено одно и то же напряжение (если не требуется находить токи в этих проводимостях). Но, как бы мы не разметили узлы (при всех источниках равных нулю) **всегда** справедливо равенство:

$$y - 1 + k = n.$$

Такое введение узлов связано с тем, что матрица узловых проводимостей не зависит от правой части матричного узлового уравнения (от свободных членов – источников). Порядок узлового определителя определяется числом размеченных полюсов ($y - 1$) у выбранных (выделенных) сопротивлений. Матрица контурных сопротивлений также не зависит от источников. Порядок контурного определителя определяется числом независимых контуров (k). Число слагаемых в определителях зависит от числа n . Таким образом, определители (узловые и контурные) определяются тремя величинами: числом размеченных узлов (y), числом независимых контуров (k) и числом n при источниках равных нулю. При равенстве нулю источников E (вместо E -короткое замыкание) и J (вместо J -размыкание) хорошо видны размеченные узлы и независимые контуры. Часто совершается ошибка при подсчёте числа независимых контуров, особенно при наличии в электрической цепи источников J . Поэтому сначала мы будем размечать узлы (при источниках равных нулю), затем считать число сопротивлений n и только потом – число независимых контуров. Нам будет помогать равенство: $y - 1 + k = n$. Только проверив это равенство мы будем

записывать определитель, а по определителю и соединениям источников («*E-соединениям*» или «*J-соединениям*») – ответ.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

1. В исходной схеме для нахождения:
 - **напряжения** все источники тока J преобразуем в эквивалентные источники напряжения E ;
 - **тока** все источники напряжения E преобразуем в эквивалентные источники тока J .
2. Рисуем расчётную схему: либо с источниками E , либо с источниками J .
3. Для записи определителя при всех источниках равных нулю размечаем узлы: каждому полюсу $R(G)$ даём по узлу. Считаем число сопротивлений (проводимостей) между размеченными узлами и проверяем формулу:

$$y - 1 + k = n.$$

Если $k < y - 1$, то все резистивные элементы на схеме **обозначаем R** и записываем **контурный** определитель.

Если $k > y - 1$, то все элементы на схеме **обозначаем G** и записываем **узловой** определитель.

Такое обозначение на схеме (либо R , либо G) очень важно при применении метода, так как сразу видно какой определитель будем записывать: контурный, выраженный через сопротивления, либо узловой, выраженный через проводимости.

4. К расчётной схеме применяем универсальную формулу при размыкании и коротком замыкании всех сопротивлений (проводимостей).

Пример 2.6. Исходная схема содержит источники E_1, J_2 и три резистивных элемента: R_1, R_2 , и R_3 (рис. 2.34). Требуется найти напряжение U и ток I .

Решение. По приведённому алгоритму для нахождения U в исходной схеме источник J_2 (с параллельно включённым сопротивлением R_2) преобразуем в эквивалентный источник E_2 (с последовательно включённым сопротивлением R_2) и получаем расчётную схему (рис. 2.35).

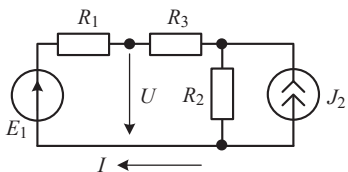


Рис. 2.34

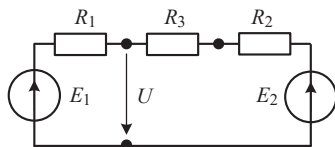


Рис. 2.35.

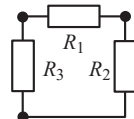


Рис. 2.36.

Для записи определителя все источники полагаем равными нулю и размечаем узлы: каждому полюсу даём по узелочку $y = 3$. (рис.2.36) Число элементов – три ($n = 3$). Проверяем формулу: $y-1+k=n$ ($3-1+1=3$). Верно.

Поскольку число контуров $k < y-1$, то все элементы на схеме обозначаем R : R_1, R_2, R_3 и записываем контурный определитель:

$\Delta^{(k)} = R_1 + R_2 + R_3$ – сумма сопротивлений, образующих сочетания по одному.

К расчетной схеме (рис. 2.35) применяем формулу разложения (2.27) $X=U$:

$$U = \frac{\sum_i^n R_i U^i}{\sum_i^n R_i} = \frac{R_1 U_{23}^1 + R_2 U_{13}^2 + R_3 U_{12}^3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 U^1 + R_2 U^2 + R_3 U^3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Нижние индексы у составляющих напряжения опущены. Нижние индексы соответствуют тем сопротивлениям, которые закорачиваются, как в формуле (2.27). Составляющие U^1, U^2 и U^3 искомого напряжения U находим из трех «E-соединений» (рис. 2.37 – 2.39):

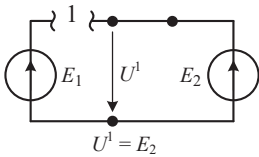


Рис. 2.37.

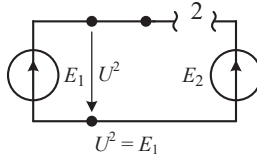


Рис. 2.38.

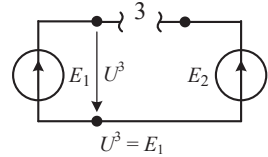


Рис. 2.39.

В первом «E-соединении»: R_1 – разомкнуто, R_2 и R_3 – короткозамкнуты.
 Во втором «E-соединении»: R_2 – разомкнуто, R_1 и R_3 – короткозамкнуты.
 В третьем «E-соединении»: R_3 – разомкнуто, R_1 и R_2 – короткозамкнуты. Записываем ответ

$$U = \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1 + R_3 E_1}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Здесь отметим, что токи во всех «E-соединениях» равны нулю и не к чему применять закон Ома.

Напряжение U в этой схеме (рис. 2.35) может быть получено и по формуле (2.30) при $y-1 = 2$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sum_{i,j}^n G_i G_j U_{ij}}{\sum_{i,j}^n G_i G_j} = \frac{G_1 G_2 U_{12}^3 + G_1 G_3 U_{13}^2 + G_2 G_3 U_{23}^1}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3} \\ &= \frac{G_1 G_2 U_{12} + G_1 G_3 U_{13} + G_2 G_3 U_{23}}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3}. \end{aligned}$$

В этой формуле $G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 = \Delta_{(y)}$ – узловый определитель.

Верхние индексы у составляющих напряжения опущены. Верхние индексы соответствуют тем проводимостям, которые размыкаются, как в формуле (2.30). Составляющие U_{12} , U_{13} и U_{23} искомого напряжения U находим из трех « E -соединений» (рис. 2.40 – 2.42):

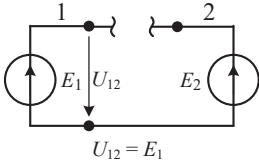


Рис. 2.40.

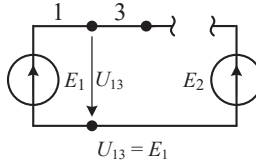


Рис. 2.41.

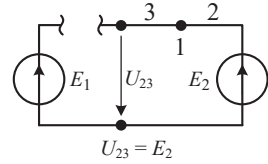


Рис. 2.42.

В первом « E -соединении»: G_1 и G_2 – короткозамкнуты, G_3 – разомкнуто.
 Во втором « E -соединении»: G_1 и G_3 – короткозамкнуты, G_2 – разомкнуто.
 В третьем « E -соединении»: G_2 и G_3 – короткозамкнуты, G_1 – разомкнуто.

$$U = \frac{G_1 G_2 E_1 + G_1 G_3 E_1 + G_2 G_3 E_2}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3}.$$

Примечание.

Решим задачу нахождения напряжения в схеме (рис. 2.35) традиционными методами: методом контурных токов с применением закона Кирхгофа и методом узловых напряжений. Сделаем эти выкладки.

Запишем уравнение по методу контурных токов:

$$(R_1 + R_2 + R_3)I = E_1 - E_2.$$

Зная ток, по второму закону Кирхгофа найдём искомое напряжение

$$U = E_1 - R_1 I = E_1 - R_1 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_2 E_1 + R_3 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Здесь сумма сопротивлений контура $R_1 + R_2 + R_3 = \Delta^{(k)}$ – контурный определитель. Получили тот же результат.

По методу узловых напряжений для случая двух узлов (будем считать, что схема содержит два узла):

$$U = \frac{E_1 G_1 + E_2 \frac{G_2 G_3}{(G_2 + G_3)}}{G_1 + \frac{G_2 G_3}{(G_2 + G_3)}} = \frac{G_1 G_2 E_1 + G_1 G_3 E_1 + G_2 G_3 E_2}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3}.$$

Здесь сумма произведений проводимостей $G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3 = \Delta_{(y)}$ – узловой определитель: есть сумма произведений проводимостей, образующих сочетание по два из трёх проводимостей.

Для нахождения тока I в исходной схеме (рис. 2.34) источник E_1 (с последовательно включённым сопротивлением R_1) преобразуем в эквивалентный источник J_1 (с параллельно включённым сопротивлением R_1) и получаем расчётную схему (рис. 2.43).

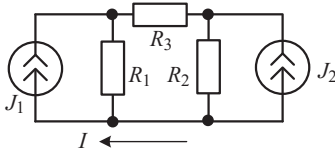


Рис. 2.43.

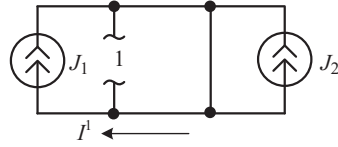


Рис. 2.44.

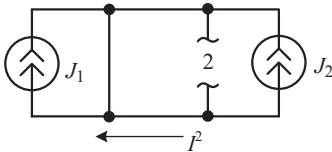
R_1 - разомкнуто,
 R_2 и R_3 - короткозамкнуты $I^1 = J_1$

Схема содержит, естественно, те же значения: $y = 3, n = 3, k = 1$.
 К этой расчетной схеме применяем ту же формулу (2.27) при $X = I$:

$$I = \frac{R_1 I_{23}^1 + R_2 I_{13}^2 + R_3 I_{12}^3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 I^1 + R_2 I^2 + R_3 I^3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

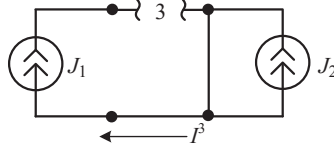
Составляющие токов I^1, I^2 и I^3 находим из трех « J -соединений» (рис. 2.44 – 2.46).

В каждом из этих « J -соединений» существует один единственный путь для каждого из источников (J_1 и J_2) – по закороткам.



R_2 - разомкнуто,
 R_1 и R_3 короткозамкнуты
 $I^2 = -J_2$

Рис. 2.45.



R_3 - разомкнуто,
 R_1 и R_2 короткозамкнуты
 $I^3 = 0$

Рис. 2.46.

Записываем ответ:

$$I = \frac{R_1 J_1 + R_2 (-J_2) + R_3 0}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 J_1 - R_2 J_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Здесь $R_1 + R_2 + R_3$ – тот же контурный определитель.

Отметим, что напряжения во всех « J -соединениях» равны нулю и не к чему применять закон Ома.

Из полученного выражения видно, что применяя традиционный метод, например, метод наложения, получим тот же результат.

Пример 2.7. В схеме (рис. 2.47) требуется найти напряжение U и ток I .

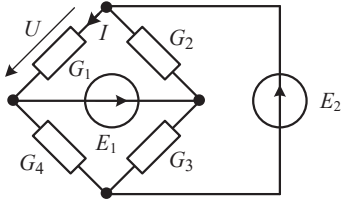


Рис. 2.47.

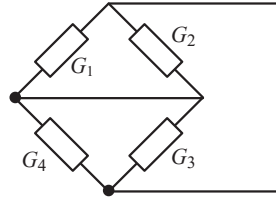


Рис. 2.48.

Решение. При всех источниках равных нулю размечаем узлы $y = 2$ (рис. 2.48). Число сопротивлений $n = 4$. Проверяем формулу: $y - 1 + k = n$. Верно. Число узлов минус единица меньше числа контуров ($y - 1 < k$). Поэтому все элементы на схеме обозначаем G и записываем **узловой** определитель:

$\Delta = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$ – сумма проводимостей, образующих сочетания по одному.

Затем записываем ответ по универсальной формуле (2.29):

$$U = \frac{\sum_i^n G_i U_i}{\sum_i^n G_i} = \frac{G_1 U_1^{234} + G_2 U_2^{134} + G_3 U_3^{124} + G_4 U_4^{123}}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{G_1 U_1 + G_2 U_2 + G_3 U_3 + G_4 U_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}.$$

Верхние индексы у составляющих напряжения опущены. Верхние индексы соответствуют тем проводимостям, которые размыкаются, как в формуле (2.29).

Составляющая $U_1 = 0$ при коротком замыкании G_1 . На рис. 2.49 и рис. 2.50 в качестве примера приведены два «E-соединения» для составляющих U_3 и U_4 .

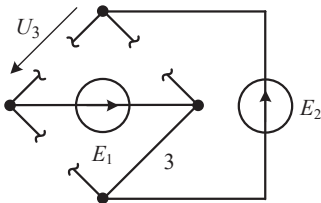


Рис. 2.49.

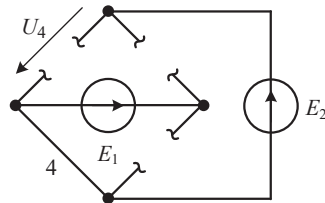


Рис. 2.50.

Записываем ответ:

$$U = \frac{G_1 0 + G_2 E_1 + G_3 (E_1 + E_2) + G_4 E_2}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}.$$

По закону Ома записываем ток $I = G_1 U$.

Если решать задачу традиционным способом, например, методом эквивалентного генератора, и на схеме все элементы обозначить сопротивлениями R_1 , то получим решение с контурным определителем.

Упорядочим все его слагаемые, расставив их в строгой сочетательной последовательности:

$\Delta = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4$ – сопротивления образуют сочетание из четырёх сопротивлений по три.

Запишем ответ по методу предельных состояний, применяя формулу записи формулы при числе контуров $k = 3$:

$$U = \frac{R_1R_2R_3E_2 + R_1R_2R_4(E_1 + E_2) + R_1R_3R_4E_1 + R_2R_3R_40}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}.$$

Часто при решении электротехнических задач проводят предварительные вычисления, не получая ответ в символьной форме. Так, например, решая задачу методом эквивалентного генератора, сначала вычисляют параметры активного двухполосника: находят $E_{\text{экв.}} = U_{\text{хх}}$ и проводят расчёт; затем находят $R_{\text{экв.}} = R_{\text{вх}}$ и тоже получают числовое значение. В «расчётную» формулу подставляют уже готовые числовые значения. При таком решении задачи (получения чисел на каждом шаге решения) теряется и физика, и математика, заложенная в электрической схеме, часто теряется размерность. Конечно, сравнивая ответы, записанные через проводимости и через сопротивления, мы хорошо видим разницу. Запись ответа с узловым определителем компактнее и проще, чем с контурным определителем. Метод предельных состояний даёт алгоритм выбора более простой записи ответа, предлагая сравнивать число узлов минус единица, с числом независимых контуров.

Учащимся часто предлагают самим выбрать наиболее рациональный метод решения той или иной задачи. И мы предлагаем читателю самостоятельно выбрать метод и решить этот пример любым известным традиционным способом.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

В заключение этого параграфа покажем, что метод предельных состояний позволяет решить обратную задачу, когда известен ответ (задано решение) и требуется по ответу нарисовать схему и указать искомую переменную (напряжение, ток). Приведём пример.

Пример 2.8. Пусть для электрической цепи записан ответ для напряжения U :

$$U = \frac{R_1R_2E + R_2R_3E}{R_3R_2 + R_2R_1 + R_4R_2 + R_3R_4 + R_4R_1}$$

Требуется нарисовать схему (расставить и обозначить все элементы) и указать, на каком элементе найдено напряжение.

Решение. Сначала расставим все слагаемые знаменателя и числителя по порядку (упорядочим слагаемые) и не забудем про отсутствующие (нулевые) слагаемые. Начнём со знаменателя. Итак, знаменатель (определитель) равен:

$$\Delta = R_1R_2 + 0_{13} + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4.$$

Убеждаемся, что определитель есть сумма произведений сопротивлений, образующих сочетания по два из четырёх. В этой сумме отсутствует произведение сопротивлений R_1R_3 . Следовательно, электрическая цепь содержит два контура (сочетание по два сопротивления) и сопротивления R_1 и R_3 включены последовательно (так как при их размыкании образуется изолированный узел). На рис. 2.51 приведено это соединение R элементов пока без источника E .

Нарисуем также все пять (по числу слагаемых определителя) соединений при разомкнутых одних сопротивлениях, стоящих в произведениях, и короткозамкнутых других – остальных (рис. 2.52 – 2.56).

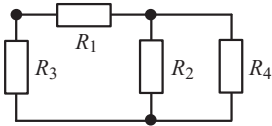


Рис. 2.51.

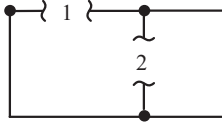


Рис. 2.52.

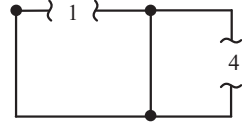


Рис. 2.53.

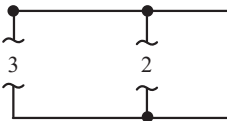


Рис. 2.54.

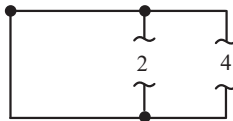


Рис. 2.55.

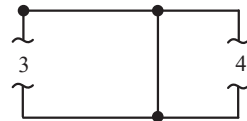


Рис. 2.56.

Теперь займёмся числителем. Запишем его вместе со знаменателем. Желательно каждое слагаемое числителя записывать над соответствующим слагаемым знаменателя:

$$\begin{aligned} U &= \frac{R_1R_2U^{12} + R_1R_4U^{14} + R_2R_3U^{23} + R_2R_4U^{24} + R_3R_4U^{34}}{R_1R_2 + 0_{13} + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4} = \\ &= \frac{R_1R_2E + R_1R_40 + R_2R_3E + R_2R_40 + R_3R_40}{R_1R_2 + 0_{13} + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4} \end{aligned}$$

Так как в ответе источник E стоит только при произведениях сопротивлений R_1R_2 и R_2R_3 , то его место в приведённых пяти соединениях и, соответственно искомого напряжения U должно быть там и только там, как показано на рисунках.

Нарисуем все эти пять E -соединений (рис. 2.57 – 2.61).

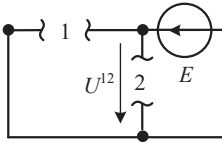


Рис. 2.57.

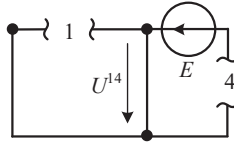


Рис. 2.58.

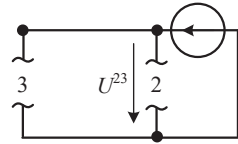


Рис. 2.59.

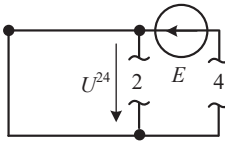


Рис. 2.60.

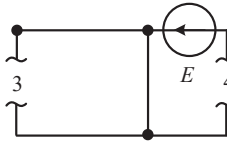


Рис. 2.61.

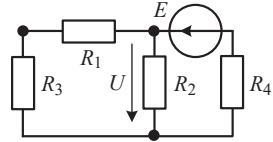


Рис. 2.62.

Эти неравные нулю составляющие напряжения U равны E .

$U^{12} = E$ и $U^{23} = E$. Остальные составляющие напряжения U равны нулю: $U^{14} = U^{24} = U^{34} = 0$. Осталось нарисовать окончательно электрическую схему для заданного ответа. Эта схема представлена на рис. 2.62.

Можно было бы и не рисовать все пять E -соединений. Хорошо овладев методом и имея навык, достаточно нарисовать только те E -соединения, слагаемые которых не равны нулю. В ответе их имеется два.

2.4. МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ЧАСТОТНОЙ И ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЯХ

Для электрических цепей в *частотной* и *временной* областях исходная универсальная формула принимает вид:

$$(\Delta_1 + Z_1 \Delta^1)X = \Delta_1 X_1 + Z_1 \Delta^1 X^1 \quad \text{— первая форма записи.} \quad (2.31)$$

Умножив (2.31) на Y_1 и, переставляя местами слагаемые, получим:

$$(\Delta^1 + Y_1 \Delta_1)X = \Delta^1 X^1 + Y_1 \Delta_1 X_1 \quad \text{— вторая форма записи.} \quad (2.32)$$

В этой формуле:

$$Z_1 = pL \text{ или } Z_1 = 1/pC;$$

$$Y_1 = 1/pL \text{ или } Y_1 = pC.$$

Здесь Z_1 и Y_1 – не комплексные сопротивления и проводимости, пока ещё мы не дали им имени в этих формулах.

Вспомним взаимное соответствие между мгновенными значениями напряжений и токов на индуктивном и ёмкостном элементах во временной области и комплексными – в частотной области:

$$\text{мгновенное напряжение на индуктивном элементе } u_L = L di/dt = \frac{d}{dt} Li;$$

$$\text{комплексное напряжение на индуктивном элементе } \dot{U}_L = j\omega LI.$$

Обозначая d/dt и $j\omega$ одним оператором p , будем иметь одинаковую запись $U_L = pLI$, которая годится и для частотной, и для временной областей.

По своему виду и по своей размерности это последнее привычное для нас выражение есть закон Ома. Поэтому обозначим произведение $pL = Z$.

Тогда запишем $U_L = Z I$ (закон Ома). Аналогично для тока через ёмкостной элемент $I_C = pCU = Y U$ (закон Ома). Таким образом:

для частотной области при $p = j\omega$, $Z_1 = pL = j\omega L$ или $Z_1 = 1/j\omega C$ уже с $j\omega$ Z_1 – комплексное сопротивление; $Y_1 = 1/pL = 1/j\omega L$ или $Y_1 = j\omega C$ уже с $j\omega$ Y_1 – комплексная проводимость; искомая переменная $X = \dot{X}(j\omega)$ – комплексная величина (ток, напряжение);

для временной области $p = d/dt$ и $X = x(t)$ – мгновенное значение.

Примечание.

В частотной области при синусоидальных источниках $j\omega L$ – индуктивное комплексное сопротивление и $j\omega C$ – ёмкостная комплексная проводимость обозначаются на комплексных схемах с комплексными источниками. Именно при синусоидальных источниках был осуществлён переход от d/dt к $j\omega$. К такой записи $j\omega L$ привыкли за много лет.

Во временной области при источниках произвольной формы dL/dt (по размерности сопротивление) на схемах рядом с индуктивностью и dC/dt (по размерности проводимость) рядом с ёмкостью не обозначают – ещё не привыкли. Не привыкли, так как часто имеют дело либо с синусоидальными источниками, либо с постоянными источниками. Поэтому будем их обозначать на схемах сопротивлениями $Z = pL$ и проводимостями $Y = pC$ (помня, что $p = d/dt$) и производить все действия как с алгебраическими величинами до окончательного ответа в символьной форме. Будем размыкать их и закорачивать, так как они – сопротивления и проводимости.

Все остальные формулы остаются по форме (по записи) прежними. В них добавилось новое содержание: частотная и временная область.

Приведём эти основные формулы.

Универсальная формула при размыкании и коротком замыкании произвольного числа Z:

$$(\Delta_{12\dots m} + \sum_i^m Z_i \Delta_i + \sum_{i,j}^m Z_i Z_j \Delta^{ij} + \dots + Z_1 Z_2 \dots Z_m \Delta^{12\dots m})X = \\ = \Delta_{12\dots m} X_{12\dots m} + \sum_i^m Z_i \Delta_i X_i + \sum_{i,j}^m Z_i Z_j \Delta^{ij} X^{ij} + \dots + Z_1 Z_2 \dots Z_m \Delta^{12\dots m} X^{12\dots m}. \quad (2.33)$$

Универсальная формула при коротком замыкании и размыкании произвольного числа Y:

$$(\Delta^{12\dots m} + \sum_i^m Y_i \Delta_i + \sum_{i,j}^m Y_i Y_j \Delta_{ij} + \dots + Y_1 Y_2 \dots Y_m \Delta_{12\dots m})X = \\ = \Delta^{12\dots m} X^{12\dots m} + \sum_i^m Y_i \Delta_i X_i + \sum_{i,j}^m Y_i Y_j \Delta_{ij} X_{ij} + \dots + Y_1 Y_2 \dots Y_m \Delta_{12\dots m} X_{12\dots m}. \quad (2.34)$$

Формула метода предельных состояний и различные формы её записи:

$$(\sum_i^n Z_i)X = \sum_i^n Z_i X^i. \quad \text{при } k=1 \quad (2.35)$$

$$(\sum_{i,j}^n Z_i Z_j)X = \sum_{i,j}^n Z_i Z_j X^{ij}. \quad \text{при } k=2 \quad (2.36)$$

И так далее.

$$(\sum_i^n Y_i)X = \sum_i^n Y_i X_i. \quad \text{при } y-1=1 \quad (2.37)$$

$$(\sum_{i,j}^n Y_i Y_j)X = \sum_{i,j}^n Y_i Y_j X_{ij}. \quad \text{при } y-1=2 \quad (2.38)$$

И так далее.

Пример 2.9. В схеме рис. 2.63 дан источник тока J , четыре индуктивности L_1, L_2, L_3, L_4 и резистор R_5 . Требуется записать выражение для искомого тока I в частотной области при $J = J(j\omega)$ и записать дифференциальное уравнение для тока $i(t)$ во временной области при $J = J(t)$.

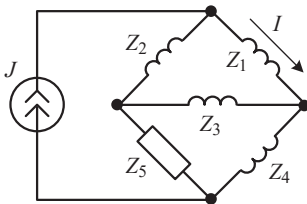


Рис. 2.63.

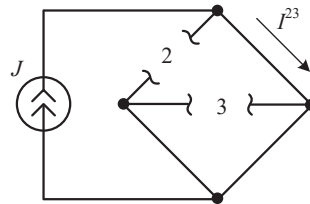


Рис. 2.64.

Решение. Применяем метод предельных состояний для частотной и временной областей. Введём обозначения $Z_1 = pL_1, Z_2 = pL_2, Z_3 = pL_3, Z_4 = pL_4, Z_5 = R_5$. Размечаем узлы $y = 4$. Число независимых контуров $k = 2$, число

индуктивных и резистивных элементов $n = 5$. Проверяем формулу: $y - 1 + k = n$. Верно.

Так как $k < y - 1$, то все элементы на схеме обозначаем Z и применяем универсальную формулу для частотной и временной областей (2.36):

$$(0_{12} + Z_1Z_3 + Z_1Z_4 + Z_1Z_5 + Z_2Z_3 + Z_2Z_4 + Z_2Z_5 + Z_3Z_4 + Z_3Z_5 + 0_{45})I = Z_1Z_30 + Z_1Z_40 + Z_1Z_50 + Z_2Z_3J + Z_2Z_4J + Z_2Z_5J + Z_3Z_40 + Z_3Z_5J.$$

Отметим, что соединений с одними источниками в общем случае столько, сколько слагаемых в определителе и не больше. Они не содержат сопротивлений (проводимостей), в них (J -соединениях) отсутствуют напряжения – одни источники и коротки. В нашем примере число таких соединений – четыре. Приведём все четыре J -соединения, соответствующие ненулевым слагаемым правой части уравнения. Они представлены на рис. 2.64 – 2.67.

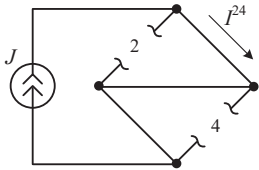


Рис. 2.65.

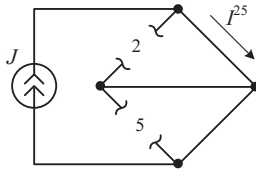


Рис. 2.66.

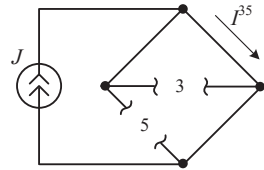


Рис. 2.67.

Здесь необходимо отметить, что для источника тока в каждом J -соединении существует только единственный путь (через единственное короткое замыкание), по которому он пройдёт. Это следует из того, что решение должно быть единственным. Из единственности решения следует, что при одном слагаемом (например, Z_2Z_3) не могут стоять разные множители. Если при слагаемом Z_2Z_3 стоит J , то уже не может стоять 0 . При других слагаемых определителя – аналогично.

Подставляем в это выражение $Z = pL$:

$$(p^2L_1L_3 + p^2L_1L_4 + pL_1R_5 + p^2L_2L_3 + p^2L_2L_4 + pL_2R_5 + p^2L_3L_4 + pL_3R_5)I = p^2L_2L_3J + p^2L_2L_4J + pL_2R_5J + pL_3R_5J.$$

Группируя слагаемые и сокращая на p , получим:

$$R_5(L_1 + L_2 + L_3)I + p(L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4 + L_3L_4)I = R_5(L_2 + L_3)J + p(L_2L_3 + L_2L_4)J.$$

Запишем последнее выражение в виде:

$$(A_0 + pA_1)I = B_0 + pB_1,$$

где:

$$A_0 = R_5(L_1 + L_2 + L_3); \quad A_1 = L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4 + L_3L_4; \\ B_0 = R_5(L_2 + L_3)J; \quad B_1 = (L_2L_3 + L_2L_4)J.$$

По существу ответ уже получен:

Для частотной области при $p = j\omega$, $J = J(j\omega)$ и $I = I(j\omega)$. запишем:

$$I(j\omega) = \frac{B_0 + pB_1}{A_0 + pA_1} = \frac{R_5(L_2 + L_3)J + j\omega(L_2L_3 + L_2L_4)J}{R_5(L_1 + L_2 + L_3) + j\omega(L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4 + L_3L_4)}.$$

Для временной области при $p = d/dt$, $J = J(t)$ и $I = i(t)$ запишем дифференциальное уравнение:

$$A_0 i(t) + A_1 di/dt = B_0 + dB_1/dt.$$

Пример 2.10. В схеме на рис. 2.68. даны все сопротивления и источники. Требуется найти напряжение \dot{U} в частотной области (при $p = j\omega$).

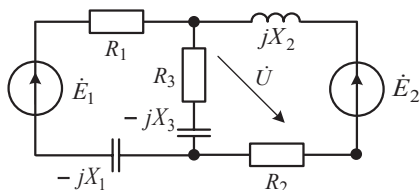


Рис. 2.68.

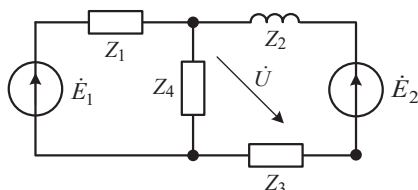


Рис. 2.69.

Решение. Применяем метод предельных состояний. В приведённой схеме удобно объединить некоторые элементы и обозначить:

$$Z_1 = R_1 - jX_1, \quad Z_2 = jX_2, \quad Z_3 = R_2, \quad Z_4 = R_3 - jX_3.$$

Получим схему, приведённую на рис. 2.69. Для записи определителя при всех источниках, равных нулю, размечаем узлы: каждому полюсу размеченных сопротивлений даём по узлу $y = 3$ (рис. 2.70). Число элементов $n = 4$. Независимых контуров $k = 2$.

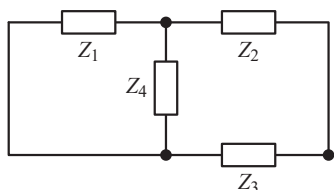


Рис. 2.70.

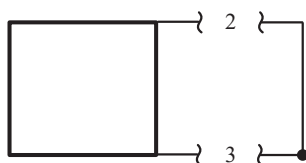


Рис. 2.71.

Проверяем формулу $y-1+k = n$. Так как $y-1 = k$, то есть выбор: записать либо контурный, либо узловый определитель. Выбираем, например, контурный. Тогда все элементы на схеме обозначаем Z и записываем:

$\Delta = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_1Z_4 + 0_{23} + Z_2Z_4 + Z_3Z_4$ – есть сумма произведений сопротивлений, образующих сочетания по два ($k = \underline{2}$) из всего числа $n = 4$ за исключением произведения сопротивлений Z_2Z_3 . Размыкание этих сопротивлений Z_2 и Z_3 образует изолированный узел, а короткое замыкание остальных сопротивлений Z_1 и Z_4 образуют короткозамкнутый контур (рис 2.71).

Если мы не увидели изолированного узла, то должны увидеть короткозамкнутый контур. Если не увидели ни изолированного узла, ни короткозамкнутого контура и оставили слагаемое $Z_2 Z_3$, то числитель поможет: мы должны увидеть короткозамкнутый источник E_1 .

Ответ запишем по формуле (2.36) для напряжения ($X = U$):

$$\dot{U} = \frac{\sum_{i,j}^n Z_i Z_j U^{ij} = Z_1 Z_2 U_{34}^{12} + Z_1 Z_3 U_{24}^{13} + Z_1 Z_4 U_{23}^{14} + Z_2 Z_4 U_{13}^{24} + Z_3 Z_4 U_{12}^{34}}{\sum_{i,j}^n Z_i Z_j = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}.$$

На рис. 2.72 – 2.75 приведены четыре E -соединения для нахождения четырёх составляющих искомого напряжения.

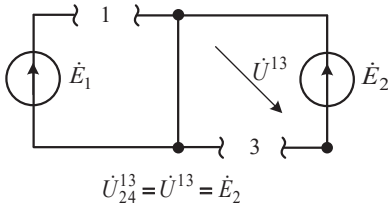


Рис. 2.72.

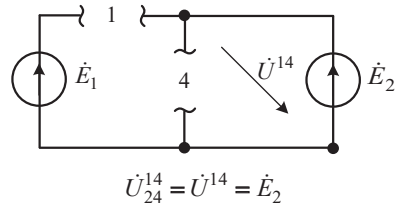


Рис. 2.73.

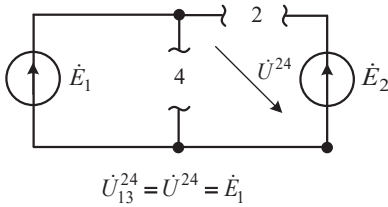


Рис. 2.72.

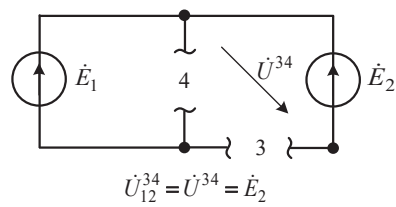


Рис. 2.73.

Составляющая $\dot{U}_{34}^{12} = \dot{U}^{12} = 0$. Нижние индексы у составляющих напряжений опущены для простоты записи. Нижние индексы соответствуют тем сопротивлениям, которые закорачиваются.

Записываем ответ:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{Z_1 Z_3 \dot{U}_{24}^{13} + Z_1 Z_4 \dot{U}_{23}^{14} + Z_2 Z_4 \dot{U}_{13}^{24} + Z_3 Z_4 \dot{U}_{12}^{34}}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4} = \\ &= \frac{Z_1 Z_3 \dot{E}_2 + Z_1 Z_4 \dot{E}_2 + Z_2 Z_4 \dot{E}_1 + Z_3 Z_4 \dot{E}_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4} \end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что для источников напряжения (в каждом E -соединении) существует только единственный путь для «собираения» источников. Это следует из того, что решение должно быть единственным.

В числителе при каждом слагаемом определителя множителем должно стоять что-то единственное. Так, например, при слагаемом определителя $Z_1 Z_3$ стоит E_2 (прошли одним путём). Значит, другого множителя при этом слагаемом быть не может. При других слагаемых определителя аналогично.

Пример 2.11. На рис. 2.76 представлена трёхфазная система питания и нагрузки устройств летательных аппаратов.

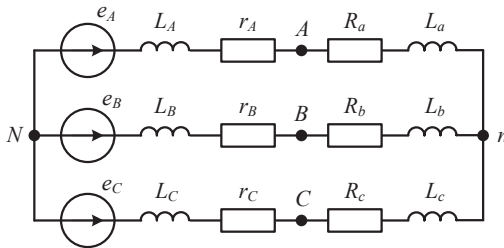


Рис. 2.76.

Здесь:

e_A, e_B, e_C – фазные ЭДС обмоток генератора;

L_A, L_B, L_C – индуктивности фазных обмоток;

r_A, r_B, r_C – активные сопротивления фазных обмоток;

$R_a, L_a, R_b, L_b, R_c, L_c$ – активные сопротивления и индуктивности соответственно фаз нагрузки.

Даны числовые значения элементов трёхфазного генератора и нагрузки: $E_\Phi = 115$ В, $f = 400$ Гц, $L_A = L_B = L_C = 1.6$ мГн, $r_A = r_B = r_C = 0.081$ Ом и $R_a = R_b = 3$ Ом, $R_c = 6$ Ом, $L_a = L_b = L_c = 3.18$ мГн.

Требуется найти напряжение на фазе генератора \dot{U}_{AN} и напряжение смещения \dot{U}_{nN} для двух случаев: нормальной работы и при $\dot{U}_{An} = 0$ (короткого замыкания фазы A).

Решение. Применим метод предельных состояний. Введём обозначения элементов. Обозначим сопротивления соответственно:

$$\begin{aligned} Z_1 = Z_2 = Z_3 &= r_A + j\omega L_A = r_B + j\omega L_B = r_C + j\omega L_C = 0.081 + j 4.021 = 4.022 e^{j 88.8^\circ} \text{ Ом}, \\ Z_4 = Z_5 &= R_a + j\omega L_a = R_b + j\omega L_b = 3 + j 7.992 = \\ &= 8.537 e^{j 69.4^\circ} \text{ Ом}, \quad Z_6 = R_c + j\omega L_c = 6 + j 7.992 = 9.994 e^{j 53.1^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Расчётная схема, к которой будем применять метод, приведена на рис. 2.77.

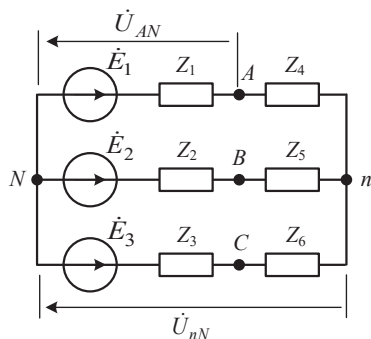


Рис. 2.77.

При всех источниках, равных нулю, считаем: $y = 5$, $k = 2$, $n = 6$. Проверим равенство: $y - 1 + k = n$. Так как $k < y - 1$, записываем контурный определитель:

$$\Delta = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + 0_{14} + Z_1 Z_5 + Z_1 Z_6 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + 0_{25} + Z_2 Z_6 + Z_3 Z_4 + Z_3 Z_5 + 0_{36} + Z_4 Z_5 + Z_4 Z_6 + Z_5 Z_6 = -386.005 + j 294.161 = 485.315 e^{j142.69^\circ} \text{ Ом}^2.$$

При записи слагаемых определителя мы сначала, чтобы не потерять слагаемые, перебираем все сочетания по 2 из 6, даже не смотря на схему. Затем внимательно смотрим на схему (при источниках равных нулю) и обнуляем те слагаемые, при размыкании сопротивлений которых образуются изолированные узлы. При этом все остальные сопротивления закорачиваем.

Таких обнулённых слагаемых в определителе три: $Z_1 Z_4$, $Z_2 Z_5$, $Z_3 Z_6$. Если не обнулить, например, слагаемое $Z_1 Z_4$, не заметив изолированного узла и короткозамкнутого контура (рис. 2.78), то при записи правой части уравнения мы обнаружим ошибку. Мы должны увидеть короткозамкнутые источники \dot{E}_2 и \dot{E}_3 (рис. 2.79). Таким образом, при записи определителя и правой части уравнения, идёт двойная проверка:

- если не увидели изолированного узла, то должны увидеть короткозамкнутый контур;
- если не увидели ни изолированного узла, ни короткозамкнутого контура, должны увидеть короткозамкнутые источники.

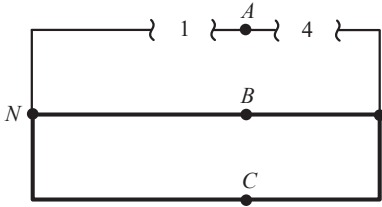


Рис. 2.78.

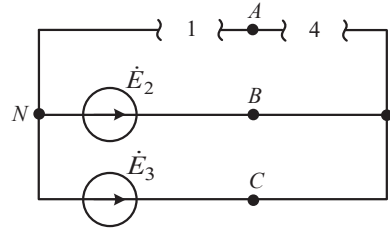


Рис. 2.79.

По слагаемым определителя нарисуем только четыре E -соединения (рис. 2.80 – 2.83).

Читателю предлагается самостоятельно нарисовать оставшиеся E -соединения и сравнить с приведённым ниже ответом.

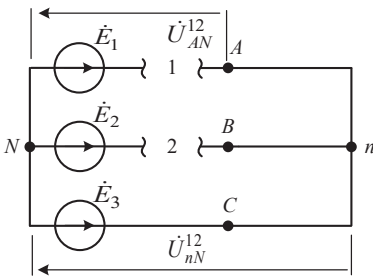


Рис 2.80.

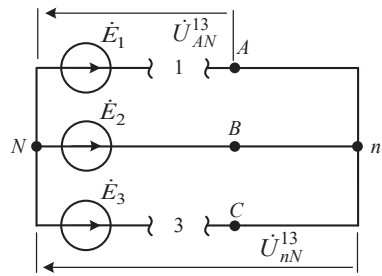


Рис. 2.81.

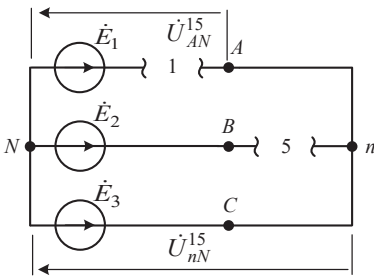


Рис 2.82.

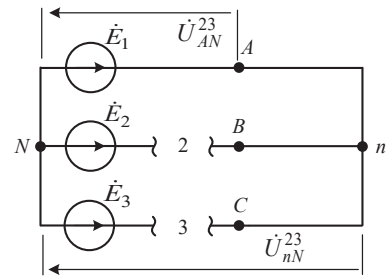


Рис. 2.83.

Записываем ответ для искомых напряжений:

$$\dot{U}_{AN} = \dot{U}_A = \frac{1}{\Delta} [Z_1 Z_2 \dot{E}_3 + Z_1 Z_3 \dot{E}_2 + Z_1 Z_5 \dot{E}_3 + Z_1 Z_6 \dot{E}_2 + Z_2 Z_3 \dot{E}_1 + Z_2 Z_4 \dot{E}_1 + Z_2 Z_6 \dot{E}_1 + Z_3 Z_4 \dot{E}_1 + Z_3 Z_5 \dot{E}_1 + Z_4 Z_5 \dot{E}_1 + Z_4 Z_6 \dot{E}_1 + Z_5 Z_6 \dot{E}_1].$$

Группируя слагаемые, получим:

$$\dot{U}_{AN} = \frac{1}{\Delta} [(Z_2Z_3 + Z_2Z_4 + Z_2Z_6 + Z_3Z_4 + Z_3Z_5 + Z_4Z_5 + Z_4Z_6 + Z_5Z_6)\dot{E}_1 + (Z_1Z_3 + Z_1Z_6)E_2 + (Z_1Z_2 + Z_1Z_5)\dot{E}_3] = 77.539 - j 11.151 = 78.337 e^{-j8.18^\circ} \text{ В.}$$

$$\dot{U}_{nN} = \frac{1}{\Delta} [Z_1Z_2\dot{E}_3 + Z_1Z_3\dot{E}_2 + Z_1Z_5\dot{E}_3 + Z_1Z_6\dot{E}_2 + Z_2Z_3\dot{E}_1 + Z_2Z_4\dot{E}_3 + Z_2Z_6\dot{E}_1 + Z_3Z_4\dot{E}_2 + Z_3Z_5\dot{E}_1 + Z_4Z_5\dot{E}_3 + Z_4Z_6\dot{E}_2 + Z_5Z_6\dot{E}_1].$$

Группируя слагаемые, получим:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{1}{\Delta} [(Z_2Z_3 + Z_2Z_6 + Z_3Z_5 + Z_5Z_6)\dot{E}_1 + (Z_1Z_3 + Z_1Z_6 + Z_3Z_4 + Z_4Z_6)\dot{E}_2 + (Z_1Z_2 + Z_1Z_5 + Z_2Z_4 + Z_4Z_5)\dot{E}_3] = -5.315 - j 7.034 = 8.816 e^{-j127.08^\circ} \text{ В.}$$

При коротком замыкании одной из фаз нагрузки, например, при коротком замыкании Z_4 (фазы A , рис. 2.84) найдём сначала определитель. Считаем число узлов, контуров и сопротивлений:

Число узлов стало четыре $y = 4$, число контуров осталось прежним $k = 2$, число элементов $n = 5$. Проверяем равенство $y - 1 + k = n$. Контурный определитель равен:

$$\Delta = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_1Z_5 + Z_1Z_6 + Z_2Z_3 + Z_2Z_6 + Z_3Z_5 + Z_5Z_6 = 266.841 e^{j146.09^\circ} \text{ Ом}^2.$$

$$\dot{U}_{AN} = \frac{1}{\Delta} [Z_1Z_2\dot{E}_3 + Z_1Z_3\dot{E}_2 + Z_1Z_5\dot{E}_3 + Z_1Z_6\dot{E}_2 + Z_2Z_3\dot{E}_1 + Z_2Z_6\dot{E}_1 + Z_3Z_5\dot{E}_1 + Z_5Z_6\dot{E}_1]$$

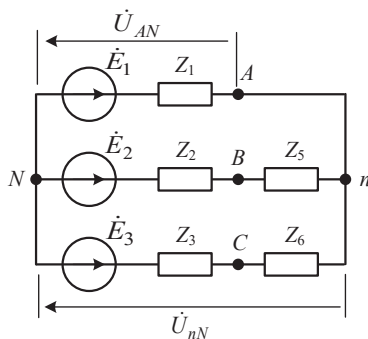


Рис. 2.84.

Группируя слагаемые:

$$\dot{U}_{AN} = \frac{1}{\Delta} [(Z_2Z_3 + Z_2Z_6 + Z_3Z_5 + Z_5Z_6)\dot{E}_1 + (Z_1Z_3 + Z_1Z_6)\dot{E}_2 + (Z_1Z_2 + Z_1Z_5)\dot{E}_3] = 45.785 - j 16.20 = 48.567 e^{-j19.49^\circ} \text{ В.}$$

При $\dot{U}_{An} = 0$ напряжение $\dot{U}_{nN} = \dot{U}_{AN}$.

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ НА РЕЗИСТИВНЫЕ R (G) ПОДСХЕМЫ.

Современная электротехника вот уже несколько десятилетий пользуется комплексным методом расчёта электрических цепей с введением понятий комплексных сопротивлений Z и комплексных проводимостей Y , содержащих математическое комплексное j и физическое ω — круговую частоту. В этой части работы предлагаются формулы, позволяющие проводить расчёт электрических цепей без введения понятий «комплексное сопротивление» и «комплексная проводимость». Получим формулы, позволяющие проводить расчёт, имея дело только с физически реальными величинами: индуктивностью L и ёмкостью C .

В предыдущей части обозначениям Z и Y мы оставили имена: «комплексное сопротивление» и «комплексная проводимость» соответственно, только при $p = j\omega$. При $p = d/dt$ мы также можем их называть «сопротивление» Z и «проводимость» Y , учитывая их место в формулах и размерность.

В этой части мы обойдёмся без этих обозначений и этих имён, заменив их в формулах физическими обозначениями и именами: индуктивностью L и ёмкостью C .

Для электрической цепи переменного тока, как это было показано выше, формулы метода предельных состояний остаются прежними.

Рассмотрим электрическую $R(G), L$ -цепь, в которой имеется только один индуктивный элемент L_1 .

Этот элемент и будем размыкать и закорачивать. Исходная универсальная формула разложения для Z_1 (первая форма записи) имеет вид (2.31):

$$(\Delta_1 + Z_1 \Delta^1)X = \Delta_1 X_1 + Z_1 \Delta^1 X^1.$$

При подстановке в эту формулу $Z_1 = pL_1$, получим:

$$(\Delta_1 + pL_1 \Delta^1)X = \Delta_1 X_1 + pL_1 \Delta^1 X^1. \quad (2.39)$$

Приведём это уравнение к виду:

$$(A_0 + p A_1)X = B_0 + pB_1, \quad (2.40)$$

где: $A_0 = \Delta_1,$ $A_1 = L_1 \Delta^1,$
 $B_0 = \Delta_1 X_1,$ $B_1 = L_1 \Delta^1 X^1.$

Рассмотрим электрическую $R(G), C$ -цепь, в которой имеется только один ёмкостный элемент C_1 . Этот элемент и будем размыкать и закорачивать.

Исходная универсальная формула при подстановке в неё $Z_1 = 1/pC_1$ принимает вид:

$$(\Delta_1 + 1/pC_1 \Delta^1)X = \Delta_1 X_1 + 1/pC_1 \Delta^1 X^1. \quad (2.41)$$

В этой формуле pC_1 стоит в знаменателе, что требует дальнейших преобразований для приведения уравнения (2.41) к виду (2.40).

Чтобы записать выражение без знаменателя (без дальнейших преобразований), применим исходную универсальную формулу (2.32) для Y_1 , которая имеет вид:

$$(\Delta^1 + Y_1 \Delta_1)X = \Delta^1 X^1 + Y_1 \Delta_1 X_1.$$

При подстановке в эту формулу $Y_1 = pC_1$, получим:

$$(\Delta^1 + pC_1 \Delta_1)X = \Delta^1 X^1 + pC_1 \Delta_1 X_1 \quad (2.42)$$

Приведём уравнение (5.4) к виду (5.2):

$$(A_0 + p A_1)X = B_0 + p B_1. \quad (2.43)$$

Здесь: $A_0 = \Delta^1,$ $A_1 = C_1 \Delta_1,$
 $B_0 = \Delta^1 X^1,$ $B_1 = C_1 \Delta_1 X_1.$

Напомним, что в этих, ранее принятых обозначениях, нижний индекс у определителя означает короткое замыкание сопротивления, верхний индекс – размыкание сопротивления (проводимости).

Сравнивая коэффициенты A и B уравнений (2.40) и (2.43), видим, что нет *единства*: все коэффициенты A и B с одинаковыми индексами имеют определители с *разными* индексами. Посмотрим на коэффициент A_0 : в формуле (2.40) $A_0 = \Delta_1$ определитель имеет нижний индекс; в формуле (2.43) $A_0 = \Delta^1$ определитель имеет верхний индекс.

Разные и остальные коэффициенты A с одинаковыми индексами в этой, по сути, одной формуле. Посмотрим на коэффициент A_1 :

$A_1 = L_1 \Delta^1$ – для индуктивного элемента у определителя верхний индекс;

$A_1 = C_1 \Delta_1$ – для ёмкостного элемента у определителя нижний индекс.

Рассмотрим $R(G), L, C$ -цепь. Формула разложения (например, первая форма записи) при размыкании и коротком замыкании двух элементов Z_1 и Z_2 имеет вид (2.33) при $m = 2$:

$$(\Delta_{12} + Z_1 \Delta_2^1 + Z_2 \Delta_1^2 + Z_1 Z_2 \Delta^{12})X = \Delta_{12} X_{12} + Z_1 \Delta_2^1 X_2^1 + Z_2 \Delta_1^2 X_1^2 + Z_1 Z_2 \Delta^{12} X^{12}. \quad (2.44)$$

При подстановке в эту формулу $Z = pL$ ($Z = 1/pC$) она приводится к уравнению второго порядка вида:

$$(A_0 + pA_1 + p^2 A_2)X = B_0 + pB_1 + p^2 B_2. \quad (2.45)$$

Легко убедиться, что при подстановке в формулу (2.44) различных вариантов сопротивлений: $Z_{L1} = pL_1$ и $Z_{L2} = pL_2$, $Z_{L1} = pL_1$ и $Z_{C2} = 1/pC_2$, $Z_{L2} = pL_2$ и $Z_{C1} = 1/pC_1$, $Z_{C1} = 1/pC_1$ и $Z_{C2} = 1/pC_2$ не будет *единства* в коэффициентах A и B с одинаковыми индексами. Возникает вопрос: как сделать *запись единой* (независящую от элемента) для всех коэффициентов A и B с одинаковыми индексами? Как дать *равное право* и индуктивному и ёмкостному элементам в коэффициентах уравнения быть *сомножителями при определителях с одними и теми же индексами*.

Это равное право им даёт их физическая сущность:

– на частоте $f = 0$ (времени $t = \infty$) индуктивность L ведёт себя как короткое замыкание, а ёмкость C ведёт себя как обрыв (разомкнута);

– на частоте $f = \infty$ (времени $t = 0$) индуктивность L ведёт себя как обрыв (разомкнута), а ёмкость C ведёт себя как короткое замыкание.

В связи с этим переобозначим индексы у определителей. Дадим определителям индексы, соответствующие физической сущности L и C

элементов, при которых они стоят. Будем в дальнейшем обозначать:

нижними индексами – *поведение* (состояние) элементов L и C на частоте $f = 0$ (времени $t = \infty$);

верхними индексами – *поведение* (состояние) элементов L и C на частоте $f = \infty$ (времени $t = 0$);

одной и той же буквой N (этим и даём им равное право) будем обозначать как индуктивный L , так и ёмкостной C элементы.

Теперь формулы (2.39) и (2.42) можно **объединить одной записью**:

$$(\Delta_1 + pN_1\Delta^1)X = \Delta_1X_1 + pN_1\Delta^1X^1 \quad \text{или} \quad (A_0 + pA_1)X = B_0 + pB_1, \quad (2.46)$$

где коэффициенты A и B (независимо от L и C элементов) равны:

$A_0 = \Delta_1$ – определитель оставшейся резистивной R (G) подсхемы, если *положить* частоту $f = 0$ для N_1 (или L_1 или C_1) элемента;

$B_0 = \Delta_1X_1$, где X_1 – составляющая искомой переменной X в этой резистивной R (G) подсхеме при $f = 0$ для N_1 .

$A_1 = N_1\Delta^1$, где Δ^1 – определитель второй оставшейся резистивной R (G) подсхемы, если *положить* частоту $f = \infty$ для N_1 (или L_1 или C_1) элемента;

$B_1 = N_1\Delta^1X^1$, где X^1 – составляющая искомой переменной X в этой второй резистивной R (G) подсхеме при частоте $f = \infty$ для N_1 .

Примечание.

Выражение «*положить частоту*» $f = 0$ или $f = \infty$ не означает подать на вход схемы сигнал с такой частотой. Выражение «*положить частоту*» означает *поведение* или индуктивного, или ёмкостного элементов, стоящих множителями у определителей, в зависимости от его индексов: *положить* $f = 0$ означает его *поведение* (или L или C) при нижнем индексе определителя; *положить* $f = \infty$ означает его *поведение* (или L или C) при верхнем индексе определителя.

Таким образом, определитель с нижним индексом «*требует*» поведения элементов L и C при частоте $f = 0$; определитель с верхним индексом «*требует*» поведения элементов L и C при частоте $f = \infty$.

Формулу второго порядка (2.45) запишем тоже со всеми её A и B коэффициентами:

$$(A_0 + pA_1 + p^2A_2)X = B_0 + pB_1 + p^2B_2. \quad (2.47)$$

В этой формуле коэффициенты A и B равны:

$A_0 = \Delta_{12}$ – определитель оставшейся резистивной R (G) подсхемы, если *положить частоту* $f = 0$ (все индексы у определителя нижние) для всех N_1 и N_2 индуктивных и ёмкостных элементов;

$A_1 = N_1\Delta_2^1 + N_2\Delta_1^2$. Здесь:

Δ_2^1 – определитель второй резистивной подсхемы, если положить $f = \infty$ (верхний индекс) для N_1 и $f = 0$ (нижний индекс) для N_2 ;

Δ_1^2 – определитель третьей резистивной подсхемы, если положить $f = \infty$ (верхний индекс) для N_2 и $f = 0$ (нижний индекс) для N_1 ;

$A_2 = N_1 N_2 \Delta^{12}$. Здесь:

Δ^{12} – определитель четвёртой оставшейся резистивной подсхемы, если положить $f = \infty$ (все индексы у определителя верхние) для всех двух N_1 и N_2 индуктивных и ёмкостных элементов;

$$B_0 = \Delta_{12} X_{12} = A_0 X_{12}, \quad B_1 = N_1 \Delta_2^1 X_2^1 + N_2 \Delta_1^2 X_1^2, \quad B_2 = N_1 N_2 \Delta^{12} X^{12} = A_2 X^{12},$$

где:

$X_{12}, X_2^1, X_1^2, X^{12}$ – составляющие искомой переменной X в соответствующих четырёх резистивных подсхемах, которым соответствуют определители с теми же индексами.

В общем случае, когда число L и C элементов равно m , уравнение имеет вид:

$$(A_0 + pA_1 + p^2A_2 + \dots + p^m A_m)X = B_0 + pB_1 + p^2B_2 + \dots + p^m B_m, \quad (2.48)$$

где:

$A_0 = \Delta_{12\dots m}$ – определитель оставшейся резистивной R (G) подсхемы, если положить частоту $f = 0$ для всех N_1, N_2, \dots, N_m индуктивных L и ёмкостных C -элементов;

$A_1 = N_1 \Delta_{23\dots m}^1 + N_2 \Delta_{13\dots m}^2 + \dots + N_m \Delta_{12\dots m-1}^m = \sum_i^m N_i \Delta^i$ – у определителей оставляем только верхние индексы, соответствующие частоте равной бесконечности ($f = \infty$), нижние индексы, соответствующие частоте, равной нулю ($f = 0$), опускаем для простоты записи;

$$A_2 = N_1 N_2 \Delta_{34\dots m}^{12} + N_1 N_3 \Delta_{24\dots m}^{13} + \dots + N_{m-1} N_m \Delta_{12\dots m-2}^{m-1,m} = \sum_{i,j}^m N_i N_j \Delta^{ij}.$$

$A_3 = \sum_{i,j,k}^m N_i N_j N_k \Delta^{ijk}$ – у определителей оставляем только верхние индексы.

И так далее.

$A_m = N_1 N_2 \dots N_m \Delta^{12\dots m}$. Здесь $\Delta^{12\dots m}$ – определитель последней оставшейся резистивной подсхемы, если положить $f = \infty$ для всех N элементов.

$$B_0 = \Delta_{12\dots m} X_{12\dots m},$$

$$B_1 = N_1 \Delta_{23\dots m}^1 X_{23\dots m}^1 + N_2 \Delta_{13\dots m}^2 X_{13\dots m}^2 + \dots + N_m \Delta_{12\dots m-1}^m X_{12\dots m-1}^m = \sum_i^m N_i \Delta^i X^i,$$

$$B_2 = \sum_{i,j}^m N_i N_j \Delta^{ij} X^{ij},$$

$B_3 = \sum_{i,j,k}^m N_i N_j N_k \Delta^{ijk} X^{ijk}$ – у составляющих искомой переменной (как и у определителей) оставляем только верхние индексы.

И так далее.

$$B_m = N_1 N_2 \dots N_m \Delta^{12\dots m} X^{12\dots m}.$$

В этих формулах определители будут равны нулю (отсутствовать), если при размыканиях и коротких замыканиях индуктивных и ёмкостных

элементов (при частотах равных нулю или бесконечности), образуются изолированные узлы и короткозамкнутые контуры.

В оставшихся резистивных R (G)-подсхемах исходная электрическая $R(G), L, C$ -цепь «отдала» все свои L и C -элементы формулам и осталась резистивной.

Полученная формула есть формула **единая и для частотной и для временной** областей:

для частотной области (при синусоидальных источниках)
 $p = j\omega$, $p^2 = (j\omega)^2, \dots, p^m = (j\omega)^m$; искомая переменная комплексная $X = \dot{X}(j\omega)$;
 для временной области (при переходных процессах)

$p = \frac{d}{dt}$, $p^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \dots, p^m = \frac{d^m}{dt^m}$; искомая переменная мгновенная $X = x(t)$.

Примечание.

Все коэффициенты формулы могут быть получены любым известным методом: методом контурных токов, узловых напряжений, составляя и решая уравнения Кирхгофа, методом предельных состояний с комплексными сопротивлениями и проводимостями.

Пример 2.12. В электрической цепи (рис. 2.85) с источником e дано R и один реактивный элемент N_1 (L или C).

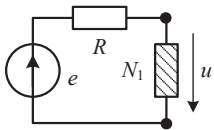
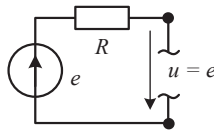
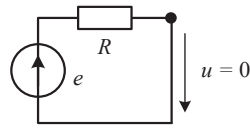


Рис. 2.85.



$$\Delta = \Delta^{(k)} = 1$$

Рис. 2.86.



$$\Delta = \Delta^{(k)} = R$$

Рис. 2.86

Требуется найти $u = U(j\omega)$ в частотной области и составить дифференциальное уравнение для $u = u(t)$ во временной области для двух схем: первая – с $N_1 = L$, вторая – с $N_1 = C$.

Решение. Рассмотрим две резистивные R подсхемы с разомкнутым элементом N_1 (рис. 2.86) и короткозамкнутым элементом N_1 (рис. 2.87).

Пока никаких индексов не ставим ни у определителей, ни у составляющих искомого напряжения. Эти две приведённые резистивные подсхемы и выше приведённые формулы дадут нам возможность записать ответ для двух задач: с $N_1 = L$ (рис. 2.88) и с $N_1 = C$ (рис. 2.89).

Формула единая для частотной и временной областей (2.48) при $m = 1$ для искомого напряжения $X = U$ с одним N_1 (L или C) элементом имеет вид:

$$(\Delta_1 + pN_1\Delta^1)U = \Delta_1 U_1 + pN_1\Delta^1 U^1 \quad \text{или} \quad (A_0 + pA_1)U = B_0 + pB_1. \quad (2.49)$$

В этом уравнении первого порядка с равноправными элементами L и C :

$$\begin{aligned} A_0 &= \Delta_1, & B_0 &= \Delta_1 U_1, \\ A_1 &= N_1 \Delta^1, & B_1 &= N_1 \Delta^1 U^1. \end{aligned}$$

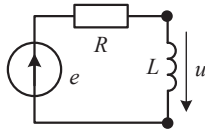


Рис. 2.88.

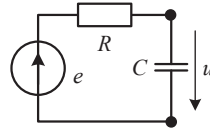


Рис. 2.89.

Пример 2.12.1. Пусть $N_1=L$. (рис. 2.88).

Решение. Все коэффициенты уравнения первого порядка найдём по этим двум резистивным подсхемам, представленным на рис. 2.86 и рис. 2.87. Первый коэффициент A_0 с определителем Δ_1 :

$$A_0 = \Delta_1 = R.$$

Определитель Δ_1 с нижним индексом требует рассмотреть поведение индуктивного элемента ($N_1=L$) при частоте равной нулю, а это – короткое замыкание. Значит, этому определителю с нижним индексом при $N_1=L$ соответствует резистивная подсхема (рис. 2.87).

Составляющая искомого напряжения для этой подсхемы (с нижним индексом) $U_1 = 0$.

Следующий коэффициент A_1 с определителем Δ^1 :

$$A_1 = N_1 \Delta^1 = L \Delta^1.$$

Определитель Δ^1 с верхним индексом «требует» рассмотреть поведение индуктивного элемента ($N_1=L$) при частоте равной бесконечности, а это – размыкание. Значит, этому определителю с верхним индексом при $N_1=L$ соответствует резистивная подсхема рис. 2.86. Поэтому определитель с верхним индексом $\Delta^1 = 1$.

Составляющая искомого напряжения для этой подсхемы с верхним индексом $U^1 = e$.

Коэффициенты правой части уравнения:

$$B_0 = \Delta_1 U_1 = R \cdot 0 = 0, \quad B_1 = N_1 \Delta^1 U^1 = L e.$$

Записываем ответ:

В частотной области при $p = j\omega$, $e = \dot{E}$, $U = \dot{U}(j\omega)$

$$(R + j\omega L)\dot{U} = 0 + j\omega L \dot{E}.$$

Во временной области при $p = \frac{d}{dt}$, $e = e(t)$, $U = u(t)$

$$R u(t) + L \frac{du}{dt} = L \frac{de}{dt}.$$

Пример 2.12.2. Пусть $N_1=C$. (рис. 2.89).

Решение. Все коэффициенты уравнения первого порядка найдём по этим же двум резистивным подсхемам (рис. 2.86 и рис. 2.87). Далее всё аналогично. Действуем по тому же алгоритму:

$$A_0 = \Delta_1 = 1.$$

Определитель с нижним индексом требует рассмотреть поведение ёмкостного элемента ($N_1 = C$) при частоте равной нулю, а это – размыкание. Значит, этому определителю с нижним индексом при $N_1 = C$ соответствует резистивная подсхема рис. 2.86. Составляющая искомого напряжения для этой подсхемы $U_1 = e$. Следующий коэффициент A_1 :

$$A_1 = N_1 \Delta^1 = C \Delta^1.$$

Определитель Δ^1 с верхним индексом требует рассмотреть поведение ёмкостного элемента ($N_1 = C$) при частоте равной бесконечности, а это – короткое замыкание. Значит, этому определителю с верхним индексом при $N_1 = C$ соответствует резистивная подсхема рис. 2.87. Поэтому определитель с верхним индексом $\Delta^1 = R$.

Составляющая искомого напряжения для этой подсхемы $U^1 = 0$.

Коэффициенты правой части уравнения:

$$B_0 = \Delta_1 U_1 = e \quad B_1 = N_1 \Delta^1 U^1 = CR0 = 0.$$

Записываем ответ:

В частотной области при $p = j\omega$, $e = \dot{E}$, $U = \dot{U}(j\omega)$.

$$(1 + j\omega CR)\dot{U} = \dot{E} + 0.$$

Ответ хорошо проверяется по размерности.

Во временной области при $p = \frac{d}{dt}$, $e = e(t)$, $U = u(t)$.

Дифференциальное уравнение:

$$u(t) + RC \frac{du}{dt} = e.$$

В обоих приведённых примерах ответ (в частотной области) получен без введения понятий «комплексных сопротивлений»: $Z_L = j\omega L$ и $Z_C = 1/j\omega C$ и «комплексных проводимостей»: $Y_C = j\omega C$ и $Y_L = 1/j\omega L$.

Пример 2.13. В электрической цепи (рис. 2.90) с источниками e_1 и e_2 даны два резистивных элемента и два реактивных элемента N_1 и N_2 , которые могут быть каждый как индуктивным, так и ёмкостным элементом (или L , или C). Требуется найти U для четырёх схем с различными комбинациями включений L и C элементов.

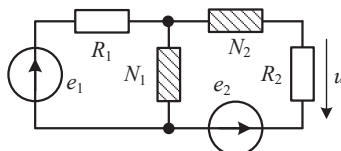
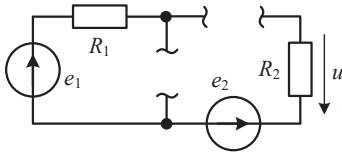


Рис. 2.59.

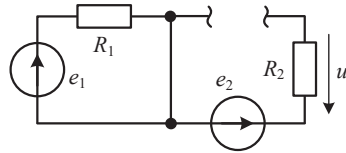
Решение. Для заданного требования нарисуем сразу четыре резистивных подсхемы со всеми возможными комбинациями размыканий и коротких замыканий элементов N_1 и N_2 (рис. 2.91 – 2.94).

Эти четыре резистивные подсхемы позволят нам записать ответ в символической форме для всех четырёх схем.



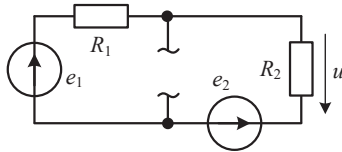
$$\Delta = \Delta^{(k)} = 1. \text{ Нет контура.} \\ \Delta U = 0.$$

Рис. 2.91.



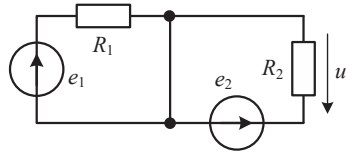
$$\Delta = R_1. \text{ Один контур.} \\ \Delta U = 0.$$

Рис. 2.92.



$$\Delta = R_1 + R_2. \text{ Один контур.} \\ \Delta U = R_1 0 + R_2(e_1 - e_2).$$

Рис. 2.93.



$$\Delta = R_1 R_2. \text{ Два контура.} \\ \Delta U = R_1 R_2 (-e_2).$$

Рис. 2.94.

К каждой резистивной подсхеме применим метод предельных состояний. Задачу будем решать по тому же алгоритму, что и предыдущую.

Пока никаких индексов ни у определителей, ни у составляющих напряжений не ставим.

Формула (2.48) при $m = 2$ второго порядка для двух элементов N_1 и N_2 (для всех возможных комбинаций включений L и C элементов) имеет один и тот же вид (2.47) при $X = U$:

$$(A_0 + pA_1 + p^2 A_2)U = B_0 + pB_1 + p^2 B_2, \quad (2.50)$$

где: $p = j\omega$ – в частотной области и $p = d/dt$ – во временной области.

Коэффициенты уравнения единого для частотной и временной областей равны:

$$\begin{aligned} A_0 &= \Delta_{12}, & B_0 &= \Delta_{12}U_{12}, \\ A_1 &= N_1\Delta_2^1 + N_2\Delta_1^2, & B_1 &= N_1\Delta_2^1U_2^1 + N_2\Delta_1^2U_1^2, \\ A_2 &= N_1N_2\Delta^{12}, & B_2 &= N_1N_2\Delta^{12}U^{12}. \end{aligned}$$

Пример 2.13.1. Пусть $N_1 = L_1$ и $N_2 = L_2$ (рис. 2.95).

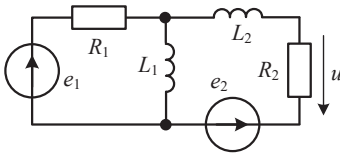


Рис. 2.95.

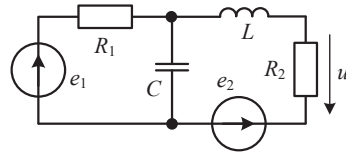


Рис. 2.96.

Решение. Все коэффициенты уравнения второго порядка найдём по этим четырём резистивным подсхемам (рис. 2.91 – 2.94).

Начнём по тому же алгоритму – с первого определителя Δ_{12} . Этот определитель требует рассмотреть поведение двух элементов $N_1 = L_1$ и $N_2 = L_2$ при частоте? равной нулю (нижние индексы у определителя). При этой частоте имеем два коротких замыкания, что соответствует резистивной подсхеме рис. 2.94. Таким образом, получаем:

$$A_0 = \Delta_{12} = R_1 R_2.$$

Значения остальных определителей найдём тоже по их индексам (верхним и нижним). Следующий коэффициент A_1 :

$$A_1 = N_1 \underbrace{\Delta_2^1}_{\text{Рис.2.93}} + N_2 \underbrace{\Delta_1^2}_{\text{Рис.2.92}} = L_1 \underbrace{(R_1 + R_2)}_{\Delta_2^1} + L_2 \underbrace{R_1}_{\Delta_1^2}$$

Определителям соответствуют:

$$A_2 = N_1 N_2 \underbrace{\Delta^{12}}_{\text{Рис.2.91}} = L_1 L_2 \underbrace{1}_{\Delta^{12}}$$

$$B_0 = \Delta_{12} U_{12} = R_1 R_2 (-e_2) \text{ Соответствует схеме (рис. 2.94).}$$

$$B_1 = N_1 \underbrace{\Delta_2^1 U_2^1}_{\text{Рис.2.93}} + N_2 \underbrace{\Delta_1^2 U_1^2}_{\text{Рис.2.92}} = L_1 R_2 (e_1 - e_2) + L_2 \underbrace{0}_{\Delta_1^2 U_1^2}$$

$$B_2 = N_1 N_2 \Delta^{12} U^{12} = L_1 L_2 0 = 0. \text{ Соответствует схеме (рис. 2.91).}$$

Все резистивные подсхемы перебрали.

Получим ответ для частотной области при $e_1(\omega t) = E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$ и $e_2(\omega t) = E_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$. Тогда полагаем $p = j\omega$, $e_1 = \dot{E}_1(j\omega)$, $e_2 = \dot{E}_2(j\omega)$ и $u = \dot{U}(j\omega)$. Записываем ответ в символьной форме:

$$\begin{aligned} & (R_1 R_2 + j\omega [L_1(R_1 + R_2) + L_2 R_1] + (j\omega)^2 L_1 L_2) U = \\ & = R_1 R_2 (-E_2) + j\omega L_1 R_2 (E_1 - E_2) + 0. \end{aligned}$$

Правильность ответа легко проверяется по размерности. Здесь напряжение U и источники E – комплексные величины. Мы убедились, что ответ получен без введения понятий «комплексные сопротивления» и «комплексные проводимости».

Пример 2.13.2. Пусть $N_1=C$ и $N_2=L$ (рис. 2.96).

Решение. Все коэффициенты уравнения второго порядка для этого примера найдём по этим же четырём резистивным подсхемам (рис. 2.91 – 2.94). Действуя по тому же алгоритму, запишем сначала все коэффициенты уравнения, а затем ответ. Коэффициенты равны:

$$A_0 = \Delta_{12} = R_1 + R_2. \quad \text{Соответствует подсхеме (рис. 2.93).}$$

$A_1 = N_1\Delta_2^1 + N_2\Delta_1^2 = C R_1 R_2 + L$. Соответствует подсхемам (рис. 2.94 и рис. 2.91).

$$A_2 = N_1 N_2 \Delta^{12} = CLR_1. \quad \text{Соответствует подсхеме (рис. 2.92).}$$

Перебрали все резистивные подсхемы. Для коэффициентов B согласно тем же резистивным подсхемам запишем:

$$B_0 = \Delta_{12} U_{12} = R_2(e_1 - e_2),$$

$$B_1 = N_1 \Delta_2^1 U_2^1 + N_2 \Delta_1^2 U_1^2 = CR_1 R_2 (-e_2) + 0,$$

$$B_2 = N_1 N_2 \Delta^{12} U^{12} = CL0 = 0.$$

Для частотной области записываем ответ в символьной форме:

$$(R_1 + R_2 + j\omega[CR_1 R_2 + L] + (j\omega)^2 CLR_1) \dot{U} = R_2(\dot{E}_1 - \dot{E}_2) + j\omega CR_1 R_2 (-\dot{E}_2).$$

Правильность ответа легко проверяется по размерности.

Осталось рассмотреть ещё два возможных варианта включения элементов.

Они также просто записываются с помощью четырёх приведённых резистивных подсхем. Читателю предлагается самостоятельно записать ответ для этих оставшихся вариантов.

Обратим внимание на то, что для временной области (переходного процесса) задача также практически решена. Подставляя в уравнение единое для частотной и временной областей (2.47) $p = d/dt$, $e = e(t)$ и $u = u(t)$ получим дифференциальное уравнение. Запишем его для схемы рис. 2.96:

$$(R_1 + R_2)u(t) + [CR_1 R_2 + L] du/dt + CLR_1 d^2u/dt^2 = \\ = R_2(e_1 - e_2) - CR_1 R_2 de_2/dt.$$

Проверим полученный результат в предельном режиме ($t = \infty$).

Пусть, например, источники $e_1 = E_1 1(t)$ и $e_2 = E_2$ – постоянный источник. В установившемся режиме производные по времени равны нулю. Из дифференциального уравнения получаем:

$$U_{уст} = R_2(E_1 - E_2)/(R_1 + R_2).$$

Теперь смотрим на схему рис. 2.96. При $t = \infty$ (установившийся режим) индуктивность L короткозамкнута, ёмкость C разомкнута. Хорошо видно, что

$$U_{уст} = (E_1 - E_2)R_2/(R_1 + R_2).$$

Получили тот же результат.

К большому сожалению, во многих учебниках, хорошо зная методы решения задач в частотной области, «забывают» эти методы при рассмотрении переходных процессов. Забывают о единстве частотной и временной областей.

Для составления дифференциального уравнения записывают уравнения по законам Кирхгофа и решают их.

Как уже отмечалось, рассматриваемая задача может быть решена любым известным методом. Эта же задача может быть решена также и методом предельных состояний. Приведём запись ответа с помощью метода предельных состояний.

Решение. В схеме рис. 2.97 введём обозначения: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = pL$ (или $Z_3 = 1/pC$), $Z_4 = 1/pC$ (или $Z_4 = pL$).

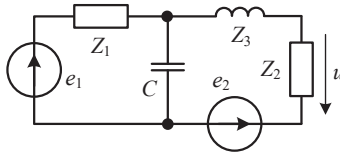


Рис. 2.66.

При всех источниках равных нулю считаем: $y = 3$, $k = 2$, $n = 4$. Проверим равенство: $y - 1 + k = n$. Так как $k = y - 1$, то есть выбор. Выбираем контурный определитель и записываем ответ:

$$(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + 0_{23} + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4) U = Z_1 Z_2 (-e_2) + Z_2 Z_4 (-e_2 + e_1).$$

Каждую из четырёх задач надо решать отдельно, так как для приведения формулы к (2.47) её требуется ещё преобразовать там, где появится знаменатель (в сочетаниях элементов L и C ; C_1 и C_2).

Пример 2.14. На рис. 2.98 представлена схема, в которой известны все элементы: $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $G_4 = G/3$, $G_5 = G$.

Требуется:

- найти напряжение на ёмкости C_1 в частотной области при $e = e(\omega t) = E_m \sin \omega t$;
- записать дифференциальное уравнение для напряжения на ёмкости C_1 при $e = e(t)$. Пусть, например, $e(t) = E1(t)$.

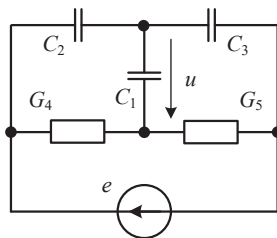


Рис. 2.67.

Решение. Так как в схеме имеются три ёмкости, то предполагаем, что единое уравнение для частотной и временной областей будет третьего порядка. Запишем (2.48) при $m = 3$:

$$(A_0 + pA_1 + p^2A_2 + p^3A_3)U = B_0 + pB_1 + p^2B_2 + p^3B_3, \quad (2.51)$$

где: $p = j\omega$ – в частотной области и $p = d/dt$ – во временной области.

Коэффициенты уравнения единого для частотной и временной областей при $N_1 = C_1$, $N_2 = C_2$, $N_3 = C_3$ равны:

$$\begin{aligned} A_0 &= \Delta_{123}, & B_0 &= \Delta_{123}U_{123}, \\ A_1 &= C_1\Delta_{23}^1 + C_2\Delta_{13}^2 + C_3\Delta_{12}^3, & B_1 &= C_1\Delta_{23}^1U_{23}^1 + C_2\Delta_{13}^2U_{13}^2 + C_3\Delta_{12}^3U_{12}^3, \\ A_2 &= C_1C_2\Delta_3^{12} + C_1C_3\Delta_2^{13} + C_2C_3\Delta_1^{23}, & B_2 &= C_1C_2\Delta_3^{12}U_3^{12} + C_1C_3\Delta_2^{13}U_2^{13} + \\ & & & + C_2C_3\Delta_1^{23}U_1^{23}, \\ A_3 &= C_1C_2C_3\Delta^{123}, & B_3 &= C_1C_2C_3\Delta^{123}U^{123}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого примера $A_0 = \Delta_{123} = 0$, так как при частоте $f = 0$ для всех трёх ёмкостей имеем изолированный верхний узел;

$A_3 = C_1C_2C_3\Delta^{123} = 0$, так как при частоте $f = \infty$ для всех трёх ёмкостей имеем короткозамкнутый внешний контур.

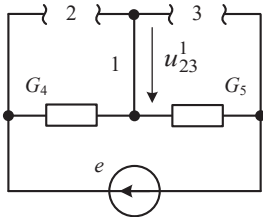
Сокращая на p , получим:

$$(A_1 + pA_2)U = B_1 + pB_2.$$

Резистивные подсхемы для нахождения коэффициентов A_1 и B_1 приведены на рис. 2.99 – 2.101.

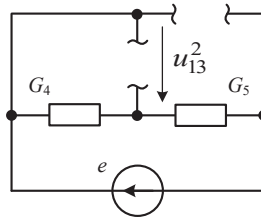
Для этих резистивных подсхем записали узловые определители и применили метод предельных состояний. Итак, эти коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1(G_4 + G_5) + C_2(G_4 + G_5) + C_3(G_4 + G_5) = \\ &= (C_1 + C_2 + C_3)(G_4 + G_5) = 8CG, \\ B_1 &= C_1\Delta_{23}^1U_{23}^1 + C_2\Delta_{13}^2U_{13}^2 + C_3\Delta_{12}^3U_{12}^3 = C_1 \cdot 0 + C_2G_5e + C_3G_4(-e) = \\ &= (C_2G_5 - C_3G_4)e = CGe. \end{aligned}$$



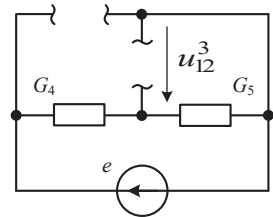
$$\begin{aligned} \Delta_{23}^1 &= G_4 + G_5; \\ U_{23}^1 &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 2.68.



$$\begin{aligned} \Delta_{13}^2 &= G_4 + G_5; \\ \Delta_{13}^2U_{13}^2 &= G_4 \cdot 0 + G_5e. \end{aligned}$$

Рис. 2.69.



$$\begin{aligned} \Delta_{12}^3 &= G_4 + G_5; \\ \Delta_{12}^3U_{12}^3 &= G_4(-e) + G_5 \cdot 0. \end{aligned}$$

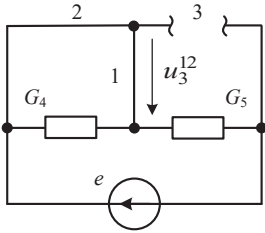
Рис. 2.70.

Следующие два коэффициента равны:

$$A_2 = C_1 C_2 \Delta_3^{12} + C_1 C_3 \Delta_2^{13} + C_2 C_3 \Delta_1^{23},$$

$$B_2 = C_1 C_2 \Delta_3^{12} U_3^{12} + C_1 C_3 \Delta_2^{13} U_2^{13} + C_2 C_3 \Delta_1^{23} U_1^{23}.$$

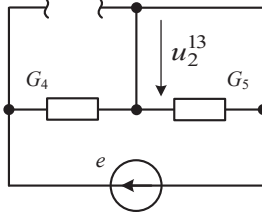
Резистивные подсхемы для нахождения коэффициентов A_2 и B_2 приведены на рис. 2.102 – 2.104. Их узловые определители равны единице $\Delta_3^{12} = 1$, $\Delta_2^{13} = 1$, кроме определителя $\Delta_1^{23} = 0$.



$$\Delta_3^{12} = 1; U_3^{12} = 0.$$

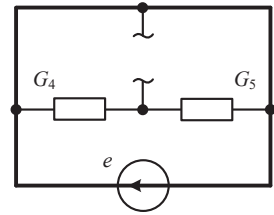
Все узлы стянуты в одну точку (см. при $e = 0$).

Рис. 2.102.



$$\Delta_2^{13} = 1; U_2^{13} = 0.$$

Рис. 2.103.



$$\Delta_1^{23} = 0.$$

Короткозамкнутый контур

Рис. 2.104.

Итак, эти коэффициенты равны:

$$A_2 = C_1 C_2 1 + C_1 C_3 1 + C_2 C_3 0 = 5 C^2,$$

$$B_2 = 0.$$

Все коэффициенты найдены. Осталось записать решение. Для частотной области полагаем $e = e(\omega t) = E_m \sin \omega t$ и $p = j\omega$. Тогда источники $e = \dot{E}(j\omega)$ и $U = \dot{U}(j\omega)$ - комплексные.

Решение:

$$(8 C G + j\omega 5 C^2) \dot{U} = C \cdot G \cdot \dot{E} + j\omega 0.$$

Сокращая на C , получим ответ:

$$\dot{U}(j\omega) = \frac{G \dot{E}}{8G + j\omega 5C}.$$

Ответ хорошо проверяется по размерности.

Для временной области $p = d/dt$. Тогда $e = e(t)$ и $U = u(t)$. Записываем дифференциальное уравнение:

$$8 G u(t) + 5 C du/dt = G e(t).$$

Пусть $e(t) = E1(t)$. Тогда в установившемся режиме $U_{уст} = E/8$.

Приведённые в работе формулы при разложении электрической $R(G), L, C$ -цепи на резистивные $R(G)$ подсхемы помогают, не решая всей задачи, дать ответ на вопрос, какой порядок электрической цепи. Приведём пример.

Посмотрим на схему (рис. 2.63) примера 2.9.

Она имеет четыре индуктивности. И, естественно предположить, что она должна описываться уравнением четвёртого порядка. Посмотрим теперь на коэффициенты формулы (2.48) для случая, когда $m = 4$. Сначала смотрим на крайние (первый и последний) коэффициенты. Полагая частоту равной нулю для всех четырёх индуктивностей, видим короткозамкнутый контур. Следовательно, такого слагаемого в формуле (2.48) не существует:

$$A_0 = \Delta_{1234} = 0.$$

Полагая частоту равной бесконечности для всех четырёх индуктивностей, видим изолированные узлы (верхний и правый). Следовательно, и такого слагаемого в формуле (2.48) не существует:

$$A_4 = L_1 L_2 L_3 L_4 \Delta^{1234} = 0.$$

Следующий коэффициент A_3 :

$$A_3 = L_1 L_2 L_3 \Delta_4^{123} + L_1 L_2 L_4 \Delta_3^{124} + L_1 L_3 L_4 \Delta_2^{134} + L_2 L_3 L_4 \Delta_1^{234} = 0.$$

Все присутствующие здесь определители равны нулю (не существуют), так как при размыканиях индуктивностей: $L_1 L_2 L_3$, $L_1 L_2 L_4$, $L_1 L_3 L_4$, $L_2 L_3 L_4$ образуются изолированные узлы. Формулы помогают нам, не решая задачи, сделать правильный вывод: схема описывается уравнением первого порядка.

НАХОЖДЕНИЕ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Заканчивая этот раздел, докажем формулу расчёта входного сопротивления (проводимости), которая приводилась во втором параграфе и применялась для доказательства исходной универсальной формулы:

$$Z_{\text{вх}} = \Delta_{\text{кз}} / \Delta^{\text{xx}}, \quad (2.52)$$

$$Y_{\text{вх}} = \Delta^{\text{xx}} / \Delta_{\text{кз}}. \quad (2.53)$$

В этих формулах в числителях и знаменателях стоят определители с нижними и верхними надписями:

$\Delta_{\text{кз}}$ – определитель схемы (подсхемы) при коротком замыкании зажимов, относительно которых находится входное сопротивление (рис. 2.105);

Δ^{xx} – определитель схемы при разомкнутых зажимах, относительно которых находится входное сопротивление (рис. 2.106).

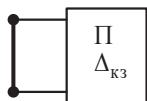


Рис. 2.105.

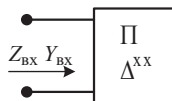


Рис. 2.106

Эти формулы удобны для расчёта тем, что нет необходимости проводить преобразование (свёртывание) схемы при смешанных соединениях

сопротивлений. Нет необходимости в преобразовании соединений из «звезды» в «треугольник» и наоборот. Эти формулы для любых соединений сопротивлений (проводимостей) позволяют формализовать процесс нахождения входного сопротивления (проводимости).

Думается, что самым простым доказательством этих формул будет применение начальной универсальной формулы (2.31). Для доказательства этих формул (2.52) и (2.53) подключим к схеме (рис. 2.107) источник напряжения E_1 с последовательно включённым сопротивлением Z_1 .

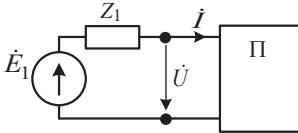


Рис. 2.76.

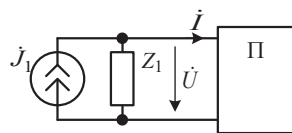


Рис. 2.77.

К этой схеме применим начальную универсальную формулу (2.31) для напряжения ($X = U$):

$$\Delta U = \Delta_1 U_1 + Z_1 \Delta^1 U^1 = \Delta_1 E_1 + Z_1 \Delta^1 0 = \Delta_1 E_1. \quad (2.54)$$

Здесь определители равны:

$\Delta_1 = \Delta_{\text{кз}}$ – определитель схемы при коротком замыкании сопротивления Z_1 ;

$\Delta^1 = \Delta^{\text{xx}}$ – определитель схемы при разомкнутом сопротивлении Z_1 .

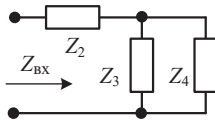
Теперь преобразуем источник напряжения E_1 с последовательно включённым сопротивлением Z_1 в источник тока J_1 с параллельно включённым Z_1 (рис. 2.108). Для этой схемы применим ту же универсальную формулу (2.31) для тока ($X = I$):

$$\Delta I = \Delta_1 I_1 + Z_1 \Delta^1 I^1 = \Delta_1 0 + Z_1 \Delta^1 J_1 = \Delta^1 Z_1 J_1. \quad (2.55)$$

Разделим теперь (2.54) на (2.55). В результате получим:

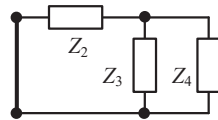
$$\frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U}{I} = Z_{\text{вх}} = \frac{\Delta_1 E_1}{\Delta^1 Z_1 J_1} = \Delta_1 / \Delta^1 = \Delta_{\text{кз}} / \Delta^{\text{xx}}.$$

Пример 2.15. Для схемы (рис. 2.109) требуется найти входное сопротивление $Z_{\text{вх}}$, применяя формулу (2.52).



$$\Delta^{\text{xx}} = Z_3 + Z_4.$$

Рис. 2.109.



$$\Delta_{\text{кз}} = Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4.$$

Рис. 2.110.

Решение. Схема (рис. 2.109) содержит один контур. Её определитель равен:

$$\Delta^{xx} = \Delta = Z_3 + Z_4 \text{ — определитель исходной схемы.}$$

Схема (рис. 2.110) при коротком замыкании зажимов, относительно которых находим входное сопротивление, содержит два контура. Её определитель равен:

$$\Delta_{кз} = Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4.$$

Применяя формулу (2.52) получим ответ:

$$Z_{вх} = \Delta_{кз} / \Delta^{xx} = \frac{Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4} = Z_2 + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}.$$

Формула сама сделала за нас преобразование параллельно включённых сопротивлений Z_3 и Z_4 и сложила с последовательно включённым сопротивлением Z_2 .

Пример 2.16. Для схемы (рис. 2.111) требуется найти входные сопротивления:

Z_{12} — входное сопротивление относительно зажимов 1 и 2;

Z_{34} — входное сопротивление относительно зажимов 3 и 4.

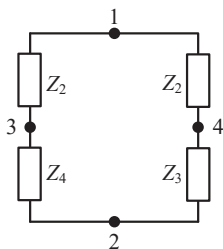


Рис. 2.111.

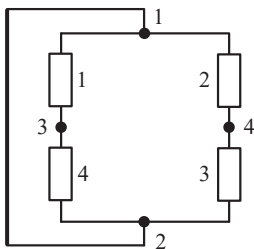


Рис. 2.112.

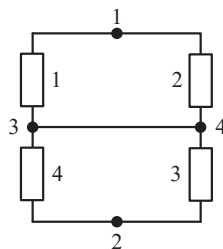


Рис. 2.113.

Решение. Сначала запишем определитель для исходной схемы (рис. 2.111). Схема содержит один контур. Её определитель равен:

$$\Delta = \Delta^{xx} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \text{ — определитель исходной схемы.}$$

Для нахождения входного сопротивления Z_{12} закоротим зажимы 1 и 2. Схема с короткозамкнутыми зажимами 1 и 2 представлена на рис. 2.112. Она содержит два контура. Её определитель равен:

$$\Delta_{12 \text{ кз}} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + 0_{14} + 0_{23} + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4.$$

Применяя формулу (2.52) записываем ответ:

$$Z_{12} = \Delta_{12 \text{ кз}} / \Delta = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}.$$

Проверим полученный ответ. Для этого найдём входное сопротивление традиционным способом: сложим параллельно последовательно включённые сопротивления $(Z_1 + Z_4)$ и $(Z_2 + Z_3)$. В результате получим:

$$Z_{12} = \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}.$$

Получили тот же результат.

Аналогично найдём входное сопротивление Z_{34} . Для этого закоротим зажимы 3 и 4. Схема с короткозамкнутыми зажимами 1 и 2 представлена на рис. 2.113. Она также содержит два контура. Её определитель равен:

$$\Delta_{34 \text{ кз}} = 0_{12} + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + 0_{34}.$$

Применяя формулу (2.52) записываем ответ:

$$Z_{34} = \Delta_{34 \text{ кз}} / \Delta = \frac{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}.$$

Примеры специально приводились такие, чтобы читатель мог легко проверить результат нахождения входного сопротивления традиционным способом. Даже для таких простых примеров видно большое преимущество нахождения входного сопротивления с помощью определителей. Нет необходимости решать вопрос как включены те или иные сопротивления (какие включены последовательно, а какие – параллельно). Ответ записывается сразу в окончательной форме и не требует дальнейших алгебраических преобразований.

Формула (2.52) легко запоминается. Достаточно вспомнить о размерности. В числителе должен стоять определитель с короткозамкнутыми зажимами. При короткозамкнутых зажимах на один контур будет больше, чем для исходной схемы (с разомкнутыми зажимами).

3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ.

Переходные процессы в электрических цепях происходят при различных коммутациях. Коммутации – различные переключения в момент времени $t = t_0$: включение (рис. 3.1) и отключение (рис. 3.2) источников, индуктивных, емкостных и резистивных элементов, переход с одного рабочего участка характеристики на другой и другие переключения. Обозначают на схемах либо ключом со стрелочкой, либо: приводят закон изменения $e(t)$ или $J(t)$ – включение и отключение источника напряжения или тока соответственно.

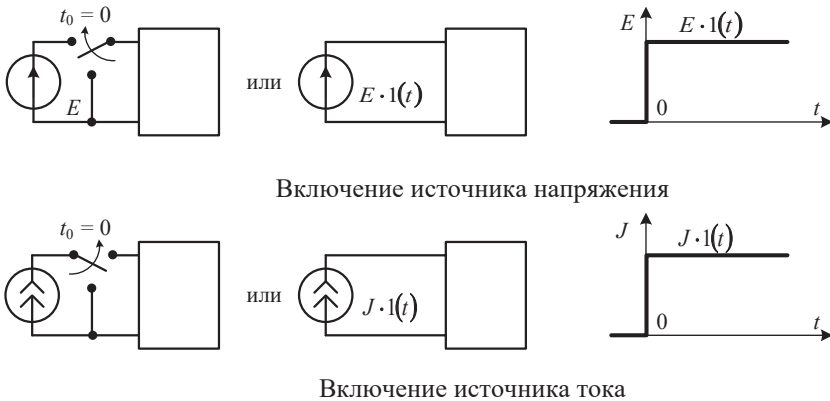


Рис. 3.1.

Различают:

$(t_0 -)$ – время непосредственно до коммутации (со знаком минус) – *предыстория*;

$(t_0 +)$ – время непосредственно после коммутации (со знаком плюс) – *начало истории* – время коммутации. Часто знак «+» опускают и записывают t_0 . В частном случае $t_0 = 0$.

Считается, что продолжительность коммутации равна нулю, то есть:

$$\Delta t = (t_0) - (t_0 -) = 0.$$

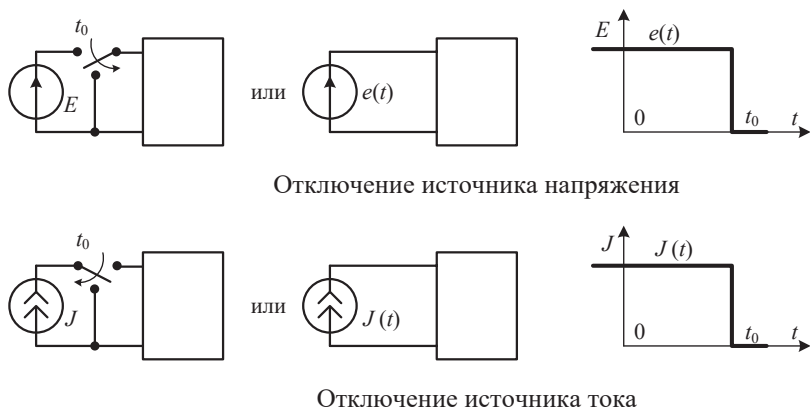


Рис. 3.2.

Записываются и формулируются два закона коммутации.

ПЕРВЫЙ (условно) закон коммутации для индуктивного элемента (рис.3.3).



Рис. 3.3.

Записывается: $i_L(t_0) = i_L(t_0^-)$; при $t_0 = 0$: $i_L(0) = i_L(0^-)$.

Умножая левую и правую части равенства на L получают:

$$Li_L(t_0) = Li_L(t_0^-); \text{ или } \Psi(t_0) = \Psi(t_0^-).$$

$$Li_L(0) = Li_L(0^-); \text{ или } \Psi(0) = \Psi(0^-).$$

Формулируется: Ток через индуктивный элемент непосредственно после коммутации $i_L(t_0)$ равен току непосредственно до коммутации $i_L(t_0^-)$.

Аналогично для потокосцепления: $\Psi(t_0) = \Psi(t_0^-)$.

Изображается (рис. 3.4):

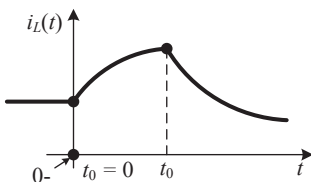


Рис. 3.4.

ВТОРОЙ закон коммутации для ёмкостного элемента (рис. 3.5).

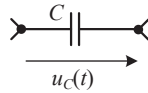


Рис. 3.5.

Записывается: $U_C(t_0) = U_C(t_0^-)$; при $t_0 = 0$: $U_C(0) = U_C(0^-)$;

Умножая левую и правую части равенства на C получим:

$$CU_C(t_0) = CU_C(t_0^-); \text{ или } q(t_0) = q(t_0^-).$$

$$CU_C(0) = CU_C(0^-); \text{ или } q(0) = q(0^-).$$

Формулируется: Напряжение на ёмкостном элементе непосредственно после коммутации $U_C(t_0)$ равно напряжению непосредственно до коммутации $U_C(t_0^-)$. Аналогично для заряда $q(t_0) = q(t_0^-)$.

Изображается (рис.3.6):

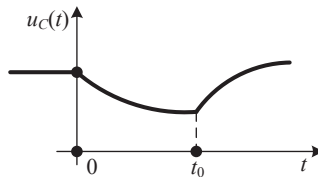


Рис. 3.6.

Начальные условия $i_L(t_0)$ и $U_C(t_0)$ называют независимыми начальными условиями (ННУ); те условия, которые не изменяются скачком при коммутациях.

Остальные начальные условия $U_L(t_0)$, $i_C(t_0)$, $U_R(t_0)$, $i_R(t_0)$ и их производные при $t = t_0$ называют зависимыми начальными условиями (ЗНУ); те условия, которые могут изменяться скачком при коммутациях.

3.2. ПЕРЕХОДНЫЙ, УСТАНОВИВШИЙСЯ И СВОБОДНЫЙ ПРОЦЕССЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ.

Классический метод расчёта переходного процесса заключается в составлении дифференциального уравнения для искомой переменной в электрической цепи и его интегрировании, для нахождения единственного решения.

Пример 3.1. На рис. 3.7 приведена простейшая RC -цепь. Даны: постоянный источник E , резистор R и ёмкость C . Источник E включается при нулевом

начальном условии (ёмкость была не заряжена). Требуется: получить дифференциальное уравнение и решить его для напряжения на ёмкости $u_C = u(t)$; нарисовать график заряда ёмкости.

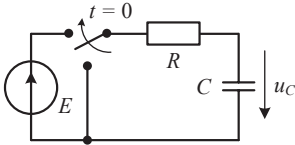


Рис. 3.7.

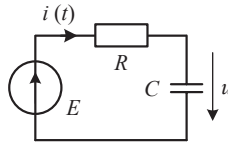


Рис. 3.8.

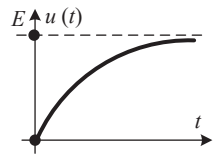


Рис. 3.9.

Решение.

Для электрической цепи после коммутации (рис. 3.8) по второму закону Кирхгофа записывается:

$$Ri(t) + u(t) = E.$$

С учётом компонентного уравнения (уравнения связи тока в ёмкостном элементе с напряжением на нём $i = C du/dt$) получают:

$$RC du/dt + u(t) = E.$$

Уравнение приводится к каноническому виду:

$$du/dt + a_0 u(t) = a_0 E.$$

Канонический вид записи дифференциального уравнения помогает проверить размерность коэффициентов (по первому слагаемому).

В уравнении обозначено: $a_0 = 1/RC$. Размерность – 1/время.

Разделяя переменные:

$$du/(u - E) = -a_0 dt,$$

интегрируем уравнение $\int du/(u - E) = -a_0 \int dt$.

В результате интегрирования получим:

$$\ln(u - E) = -a_0 t + K_1.$$

Согласно свойству логарифма:

$$u - E = e^{(-a_0 t + K_1)} = e^{K_1} e^{-a_0 t} = K e^{-a_0 t}.$$

Отсюда окончательно напряжение:

$$u(t) = E + K e^{-a_0 t} = u_{уст} + u_{св}(t).$$

Итак, дифференциальное уравнение первого порядка для любой переменной $X = X(t)$ (напряжения или тока) приводится к виду:

$$dX/dt + a_0 X = b_0.$$

Решение этого уравнения содержит два слагаемых:

$$X(t) = X_{уст} + K e^{\lambda t} = X_{уст} + X_{св}(t) - \text{вид решения.}$$

Первое слагаемое: $X_{уст}$ – установившееся значение (при $t = \infty$) искомого напряжения (или тока) – частное решение дифференциального уравнения.

Второе слагаемое: $X_{св}(t) = Ke^{\lambda t}$ – свободная составляющая переходного процесса – общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$dX/dt + a_0X = 0.$$

$X(t)$ – ток (или напряжение) называют *переходным* током (напряжением).

Подставляя вид решения в дифференциальное уравнение с учётом $dX_{уст}/dt = 0$ (при включении постоянного источника) получим:

$$K\lambda e^{\lambda t} + a_0(X_{уст} + Ke^{\lambda t}) = b_0.$$

Отсюда

$$Ke^{\lambda t}(\lambda + a_0) + a_0X_{уст} = b_0.$$

Из этого уравнения при $X_{уст} = b_0/a_0$ (для примера 2.1 $X_{уст} = E$)

$\lambda + a_0 = 0$ – характеристическое уравнение, которое позволяет найти λ :

$$\lambda = -a_0.$$

Неизвестной величиной осталась постоянная интегрирования K . Для её нахождения записывают вид решения для времени $t = 0$:

$$X(0) = X_{уст} + K.$$

Отсюда находится постоянная интегрирования:

$$K = X(0) - X_{уст}.$$

Постоянную интегрирования найдём, если будем знать $X(0)$. В нашем примере 3.1 $X(0) = u(0) = u_c(0)$ – независимое начальное условие. Согласно закону коммутации записывают $u_c(0) = u_c(0^-) = 0$ – ёмкость была не заряжена. С учётом этого $K = 0 - u_{уст} = -E$. Окончательно решение для напряжения на ёмкости:

$$u(t) = E - Ee^{-a_0t}.$$

График $u(t)$ представлен на рис. 3.9.

Аналогично решается задача разряда ёмкости. Схема приведена на рис. 3.10. На рис. 3.11 приведён график переходного процесса разряда заряженной ёмкости:

$$u(t) = u_{уст} + Ee^{\lambda t} = 0 + Ee^{-a_0t} = Ee^{-t/\tau},$$

где $\tau = RC$ – *постоянная времени*.

Установившееся значение напряжения $u_{уст}$ равно нулю, так как источник E отключается.

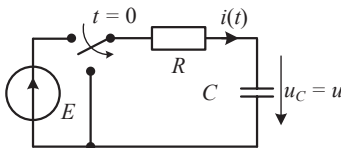


Рис. 3.10.

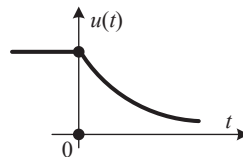


Рис. 3.11.

Но так задачи расчёта переходных процессов классическим методом обычно не решают. Даже часто не составляют дифференциального уравнения. Решение проводят по алгоритму:

1. Выбирают направление и указывают на схеме стрелочкой напряжение на ёмкости $u_C(t)$ и ток в индуктивности $i_L(t)$.

2. В схеме до коммутации ($-\infty < t \leq t_0 -$) находят независимые начальные условия $u_C(t_0 -)$ и $i_L(t_0 -)$ – находят предысторию. Направления стрелочек искомого напряжения и тока ставят в соответствии с выбранными в п. 1 направлениями $u_C(t)$ и $i_L(t)$. Согласно закону коммутации записывают:

$$u_C(t_0) = u_C(t_0 -) \text{ и } i_L(t_0) = i_L(t_0 -).$$

Повторим: в частном случае $t_0 = 0$, переходной процесс начинается с момента времени t_0 , время t_0 – начало истории.

Все остальные пункты алгоритма выполняются для схемы после коммутации для времени $t_0 \leq t \leq \infty$.

3. Делается оценка электрической цепи на порядок дифференциального уравнения с целью: записи вида решения и количества зависимых начальных условий, которые необходимо найти.

Если электрическая схема содержит один инерционный элемент (одну ёмкость или одну индуктивность), то она описывается дифференциальным уравнением первого порядка, вид решения которого мы уже знаем. Поэтому, не составляя дифференциального уравнения, сразу записывают вид решения для напряжения или тока:

$$X(t) = X_{уст} + Ke^{\lambda(t-t_0)}.$$

$$\text{При } t = t_0: X(t_0) = X_{уст} + K.$$

Количество ЗНУ для нахождения – одно, а именно: $X(t_0)$.

Постоянная интегрирования $K = X(t_0) - X_{уст}$.

Таким образом, для схемы первого порядка необходимо найти: ННУ ($u_C(t_0 -)$ или $i_L(t_0 -)$), ЗНУ ($X(t_0)$), λ , $X_{уст}$ и K .

Для схемы второго порядка вид решения будет зависеть от корней характеристического уравнения. Количество ЗНУ будет уже два: $X(t_0)$ и значение первой производной искомой функции $(dX/dt)_{t_0}$ при $t = t_0$.

4. Нахождение зависимого начального условия $X(t_0)$.

Для нахождения $X(t_0)$ составляются уравнения для любого момента времени после коммутации по законам Кирхгофа. К ним добавляются компонентные уравнения. Для электрических цепей выше первого порядка уравнения Кирхгофа дифференцируют. Дифференцируют один раз для цепей второго порядка. Дважды дифференцируют для цепей третьего порядка. Дифференцируют далее для цепей четвёртого порядка и выше. Полученная система уравнений записывается для времени коммутации t_0 . Эта громоздкая система

уравнений решается относительно искомым зависимых начальных условий (ЗНУ), зная независимые начальные условия (ННУ).

Чтобы иметь единственное решение для уравнения первого порядка, необходимо знать (найти из составленной системы уравнений) значение функции $X(t_0)$ при $t = t_0$.

Чтобы иметь единственное решение для уравнения второго порядка, необходимо знать (найти из составленной системы уравнений) значение функции $X(t_0)$ и значение её первой производной $(dX/dt)_{t_0}$ при $t = t_0$.

И так далее для цепей третьего и выше порядков.

5. Нахождение коэффициента затухания λ .

Коэффициент затухания находится из характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение составляется (приравнивая нулю все источники) двумя способами:

– записывается входное сопротивление $Z(\lambda)$ относительно любого инерционного элемента и приравняется нулю $Z(\lambda) = 0$;

– записывается входная проводимость $Y(\lambda)$ относительно любых двух узлов и приравняется нулю $Y(\lambda) = 0$.

6. Нахождение установившегося значения $X_{уст}$.

Установившееся значение находится непосредственно по схеме при $t = \infty$. В установившемся режиме:

– при постоянных источниках рисуют схему, полагая индуктивность L – короткозамкнута, ёмкость C – разомкнута;

– при синусоидальных источниках рисуют схему в комплексной форме (с комплексными источниками и сопротивлениями) и применяют комплексный метод расчёта.

7. Нахождение постоянных интегрирования.

Зная зависимые начальные условия (п. 4) и установившееся значение $X_{уст}$, находят постоянные интегрирования.

8. Записывается ответ.

Пример 3.2. В электрической цепи (рис. 3.4) при разряде ёмкости требуется найти переходной процесс тока $i(t)$.

Решение. Действуем по приведённому выше алгоритму.

1. Выбираем направление и указываем на схеме стрелочкой напряжение на ёмкости $u_C(t)$.

2. В схеме до коммутации (рис. 3.12) находим независимое начальное условие $u_C(0-)$. Стрелочка этого напряжения направлена в соответствии с выбранным в п. 1 направлением $u_C(t)$. До коммутации был установившийся режим ($-\infty < t \leq 0-$) при постоянном источнике E . Для постоянного источника ёмкость разомкнута. Составляя уравнение по второму закону Кирхгофа, находим $u_C(0-) = E$. Согласно закону коммутации записываем:

$$u_C(0) = u_C(0-) = E.$$

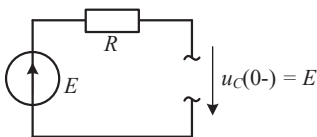


Рис. 3.12.

3. Электрическая схема содержит один инерционный элемент (одну ёмкость). Следовательно, она описывается уравнением первого порядка, вид решения которого мы уже знаем:

$$i(t) = i_{уст} + Ke^{\lambda t}. \text{ При } t = 0: i(0) = i_{уст} + K.$$

Количество ЗНУ для нахождения — одно, а именно: $i(0)$.

Постоянная интегрирования $K = i(0) - i_{уст}$.

4. Нахождение ЗНУ $i(0)$.

Рисуем схему после коммутации (рис. 3.13) для времени $0 \leq t < \infty$.

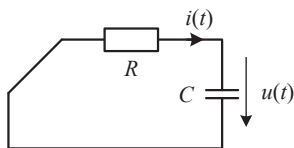


Рис. 3.13.

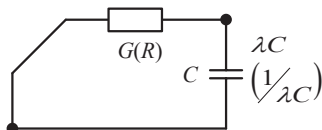


Рис. 3.14.

Записываем для этой схемы уравнение по второму закону Кирхгофа

$$Ri(t) + u(t) = 0.$$

При $t = 0$: $Ri(0) + u(0) = 0$. Из этого уравнения, зная независимое начальное условие $u_C(0) = E$, находим зависимое начальное условие:

$$i(0) = -u(0)/R = -u_C(0)/R = -E/R.$$

5. Нахождение коэффициента затухания λ .

Коэффициент затухания λ найдём из характеристического уравнения, которое запишем с помощью входной проводимости относительно двух узлов (рис. 3.14), приравнявая нулю $Y(\lambda) = 0$: $Y(\lambda) = \lambda C + G = 0$.

Отсюда находим

$$\lambda = -G/C = -1/RC = -1/\tau.$$

Характеристическое уравнение можно составить, приравнявая нулю входное сопротивление $Z(\lambda) = 0$: $1/\lambda C + R = 0$.

6. Нахождение установившегося значения $i_{уст}$.

Установившееся значение находим для времени $t = \infty$. На рис. 3.15 приведена электрическая цепь при $t = \infty$. Ёмкость разомкнута. Поэтому установившийся ток равен нулю $i_{уст} = 0$.

7. Постоянная интегрирования $K = i(0) - i_{уст} = -E/R$.

8. Записываем ответ $i(t) = i(0) e^{\lambda t} = -E/R e^{-t/RC} = -E/R e^{-t/\tau}$.

На рис. 3.16 приведён график переходного процесса $i(t)$.

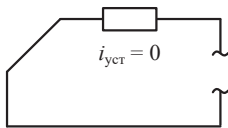


Рис. 3.15.

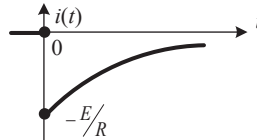


Рис. 3.16.

Пример 3.3. В схеме рис. 3.17 отключается источник тока J . Дано: $J = 10$ мА, $R = 1$ кОм, $C = 5$ нФ, $L = 20.83$ мГн. Требуется найти $i(t)$.

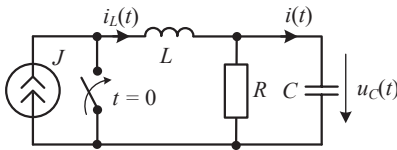


Рис. 3.17.

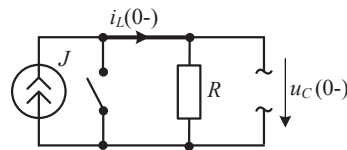


Рис. 3.18.

Решение. Действуем по приведённому выше алгоритму.

1. Выбираем направления и указываем на схеме стрелочками напряжение на ёмкости $u_C(t)$ и ток в индуктивности $i_L(t)$.

2. В схеме до коммутации (рис. 3.12) находим независимые начальные условия $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$. Стрелочки этих напряжения и тока направлены в соответствии с выбранными в п. 1 направлениями $u_C(t)$ и $i_L(t)$. До коммутации был установившийся режим ($-\infty < t \leq 0-$) при постоянном источнике J . Для постоянного источника ёмкость разомкнута, индуктивность короткозамкнута. Ток $i_L(0-) = J = 10$ мА, напряжение $u_C(0-) = RJ = 10$ В. Согласно закону коммутации записываем:

$$u_C(0) = u_C(0-), \quad i_L(0) = i_L(0-).$$

3. Электрическая цепь содержит два инерционных элемента: одну ёмкость и одну индуктивность. Следовательно, она описывается дифференциальным уравнением второго порядка, вид решения которого зависит от корней характеристического уравнения.

Количество ЗНУ будет уже два: $i(0)$ и значение первой производной искомой функции $(di/dt)_0$ при $t = 0$.

4. Нахождение ЗНУ $i(0)$ и $(di/dt)_0$.

Рисуют схему после коммутации (рис. 3.19) для времени $0 \leq t < \infty$.

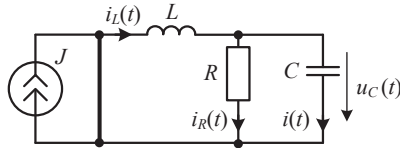


Рис. 3.19.

Для этой схемы записывают уравнения Кирхгофа:

$$-i_L(t) + i_R(t) + i(t) = 0, \quad (3.1)$$

$$u_C(t) - u_R(t) = 0, \quad (3.2)$$

$$u_L(t) + u_C(t) = 0. \quad (3.3)$$

К этим уравнениям Кирхгофа добавляют компонентные уравнения (уравнения связи между током и напряжением на соответствующем элементе):

$$u_L(t) = L di_L/dt, \quad (3.4)$$

$$i(t) = C du_C/dt, \quad (3.5)$$

$$u_R(t) = R i_R(t). \quad (3.6)$$

Для нахождения $(di/dt)_0$ дифференцируют уравнения (3.1) и (3.2):

$$- di_L/dt + di_R/dt + di/dt = 0, \quad (3.7)$$

$$du_C/dt - du_R/dt = 0. \quad (3.8)$$

Записывают эту систему уравнений для времени $t = 0$. Оставим нумерацию формул прежней, чтобы хорошо было видно число решаемых уравнений:

$$-i_L(0) + i_R(0) + i(0) = 0, \quad (3.1)$$

$$u_C(0) - u_R(0) = 0, \quad (3.2)$$

$$u_L(0) + u_C(0) = 0. \quad (3.3)$$

$$u_L(0) = L (di_L/dt)_0, \quad (3.4)$$

$$i(0) = C (du_C/dt)_0, \quad (3.5)$$

$$u_R(0) = R i_R(0). \quad (3.6)$$

$$-(di_L/dt)_0 + (di_R/dt)_0 + (di/dt)_0 = 0, \quad (3.7)$$

$$(du_C/dt)_0 - (du_R/dt)_0 = 0. \quad (3.8)$$

Из этой системы восьми уравнений находят ЗНУ, зная ННУ. Решим её.

Из уравнения (3.2) с учётом (3.6):

$$u_C(0) = R i_R(0);$$

отсюда находим

$$i_R(0) = u_C(0)/R = RJ/R = J.$$

Из уравнения (3.1) находим $i(0)$:

$$i(0) = i_L(0) - i_R(0) = J - J = 0.$$

Производную $(di/dt)_0$ найдём из уравнения (3.7), если будем знать $(di_L/dt)_0$ и $(di_R/dt)_0$.

Из уравнения (3.4) с учётом уравнения (3.3) получим:

$$(di_L/dt)_0 = u_L(0)/L = -u_C(0)/L. \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.8) с учётом (3.6) (понадобилось дифференцировать ещё и уравнение (3.6)) $(du_C/dt)_0 = (du_R/dt)_0 = R (di_R/dt)_0$ найдём $(di_R/dt)_0$ с учётом уравнения (3.5):

$$(di_R/dt)_0 = (du_C/dt)_0/R = i(0)/RC. \quad (3.10)$$

Наконец, из уравнения (3.7) с учётом (3.9) и (3.10) находим $(di/dt)_0$:
 $(di/dt)_0 = (di_L/dt)_0 - (di_R/dt)_0 = -u_C(0)/L - i(0)/RC = -Rj/L.$

5. Составление характеристического уравнения.

Нахождение корней характеристического уравнения.

Способ 1. Нахождение входного сопротивления $Z(\lambda)$ относительно любого из инерционных элементов, например, ёмкости. На рис 3.20 представлена схема для записи входного сопротивления. Ветвь с ёмкостью размыкается и находится $Z(\lambda)$.

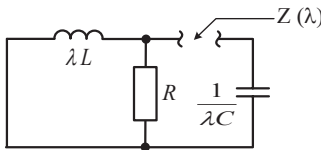


Рис. 3.20.

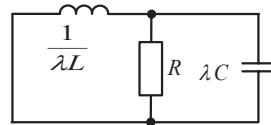


Рис. 3.21.

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\lambda C} + \frac{R \lambda L}{R + \lambda L} = \frac{R + \lambda L + \lambda C R \lambda L}{\lambda C (R + \lambda L)} = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda^2 + \lambda/RC + 1/LC = 0 \quad \text{- характеристическое уравнение.}$$

Способ 2. Нахождение входной проводимости $Y(\lambda)$ относительно двух узлов. На рис 3.21 представлена схема для записи входной проводимости.

$$Y(\lambda) = G + \lambda C + 1/\lambda L = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda^2 + \lambda/RC + 1/LC = 0 \quad \text{- характеристическое уравнение.}$$

Получили тот же результат. Для данной схемы способ 2 проще. Второй способ хорош тем, что ничего не размыкается и, следовательно, мала вероятность допустить ошибку.

Корни характеристического уравнения равны:

$$\lambda_1 = -0.08 \text{ 1/мкс}, \quad \lambda_2 = -0.12 \text{ 1/мкс}.$$

Корни – вещественные и разные. Переходный процесс носит аperiodический характер. Для аperiodического процесса решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$i(t) = i_{уст} + K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Постоянных интегрирования – две: K_1 и K_2 . Для их определения необходимо иметь два уравнения. Вторым уравнением будет производная di/dt . Поэтому дифференцируем вид решения:

$$di/dt = di_{уст}/dt + K_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Запишем эти два выражения для времени $t = 0$:

$$i(0) = i_{уст} + K_1 + K_2,$$

$$(di/dt)_0 = (di_{уст}/dt)_0 + K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2.$$

Перепишем эти уравнения: в левые части уравнений ставим искомые величины K_1 и K_2 ; в правые части – свободные члены (должны быть известными величинами):

$$\begin{aligned} 1 K_1 + 1 K_2 &= i(0) - i_{уст}, \\ \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 &= (di/dt)_0 - (di_{уст}/dt)_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В этой системе уравнений (3.11) ЗНУ известны (найжены в п. 4).

Найдём установившееся значение тока.

6. Нахождение установившегося тока $i_{уст}$.

Установившееся значение тока находим для времени $t = \infty$. Источник J отключается. Поэтому $i_{уст} = 0$.

7. Нахождение постоянных интегрирования K_1 и K_2 .

Из системы уравнений (3.11) п. 5 находим K_1 и K_2 с учётом $(di_{уст}/dt)_0 = 0$: $K_1 = -12$ мА, $K_2 = 12$ мА.

8. Записываем ответ: $i(t) = -12 e^{-0.08t} + 12 e^{-0.12t}$ мА.

9. Строим график. Переходный процесс $i(t)$ представлен на рис.3.22.

Для качественного построения переходного процесса необходимо знать: значение функции и знак её производной при $t = 0$, по какому закону изменяется функция (в нашем примере – по аperiodическому) и к чему стремится при $t = \infty$.

При решении примера 3.3 мы видели, что наибольшую трудность доставляет нахождение зависимых начальных условий: значений функции и её производной в момент коммутации при решении уравнений Кирхгофа.

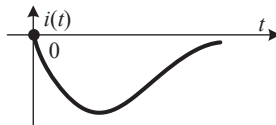


Рис. 3.22.

Уравнения Кирхгофа при решении многих задач в частотной области в редких случаях решали. Только в некоторых случаях составляли. Применяли в основном метод эквивалентного генератора, методы Максвелла – контурных токов и узловых напряжений, говоря при этом, что они уменьшают число решаемых уравнений. И вот наступила необходимость в их составлении и решении в задачах переходных процессов – во временной области. И убеждаемся, что не всё и не всегда так просто.

3.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНДУКТИВНЫХ L И ЁМКОСТНЫХ C ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ.

Задача введения математических моделей L и C элементов возникла в связи с необходимостью упростить расчёт переходных процессов классическим методом. В частности упростить нахождение зависимых начальных условий, используя при этом в основном известные методы расчёта, а, не ограничиваясь только составлением и решением систем уравнений по законам Кирхгофа. Сложность классического метода заставила учёных искать другие подходы при решении задач переходных процессов: операторный метод Лапласа, метод переменных состояния.

Математические модели L и C элементов с дополнительными источниками позволят нам ввести *предысторию* ($u_C(t_0 -)$ и $i_L(t_0 -)$) в *историю* переходного процесса – в дифференциальное уравнение, в его коэффициенты. А затем позволят нам найти зависимые начальные условия по коэффициентам дифференциального уравнения.

Индуктивный элемент (рис. 3.23).

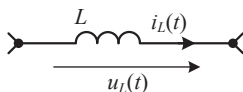


Рис. 3.23.

Компонентное уравнение – уравнение связи тока через индуктивный элемент и напряжения на нём имеет вид:

$$u_L(t) = L di_L/dt. \quad (3.12)$$

Дифференциал тока: $di_L = 1/L u_L(t)dt$.

Интегрируем это выражение от $t_0 -$ до текущего времени t :

$$\int_{t_0-}^t di_L = 1/L \int_{t_0-}^t u_L(t)dt.$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$i_L(t) - i_L(t_0-) = 1/L \int_{t_0-}^t u_L(t) dt = 1/L \int_{t_0}^t u_L(t) dt, \quad (3.13)$$

так как интеграл правой части уравнения по временным интервалам равен:

$$\int_{t_0-}^t u_L(t) dt = \int_{t_0-}^{t_0} u_L(t) dt + \int_{t_0}^t u_L(t) dt = 0 + \int_{t_0}^t u_L(t) dt = \int_{t_0}^t u_L(t) dt,$$

где $\int_{t_0-}^{t_0} u_L(t) dt = 0$ в виду того что продолжительность коммутации равна нулю $\Delta t = (t_0) - (t_0 -) = 0$.

При замене знака интеграла оператором интегрирования $1/p \int_{t_0}^t u_L(t) dt = 1/p u_L(t)$ выражение (3.13) принимает вид:

$$i_L(t) - i_L(t_0-) = 1/pL u_L(t),$$

отсюда:

$$i_L(t) = i_L(t_0-) + 1/pL u_L(t)$$

$$\text{или: } i_L(t) = i_L(t_0-) + Y_L u_L(t), \quad (3.14)$$

где обозначено: $Y_L = 1/pL$ – проводимость индуктивного элемента. Это выражение (3.14) является уравнением математической модели L элемента. Этому уравнению (3.14) соответствует эквивалентная электрическая схема индуктивного элемента (рис. 3.24) с параллельно включённым дополнительным источником $i_L(t_0-)$.

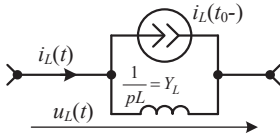


Рис. 3.24.

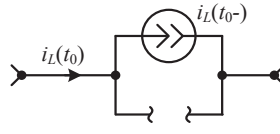


Рис. 3.25.

Примечание.

Заменив в компонентном уравнении (3.12) оператор дифференцирования d/dt буквой p ($d/dt = p$), получили

$$u_L(t) = L di_L/dt = d/dt Li_L = pL i_L.$$

Разделив полученное выражение на pL , получим:

$$i_L(t) = 1/pL u_L(t).$$

Таким образом, деление на p эквивалентно интегрированию.

Для времени $t = t_0$ интеграл $\int_{t_0}^{t_0} u_L(t) dt = 0$ и уравнение (3.13) даёт равенство: $i_L(t_0) = i_L(t_0-)$.

Таким образом, для математической модели индуктивного элемента равенство $t = t_0$ соответствует размыканию индуктивного элемента в момент времени t_0 (рис. 3.25).

Умножим теперь левую и правую части равенства (3.14) на pL . В результате получим:

$$u_L(t) = pL i_L(t) - pL i_L(t_0-)$$

или: $u_L(t) = Z_L i_L(t) - Z_L i_L(t_0-),$ (3.15)

где обозначено: $Z_L = pL$ – сопротивление индуктивного элемента.

Этому равенству (3.15) соответствует эквивалентная схема с преобразованным источником тока с параллельной индуктивностью в источник напряжения с последовательной индуктивностью (рис. 3.26).

Заменим теперь в уравнении (2.15) $p = d/dt$. В результате получим:

$$u_L(t) = L di_L/dt - d/dt Li_L(t_0-). \quad (3.16)$$

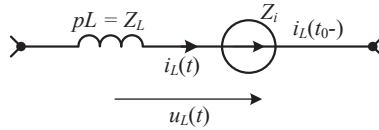


Рис. 3.26.

Сравним полученное выражение (3.16) с уравнением (3.12). Видим, что уравнение (3.12) дополнено нулевым слагаемым $d/dt Li_L(t_0-)$, в которое входит $i_L(t_0-)$ – предыстория переходного процесса.

Ёмкостный элемент (рис.3.27).

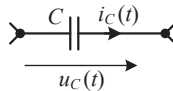


Рис. 3.27.

Компонентное уравнение – уравнение связи тока через ёмкостный элемент и напряжение на нём имеет вид:

$$i_C(t) = C du_C/dt. \quad (3.17)$$

Дифференциал напряжения:

$$du_C = 1/C i_C(t) dt.$$

Интегрируем это выражение от (t_0-) до текущего времени t :

$$\int_{t_0-}^t du_C = 1/C \int_{t_0-}^t i_C(t) dt.$$

По формуле Ньютона – Лейбница:

$$u_C(t) - u_C(t_0-) = 1/C \int_{t_0-}^t i_C(t) dt = 1/C \int_{t_0-}^t i_C(t) dt, \quad (3.18)$$

так как интеграл правой части уравнения по временным интервалам равен:

$$\int_{t_0-}^t i_C(t) dt = \int_{t_0-}^{t_0} i_C(t) dt + \int_{t_0}^t i_C(t) dt = 0 + \int_{t_0}^t i_C(t) dt = \int_{t_0}^t i_C(t) dt.$$

При замене знака интеграла оператором интегрирования $1/p \int_{t_0}^t i_C(t) dt = 1/p i_C(t)$ выражение (3.18) принимает вид:

$$u_C(t) - u_C(t_0-) = 1/pC i_C(t),$$

отсюда:

$$u_C(t) = u_C(t_0-) + 1/pC i_C(t) \\ \text{или } u_C(t) = u_C(t_0-) + Z_C i_C(t), \quad (3.19)$$

где обозначено: $Z_C = 1/pC$ – сопротивление ёмкостного элемента.

Это выражение (3.19) является уравнением математической модели C-элемента. Этому уравнению (3.19) соответствует эквивалентная электрическая схема ёмкостного элемента (рис. 3.28) с последовательно включённым дополнительным источником $u_C(t_0-)$.

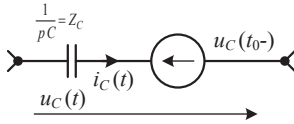


Рис. 3.28.

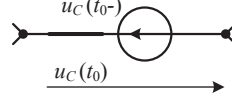


Рис. 3.29.

Для времени $t = t_0$ интеграл $\int_{t_0}^{t_0} i_C(t) dt = 0$ и уравнение (3.18) даёт равенство:

$$u_C(t_0) = u_C(t_0-).$$

Таким образом, для математической модели ёмкостного элемента равенство $t = t_0$ соответствует короткому замыканию ёмкостного элемента в момент времени t_0 (рис. 3.29).

Умножим теперь левую и правую части равенства (3.19) на pC . В результате получим:

$$i_C(t) = pC u_C(t) - pC u_C(t_0-) \\ \text{или: } i_C(t) = Y_C u_C(t) - Y_C u_C(t_0-), \quad (3.20)$$

где обозначено: $Y_C = pC$ – проводимость ёмкостного элемента.

Этому равенству (3.20) соответствует эквивалентная схема с преобразованным источником напряжения с последовательной ёмкостью в источник тока с параллельной ёмкостью (рис. 3.30).

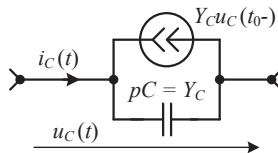


Рис. 3.30.

Заменяем теперь в уравнении (3.20) $p = d/dt$. В результате получим:

$$i_C(t) = Cdu_C/dt - d/dt Cu_C(t_0-). \quad (3.21)$$

Сравним полученное выражение (3.21) с уравнением (3.17). Видим, что уравнение (3.17) дополнено нулевым слагаемым $d/dt Cu_C(t_0-)$, в которое входит $u_C(t_0-)$ – предыстория переходного процесса.

Примечание.

Введение оператора p для обозначения производной ($di/dt = p$) и интеграла ($\int_0^t idt = i/p$) было предложено ещё английским физиком Хевисайдом в его операторном методе [1]. Это позволяет дифференциальное уравнение привести к алгебраическому виду, в котором оператор p рассматривается уже не как символ образования производных, а как алгебраический множитель, который может быть отделён от соответствующей переменной величины. В отличие от Хевисайда мы не переходим к операторному методу, а используем такое обозначение только для алгебраизации выкладок. Наша цель – получение полного симметричного дифференциального уравнения.

Резистивный элемент (рис.3.31).

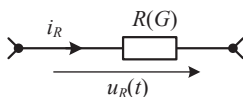


Рис. 3.31.

Закон Ома для резистивного элемента: $u_R(t) = R i_R(t)$ и $i_R(t) = G u_R(t)$.

В резистивных цепях, не содержащих индуктивных и ёмкостных элементов, переходные процессы не имеют место.

Примечание.

1. Индуктивный элемент L ведёт себя как размыкание не только при $t = 0$, но и для любого времени коммутации t_0 .

2. Ёмкостный элемент C ведёт себя как короткое замыкание не только при $t = 0$, но и для любого времени коммутации t_0 .

3. Эквивалентные схемы замещения с дополнительными источниками позволяют достаточно просто находить значение искомой величины (напряжения, тока) в момент коммутации t_0 при разомкнутой индуктивности и замкнутой ёмкости.

3.4. СОСТАВЛЕНИЕ ПОЛНОГО СИММЕТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ ИНДУКТИВНОГО И ЁМКОСТНОГО ЭЛЕМЕНТОВ.

Математические модели индуктивного L и ёмкостного C элементов позволят выполнить эту задачу составления полного дифференциального уравнения, в которое войдут $i_L(t_0-)$ и $u_C(t_0-)$ – предыстория переходного процесса. Рассмотрим составление симметричного дифференциального уравнения на примере.

Пример 3.4. На рис 3.32 приведена схема, в которой требуется найти напряжение на ключе $u(0)$ в момент коммутации $t_0 = 0$. Дано: $J = 1.2$ мА, $L = 10$ мГн, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ кОм.

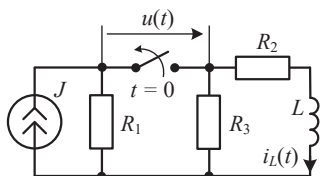


Рис. 3.32.

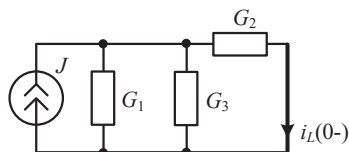


Рис. 3.33.

Решение.

1. Выбираем направление и указываем на схеме стрелочкой ток в индуктивности $i_L(t)$.

2. В схеме до коммутации (рис. 3.24) находим предысторию $i_L(0-)$ любым известным методом, например, по формуле разброса:

$$i_L(0-) = J \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = 0.4 \text{ мА.}$$

3. Для момента коммутации $t_0 = 0$ математическая модель индуктивного элемента представляет собой дополнительный источник с разомкнутой индуктивностью. На рис. 3.34 приведена схема с дополнительным источником $i_L(0-)$. Дополнительный источник позволяет найти зависимое начальное условие $u(0)$. Любым известным методом или по второму закону Кирхгофа запишем:

$$u(0) = R_3 i_L(0-) + R_1 J = 16 \text{ В.}$$

Поставленная задача решена.

Теперь поставим задачу (в этом же примере) составить дифференциальное уравнение относительно искомой переменной напряжения на ключе $u(t)$.

Решение.

Нарисуем схему с математической моделью индуктивного элемента для любого момента времени $0 \leq t \leq \infty$, включая и момент коммутации ($t = 0$) и установившийся режим ($t = \infty$). На рис. 3.35 приведена такая схема.

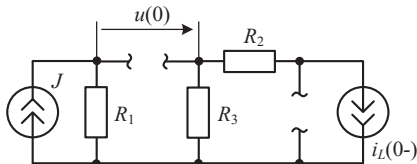


Рис. 3.34

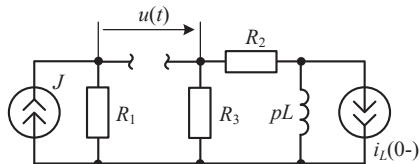


Рис. 3.35.

Для составления полного дифференциального уравнения выбираем метод. Применим, например, метод предельных состояний. Так как требуется найти напряжение, то преобразуем источники тока в эквивалентные источники напряжения (рис. 3.36).

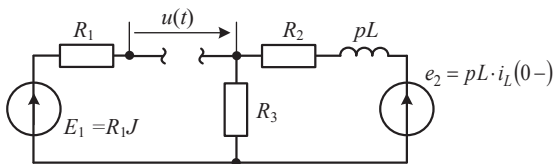


Рис. 3.36.

В этой схеме источники напряжения равны:

$$E_1 = R_1 J, \quad e_2 = pL i_L(0-).$$

Схема содержит один контур. Применим универсальную формулу метода предельных состояний (2.35) для напряжения:

$$(0_1 + R_2 + R_3 + pL)u = R_2 E_1 + R_3(pL i_L(0-) + E_1) + pL E_1.$$

Группируя слагаемые, приведём уравнение к виду:

$$(p + a_0)u = pb_1 + b_0. \quad (3.22)$$

В уравнении (3.22) раскроем скобки и заменим $p = d/dt$. В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$du/dt + a_0 u(t) = db_1/dt + b_0. \quad (3.23)$$

В этом уравнении (3.23) с нулевым слагаемым db_1/dt коэффициенты равны:

$$a_0 = (R_2 + R_3)/L = 2 \text{ 1/мкс},$$

$$b_0 = (R_2 + R_3)E/L = 2 \text{ В/мкс},$$

$$b_1 = R_3 i_L(0-) + E_1 = R_3 i_L(0-) + R_1 J = u(0) = 16 \text{ В}.$$

Из полученного последнего выражения видно, что коэффициент b_1 равен зависимому начальному условию $u(0)$. Таким образом, нулевое слагаемое db_1/dt дифференциального уравнения в своём коэффициенте b_1 содержит необходимую информацию для нахождения $u(t)$. Запишем вид решения и ответ. Вид решения:

$$u(t) = u_{\text{уст}} + Ke^{-a_0 t},$$

где: $u_{\text{уст}} = b_0/a_0$ и $K = u(0) - b_0/a_0 = b_1 - b_0/a_0$.

Ответ: $u(t) = b_0/a_0 + Ke^{-a_0 t} = b_0/a_0 + (b_1 - b_0/a_0)e^{-a_0 t}$.

3.5. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ. НАХОЖДЕНИЕ ЗАВИСИМЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ПОЛНОГО СИММЕТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

Дифференциальные уравнения для искомой функции $X = X(t)$ (напряжения, тока) будем составлять для схем с математическими моделями индуктивного и ёмкостного элементов не обнуляя нулевые слагаемые.

Дифференциальные уравнения могут быть получены для таких схем, применяя законы Кирхгофа или любые известные методы расчёта электрических цепей (метод наложения, метод эквивалентного генератора, метод контурных токов, метод узловых напряжений, метод предельных состояний). Эти уравнения будем приводить к канонической форме записи.

Рассмотрим уравнение первого порядка, в котором $p = d/dt$:

$$(p + a_0)X = pb_1 + b_0. \quad (3.24)$$

Раскрывая скобки, перепишем это уравнение, перенося в правую часть слагаемое a_0X . Получим:

$$pX = pb_1 + b_0 - a_0X. \quad (3.25)$$

Делим это уравнение (3.25) на p (интегрируем уравнение):

$$X = b_1 + (b_0 - a_0X)/p. \quad (3.26)$$

Заменим в этих уравнениях (3.25) и (3.26) $p = d/dt$ и $f(t)/p = \int_{t_0}^t f(t)dt$.

Запишем значение функции $X = X(t)$ и её производной для времени $t = t_0$. Учитывая, что $\int_{t_0}^{t_0} f(t)dt = 0$ значение функции из (3.26):

$$X(t_0) = b_1 + 0 = b_1. \quad (3.27)$$

Равенство (3.27) позволяет находить зависимое начальное условие $X(t_0)$ для дифференциального уравнения первого порядка. Это равенство было уже получено для частного случая при решении примера 3.4 в параграфе 3.4.

Значение производной из (3.25) для времени $t = t_0$:

$$(dX/dt)_{t_0} = (db_1/dt)_{t_0} + b_0 - a_0X(t_0). \quad (3.28)$$

Если b_1 — постоянная величина, то $db_1/dt = 0$ и последнее выражение (3.28) принимает вид:

$$(dX/dt)_{t_0} = b_0 - a_0X(t_0). \quad (3.29)$$

Выражения (3.27) и (3.29) запишем одним матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_0) \\ (dX/dt)_{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим уравнение второго порядка,

$$(p^2 + pa_1 + a_0)X = p^2b_2 + pb_1 + b_0, \quad (3.31)$$

в котором $p = d/dt$ и $p^2 = d^2/dt^2$.

Раскрывая скобки, перепишем в правой части слагаемые по степеням убывания p :

$$p^2X = p^2b_2 + pb_1 - pa_1X + b_0 - a_0X. \quad (3.32)$$

Делим это уравнение (3.32) на p (интегрируем уравнение):

$$pX = pb_2 + b_1 - a_1X + (b_0 - a_0X)/p. \quad (3.33)$$

Ещё раз делим на p (интегрируем уравнение (3.33)):

$$X = b_2 + (b_1 - a_1X)/p + (b_0 - a_0X)/p^2. \quad (3.34)$$

Заменим в последних трёх уравнениях (3.32), (3.33) и (3.34) $p = d/dt$, $p^2 = d^2/dt^2$, $f(t)/p = \int_{t_0}^t f(t)dt$, $f(t)/p^2 = \iint_{t_0}^t f(t)dt$ и запишем значение функции и значения их производных при $t = t_0$. Значение функции из (3.34):

$$X(t_0) = b_2 + 0 + 0 = b_2. \quad (3.35)$$

Значения их производных из (3.33) и (3.32):

$$(dX/dt)_{t_0} = (db_2/dt)_{t_0} + b_1 - a_1X(t_0) + 0; \quad (3.36)$$

$$(d^2X/dt^2)_{t_0} = (d^2b_2/dt^2)_{t_0} + (db_1/dt)_{t_0} + b_0 - a_1(dX/dt)_{t_0} - a_0X(t_0). \quad (3.37)$$

Выражения (3.35) и (3.36) позволяют находить зависимые начальные условия по коэффициентам симметричного дифференциального уравнения второго порядка.

Если коэффициенты b_1 и b_2 — постоянные величины, то их производные равны нулю и последние два выражения с учётом (3.35) принимают вид:

$$(dX/dt)_{t_0} = b_1 - a_1X(t_0) = b_1 - a_1b_2; \quad (3.38)$$

$$(d^2X/dt^2)_{t_0} = b_0 - a_1(dX/dt)_{t_0} - a_0X(t_0) = b_0 - a_1(dX/dt)_{t_0} - a_0b_2. \quad (3.39)$$

Выражения (3.35), (3.38) и (3.39) запишем одним матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_0) \\ (dX/dt)_{t_0} \\ (d^2X/dt^2)_{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Примечание.

Будем помнить, что при источниках, изменяющихся во времени коэффициенты b_1 и b_2 — в общем случае не являются постоянными величинами. Их

производные в общем случае не равны нулю. Тогда для нахождения производной применяется формула (3.36).

Матричные уравнения (3.30) и (3.40) имеют закономерность в своём написании. Поэтому они могут быть обобщены для дифференциальных уравнений третьего и выше порядков. Они легко запоминаются и позволяют находить зависимые начальные условия по коэффициентам симметричного дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения третьего порядка будем иметь уравнения:

$$X(t_0) = b_3, \quad (3.41)$$

$$a_2 X(t_0) + X'(t_0) = b_2, \quad (3.42)$$

$$a_1 X(t_0) + a_2 X'(t_0) + X''(t_0) = b_1, \quad (3.43)$$

$$a_0 X(t_0) + a_1 X'(t_0) + a_2 X''(t_0) + X'''(t_0) = b_0. \quad (3.44)$$

Эти четыре уравнения могут быть записаны в компактной матричной форме записи. Из первых трёх уравнений находим зависимые начальные условия:

из уравнения (3.41) по коэффициенту b_3 находим $X(t_0)$

$$X(t_0) = b_3,$$

из уравнения (3.42) находим первую производную

$$X'(t_0) = b_2 - a_2 X(t_0) = b_2 - a_2 b_3,$$

из уравнения (2.43) находим вторую производную

$$X''(t_0) = b_1 - a_1 X(t_0) - a_2 X'(t_0) = b_1 - a_1 b_3 - a_2 [b_2 - a_2 b_3].$$

Уравнение (3.44) представляет собой дифференциальное уравнение, записанное для времени $t = t_0$, в котором обнулены нулевые слагаемые:

$$X'''(t_0) + a_2 X''(t_0) + a_1 X'(t_0) + a_0 X(t_0) = 0 + 0 + 0 + b_0.$$

Уравнения называются рекуррентными, так как каждое последующее зависимое начальное условие находится из предыдущего: первая производная $(dX/dt)_{t_0}$ находится с учётом известной $X(t_0) = b_3$; вторая производная $(d^2X/dt^2)_{t_0}$ находится с учётом известных предыдущих формул.

Вернёмся к примеру 3.3. Исходная электрическая схема приведена на рис. 3.17. Будем считать, что независимые начальные условия известны (найлены): ток $i_L(0) = J = 10$ мА, напряжение $u_C(0) = RJ = 10$ В.

Требуется:

- нарисовать схему с математическими моделями индуктивного и ёмкостного элементов, содержащую дополнительные источники;
- любым известным методом расчёта электрических цепей получить дифференциальное уравнение для искомой переменной $i = i(t)$ и привести его к симметричному виду;

– по коэффициентам a и b полученного дифференциального уравнения найти зависимые начальные условия $i(0)$ и $(di/dt)_0$ применяя рекуррентные формулы.

Решение.

Рисуем схему с математическими моделями индуктивного и емкостного элементов, содержащую дополнительные источники (рис. 3.37).

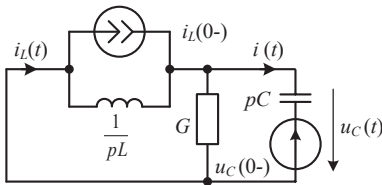


Рис. 3.37.

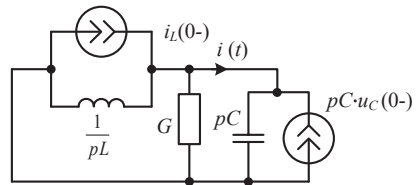


Рис. 3.38.

Выбираем метод предельных состояний. При источниках, равных нулю, считаем число узлов, контуров и элементов. Число узлов $y = 2$, (все L , C и R элементы включены параллельно), число контуров $k = 2$, число элементов $n = 3$. Проверяем равенство $y - 1 + k = n$. Так как $y - 1 < k$, то применяем формулу с узловым определителем.

Для нахождения тока преобразуем источник напряжения $u_C(0-)$ с последовательно включённой проводимостью pC в эквивалентный источник тока $pCu_C(0-)$ с параллельно включённой проводимостью (рис. 3.38). Применим универсальную формулу (2.37) метода предельных состояний для тока: $(1/pL + G + pC) i(t) = 1/pL [-pCu_C(0-)] + G[-pCu_C(0-)] + pCi_L(0-)$.

Можно задачу решить, применяя метод наложения.

По методу наложения для той же схемы рис. 3.38, применяя формулу разброса (формулу распределения тока по параллельно включённым проводимостям), запишем:

$$i(t) = \frac{i_L(0-)pC}{1/pL + G + pC} - \frac{pCu_C(0-)[G + 1/pL]}{1/pL + G + pC} = \frac{i_L(0-)pC - pCu_C(0-)[G + 1/pL]}{1/pL + G + pC}.$$

Получили тот же результат.

Приведём полученное выражение к виду:

$$(p^2 + pa_1 + a_0)i = p^2b_2 + pb_1 + b_0.$$

Раскрывая скобки и заменяя $p = d/dt$ и $p^2 = d^2/dt^2$, получим полное симметричное дифференциальное уравнение:

$$d^2i/dt^2 + a_1 di/dt + a_0i(t) = d^2b_2/dt^2 + db_1/dt + b_0.$$

Коэффициенты этого уравнения равны:

$$a_0 = 1/LC, \quad a_1 = G/C = 1/RC, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = -u_C(0-)/L, \quad b_2 = i_L(0-) - Gu_C(0-).$$

Все эти коэффициенты содержат всю необходимую информацию для получения решения:

По рекуррентным формулам находим зависимые начальные условия $i(0) = b_2 = i_L(0-) - Gu_C(0-)$ и $(di/dt)_0 = b_1 - a_1 b_2 = -u_C(0-)/L - G/C [i_L(0-) - Gu_C(0-)]$.

Зная коэффициенты a_0 и a_1 , запишем характеристическое уравнение и найдём его корни. Тем самым будем знать, по какому закону идёт переходный процесс.

Установившееся значение тока $i_{уст} = b_0/a_0$.

Пример 3.5. На рис 3.39 приведена схема, в которой даны: постоянный источник $E = 12$ В, $J = 2$ мА, $R_1 = R_2 = R_3 = 2$ кОм, $L = 2$ мГн, $C = 4$ нФ.

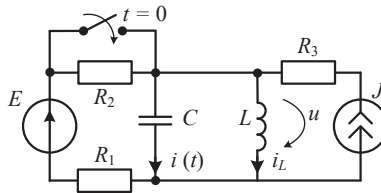


Рис. 3.39.

Требуется найти $i(0)$, $(di/dt)_0$ и построить качественно график $i(t)$, зная, что корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые.

Решение.

1. Выбираем направление и указываем на схеме стрелочками напряжение на ёмкости $u_C(t)$ и ток в индуктивности $i_L(t)$.

2. В схеме до коммутации ($-\infty < t \leq 0-$) находим $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$ – находим предысторию. Направления стрелочек искомого напряжения и тока ставим в соответствии с выбранными в п. 1 направлениями $u_C(t)$ и $i_L(t)$.

По схеме рис 3.40 находим $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$ любым известным методом, например, методом наложения.

$u_C(0-) = 0$, – для постоянного источника индуктивность представляет собой короткое замыкание и, следовательно, напряжение на коротке равно нулю;

$$i_L(0-) = E/(R_1 + R_2) + J = 5 \text{ мА.}$$

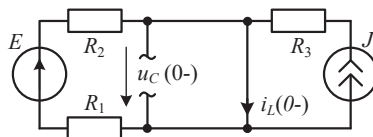


Рис. 3.40.

Для качественного построения графика необходимо знать:

1. значение функции при времени равном нулю $i(0)$,
2. значение её производной в нуле $(di/dt)_0$,
3. к чему стремится в бесконечности $i_{уст}$,
4. какой характер имеет переходной процесс.

У нас есть выбор: находить зависимые начальные условия, составляя уравнения по законам Кирхгофа, либо составить полное симметричное дифференциальное уравнение и по рекуррентным формулам найти зависимые начальные условия.

Начнём с нахождения ЗНУ, составляя уравнения по законам Кирхгофа. Для схемы рис. 3.41 запишем эти уравнения:

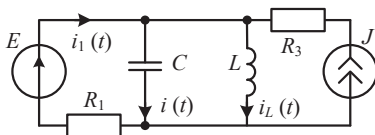


Рис. 3.41.

$$-i_1(t) + i_L(t) + i(t) - J = 0, \quad (3.45)$$

$$R_1 i_1(t) + u_C(t) = E, \quad (3.46)$$

$$u_C(t) - u_L(t) = 0 \quad (\text{или: } R_1 i_1(t) + u_L(t) = E). \quad (3.47)$$

Дифференцируем уравнения Кирхгофа:

$$-di_1/dt + di_L/dt + di/dt - 0 = 0, \quad (3.48)$$

Приравняв нулю производную от постоянной величины $dJ/dt = 0$, уже на этом начальном этапе потеряли информацию.

$$R_1 di_1/dt + du_C/dt = 0 \quad (\text{здесь опять приравняли } dE/dt = 0), \quad (3.49)$$

$$du_C/dt - du_L/dt = 0. \quad (3.50)$$

Компонентные уравнения:

$$i = C du_C/dt, \quad (3.51)$$

$$u_L = L di_L/dt. \quad (3.52)$$

Эту систему уравнений необходимо записать для времени, равном нулю. Затем решить полученные уравнения относительно $i(0)$ и $(di/dt)_0$, зная $i_L(0)$ и $u_C(0)$. Вот здесь нам и понадобятся законы коммутации:

$$i_L(0) = i_L(0-) \quad \text{и} \quad u_C(0) = u_C(0-).$$

Иначе с уравнениями Кирхгофа задачу не решить.

Из уравнений (3.45) и (3.46) при $t = 0$ находим

$$i(0) = E/R_1 - i_L(0) + J = 3 \text{ мА}.$$

Читателю предлагается самостоятельно решить составленные уравнения и найти зависимое начальное условие $(di/dt)_0$.

Решим поставленную задачу нахождения зависимых начальных условий, составляя полное дифференциальное уравнение.

На рис. 3.42 представлена схема с математическими моделями ёмкостного и индуктивного элементов. Выбираем метод, с помощью которого составим дифференциальное уравнение. Например, метод двух узлов. Для напряжения $u(t)$ запишем:

$$u = \frac{G_1 E - i_L(0-) + J}{G_1 + pC + 1/pL}.$$

Для тока:

$$i = upC.$$

Уравнение приводится к виду:

$$(a_0 + pa_1 + p^2)i = b_0 + pb_1 + p^2b_2.$$

Здесь: $p = d/dt$ и $p^2 = d^2/dt^2$.

Коэффициенты дифференциального уравнения равны:

$$a_0 = 1/LC = 0,125 \text{ (1/мкС)}^2, \quad a_1 = 1/R_1C = 0,125 \text{ 1/мкС},$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = G_1 E - i_L(0-) + J = 3 \text{ мА}.$$

По рекуррентным формулам находим зависимые начальные условия:

$$i(0) = b_2 = 3 \text{ мА},$$

$$(di/dt)_0 = b_1 - a_1 b_2 = -0.375 \text{ мА/мкС}.$$

Установившееся значение тока $i_{уст} = b_0/a_0 = 0$.

Так как корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые, то переходный процесс имеет колебательный характер, график которого приведён на рис. 3.43.

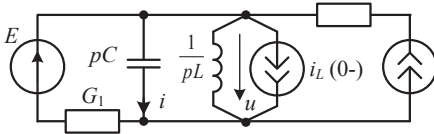


Рис. 3.42.

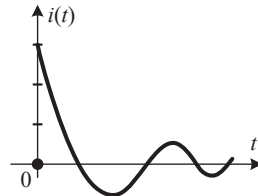


Рис. 3.43.

3.6. РАСЧЁТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ИСТОЧНИКАХ

Расчёт переходных процессов при синусоидальных источниках в основном отличается от рассмотренных ранее с постоянными источниками тем, что мы от временной области будем переходить в частотную область и обратно во временную. При этом хорошо будет видна взаимосвязь временной области с частотной. Решать задачи будем, составляя полные симметричные уравнения *единые* для временной и частотной областей.

Рассмотрим два примера. Первый пример электрической цепи с одним инерционным элементом, второй – с двумя.

Пример 3.6. На рис. 3.44 представлена схема с одним инерционным элементом – ёмкостью (описывается уравнением первого порядка).

Дано: $e(\omega t) = E_m \sin(\omega t + \pi/6)$ В, $E_m = 100$ В, $\omega = 314$ 1/С, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом, $C = 300$ мкФ. Требуется найти $u(t)$.

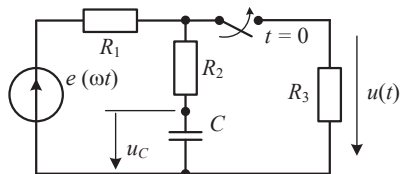


Рис. 3.44

Решение. Каким бы способом мы ни решали задачу по переходным процессам, решать её начинаем с нахождения предыстории – $u_C(0-)$.

1. Выбираем направление и указываем на схеме стрелочкой напряжение на ёмкости $u_C(t)$.

2. В схеме до коммутации ($-\infty < t \leq 0-$) находим $u_C(0-)$.

Ключ разомкнут. Так как источник синусоидальный, применяем либо комплексный метод расчёта, либо решаем задачу с помощью разложения электрической цепи на резистивные подсхемы (см. второй раздел). Для схемы рис. 3.45 комплексная амплитуда напряжения на ёмкости, применяя второй закон Кирхгофа и закон Ома, равна:

$$\dot{U}_{Cm} = \frac{\dot{E}_m/pC}{R_1 + R_2 + 1/pC} = \frac{\dot{E}_m}{1 + pC(R_1 + R_2)} = 46.88 e^{-j32^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение напряжения на ёмкости до коммутации – предыстория:

$$u_C(t) = 46.88 \sin(\omega t - 32^\circ) \text{ В.}$$

$$\text{При } t = 0- : u_C(0-) = 46.88 \sin(-32^\circ) = -24.84 \text{ В.}$$

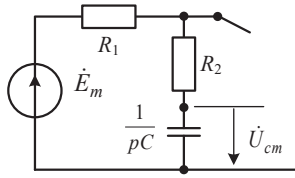


Рис. 3.45

3. Рисуем схему после коммутации ($0 \leq t \leq \infty$) с математической моделью емкостного элемента, который учитывает предысторию (рис. 3.46).

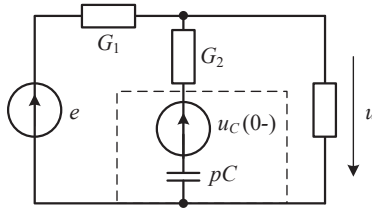


Рис. 3.46.

Для этой схемы составим полное симметричное уравнение, *единое* для временной и для частотной областей. Обозначениям на схеме соответствуют:

- во временной области: $p = d/dt$, $e = e(t)$, и $u = u(t)$;
- в частотной области (в уравнении полагаем $u_C(0-) = 0$): $p = j\omega$, $e = \dot{E}$ и $u = \dot{U}_{уст}$ – комплексные напряжения.

Любым известным методом, например, методом двух узлов, находим u :

$$u = \frac{G_1 e + u_C(0-) p C G_2 / (p C + G_2)}{G_1 + G_3 + p C G_2 / (p C + G_2)} = \frac{p b_1 + b_0}{p + a_0}.$$

Запишем выражение в строчку

$$(p + a_0)u = p b_1 + b_0$$

или, раскрывая скобки:

$$p u + a_0 u = p b_1 + b_0.$$

Последнее выражение есть уравнение полное симметричное и *единое* для временной и частотной областей. Его коэффициенты равны:

$a_0 = \frac{(G_1 + G_3) G_2}{(G_1 + G_2 + G_3) C} = 222.22 \text{ 1/C}$ - во временной области и рад/C - в частотной области,

$$b_0 = \frac{G_1 G_2 e}{(G_1 + G_2 + G_3) C} = 111.11 e \text{ В/C},$$

$$b_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2+G_3} e + \frac{G_2}{G_1+G_2+G_3} u_C(0-) = e/3 + u_C(0-)/3 \text{ В.}$$

Во временной области $p = d/dt$, $e = e(t)$, и $u = u(t)$. Записываем дифференциальное уравнение

$$du/dt + a_0 u(t) = db_1/dt + b_0.$$

Его вид решения:

$$u(t) = u_{уст} + K e^{-a_0 t}.$$

В частотной области (полагаем $u_C(0-) = 0$): $p = j\omega$, $e = \dot{E}$ и $u = \dot{U}_{уст}$. Симметричное единое уравнение позволяет найти комплексное установившееся напряжение $\dot{U}_{уст}$ при времени $t = \infty$.

$$U_{уст} = \frac{b_0 + j\omega b_1}{a_0 + j\omega} = \frac{39.7}{\sqrt{2}} e^{j18.6^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение установившегося напряжения равно

$$u_{уст}(\omega t) = 39.7 \sin(\omega t + 18.6^\circ) \text{ В.}$$

Переходим снова во временную область и записываем вид решения с полученным установившимся значением:

$$u(t) = 39.7 \sin(\omega t + 18.6^\circ) + K e^{-a_0 t}.$$

Осталось найти постоянную интегрирования K . Для этого запишем вид решения для $t = 0$:

$$u(0) = 39.7 \sin(0 + 18.6^\circ) + K = 12.663 + K.$$

Отсюда:

$$K = u(0) - 12.663 = b_1(0) - 12.663.$$

Здесь:

$$u(0) = b_1(0) = e(0)/3 + u_C(0-)/3 = 100 \sin 30^\circ / 3 + (-24.84)/3 = 8.387 \text{ В}$$

$$\text{С учётом этого } K = 8.387 - 12.663 = -4.27 \text{ В.}$$

Записываем окончательный ответ:

$$u(t) = 39.7 \sin(\omega t + 18.6^\circ) - 4.27 e^{-222.22t} \text{ В.}$$

Таким образом, задача решена с помощью полного симметричного уравнения, *единого* для временной и частотной областей. Симметричное полное уравнение позволило объединить временную и частотную области и тем самым исключить лишние выкладки, схемы (например, для $t = \infty$) и расчёты.

Расчёт электрических цепей содержащих индуктивность и ёмкость – с двумя инерционными элементами (описываемых уравнениями второго порядка) проводится аналогично. Рассмотрим такой пример.

Пример 3.7. Схема представлена на рис. 3.47.

Дано: $e(\omega t) = E_m \sin(\omega t + 75^\circ)$ В, $E_m = 200\sqrt{2}$ В, $\omega = 1207$ рад/с, $L = 20$ мГн, $C = 200$ мкФ.

Требуется найти ток $i(t)$.

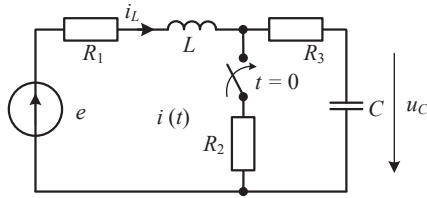


Рис. 3.47.

Решение.

1. Выбираем направление и указываем на схеме стрелочками направление на ёмкости $u_C(t)$ и ток в индуктивности $i_L(t)$.

2. В схеме до коммутации ($-\infty < t \leq 0-$) находим $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$ – находим предысторию. Направления стрелочек искомого напряжения и тока ставим в соответствии с выбранными в п. 1 направлениями $u_C(t)$ и $i_L(t)$.

По схеме в комплексной форме записи её индуктивного и ёмкостного элементов (рис. 3.48) находим сначала комплексные напряжение и ток, а затем найдём $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$.

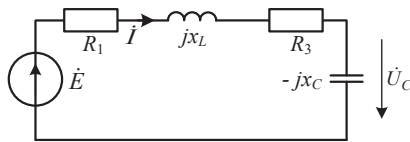


Рис. 3.48.

Расчётные параметры индуктивного и ёмкостного сопротивлений:

$$x_L = \omega L = 24.14 \text{ Ом}, \quad x_C = 1/\omega C = 4.14 \text{ Ом};$$

комплексного сопротивления:

$$Z = R_1 + R_3 + j(x_L - x_C) = 20 + j20 = 20\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексная амплитуда тока через индуктивность:

$$I_m = E_m/Z = 10e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока: $i(\omega t) = i_L(\omega t) = 10\sin(\omega t + 30^\circ) \text{ А,}$

$$i_L(0-) = 5 \text{ А.}$$

Комплексная амплитуда напряжения на ёмкости:

$$U_{Cm} = -jx_C I_m = 41.4e^{-j60^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение напряжения: $u_C(\omega t) = 41.4 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ В,}$

$$u_C(0-) = -35.85 \text{ В.}$$

3. Рисуем схему после коммутации, которая охватывает весь временной промежуток переходного процесса ($0 \leq t \leq \infty$) с математическими моделями индуктивного и емкостного элементов (рис. 3.49).

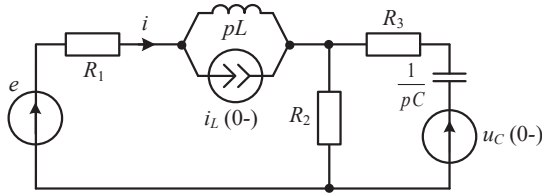


Рис. 3.49.

Для этой схемы составляем полное уравнение, *единое* для временной и для частотной областей. Обозначениям на схеме соответствуют:

- во временной области: $p = d/dt$, $e = e(t)$, и $i = i(t)$;
- в частотной области (в уравнении полагаем $u_C(0-) = 0$ и $i_L(0-) = 0$): $p = j\omega$, $e = \dot{E}$ и $i = \dot{I}_{уст}$ – комплексные напряжение и ток.

Любым известным методом, (методом контурных токов, или методом эквивалентного генератора, или др.) получим:

$$(p^2 + a_1 p + a_0) i = p^2 b_2 + p b_1 + b_0,$$

или, раскрывая скобки:

$$p^2 i + a_1 p i + a_0 i = p^2 b_2 + p b_1 + b_0.$$

Последнее выражение есть уравнение *симметричное полное и единое* для временной и частотной областей. Его коэффициенты равны:

$$a_0 = \frac{R_1 + R_2}{(R_2 + R_3)LC} = 25 \cdot 10^4 \quad 1/C^2;$$

$$a_1 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{(R_2 + R_3)L} + \frac{1}{(R_2 + R_3)C} = 10^3 \quad 1/C;$$

$$b_0 = \frac{e}{(R_2 + R_3)LC} = 12.5 \cdot 10^3 e(t) \quad A/C^2;$$

$$b_1 = \frac{1}{L} e + \frac{R_2}{(R_2 + R_3)L} u_C(0-) + \frac{1}{(R_2 + R_3)C} i_L(0-) = 50 e(t) - 25 u_C(0-) + 250 i_L(0-) = 50 e(t) + 2146.3;$$

$$b_2 = i_L(0-) = 5 \quad A.$$

Во временной области $p = d/dt$, $p^2 = d^2/dt^2$, $e = e(t)$, и $i = i(t)$. Записываем дифференциальное уравнение

$$d^2 i/dt^2 + a_1 di/dt + a_0 i(t) = d^2 b_2/dt^2 + db_1/dt + b_0.$$

Его вид решения зависит от корней характеристического уравнения. В рассматриваемом примере с данными числовыми значениями корни характеристического уравнения одинаковые:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -500 \quad 1/C.$$

Процесс носит предельно-апериодический характер. Решение имеет вид:

$$i(t) = i_{уст} + (K_1 + K_2 t)e^{\lambda t}.$$

Симметричное единое уравнение позволяет найти комплексный установившийся ток $\dot{I}_{уст}$ (при $t = \infty$). Для этого переходим в частотную область.

В частотной области (полагаем $u_C(0-) = 0$, $i_L(0-) = 0$): $p = j\omega$, $p^2 = (j\omega)^2$, $e = \dot{E}$ и $i = \dot{I}_{уст}$ – комплексные напряжение и ток. Комплексный установившийся ток находим по единому уравнению:

$$I_{m\ уст} = \frac{b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2}{a_0 + j\omega a_1 + (j\omega)^2} = 10.21 e^{j18.3^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение установившегося тока равно:

$$i_{уст}(\omega t) = 10.21 \sin(\omega t + 18.3^\circ) = I_{m\ уст} \sin(\omega t + \varphi_{уст}).$$

Записываем вид решения с известным установившимся током:

$$i(t) = I_{m\ уст} \sin(\omega t + \varphi_{уст}) + (K_1 + K_2 t)e^{\lambda t}.$$

Осталось найти постоянные интегрирования K_1 и K_2 . Для нахождения двух неизвестных необходимо иметь два уравнения. Одно уже есть – вид решения. Второе уравнение получим, продифференцировав вид решения:

$$\begin{aligned} di/dt &= d/dt (I_{m\ уст} \sin(\omega t + \varphi_{уст}) + (K_1 + K_2 t)e^{\lambda t}) = \\ &= I_{m\ уст} \omega \cos(\omega t + \varphi_{уст}) + K_2 e^{\lambda t} + \lambda(K_1 + K_2 t)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Запишем теперь вид решения и его производную для времени равному нулю. Переставляя местами левые и правые части двух равенств, записываем систему уравнений для нахождения K_1 и K_2 :

$$\begin{aligned} I_{m\ уст} \sin \varphi_{уст} + K_1 &= i(0), \\ I_{m\ уст} \omega \cos \varphi_{уст} + K_2 + \lambda K_1 &= (di/dt)_0. \end{aligned}$$

Правая часть этой системы уравнений – свободные члены, которые должны быть известны. Они и известны по коэффициентам дифференциального уравнения, по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} i(0) = b_2(0) = i_L(0-) &= 5 \text{ А,} \\ (di/dt)_0 = (db_2/dt)_0 + b_1(0) - a_1 i(0) &= 10.77 \cdot 10^3 \text{ А/С.} \end{aligned}$$

Решая систему уравнений и подставляя числовые значения, получим:

$$K_1 = 1.794 \text{ А, } K_2 = -67 \text{ А/С.}$$

Окончательно переходный ток равен:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{m\ уст} \sin(\omega t + \varphi_{уст}) + (K_1 + K_2 t)e^{\lambda t} = \\ &= 10.21 \sin(\omega t + 18.3^\circ) + (1.794 - 67t)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

В заключение этого параграфа приведём сравнительную таблицу математических моделей L и C элементов в классическом методе со схемами замещения в операторном методе Лапласа.

Таблица приводится, чтобы показать сходство и различие математических моделей L и C элементов в классическом методе со схемами замещения в операторном методе Лапласа.

Сравнительная таблица математических моделей L и C элементов в классическом методе со схемами замещения в операторном методе Лапласа

Таблица 3.1.

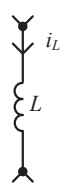
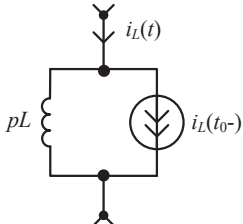
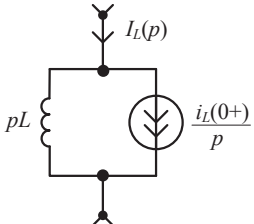
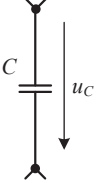
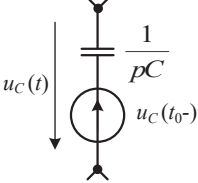
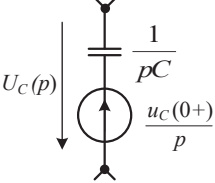
| Элемент | Математические модели | Схема замещения Лапласа |
|---|---|---|
|  |  |  |
|  |  |  |

Таблица показывает сходство и различие математических моделей L - и C -элементов в классическом методе со схемами замещения в операторном методе Лапласа. Сходство состоит в том, что одной и той же буквой p обозначено разное: в математических моделях $p = d/dt$, в схемах замещения Лапласа p - комплексная переменная. Основное различие состоит в том, что в операторном методе Лапласа нарушена размерность для искомых величин тока и напряжения. Отсюда возникают и проблемы. Основная проблема – нахождение оригинала по изображению. Синусоидальный источник со своей начальной фазой усложняет решение задачи. Поэтому в учебной литературе в электрических схемах содержащих синусоидальные источники операторный метод Лапласа применяется только для свободных составляющих искомых величин. Второе важное различие состоит в том, что в математических моделях индуктивных и ёмкостных элементах присутствует *предыстория* переходного процесса $i_L(t_0 -)$ и $u_C(t_0 -)$ в отличие от схем замещения в операторном методе Лапласа, в которых присутствуют $i_L(0)$ и $u_C(0)$ – уже *начало истории* переходного процесса. При этом рассматривается частный случай ($t_0 = 0$).

Тем самым сужаются возможности операторного метода в сравнении с возможностями решения задач с помощью дифференциальных уравнений.

Читателю предлагается самостоятельно решить последний приведённый пример операторным методом Лапласа и сравнить решение по времени и трудоёмкости.

Часто с буквой p ассоциируется операторный метод Лапласа. В учебнике Круга А. К., [1] приводится операторный метод Хевисайда, у которого буквой p обозначено d/dt . Отметим, что одной и той же буквой p в электротехнике обозначают:

$p = j\omega$ – в частотной области при синусоидальных источниках;

$p = d/dt$ – в операторном методе Хевисайда при переходе от дифференциального уравнения к алгебраическому уравнению;

p – комплексная переменная, имеющая размерность 1/время – в операторном методе Лапласа.

В настоящей работе, придерживаясь общепринятых обозначений, введено обозначение:

$p = d/dt$ – для объединения частотной ($p = j\omega$) и временной ($p = d/dt$) областей; для получения единого уравнения, которое применяется для расчётов не только цепей при синусоидальных источниках, но и при источниках любой формы.

3.7. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЫСТОРИИ ПО ИСТОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

В задачах электротехники часто происходит не одна коммутация, а несколько коммутаций. Примером может служить импульсное воздействие, когда при $t_0 = 0$ (и, например, при нулевых начальных условиях) включается источник с амплитудой E , а при $t_0 = T_{\text{импульса}}$ (уже не при нулевых начальных условиях) отключается. Требуется рассчитать переходной процесс на двух участках: во время действия импульса и во время паузы. Основная трудность возникает при расчёте переходного процесса во время паузы, когда необходимо знать предысторию $i_L(T_{\text{импульса}}^-)$ и $u_C(T_{\text{импульса}}^-)$. Трудность увеличивается с усложнением схемы, так как, найдя переходный процесс $i(t)$ во время действия импульса, мы не знаем, как изменялись $i_L(t)$ и $u_C(t)$. Приведём примеры.

Пример 3.8. На рис.3.50 представлена схема, где источник $e(t)$ имеет форму прямоугольного импульса с амплитудой E и длительностью $T_{\text{и}}$. Требуется найти решение для переходного напряжения $u(t)$ на двух временных интервалах: во время действия импульса и после его завершения.

Задачу будем решать двумя способами. Первый способ – традиционный, без составления дифференциального уравнения для искомого напряжения с применением закона Кирхгофа для нахождения зависимого начального условия. Второй способ – с составлением полного дифференциального уравнения с математической моделью ёмкостного элемента.

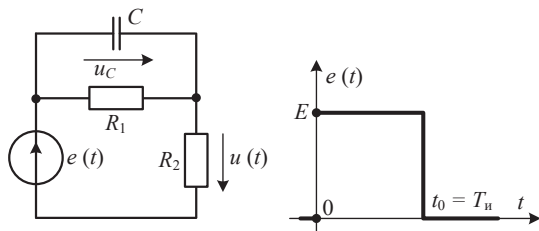


Рис. 3.50.

Решение. Способ первый.

Электрическая цепь содержит одну ёмкость. Следовательно, она описывается дифференциальным уравнением первого порядка, вид решения которого известен.

На первом временном интервале ($0 \leq t < T_n -$). На этом участке $e(t) = E$. Независимое начальное условие $u_C(0 -) = 0$ – ёмкость была не заряжена.

Вид решения $u_1(t) = u_{1уст} + K_1 e^{\lambda t}$.

Здесь индекс «1» соответствует первому интервалу.

Установившееся напряжение $u_{1уст}$ находится по схеме с разомкнутой ёмкостью (при времени $t = \infty$ для постоянного источника), применяя второй закон Кирхгофа для нахождения сначала тока $i_{1уст} = E/(R_1 + R_2)$, затем закон Ома для нахождения напряжения $u_{1уст} = i_{1уст} R_2 = ER_2/(R_1 + R_2)$.

Коэффициент затухания λ находится, составляя характеристическое уравнение одним из двух способов, например, найдя проводимость $Y(\lambda)$ относительно двух узлов при источнике равном нулю

$$Y(\lambda) = \lambda C + G_1 + G_2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = -(G_1 + G_2)/C.$$

Схемы для заданного примера не приводим, так как они простые.

Осталось найти постоянную K_1 . Для этого запишем вид решения при $t = 0$:

$$u_1(0) = u_{1уст} + K_1 \text{ или } K_1 = u_1(0) - u_{1уст}.$$

Отсюда найдём K_1 , если будем знать зависимое начальное условие $u_1(0)$. Вот тут и понадобится закон Кирхгофа: $u_c(t) + u_1(t) = e(t)$. Отсюда при $t = 0$ найдётся $u_1(0)$, если применить закон коммутации:

$$u_1(0) = e(0) - u_c(0) = E - u_c(0-) = E.$$

Здесь был применён закон коммутации $u_c(0) = u_c(0-)$.

Отметим, что при таком решении задачи необходимо применение закона коммутации.

Теперь находится $K_1 = E - ER_2/(R_1 + R_2) = ER_1/(R_1 + R_2)$.

Записывается ответ $u_1(t) = ER_2/(R_1 + R_2) + ER_1/(R_1 + R_2) e^{\lambda t}$.

Для расчёта переходного процесса на втором временном интервале необходимо знать предысторию $u_c(T_n-)$ – независимое начальное условие для второго участка. Для её нахождения необходимо знать переходное напряжение на ёмкости и записать его для времени $t = T_n -$.

Опять обращаемся к закону Кирхгофа и записываем

$$u_c(t) + u_1(t) = e(t).$$

Отсюда для $t = T_n -$:

$$\begin{aligned} u_c(T_n-) &= e(T_n-) - u_1(T_n-) = E - (ER_2/(R_1 + R_2) + ER_1/(R_1 + R_2) e^{\lambda T_n}) = \\ &= ER_1/(R_1 + R_2) [1 - e^{\lambda T_n}]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Нашли независимое начальное условие для расчёта переходного процесса на втором интервале. Вид решения для второго интервала (с индексом «2»):

$$u_2(t) = u_{2уст} + K_2 e^{\lambda(t-T_n)} = 0 + K_2 e^{\lambda(t-T_n)}.$$

Для нахождения коэффициента K_2 запишем вид решения для $t = T_n$:

$$u_2(T_n) = K_2.$$

Зависимое начальное условие $u_2(T_n)$ находят опять же из закона Кирхгофа с учётом закона коммутации. Запишем второй закон Кирхгофа для цепи при $e(t) = 0$ на втором интервале:

$$u_c(t) + u_2(t) = 0.$$

При $t = T_n$: $u_c(T_n) + u_2(T_n) = 0$.

Отсюда находим $u_2(T_n) = -u_c(T_n)$.

С учётом закона коммутации $u_c(T_n) = u_c(T_n-)$ получим:

$$u_2(T_n) = -u_c(T_n-). \quad (3.54)$$

$$K_2 = -u_c(T_n) = u_c(T_n-) = ER_1/(R_1 + R_2) [1 - e^{\lambda T_n}]$$

Ответ для переходного напряжения на втором интервале

$$u_2(t) = K_2 e^{\lambda(t-T_n)} = ER_1/(R_1 + R_2) [1 - e^{\lambda T_n}] e^{\lambda(t-T_n)}.$$

Решение. Способ второй.

Рисуем схему (рис. 3.51) с дополнительным источником $u_c(t_0-)$, для составления дифференциального уравнения с предысторией.

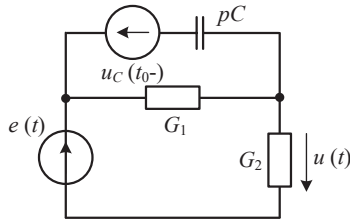


Рис. 3.51.

Ещё раз отметим, что и на схеме, и в уравнении $p = d/dt$. Уравнение можно составить, применяя любой из методов расчёта электрических цепей. Выбираем метод предельных состояний. Для искомого напряжения запишем:

$$(G_1 + G_2 + pC)u(t) = G_1 e(t) + pC[e(t) - u_C(t_0-)].$$

Приводим уравнение к каноническому виду:

$$a_0 u(t) + pu(t) = b_0 + pb_1.$$

Заменяя p на d/dt , запишем дифференциальное уравнение

$$a_0 u(t) + du/dt = b_0 + db_1/dt,$$

в котором коэффициенты для первого и второго временных интервалов равны:

$$a_0 = (G_1 + G_2)/C, \text{ (сравнивая с } \lambda, \text{ получили тот же результат } \lambda = -a_0),$$

$$b_0 = G_1 e(t)/C.$$

$$\text{Отношение } b_0/a_0 = G_1 e(t)/(G_1 + G_2) = R_2 e(t)/(R_1 + R_2) = u_{уст.},$$

$$b_1 = e(t) - u_C(t_0-).$$

На первом временном интервале $e(t) = E$, $u_C(t_0-) = u_C(0-) = 0$.

Коэффициенты дифференциального уравнения равны:

$$b_0 = G_1 E/C. \text{ Отношение } b_0/a_0 = R_2 E/(R_1 + R_2) = u_{1уст.},$$

$$b_1 = e(t) - u_C(0-) = E.$$

Для уравнения первого порядка рекуррентные уравнения дают зависящее начальное условие

$$u_1(0) = b_1 = E.$$

Верно!

Для первого интервала ответ

$$u_1(t) = ER_2/(R_1 + R_2) + ER_1/(R_1 + R_2) e^{\lambda t}.$$

Предысторию $u_C(T_n-)$ для расчёта переходного процесса на втором интервале найдем по истории переходного процесса на первом интервале, а именно по коэффициенту b_1 . Запишем коэффициент b_1 для времени $t = T_n -$:

$$b_1(T_n-) = e(T_n-) - u_C(T_n-).$$

Отсюда найдём

$$u_C(T_n-) = e(T_n-) - b_1(T_n-) = e(T_n-) - u_1(T_n-).$$

Здесь согласно рекуррентным формулам

$$u_1(T_n-) = b_1(T_n-).$$

Сравним полученный результат с нахождением независимого начального условия – *предыстории* по законам Кирхгофа, где был необходим закон коммутации (смотри первый способ и выражение (3.53)). Верно!

Для получения решения на втором временном интервале осталось найти зависимое начальное условие $u_2(T_n)$. Это начальное условие содержится в нашем полном симметричном дифференциальном уравнении в коэффициенте нулевого слагаемого. Запишем все коэффициенты дифференциального уравнения для второго временного интервала. Для отличия от первого интервала (строчные буквы) запишем буквы заглавные:

$$A_0 = a_0 = (G_1 + G_2)/C \text{ прежнее;}$$

$$B_0 = 0, \text{ так как на втором временном интервале } e(t) = 0 \text{ и } u_{2\text{уст}} = 0;$$

$$B_1 = 0 - u_C(T_n-).$$

На втором интервале в математической модели присутствует $u_C(T_n-)$ в отличие от $u_C(0-)$ для первого интервала.

$$\text{На первом интервале } t_0- = 0-;$$

$$\text{на втором интервале } t_0- = T_n-.$$

По рекуррентным формулам (для уравнения первого порядка по B_1) находим зависимое начальное условие:

$$u_2(T_n) = B_1 = -u_C(T_n-).$$

Начало новой истории получено по *предыстории* с помощью полного симметричного с нулевым слагаемым дифференциального уравнения.

Вывод.

При решении задач классическим методом, составляя уравнения по законам Кирхгофа для нахождения зависимых и независимых начальных условий, мы были вынуждены применять законы коммутации. При решении задач составляя дифференциальные уравнения нет необходимости использовать законы коммутации для нахождения зависимых и независимых начальных условий потому, что за нас это делает само дифференциальное уравнение с внесённой предысторией $u_C(t_0-)$ в его коэффициенты. Как показано, *полное симметричное с нулевыми слагаемыми дифференциальное уравнение* в своих коэффициентах несёт всю информацию, необходимую для получения решения для переходной функции.

Поэтому все последующие задачи будем решать с помощью составления и решения дифференциального уравнения.

В завершении задачи нарисуем график переходного процесса (рис.3.52)

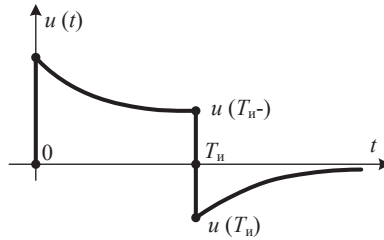


Рис. 3.52.

Пример 3.9. В электрической цепи рис. 3.53 действует источник $e(t)$ – импульс с линейно изменяющейся амплитудой. Заданы параметры всех элементов $R_1 = 0.2 \text{ кОм}$, $R_2 = 0.3 \text{ кОм}$, $L = 120 \text{ мГн}$, $E_0 = 50 \text{ В}$, длительность импульса $T_n = 250 \text{ мкс}$. Требуется найти переходный ток $i(t)$ на двух временных интервалах: во время действия импульса и после его отключения.

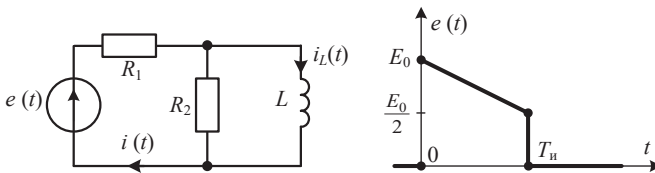


Рис. 3.53.

Решение.

Рисуем схему (рис. 3.54) для составления полного симметричного дифференциального уравнения с дополнительным источником $i_L(t_0^-)$ учитывающим предысторию и помогающего найти историю переходного процесса.

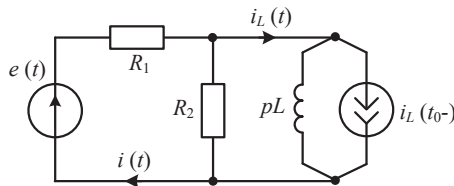


Рис. 3.54.

Любым известным методом составляем уравнение и приводим его к виду

$$a_0 i(t) + p i(t) = b_0 + p b_1,$$

где: $p = d/dt$;

$$a_0 = 1/L(G_1 + G_2) = 10^{-3} \text{ 1/мкс};$$

$$b_0 = G_1 e(t)/L(G_1 + G_2) = b_{0e} e(t) = 5 \cdot 10^{-3} e(t);$$

$$b_1 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} e(t) + \frac{G_1}{G_1 + G_2} i_L(t_0-) = b_{1e} e(t) + b_{11} i_L(t_0-) = \\ = 2 e(t) + 0.6 i_L(t_0-).$$

На первом временном интервале ($0 \leq t \leq T_{и-}$) $i_L(t_0-) = i_L(0-) = 0$,

$$e(t) = k_0 + kt = E_0 - \frac{E_0}{2T_{и}} t = 50 - 0.1 t.$$

$$b_1 = b_{1e} e(t) + b_{11} i_L(t_0-) = b_{1e} e(t) + b_{11} i_L(0-) = b_{1e} (k_0 + kt) + 0.$$

Вид решения дифференциального уравнения:

$$i(t) = i_{1уст} + K_1 e^{-a_0 t}.$$

Нахождение установившегося значения.

Так как правая часть дифференциального уравнения содержит линейно изменяющуюся $e(t)$, то полагаем, что $i_{1уст} = i_{1уст}(t) = k_3 + k_4 t$ – линейная функция.

Правая часть дифференциального уравнения равна

$$b_0 + db_1/dt = b_{0e}(k_0 + kt) + \frac{d}{dt} b_{1e}(k_0 + kt).$$

Левая часть дифференциального уравнения

$$a_0 i_{1уст}(t) + di_{1уст}/dt = a_0(k_3 + k_4 t) + \frac{d}{dt} (k_3 + k_4 t).$$

Раскрывая скобки и дифференцируя, записываем левую и правую части уравнения

$$a_0 k_3 + a_0 k_4 t + k_4 = b_{0e} k_0 + b_{0e} kt + b_{1e} k.$$

Последнее уравнение разбивается на два уравнения:

$$a_0 k_4 = b_{0e} k,$$

$$a_0 k_3 + k_4 = b_{0e} k_0 + b_{1e} k.$$

Из этой системы уравнений находим коэффициенты k_3 и k_4 .

$$k_4 = -0.5 \text{ мА/мкс}, \quad k_3 = 550 \text{ мА}.$$

Установившийся ток равен:

$$i_{1уст}(t) = (k_3 + k_4 t) = 550 - 0.5 t.$$

Запишем вид решения с найденным установившемся током:

$$i(t) = i_{1уст} + K_1 e^{-a_0 t} = 550 - 0.5 t + K_1 e^{-a_0 t}.$$

При времени $t = 0$: $i(0) = 550 + K_1$. Отсюда найдём постоянную K_1 :

$$K_1 = i(0) - 550 = b_1(0) - 550 = 100 - 550 = -450 \text{ мА}. \text{ Здесь учтено, что}$$

$$i(0) = b_1(0) = b_{1e} e(0) = b_{1e} E_0 = 100 \text{ мА}.$$

Запишем ответ для переходного тока на первом временном интервале:

$$i(t) = 550 - 0.5 t - 450 e^{-a_0 t}. \text{ Здесь время в мкс}.$$

Строим график переходного тока от 0 до $T_{и-}$, включая время $t = T_{и-}$. Ток $i(T_{и-}) = 550 - 0.5(T_{и-}) - 450 e^{-a_0 T_{и-}} = 74.54$ мА.

Нахождение предыстории $i_L(T_{и-})$ для получения переходного тока на втором временном интервале.

Для этого запишем коэффициент b_1 для времени $t_0 = T_{и-}$:

$$b_1(T_{и-}) = b_{1e}e(T_{и-}) + b_{11}i_L(T_{и-}).$$

Отсюда найдём $i_L(T_{и-})$ с учётом рекуррентного равенства $b_1(T_{и-}) = i(T_{и-})$:

$$i_L(T_{и-}) = [i(T_{и-}) - b_{1e}e(T_{и-})]/b_{11} = [74.54 - 50]/0.6 = 40.9 \text{ мА}.$$

Можно было бы и иначе ухитриться и найти предысторию. Например, нарисовав схему для времени $T_{и-}$. Такая схема представлена на рис. 3.55.

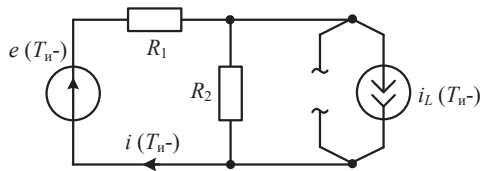


Рис. 3.55.

Для этой схемы по методу наложения запишем

$$i(T_{и-}) = e(T_{и-})/(R_1 + R_2) + i_L(T_{и-})R_2/(R_1 + R_2).$$

Отсюда найдём предысторию $i_L(T_{и-})$. Получили тот же результат.

На втором временном интервале $e(t) = 0$. Коэффициенты того же дифференциального уравнения равны

$$A_0 = a_0, \quad B_0 = b_{0e}e(t) = 0,$$

$$B_1 = 0 + b_{11}i_L(T_{и-}) = 0.6 \times 40.9 = 24.54 \text{ мА}.$$

Установившийся ток равен нулю, так как источник равен нулю.

Вид решения для второго интервала $i(t) = K_2 e^{-A_0(t-T_{и-})}$.

При $t = T_{и-}$: $i(T_{и-}) = K_2$. Здесь $i(T_{и-})$ – зависимое начальное условие, которое найдём по коэффициенту дифференциального уравнения B_1 :

$$i(T_{и-}) = B_1 = 24.54 \text{ мА}.$$

Ответ для второго временного интервала

$$i(t) = K_2 e^{-A_0(t-T_{и-})} = B_1 e^{-A_0(t-T_{и-})}.$$

Как показано на примерах решённых задач полное дифференциальное уравнение, составленное для любой искомой переменной (напряжения или тока) несёт в себе и историю переходного процесса и предысторию для следующей коммутации, а коммутаций может быть несколько ($t_0 = 0$ – первая коммутация, $t_0 = T_{и-}$ – вторая коммутация и так далее). Эта предыстория находится по истории переходного процесса.

Примечание.

Для электрической цепи, описываемой уравнением второго порядка, содержащей и индуктивность, и ёмкость, предыстория $i_L(t_0-)$ и $u_C(t_0-)$ находится по двум уравнениям, составленным для коэффициентов b_2 и b_1 . Эти коэффициенты (каждый – и b_2 , и b_1) в общем случае могут содержать и источник e , и $i_L(t_0-)$, и $u_C(t_0-)$. Запишем их общий вид для t_0- :

$$b_2(t_0-) = b_{2e}e(t_0-) + b_{2L}i_L(t_0-) + b_{2C}u_C(t_0-), \quad (3.55)$$

$$b_1(t_0-) = b_{1e}e(t_0-) + b_{1L}i_L(t_0-) + b_{1C}u_C(t_0-). \quad (3.56)$$

По рекуррентным формулам для цепи второго порядка справедливо

$$u(t_0-) = b_2(t_0-), \quad (3.57)$$

$$(du/dt)_{t_0-} = b_1(t_0-) - a_1b_2(t_0-) = b_1(t_0-) - a_1u(t_0-). \quad (3.58)$$

Перепишем уравнения (3.55) и (3.56) с учётом (3.57) и (3.58), переставляя слагаемые так, чтобы слева были искомые величины, а справа свободные члены:

$$b_{2L}i_L(t_0-) + b_{2C}u_C(t_0-) = u(t_0-) - b_{2e}e(t_0-), \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} b_{1L}i_L(t_0-) + b_{1C}u_C(t_0-) &= b_1(t_0-) - b_{1e}e(t_0-) = \\ &= (du/dt)_{t_0-} + a_1u(t_0-) - b_{1e}e(t_0-). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Решая эту систему уравнений, найдём $i_L(t_0-)$ и $u_C(t_0-)$.

3.8. ЕДИНСТВО ЧАСТОТНОЙ И ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЕЙ.

Единство частотной и временной областей проходит красной нитью через всю работу. Тем не менее, хочется ещё раз остановиться на этом вопросе.

Это единство прослеживается даже в прозвищах, данных индуктивным и ёмкостным элементам. Говорят и пишут: «реактивные элементы», значит, подразумевают частотную область; «инерционные элементы», значит, речь идёт о временной области.

Физика поведения индуктивного и ёмкостного элементов в частотной и временной областях такова, что в предельных режимах (при $f = 0$ и $f = \infty$; соответственно, для $t = \infty$ и $t = 0$) они ведут себя как короткое замыкание и размыкание. Представим их поведение в таблице.

Таблица 3.2.

| | | |
|-------------------------|--|--|
| | | |
| $f = 0$ $t = \infty$ | | |
| $f = \infty$ $t = 0$ | | |

Рассмотрим уравнение первого порядка, *единое* для частотной и временной областей

$$(a_0 + p)X = b_0 + pb_1. \quad (3.55)$$

Для частотной области (при подаче синусоидального сигнала) $p = j\omega$ и $X = H(p)$ – передаточная функция. Записывают её дробью:

$$H(p) = \frac{b_0 + pb_1}{a_0 + p} = \frac{a_0 H_1 + p H^1}{a_0 + p}.$$

В последней записи введены новые коэффициенты, которые обозначены H_1 и H^1 :

$H_1 = b_0/a_0$ – передаточная функция резистивной электрической цепи (подсхемы) на частоте равной нулю ($f = 0$) – нижний индекс у передаточной функции. Индекс «1» говорит нам, что электрическая цепь содержит один инерционный элемент либо одну индуктивность, либо одну ёмкость (цепь описывается уравнением первого порядка). При $f = 0$ индуктивность короткозамкнута, ёмкость разомкнута и, следовательно, H_1 – передаточная функция резистивной цепи.

$H^1 = b_1$ – передаточная функция резистивной электрической цепи (подсхемы) на частоте, равной бесконечности ($f = \infty$) – верхний индекс у передаточной функции. При $f = \infty$ индуктивность разомкнута, ёмкость короткозамкнута.

Для построения частотных характеристик заменяют p на $j\omega$. Тогда запишем:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0 H_1 + j\omega H^1}{\omega_0 + j\omega},$$

где: $\omega_0 = a_0$ – граничная круговая частота, при которой ($\omega = \omega_0$) передаточная функция $H(j\omega_0) = \frac{H_1 + jH^1}{1 + j}$.

Для временной области (при подаче единичного скачка) $p = d/dt$ и $X = h(t)$ – переходная функция – реакция электрической цепи на единичный скачок при нулевых начальных условиях ($u_C(0-) = 0$ и $i_L(0-) = 0$).

Дифференциальное уравнение получим из (3.25) раскрывая скобки и заменяя p на d/dt :

$$a_0 h(t) + dh/dt = b_0 + db_1/dt.$$

Вид решения:

$$h(t) = h_{уст} + h_{св} = b_0/a_0 + Ke^{-a_0 t} = H_1 + Ke^{-a_0 t}.$$

При $t = 0$: $h(0) = H_1 + K$. Отсюда находим постоянную интегрирования K :

$$K = h(0) - H_1 = b_1 - H_1 = H^1 - H_1.$$

Ответ: $h(t) = H_1 + (H^1 - H_1)e^{-a_0 t} = H_1 + (H^1 - H_1)e^{-\omega_0 t}.$

Передаточные функции резистивных подсхем H_1 и H^1 , введённые в частотной области для передаточной функции $H(j\omega)$ вошли в ответ для переходной функции $h(t)$ во временной области. Граничная частота ω_0 также содержится в ответе.

Рассмотрим примеры низкочастотного (НЧФ) и высокочастотного (ВЧФ) фильтров.

Пример 3.10. Пусть электрическая цепь является НЧФ.

Тогда $H^1 = 0$ и передаточная функция будет иметь вид:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0 H_1}{\omega_0 + j\omega}. \text{ На граничной частоте } \omega = \omega_0$$

$$H(j\omega_0) = \frac{H_1}{1+j} = H(\omega_0)e^{j\varphi(\omega_0)}.$$

Здесь:

$$H(\omega_0) = H_1/\sqrt{2} \text{ – модуль передаточной функции;}$$

$$\varphi(\omega_0) = -45^\circ \text{ – аргумент передаточной функции.}$$

Ответ для переходной функции (при $H^1 = 0$) будет иметь вид:

$$h(t) = H_1 - H_1 e^{-\omega_0 t} = H_1 - H_1 e^{-t/\tau},$$

где: $\tau = 1/\omega_0$ – постоянная времени.

Для простейшего низкочастотного RC -фильтра, содержащего один R элемент и один C элемент (ёмкость стоит поперёк передачи сигнала) $H_1 = 1$, так как при частоте равной нулю ёмкость разомкнута (смотри таблицу).

$$\text{Модуль передаточной функции } H(\omega_0) = 1/\sqrt{2} = 0.707.$$

Пример 3.11. Пусть электрическая цепь является ВЧФ.

Тогда $H_1 = 0$ и передаточная функция будет иметь вид:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega H^1}{\omega_0 + j\omega}. \text{ На граничной частоте } \omega = \omega_0$$

$$H(j\omega_0) = \frac{jH^1}{1+j} = H(\omega_0)e^{j\varphi(\omega_0)}.$$

Здесь:

$$H(\omega_0) = H^1/\sqrt{2} \text{ – модуль передаточной функции,}$$

$$\varphi(\omega_0) = +45^\circ \text{ – аргумент передаточной функции.}$$

Ответ для переходной функции (при $H_1 = 0$) будет иметь вид:

$$h(t) = H^1 e^{-a_0 t} = H^1 e^{-\omega_0 t} = H^1 e^{-t/\tau},$$

где $\tau = 1/\omega_0$ – постоянная времени.

Для простейшего высокочастотного RC -фильтра, содержащего один R элемент и один C элемент (ёмкость стоит вдоль передачи сигнала) $H^1 = 1$, так как при частоте равной бесконечности ёмкость короткозамкнута (смотри таблицу). Модуль передаточной функции $H(\omega_0) = 1/\sqrt{2} = 0.707$.

Пример 3.12. На рисунках 3.56 и 3.57 представлены две схемы: первая с индуктивным элементом, вторая с ёмкостным элементом.

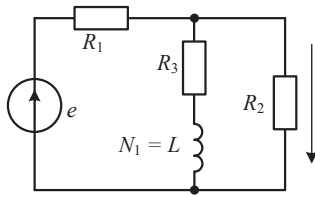


Рис. 3.56.

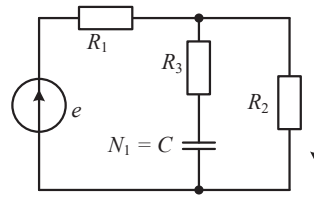


Рис. 3.57.

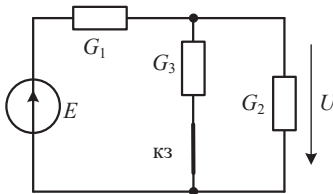
Для приведённых схем требуется: получить симметричное уравнение, единое для частотной и временной областей, найти его коэффициенты; в частотной области получить передаточные функции для этих схем, во временной области записать дифференциальные уравнения и найти решения этих уравнений.

Решение.

Симметричное уравнение, единое для частотной и временной областей имеет вид:

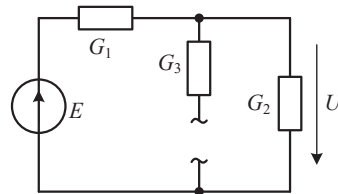
$$(a_0 + p)X = b_0 + pb_1. \quad (3.55)$$

Коэффициенты этого уравнения для представленных двух схем найдём с помощью разложения электрических RLC -цепей на резистивные подсхемы. К этим подсхемам применим метод предельных состояний. На рисунках 3.58 и 3.59 представлены две резистивные подсхемы: первая подсхема с короткозамкнутым N_1 элементом (рис. 3.58), вторая подсхема с разомкнутым N_1 элементом (рис. 3.59).



$$\begin{aligned} \Delta &= G_1 + G_2 + G_3, \\ \Delta U &= G_1 E, \\ H &= G_1 / (G_1 + G_2 + G_3). \end{aligned}$$

Рис. 3.58.



$$\begin{aligned} \Delta &= G_1 G_3 + G_2 G_3 = (G_1 + G_2) G_3, \\ \Delta U &= G_1 G_3 E, \\ H &= G_1 / (G_1 + G_2). \end{aligned}$$

Рис. 3.59.

Для резистивной подсхемы рис. 3.58 узловой определитель равен:

$$\Delta = G_1 + G_2 + G_3.$$

По методу предельных состояний:

$$(G_1 + G_2 + G_3)U = G_1 E.$$

Передаточная функция равна:

$$H = U/E = G_1/(G_1 + G_2 + G_3).$$

Для резистивной подсхемы рис. 3.59 узловой определитель равен:

$$\Delta = G_1 G_3 + G_2 G_3 = (G_1 + G_2) G_3.$$

По методу предельных состояний:

$$(G_1 G_3 + G_2 G_3)U = G_1 G_3 E.$$

Передаточная функция равна:

$$H = U/E = G_1/(G_1 + G_2).$$

В частотной области при $p = j\omega$ для обеих схем (рис. 3.56 и рис. 3.57) справедливо выражение

$$H(p) = \frac{b_0 + pb_1}{a_0 + p} = \frac{a_0 H_1 + pH^1}{a_0 + p}.$$

Здесь коэффициенты передаточной функции: $a_0 = A_0/A_1$, где: $A_0 = \Delta_1$, $A_1 = N_1 \Delta^1$. Тогда $a_0 = A_0/A_1 = \Delta_1/N_1 \Delta^1$.

Напомним, что определитель с нижним индексом Δ_1 – определитель резистивной подсхемы, полученной, если положить частоту $f = 0$ для N_1 (L или C) элемента. Определитель с верхним индексом Δ^1 – определитель резистивной подсхемы, полученной, если положить частоту $f = \infty$ для N_1 (L или C) элемента.

Рассмотрим схему рис. 3.56. Для неё $N_1 = L$.

Определители:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= G_1 + G_2 + G_3; \\ \Delta^1 &= G_1 G_3 + G_2 G_3 = (G_1 + G_2) G_3; \\ a_0 &= \Delta_1/N_1 \Delta^1 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{L(G_1 + G_2) G_3}. \end{aligned}$$

Передаточные функции:

$$\begin{aligned} H_1 &= G_1/(G_1 + G_2 + G_3); \\ H^1 &= G_1/(G_1 + G_2), \quad a_0 H_1 = \frac{G_1}{L(G_1 + G_2) G_3}. \end{aligned}$$

Ответ для передаточной функции

$$H(p) = \frac{a_0 H_1 + pH^1}{a_0 + p} = \frac{\frac{G_1}{L(G_1 + G_2) G_3} + p \frac{G_1}{(G_1 + G_2)}}{\frac{G_1 + G_2 + G_3}{L(G_1 + G_2) G_3} + p}.$$

Во временной области $p = d/dt$. Дифференциальное уравнение для переходной функции имеет вид

$$a_0 h(t) + dh/dt = b_0 + db_1/dt.$$

Его решение уже было получено выше

$$h(t) = H_1 + (H^1 - H_1)e^{-a_0 t} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} + \left(\frac{G_1}{L(G_1 + G_2) G_3} - \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \right) e^{-a_0 t}.$$

Рассмотрим схему рис. 3.57. Для неё $N_1 = C$.

Определители;

$$\Delta^1 = G_1 + G_2 + G_3 \quad (\text{рис. 3.58});$$

$$\Delta_1 = G_1 G_3 + G_2 G_3 = (G_1 + G_2) G_3 \quad (\text{рис. 3.59});$$

$$a_0 = \Delta_1 / N_1 \Delta^1 = \frac{(G_1 + G_2) G_3}{C(G_1 + G_2 + G_3)}.$$

Передаточные функции:

$$H_1 = G_1 / (G_1 + G_2), \quad H^1 = G_1 / (G_1 + G_2 + G_3),$$

$$a_0 H_1 = \frac{G_1 G_3}{C(G_1 + G_2 + G_3)}.$$

Ответ для передаточной функции

$$H(p) = \frac{a_0 H_1 + p H^1}{a_0 + p} = \frac{\frac{G_1 G_3}{C(G_1 + G_2 + G_3)} + p \frac{G_1}{(G_1 + G_2 + G_3)}}{\frac{(G_1 + G_2) G_3}{C(G_1 + G_2 + G_3)} + p}.$$

Во временной области $p = d/dt$. Дифференциальное уравнение для переходной функции имеет тот же вид:

$$a_0 h(t) + dh/dt = b_0 + db_1/dt.$$

Его решение, но с другим a_0 и передаточными функциями H_1 , H^1 равно

$$h(t) = H_1 + (H^1 - H_1) e^{-a_0 t} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} + \left(\frac{G_1}{(G_1 + G_2 + G_3)} - \frac{G_1}{G_1 + G_2} \right) e^{-a_0 t}.$$

Отметим, что симметричное уравнение единое для частотной и временной областей (3.55) может быть получено любым известным методом (составляя уравнения по законам Кирхгофа, применяя метод узловых напряжений и другие методы).

Рассмотрим уравнение второго порядка, единое для частотной и временной областей

$$(a_0 + p a_1 + p^2) X = b_0 + p b_1 + p^2 b_2. \quad (3.56)$$

Для частотной области (при подаче синусоидального сигнала)

$p = j\omega$, $p^2 = (j\omega)^2$ и $X = H(p)$ – передаточная функция:

$$H(p) = \frac{b_0 + p b_1 + p^2 b_2}{a_0 + p a_1 + p^2} = \frac{a_0 H_{12} + p a_1 H + p^2 H^{12}}{a_0 + p a_1 + p^2}.$$

В последней записи выражения для $H(p)$ введены новые коэффициенты, которые обозначены H_{12} , H^{12} и H .

$H_{12} = b_0/a_0$ – передаточная функция резистивной электрической цепи, если положить частоту равной нулю ($f = 0$) для всех двух инерционных элементов – нижние индексы у передаточной функции. Индекс «1» соответствует первому элементу, индекс «2» – второму.

$H^{12} = b_2$ – передаточная функция резистивной электрической цепи, если положить частоту равной бесконечности ($f = \infty$) для всех двух инерционных элементов – верхние индексы у передаточной функции.

H – передаточная функция резистивной электрической цепи. Её физический смысл будет ясен позже.

Для построения частотных характеристик заменяют p на $j\omega$. Вводят добротность Q :

$Q = \omega_0/a_1$, где $\omega_0 = \sqrt{a_0}$ – круговая квазирезонансная частота (резонансная частота в случае резонансного контура). Тогда с учётом добротности и введённых передаточных функций резистивных подсхем запишем:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^2 H_{12} - \omega^2 H^{12} + j\omega H \omega_0 / Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \omega_0 / Q}$$

На резонансной частоте при $\omega = \omega_0$ $H(j\omega_0) = \frac{H_{12} - H^{12} + jH/Q}{j/Q}$.

Для временной области (при подаче единичного скачка)

$p = d/dt$, $p^2 = d^2/dt^2$ и $X = h(t)$ – переходная функция.

Дифференциальное уравнение получим из (3.56), раскрывая скобки и заменяя p на d/dt и p^2 на d^2/dt^2 :

$$a_0 h(t) + a_1 dh/dt + d^2 h/dt^2 = b_0 + db_1/dt + d^2 b_2/dt^2.$$

Вид решения этого дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения $\leq \lambda_1$ и λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_0} = -\omega_0/2Q \pm \omega_0/2Q \sqrt{(1 - 4Q^2)}.$$

Пусть, например, корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 действительные и разные ($Q < 0.5$). В этом случае переходной процесс носит аperiодический характер. Решение для переходной функции имеет вид:

$$h(t) = h_{\text{уст}} + h_{\text{св}} = b_0/a_0 + K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Дифференцируем вид решения для получения второго уравнения:

$$dh/dt = 0 + K_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Запишем теперь эти два уравнения для $t = 0$. Переставляя слагаемые левых и правых частей уравнений местами (справа свободные члены):

$$K_1 + K_2 = h(0) - b_0/a_0,$$

$$K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 = (dh/dt)_0.$$

С учётом рекуррентных формул:

$$h(0) = b_2 = H^{12},$$

$$(dh/dt)_0 = b_1 - a_1 b_2 = a_1 H - a_1 h(0) = a_1 (H - H^{12}) = (H - H^{12}) \omega_0 / Q.$$

Затем находим коэффициенты K_1 и K_2 .

В случае комплексно-сопряжённых корней λ_1 и λ_2 ($Q > 0.5$):

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_{\text{св}}$, где: $\alpha = \omega_0/2Q$ – коэффициент затухания,

$\omega_{\text{св}} = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ – круговая частота свободных колебаний.

Переходный процесс носит колебательный характер. Решение для переходной функции имеет вид:

$$h(t) = h_{уст} + h_{св} = b_0/a_0 + Ke^{-\alpha t} \sin(\omega_{св}t + \varphi).$$

Дифференцируем вид решения для получения второго уравнения:

$$dh/dt = 0 - \alpha Ke^{-\alpha t} \sin(\omega_{св}t + \varphi) + \omega_{св}Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_{св}t + \varphi).$$

Запишем теперь эти два уравнения для $t = 0$. Переставляем слагаемые левых и правых частей уравнений местами:

$$K \sin \varphi = h(0) - b_0/a_0 = b_2 - b_0/a_0$$

$$\omega_{св}K \cos \varphi = (dh/dt)_0 + \alpha K \sin \varphi = b_1 - a_1 b_2 + \alpha K \sin \varphi.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 3.13. Дан полосно-пропускающий фильтр (ППФ). Известны параметры его элементов. Параметры элементов таковы, что добротность $Q > 0.5$. Требуется качественно построить амплитудно-частотную характеристику, найти решение для переходной функции $h(t)$ и построить переходный процесс.

Решение. Для ППФ $b_0 = 0$; $b_2 = 0$; передаточная функция будет иметь вид:

$$H(p) = \frac{pb_1}{a_0 + pa_1 + p^2} = \frac{pa_1 H}{a_0 + pa_1 + p^2}. \text{ При } p = j\omega: H(j\omega) = \frac{j\omega H \omega_0 / Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \omega_0 / Q}$$

$$\text{На резонансной частоте при } \omega = \omega_0: H(j\omega_0) = H = H(\omega_0)e^{j\varphi(\omega_0)}.$$

Здесь: $H(\omega_0) = H$ – модуль передаточной функции.

Теперь ясен физический смысл введённого коэффициента H . Это есть модуль передаточной функции при частоте равной резонансной для ППФ.

Аргумент передаточной функции $\varphi(\omega_0) = 0$.

При $\omega = 0$ $H(0) = 0$, при $\omega = \infty$ $H(\infty) = 0$.

Система уравнений для нахождения постоянных интегрирования в примере ППФ при $b_0 = 0$ и $b_2 = 0$ равна:

$$K \sin \varphi = 0;$$

$$\omega_{св}K \cos \varphi = b_1 + \alpha K \sin \varphi = H a_1 = H \omega_0 / Q.$$

Решая систему уравнений, находим $\varphi = 0$, $K = \frac{\omega_0 H}{\omega_{св} Q}$.

$$\text{Ответ: } h(t) = \frac{\omega_0 H}{\omega_{св} Q} e^{-\omega_0 t / 2Q} \sin \omega_{св} t.$$

Видим, что все величины частотной области (в передаточной функции $H(j\omega)$) вошли во временную область (в решение для переходной функции $h(t)$).

На рисунке 3.60 приведена амплитудно-частотная характеристика $H(\omega)$. На рисунке 3.61 приведён график переходного процесса $h(t)$.

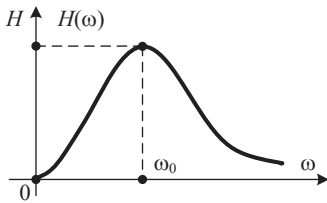


Рис. 3.60.

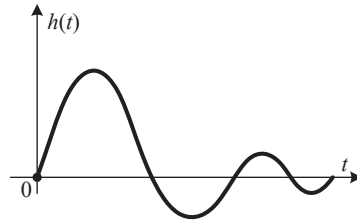


Рис. 3.61.

Классическим примером полосно-пропускающего фильтра является последовательная RLC -цепь. Её схема представлена на рисунке 3.62.

Для этой схемы $a_0 = \omega_0^2 = 1/LC$, $a_1 = (R + r)/L$, $b_1 = Ha_1 = R/L$, $H = R/(R + r)$.

Примечание.

Без введения передаточной функции H для RLC цепи, решая задачу нахождения $H(p)$, в числителе передаточной функции получим $b_1 = R/L$, физический смысл которого спрятан за отношением R/L . При введении передаточной функции резистивной подсхемы H числитель передаточной функции $H(p)$ приобретает физический смысл, а именно $H = R/(R + r)$ - передаточная функция резистивной электрической цепи с последовательно включёнными сопротивлениями r и R .

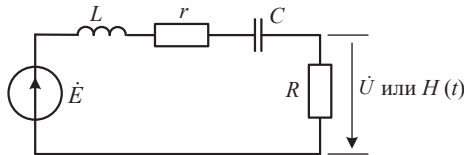


Рис. 3.62.

Для качественного построения переходной функции достаточно знать: значение функции в нуле (при $t = 0$), знак её производной в нуле, к чему стремится (при $t = \infty$) и по какому закону идёт переходный процесс (то есть знать добротность). В рассмотренном примере $h(0) = 0$, $(dh/dt)_0 = b_1 > 0$, $h_{уст} = b_0/a_0 = 0$ и добротность $Q > 0.5$ – процесс носит колебательный характер. Все эти величины находятся с помощью рекуррентных формул по коэффициентам дифференциального уравнения.

В примере ППФ переходный процесс начинается из нуля. С положительной производной по колебательному закону стремится к нулю.

Пример 3.14. Дан низкочастотный фильтр (НЧФ). Требуется качественно построить амплитудно-частотную характеристику и переходный процесс для переходной функции $h(t)$.

Решение. Для НЧФ $b_1 = 0$; $b_2 = 0$; передаточная функция будет иметь вид:

$$H(p) = \frac{b_0}{a_0 + pa_1 + p^2} = \frac{a_0 H_{12}}{a_0 + pa_1 + p^2}. \quad \text{При } p = j\omega:$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^2 H_{12}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\omega_0/Q}$$

На резонансной частоте при $\omega = \omega_0$: $H(j\omega_0) = \frac{H_{12}}{j/Q} = H(\omega_0)e^{j\varphi(\omega_0)}$.

Здесь: $H(\omega_0) = H_{12}Q$ – модуль передаточной функции; имеет физический смысл, на этой частоте можно экспериментально определить добротность;

$\varphi(\omega_0) = -90^\circ$ – аргумент передаточной функции.

При $\omega = 0$ $H(0) = H_{12}$, при $\omega = \infty$ $H(\infty) = 0$.

Для построения переходной функции найдём:

$$h(0) = b_2 = 0, \quad (dh/dt)_0 = b_1 - a_1 b_2 = 0, \quad h_{уст} = b_0/a_0 = H_{12}.$$

Пусть добротность $Q > 0.5$. Процесс носит колебательный характер. Переходный процесс начинается из нуля. С нулевой производной по колебательному закону стремится к H_{12} .

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) качественно построена на рис. 3.63. На рис. 3.64 представлен график переходной функции.

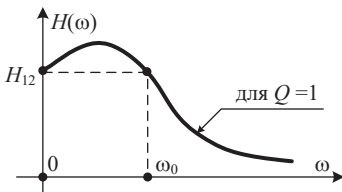


Рис. 3.63.

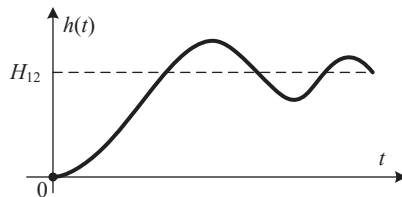


Рис. 3.64.

Классическим примером НЧФ является последовательная RLC -цепь, где сигнал снимается с ёмкости (ёмкость стоит поперёк передачи сигнала). Этот фильтр представлен на рис. 3.65.

Для низкочастотного RLC -фильтра $H_{12} = 1$ и модуль передаточной функции на резонансной частоте равен добротности Q ($H(\omega_0) = Q$).

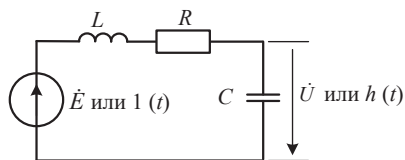


Рис. 3.65.

Пример 3.15. Дан высокочастотный фильтр (ВЧФ). Требуется качественно построить амплитудно-частотную характеристику и переходный процесс для переходной функции $h(t)$.

Решение. Для ВЧФ $b_0 = 0$ и $b_1 = 0$. Передаточная функция будет иметь вид:

$$H(p) = \frac{p^2 b_2}{a_0 + p a_1 + p^2} = \frac{p^2 H^{12}}{a_0 + p a_1 + p^2}. \quad \text{При } p = j\omega:$$

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 H^{12}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\omega_0/Q}$$

На резонансной частоте при $\omega = \omega_0$:

$$H(j\omega_0) = -H^{12}Q = H(\omega_0)e^{j\varphi(\omega_0)}.$$

Здесь: $H(\omega_0) = H^{12}Q$ – модуль передаточной функции, имеет физический смысл. На этой частоте можно экспериментально определить добротность.

$\varphi(\omega_0) = 180^\circ - 90^\circ = +90^\circ$ – аргумент передаточной функции.

При $\omega = 0$ $H(0) = 0$, при $\omega = \infty$ $H(\infty) = H^{12}$.

Для построения переходной функции найдём:

$$h(0) = b_2 = H^{12},$$

$$(dh/dt)_0 = b_1 - a_1 b_2 = 0 - H^{12}\omega_0/Q < 0, \quad h_{уст} = b_0/a_0 = 0.$$

Пусть добротность $Q > 0.5$. Переходный процесс носит колебательный характер. Переходный процесс начинается с H^{12} . С отрицательной производной по колебательному закону стремится к нулю.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) качественно построена на рис. 3.66. На рис. 3.67 представлен график переходной функции.

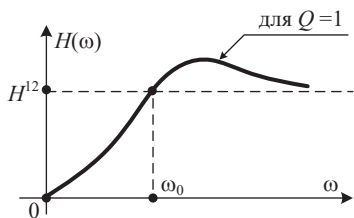


Рис. 3.67.

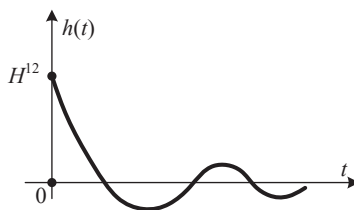


Рис. 3.68.

Классическим примером ВЧФ является последовательная RLC -цепь, где сигнал снимается с индуктивности (ёмкость стоит вдоль передачи сигнала). Этот фильтр представлен на рис. 3.68.

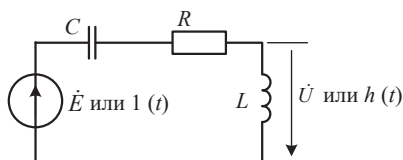


Рис. 3.68.

Для высокочастотного RLC -фильтра $H^{12} = 1$ и модуль передаточной функции на резонансной частоте равен добротности Q ($H(\omega_0) = Q$).

3.9. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ «НЕКОРРЕКТНЫХ» КОММУТАЦИЯХ

«Некорректными» коммутациями называют такие коммутации, при которых законы коммутации не соблюдаются [7].

Рассмотрим сначала «некорректные» коммутации на примере электрической цепи с нулевыми начальными условиями.

Пример 3.16. К источнику напряжения $e(t) = E1(t)$ последовательно включены две катушки. Известны параметры катушек R_1, R_2, L_1 и L_2 . Схема приведена на рис. 3.69. Для составления дифференциального уравнения с математическими моделями (вместо индуктивности L приведены сопротивления pL) нарисована схема рис. 3.70. Начальные условия нулевые.

Требуется определить ток в цепи i , напряжения на индуктивностях u_1 и u_2 в моменты времени ноль и бесконечность.

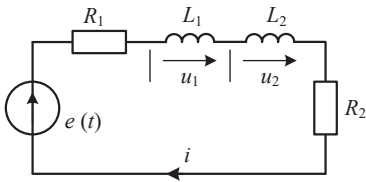


Рис. 3.59.

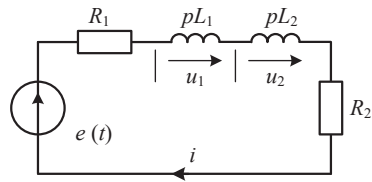


Рис. 3.60.

Решение. Для решения задачи составим для искомым величин дифференциальные уравнения. Они своими коэффициентами дадут нам решение поставленной задачи.

Для тока i по второму закону Кирхгофа

$$i(t) = \frac{e(t)}{R_1 + R_2 + pL_1 + pL_2}.$$

Перепишем уравнение в строчку и приведём его к канонической форме записи (3.55)

$$(a_0 + p)i(t) = b_0 + pb_1,$$

где: $p = d/dt$; $a_0 = (R_1 + R_2)/(L_1 + L_2)$;

$$b_0 = E/(L_1 + L_2); i_{уст} = b_0/a_0 = E/(R_1 + R_2).$$

Выражение для установившегося тока нам говорит, что обе индуктивности короткозамкнуты.

Коэффициент $b_1 = 0$. Следовательно $i(0) = 0$.

Значит, электрическая цепь разомкнута.

Схема содержит две последовательно включённые индуктивности. Хорошо бы знать, как ведёт себя каждая из них. В этом нам опять поможет дифференциальное уравнение. Составим их для напряжений на каждой индуктивности. По закону Ома, например, для напряжения $u_1(t)$ запишем

$$u_1(t) = i(t) pL_1 = \frac{e(t)}{R_1 + R_2 + pL_1 + pL_2} pL_1.$$

Перепишем уравнение в строчку, приведём его к канонической форме записи (3.55) и, обобщая на два напряжения, получим

$$(a_0 + p)u(t) = b_0 + pb_1, \text{ где: } p = d/dt, a_0 = (R_1 + R_2)/(L_1 + L_2), b_0 = 0.$$

Для *первого* напряжения u_1 : $u_{1уст} = 0$,

Для *второго* напряжения u_2 : $u_{2уст} = 0$.

Так и должно быть на закороченных индуктивностях.

Коэффициенты b_1 :

Для *первого* напряжения u_1 : $b_1 = EL_1/(L_1 + L_2) = u_1(0)$.

Для *второго* напряжения u_2 : $b_1 = EL_2/(L_1 + L_2) = u_2(0)$.

Дифференциальные уравнения нам говорят, что обе индуктивности при времени, равном нулю, разомкнуты (на каждой есть напряжение). Суммарное напряжение на них равно:

$$u(0) = u_1(0) + u_2(0) = E.$$

Верно. Соблюдается второй закон Кирхгофа.

На рисунках 3.71 и 3.72 представлены две схемы в соответствии с результатами, которые нам дали дифференциальные уравнения. Первая схема соответствует времени равному нулю (рис. 3.61). Вторая схема (рис. 3.62) соответствует времени равному бесконечности.

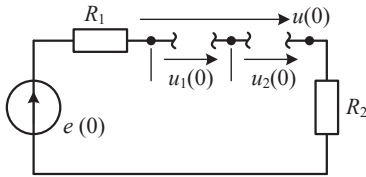


Рис. 3.71.

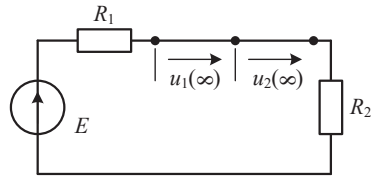


Рис. 3.72.

Пример 3.17.

Рассмотрим электрическую цепь, приведённую на странице 273 (рис. 14.47) учебника [7]. Она представлена на рис. 3.73.

Даны: постоянный источник E , три сопротивления и две индуктивности. Требуется найти переходной процесс тока при отключении сопротивления R_3 .

Поставленную задачу будем решать, составляя симметричное уравнение с математическими моделями индуктивных элементов. Сначала как всегда найдём токи в индуктивностях до коммутации до отключения сопротивления R_3 . Эти токи легко находятся в электрической цепи при короткозамкнутых индуктивностях при постоянном источнике E :

$$i_1(0-) = \frac{E(G_1 G_2 + G_1 G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad \text{— в индуктивности } L_1,$$

$$i_2(0-) = \frac{E G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{E R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad \text{— в индуктивности } L_2.$$

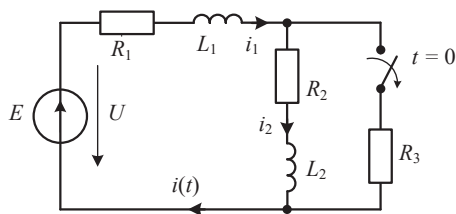


Рис. 3.73.

Рисуем схему с дополнительными источниками $i_1(0-)$ и $i_2(0-)$ для составления симметричного дифференциального уравнения. Удобно преобразовать источники тока с параллельно включёнными сопротивлениями в источники напряжения с последовательно включёнными сопротивлениями pL_1 и pL_2 . Такая схема представлена на рис. 3.74.

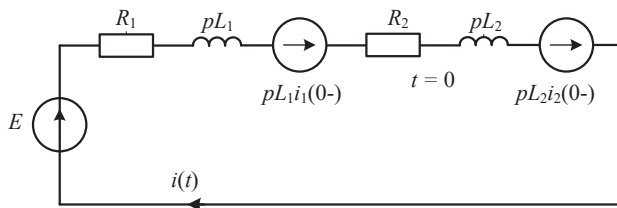


Рис. 3.74.

Для этой последовательной схемы запишем уравнение по второму закону Кирхгофа, не выбрасывая нулевые слагаемые:

$$[R_1 + R_2 + p(L_1 + L_2)]i(t) = E + pL_1i_1(0-) + pL_2i_2(0-),$$

где $p = d/dt$.

Приводя уравнение к канонической форме записи, получим полное симметричное уравнение

$$(a_0 + p)i = b_0 + pb_1.$$

Раскрывая скобки и заменяя p на d/dt , получим полное симметричное дифференциальное уравнение

$$a_0i(t) + di/dt = b_0 + db_1/dt, \quad (3.55)$$

где: $a_0 = (R_1 + R_2)/(L_1 + L_2)$;

$$b_0 = E/(L_1 + L_2);$$

$$b_1 = \frac{L_1i_1(0-) + L_2i_2(0-)}{L_1 + L_2}$$

Вид решения дифференциального уравнения

$$i(t) = b_0/a_0 + Ke^{-a_0t}.$$

Зависимое начальное условие $i(0) = b_1 = \frac{L_1 i_1(0-) + L_2 i_2(0-)}{L_1 + L_2}$.

Записываем ответ: $i(t) = b_0/a_0 + (b_1 - b_0/a_0)e^{-a_0 t}$.

Как видим, решение поставленной задачи получено, как и ранее рассмотренных задач, благодаря *полному симметричному дифференциальному уравнению*, которое содержит всю необходимую информацию для получения ответа. Здесь всё корректно. Если бы не название параграфа, мы и не обратили бы внимание на несоблюдение закона коммутации – скачкообразного изменения токов в индуктивностях.

Теперь сравним полное симметричное дифференциальное уравнение с дифференциальным уравнением, приведённым в учебнике:

$$(R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2) di/dt = E. \quad (3.56)$$

Номер уравнения сохранён. Это дифференциальное уравнение (3.56) неполное. В нём отсутствует нулевое слагаемое, тем самым потеряна важная информация о токе в нулевой момент времени – зависимое начальное условие.

Слово «некорректные» коммутации появилось, наверное, потому, что с помощью только этого неполного уравнения нельзя решить поставленную задачу. Тогда возникает вопрос, с какой целью в учебнике приведено это уравнение?

Пример 3.18.

Решим ещё один пример. Рассмотрим электрическую цепь, приведённую на странице 275 (рис. 14.449) указанного учебника. Она представлена на рис. 3.75. Даны: постоянный источник E , одно сопротивление и три ёмкости.

Требуется найти переходной процесс напряжения $u(t)$ на сопротивлении при одновременном включении двух заряженных до разных напряжений конденсаторов C_2 и C_3 к заряженному до напряжения $U = E$ конденсатору C_1 .

Поставленную задачу будем решать, составляя полное симметричное уравнение с математическими моделями ёмкостных элементов.

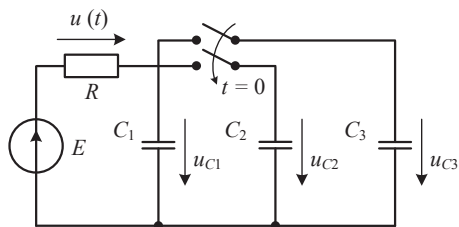


Рис. 3.75.

На рис. 3.76 приведена схема с дополнительными источниками равными заряженным ёмкостям.

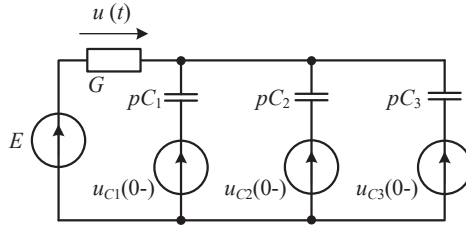


Рис. 3.76.

Считаем, что $u_{C_2}(0-), u_{C_3}(0-)$ известны. До коммутации $u_{C_1}(0-) = E$. Применяя, например, метод предельных состояний, для напряжения запишем:

$$(G + pC_1 + pC_2 + pC_3)u(t) = pC_1(E - u_{C_1}(0-)) + pC_2(E - u_{C_2}(0-)) + pC_3(E - u_{C_3}(0-)),$$

где: $p = d/dt$.

Приведём уравнение к канонической форме записи и получим полное симметричное дифференциальное уравнение (3.55), в котором коэффициенты:

$$a_0 = G/(C_1 + C_2 + C_3), \quad b_0 = 0.$$

Учитывая, что $u_{C_1}(0-) = E$, коэффициент

$$b_1 = u(0) = \frac{C_2(E - u_{C_2}(0-)) + C_3(E - u_{C_3}(0-))}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Записываем ответ: $u(t) = u(0)e^{-a_0 t} = b_1 e^{-a_0 t}$.

Читателю предлагается посмотреть решения этих примеров в учебнике [7] и сравнить с приведёнными решениями. Предлагается также решить другую задачу с «некорректными» коммутациями, похожую на эти две задачи, самостоятельно, разными способами.

Только что приведённые решения каждой задачи из учебника могут занимать со словами и формулами не более 10 строчек.

Этот параграф наглядно показывает преимущество описываемого метода составления полного симметричного дифференциального уравнения и его решения. Он ставит на должное уважаемое место классический метод расчёта переходных процессов.

Здесь всё логично. Полное симметричное дифференциальное уравнение несёт в себе (во всех своих коэффициентах) всю необходимую информацию для получения решения независимо от того, изменяются скачком ток в индуктивности и напряжение на ёмкости, или нет. Уравнение содержит

предысторию ($i_L(0-)$, $u_C(0-)$) и само (своими коэффициентами) говорит о начале истории и о её ходе, включая бесконечность.

3.10. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Метод анализа электрических цепей во временной области, основанный на составлении и решении системы дифференциальных уравнений первого порядка, называют методом переменных состояния. Сами уравнения называют уравнениями состояния. Эта система дифференциальных уравнений формируется на основе топологических и компонентных уравнений. В качестве топологических уравнений в основном применяют законы Кирхгофа. В теоретической электротехнике переменными уравнений состояния выбирают напряжения на ёмкостных элементах и токи через индуктивные элементы (если нет ёмкостных контуров и индуктивных сечений). Запишем систему уравнений состояния для электрической цепи второго порядка с двумя ёмкостными элементами. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} du_{C1}/dt &= a_{11}u_{C1} + a_{12}u_{C2} + b_1V_1, \\ du_{C2}/dt &= a_{21}u_{C1} + a_{22}u_{C2} + b_2V_2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Здесь:

a – постоянные коэффициенты, зависящие от элементов и структуры схемы;

V_1 и V_2 – источники напряжения E и тока J .

Из этой системы уравнений (3.57) сначала находят напряжения на ёмкостных элементах u_{C1} и u_{C2} . Затем находят выходные (искомые) переменные – напряжения u и токи i . Их выражают через полученные u_{C1} и u_{C2} , составляя дополнительную систему уравнений.

Рассмотрим применение метода переменных состояния на примере активной RC цепи с операционным усилителем.

Пример 3.19. Схема цепи представлена на рис. 3.77. На вход подаётся напряжение $e(t) = E1(t)$. Элементы RC равны: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 10$ кОм, $R_3 = 1$ кОм, $R_6 = 12$ кОм, $C_1 = 54.3$ нФ, $C_2 = 4.58$ нФ. На выходе включена нагрузка с сопротивлением Z_H . Операционный усилитель идеальный. Он включён в качестве повторителя напряжения для развязки низкочастотного RC -фильтра и нагрузки. Требуется найти напряжение на выходе $u(t)$, применяя метод переменных состояния.

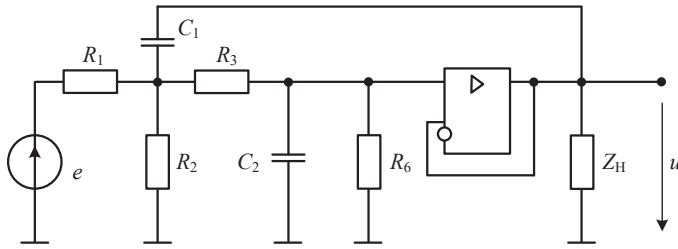


Рис. 3.77.

Эквивалентная схема замещения с идеальным операционным усилителем приведена на рис. 3.78.

Решение. Для удобства составления уравнений состояния напряжения на ёмкостных элементах заменены источниками напряжения u_{C1} и u_{C2} . Для узлов 1 и 2 записываем уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} -i_3 - i_{C2} + i_4 &= 0, \\ -i_1 + i_2 + i_3 + i_{C1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

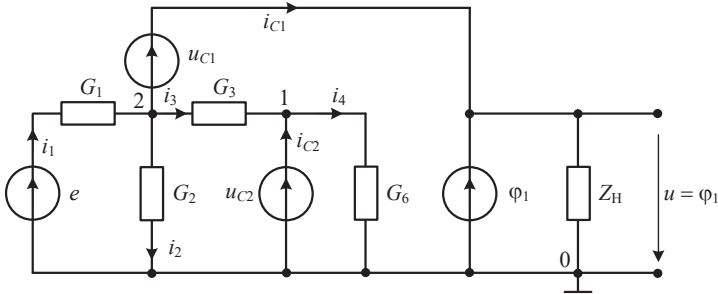


Рис. 3.78.

По закону Ома для участка цепи с ЭДС запишем:

$$\begin{aligned} i_1 &= (\varphi_0 - \varphi_2 + e)G_1, \\ i_2 &= (\varphi_2 - \varphi_0)G_2, \\ i_3 &= (\varphi_2 - \varphi_1)G_3, \\ i_4 &= (\varphi_1 - \varphi_0)G_6 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Эти токи с учётом $\varphi_0 = 0$ подставляем в систему уравнений (3.58), группируем слагаемые и получаем расширенные узловые уравнения:

$$\begin{aligned} (G_3 + G_6)\varphi_1 - G_3\varphi_2 - i_{C2} &= 0, \\ -G_3\varphi_1 + (G_1 + G_2 + G_3)\varphi_2 + i_{C1} &= eG_1. \end{aligned} \quad (3.60)$$

В этой системе расширенных узловых уравнений:

$$\varphi_1 = u_{C2}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 - u_{C1} = u_{C2} - u_{C1}. \quad (3.61)$$

С учётом (3.5) переписываем уравнения (3.4), оставляя токи i_{C1} и i_{C2} в левой части равенства и перенося остальные слагаемые в правую часть равенства.

Группируем слагаемые и получаем:

$$\begin{aligned} i_{C1} &= (G_1 + G_2 + G_3)u_{C1} - (G_1 + G_2)u_{C2} + eG_1, \\ i_{C2} &= G_3u_{C1} + G_6u_{C2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Уравнения состояния получим, записав компонентные уравнения – уравнения связи между токами через ёмкостные элементы и напряжениями на них. В соответствии с выбранными направлениями токов i_{C1} и i_{C2} :

$$\begin{aligned} C_1 du_{C1}/dt &= -i_{C1} = -(G_1 + G_2 + G_3)u_{C1} + (G_1 + G_2)u_{C2} - G_1e, \\ C_2 du_{C2}/dt &= -i_{C2} = -G_3u_{C1} - G_6u_{C2}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Разделив первое уравнение на C_1 , второе уравнение на C_2 , приведём уравнения (3.63) к виду (3.57), где:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(G_1 + G_2 + G_3)/C_1, \\ a_{12} &= (G_1 + G_2)/C_1, \\ b_1 &= b = -G_1/C_1, \quad V_1 = e, \\ a_{21} &= -G_3/C_2, \\ a_{22} &= -G_6/C_2, \quad V_2 = 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение может быть получено из дифференциальной системы уравнений (3.57), приравняв нулю источник ($e = 0$):

$$\begin{aligned} du_{C1}/dt &= a_{11}u_{C1} + a_{12}u_{C2} + 0, \\ du_{C2}/dt &= a_{21}u_{C1} + a_{22}u_{C2} + 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Определитель:

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (\lambda - a_{22}) \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0. \\ \lambda^2 + A_1\lambda + A_0 &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты характеристического уравнения A_1 и A_0 выражаем через параметры схемы:

$$\begin{aligned} A_1 &= -a_{11} - a_{22} = (G_1 + G_2 + G_3)/C_1 + G_6/C_2, \\ A_0 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (G_1G_3 + G_1G_6 + G_2G_3 + G_2G_6 + G_3G_6)/C_1C_2. \end{aligned}$$

Их числовые значения равны:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4.45916 \cdot 10^{-2} \text{ 1/мкС}, \\ A_0 &= 2.22272 \cdot 10^{-3} \text{ (1/мкС)}^2. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\alpha + j\omega_{CB} = -2.22958 \cdot 10^{-2} + j 4.154058 \cdot 10^{-2}, \\ \lambda_2 &= -\alpha - j\omega_{CB} = -2.22958 \cdot 10^{-2} - j 4.154058 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2.22958 \cdot 10^{-2} \text{ 1/мкС} - \text{коэффициент затухания}, \\ \omega_{CB} &= 4.154058 \cdot 10^{-2} \text{ рад/мкС} - \text{круговая частота свободных колебаний}. \end{aligned}$$

Процесс носит колебательный характер. Решение для любой переменной u_{C1} , u_{C2} и u имеет вид:

$$u = u_{уст} + Ke^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t + \varphi).$$

Нам повезло. Не требуется составлять дополнительные уравнения для нахождения искомой переменной. В этой задаче искомая переменная u равна искомой переменной уравнений состояния u_{C2} :

$$u = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1 = u_{C2}.$$

Найдём установившееся значение $u_{уст}$. Это напряжение может быть найдено двумя способами:

Первый способ. Из системы уравнений (3.57), приравняв нулю производные, получим:

$$0 = a_{11}u_{C1уст} + a_{12}u_{C2уст} + bE,$$

$$0 = a_{21}u_{C1уст} + a_{22}u_{C2уст}.$$

Из этой системы уравнений найдём:

$$u_{C2уст} = u_{уст} = \frac{a_{21}bE}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{B_0}{A_0} = 0.603015 E,$$

где:

$$A_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ — коэффициент характеристического уравнения,}$$

$$B_0 = a_{21}bE = E \frac{G_1 G_3}{C_1 C_2} = 1.34003 \cdot 10^{-3} E \text{ В/мкС}^2.$$

Второй способ. Найдём установившееся напряжение $u_{C2уст}$ непосредственно по схеме. На рис. 3.79 приведена схема для установившегося режима.

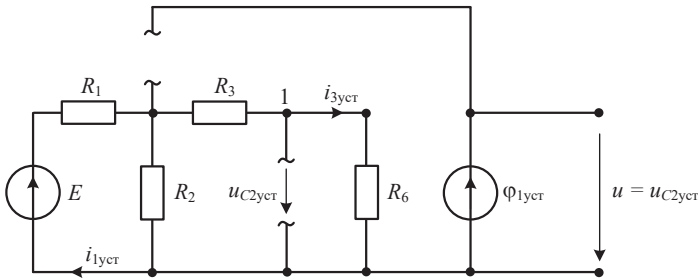


Рис. 3.79.

В установившемся режиме при воздействии постоянного источника E ёмкости разомкнуты. Решаем задачу расчёта цепи постоянного тока. Последовательно упрощаем схемы (рис. 3.80 и 3.81).

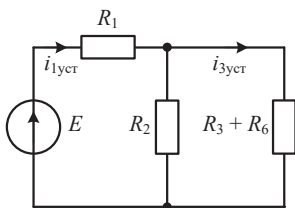


Рис. 3.80.

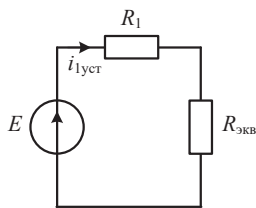


Рис. 3.81.

Находим сначала $i_{1уст}$ из уравнения Кирхгофа:

$$i_{1уст} = \frac{E}{R_1 + R_{эКВ}}, \quad \text{где: } R_{эКВ} = \frac{R_2(R_3 + R_6)}{R_2 + R_3 + R_6}.$$

По формуле распределения тока по параллельным ветвям (по формуле разброса) находим ток $i_{3уст}$:

$$i_{3уст} = i_{1уст} \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_6} = \frac{E}{R_1 + R_{эКВ}} \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_6}.$$

Наконец, по закону Ома находим искомое напряжение:

$$u_{уст} = R_6 i_{3уст} = \frac{R_2 R_6 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_6 + R_2 R_3 + R_2 R_6} = \frac{G_1 G_3 E}{G_1 G_3 + G_1 G_6 + G_2 G_3 + G_2 G_6 + G_3 G_6} = \frac{B_0}{A_0}.$$

Для нахождения единственного решения (нахождения постоянной K и начальной фазы φ) необходимо знать значение функции и значение её производной в нулевой момент времени. Напряжение в нулевой момент времени:

$$u(0) = u_{c2}(0) = 0.$$

Из второго уравнения системы (3.1) при $u_{c1}(0) = u_{c2}(0) = 0$ находим значение производной в нулевой момент времени:

$$(du/dt)_0 = (du_{c2}/dt)_0 = a_{21}u_{c1}(0) + a_{22}u_{c2}(0) = 0.$$

Зная $u_{уст}$, $u(0)$ и $(du/dt)_0$, находим искомое напряжение $u(t)$, как было описано в вышеприведённых параграфах. Искомое выходное напряжение равно:

$$u(t) = 0.603015 E + 0.6843815 E e^{-\alpha t} \sin(\omega_{св} t - 118.22^\circ).$$

Качественный график переходного процесса для низкочастотного фильтра приведён в параграфе .

Для сравнения приведём решение этого примера другим методом – классическим методом с составлением полного симметричного дифференциального уравнения. На рис. 3.82 приведена эквивалентная схема замещения.

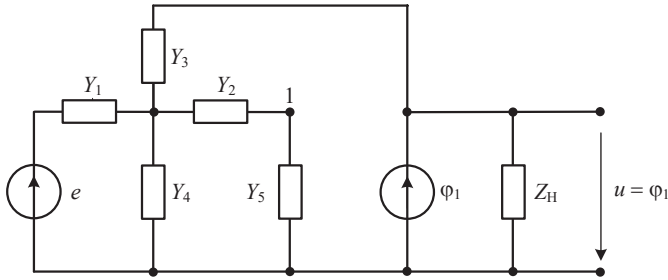


Рис. 3.82.

На схеме обозначено:

$$Y_1 = 1/R_1 = G_1, \quad Y_2 = 1/R_3 = G_3, \quad Y_3 = pC_1 \quad Y_4 = 1/R_2 = G_2,$$

$$Y_5 = 1/R_6 + pC_2 = G_6 + pC_2.$$

Ставим задачу получить дифференциальное уравнение. Тогда в наших обозначениях $p = d/dt$. Для получения дифференциального уравнения годится любой метод расчёта электрических цепей. Выбираем метод предельных состояний. Число элементов $n = 5$. Схема содержит три узла и три контура $y - 1 = 2$, $k = 3$. Проверяем формулу $y - 1 + k = n$. Верно. Так как $y - 1 < k$, то будем работать с проводимостями. По методу предельных состояний записываем:

$$(Y_1 Y_2 + 0_{13} + 0_{14} + Y_1 Y_5 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_5 + 0_{34} + Y_3 Y_5 + Y_4 Y_5) u = Y_1 Y_2 E + Y_1 Y_5 0 + Y_2 Y_3 u + Y_2 Y_4 0 + Y_2 Y_5 0 + Y_3 Y_5 0 + Y_4 Y_5 0.$$

Подставляя обозначения проводимостей, получим:

$$((G_1 G_3 + G_1(G_6 + pC_2)) + G_2 G_3 + G_3(G_6 + pC_2) + pC_1(G_6 + pC_2) + G_2(G_6 + pC_2)) u = G_1 G_3 E.$$

Группируя слагаемые, приводим уравнение к виду:

$$(p^2 + pA_1 + A_0)u = p^2 B_2 + pB_1 + B_0. \quad (3.65)$$

В этом полном симметричном уравнении едином для временной и частотной областей заменяем:

$$p = d/dt \quad \text{и} \quad p^2 = d^2/dt^2$$

и получаем дифференциальное уравнение:

$$d^2 u/dt^2 + A_1 du/dt + A_0 u = d^2 B_2/dt^2 + dB_1/dt + B_0,$$

где коэффициенты равны:

$$A_1 = (G_1 + G_2 + G_3)/C_1 + G_6/C_2,$$

$$A_0 = (G_1 G_3 + G_1 G_6 + G_2 G_3 + G_2 G_6 + G_3 G_6)/C_1 C_2,$$

$$B_2 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_0 = E G_1 G_3 / C_1 C_2.$$

Получили те же значения всех коэффициентов, ранее полученных с помощью метода переменных состояния.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0.$$

С помощью коэффициентов A и B дифференциального уравнения найдём и все необходимые величины для получения единственного решения. Установившееся значение напряжения равно:

$$u_{уст} = \frac{B_0}{A_0} = \frac{G_1 G_3 E}{G_1 G_3 + G_1 G_6 + G_2 G_3 + G_2 G_6 + G_3 G_6} = 0.603015 E.$$

С помощью рекуррентных формул найдём значение функции, и значение её производной в нулевой момент времени:

$$u(0) = B_2 = 0, \quad (du/dt)_0 = B_1 - A_1 B_2 = 0 - A_1 \cdot 0 = 0.$$

Метод переменных состояния присутствует в большинстве учебников по теоретическим основам электротехники. Этим методом студенты часто считают переходные процессы (находят переходную функцию) после того как в частотной области уже была получена передаточная функция и известны её коэффициенты числителя и знаменателя.

3.11. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ЛАПЛАСА

Операторный метод Лапласа предполагает сначала получение изображения $F(p)$ искомой переменной в виде дроби:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Оригинал $f(t)$ искомой переменной находится по теореме разложения:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Для случая, когда знаменатель имеет один нулевой корень $p_0 = 0$, то есть

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{p F_2(p)}$$

оригинал может быть найден по формуле разложения, которая имеет вид:

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{F_1(p)}{p F_2(p)} \right\} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Рассмотрим пример предыдущего параграфа 3.10. Для низкочастотного фильтра с операционным усилителем было получено уравнение единое для временной и частотной областей (3.65):

$$(p^2 + pA_1 + A_0)u = p^2 B_2 + pB_1 + B_0, \quad \text{где: } B_0 = b_0 E.$$

Переходя в частотную область, будем считать, что $p = j\omega$. Тогда передаточная функция будет иметь вид:

$$H(p) = \frac{\dot{U}(j\omega)}{\dot{E}} = \frac{b_0}{p^2 + A_1 p + A_0}.$$

Комплексное напряжение

$$\dot{U}(j\omega) = H(p)\dot{E} = \frac{b_0}{p^2 + A_1p + A_0} \dot{E},$$

где: \dot{E} – комплекс действующего значения источника синусоидального напряжения.

Решение этого примера операторным методом упрощено тем, что мы не рисуем схему в операторной форме, не записываем уравнений и не проделываем всех выкладок для нахождения изображения искомой переменной. Считаем, что передаточная функция нам уже известна.

Учитывая, что комплексная проводимость и операторная проводимость в форме Лапласа обозначаются одинаково, а именно pC , а также учитывая, что изображение постоянной величины равно E/p ($E(p) = E/p$), записываем изображение искомого напряжения:

$$U(p) = \frac{b_0}{p^2 + A_1p + A_0} \frac{E}{p} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

Знаменатель имеет один нулевой корень.

Здесь:

$$F_1(p) = b_0E = B_0, \quad F_2(p) = p^2 + A_1p + A_0.$$

Находим остальные корни знаменателя, приравняв нулю $F_2(p)$:

$$F_2(p) = p^2 + A_1p + A_0 = 0.$$

Отсюда находим $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega_{CB}$.

Примечание. Корни $p_{1,2}$ равны корням характеристического уравнения

$$p_1 = -\alpha + j\omega_{CB} = \lambda_1, \quad p_2 = -\alpha - j\omega_{CB} = \lambda_2.$$

По теореме разложения оригинал равен:

$$u(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{F_1(p_1)e^{p_1t}}{p_1F_2'(p_1)} + \frac{F_1(p_2)e^{p_2t}}{p_2F_2'(p_2)},$$

где: $F_2'(p) = 2p + A_1$.

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности.

Первое слагаемое:

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{b_0E}{A_0} = \frac{B_0}{A_0} = u_{уст} - \text{установившееся напряжение.}$$

Второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{F_1(p_1)e^{p_1t}}{p_1F_2'(p_1)} &= \frac{B_0 e^{p_1t}}{p_1(2p_1 + A_1)} = \frac{B_0 e^{(-\alpha + j\omega_{CB})t}}{(-\alpha + j\omega_{CB})(2(-\alpha + j\omega_{CB}) + A_1)} = \\ &= \frac{B_0 e^{-\alpha t} e^{j\omega_{CB}t}}{2\omega_{CB}(-\omega_{CB} - j\alpha)} = \frac{B_0 e^{-\alpha t}}{2\omega_{CB}\sqrt{\omega_{CB}^2 + \alpha^2}} e^{j(\omega_{CB}t + \varphi)}. \end{aligned}$$

Здесь:

$\alpha = A_1/2$ и $-\omega_{CB} - j\alpha = \sqrt{\omega_{CB}^2 + \alpha^2} e^{j(-\varphi)}$, угол φ – в третьей четверти.

По формуле Эйлера:

$$e^{j(\omega_{\text{CB}}t + \varphi)} = \cos(\omega_{\text{CB}}t + \varphi) + j \sin(\omega_{\text{CB}}t + \varphi).$$

Третье слагаемое:

$$\frac{F_1(p_2)e^{p_2t}}{p_2F_2'(p_2)} = \frac{B_0 e^{p_2t}}{p_2(2p_2 + A_1)} = \frac{B_0 e^{(-\alpha - j\omega_{\text{CB}})t}}{(-\alpha - j\omega_{\text{CB}})(2(-\alpha - j\omega_{\text{CB}}) + A_1)} =$$

$$\frac{B_0 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_{\text{CB}}t}}{2\omega_{\text{CB}}(-\omega_{\text{CB}} + j\alpha)} = \frac{B_0 e^{-\alpha t}}{2\omega_{\text{CB}}\sqrt{\omega_{\text{CB}}^2 + \alpha^2}} e^{-j(\omega_{\text{CB}}t + \varphi)}.$$

Здесь:

$$\alpha = A_1/2 \text{ и } -\omega_{\text{CB}} + j\alpha = \sqrt{\omega_{\text{CB}}^2 + \alpha^2} e^{j(+\varphi)}, \text{ угол } \varphi \text{ - во второй четверти.}$$

По формуле Эйлера:

$$e^{-j(\omega_{\text{CB}}t + \varphi)} = \cos(\omega_{\text{CB}}t + \varphi) - j \sin(\omega_{\text{CB}}t + \varphi).$$

Складывая второе и третье слагаемые, сокращаются мнимые части. Остаются две действительные части. В результате три слагаемых дают оригинал искомого напряжения:

$$u(t) = \frac{B_0}{A_0} + \frac{B_0 e^{-\alpha t}}{\omega_{\text{CB}}\sqrt{\omega_{\text{CB}}^2 + \alpha^2}} \cos(\omega_{\text{CB}}t + \varphi) =$$

$$= 0.603015 E + 0.6843815 E e^{-\alpha t} \cos(\omega_{\text{CB}}t + 151.78^\circ) =$$

$$= 0.603015 E + 0.6843815 E e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{CB}}t - 118.22^\circ).$$

Здесь ω_{CB} должно быть переведено в град./мкс.

Задача операторным методом решена.

И опять хочется сравнить с классическим методом. Хорошо видно, что классический метод решения с получением полного симметричного дифференциального уравнения предпочтительнее.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Халютин С. П., Титов А. А. О некоторых разделах теоретической электротехники. Москва, 2010, 187 с.
2. Титов А. А., Халютин С. П. Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи. // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. Т. 6. № 11. С. 31-41.
3. Титов А. А., Халютин С. П. Расчёт элементов электросистемы самолёта как четырёхполюсников. // Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н.Е. Жуковского. 2016. № 4. С. 466-472.
4. Основы электротехники. Т. 1: Физические основы электротехники. Проф. К. А. Круг. Москва, Ленинград: Государственное энергетическое издательство, 1946.
5. Основы электротехники. Т. 2: Теория переменных токов. Проф. К. А. Круг. Москва, Ленинград: Государственное энергетическое издательство, 1946.
6. Авиационная электротехника. Под редакцией Ю. П. Доброленского. М.: Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1987.
7. Методические указания слушателям по изучению дисциплины ЭЛЕКТРОТЕХНИКА (с примерами решения задач). Под ред. В. С. Горохова. М.: Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1985.
8. Авиационная электротехника. Методические указания слушателям по изучению дисциплины. Часть 2. Под ред. Ю. Г. Иванишина. М.: Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1986.
9. Основы теории цепей. Учебник для вузов. Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. Изд.- 4-е, переработанное. М.: Энергия, 1975.
10. Основы теории цепей. Учебник для вузов. Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. Изд.- 5-е, переработанное. М.: Энергоиздат, 1989.
11. Теоретические основы электротехники. Т. 1: Учебник для электротехнических вузов. Под ред. П. А. Ионкина. Изд. – 2-е; М.: Высш. шк., 1976.
12. Теоретические основы электротехники. Т. 2: Учебник для электротехнических вузов. Под ред. П. А. Ионкина. Изд. – 2-е; М.: Высш. шк., 1976.
13. Задачник по теоретическим основам электротехники (теория цепей). Под ред. К. М. Поливанова. Изд. – 3-е, переработанное и дополненное. М.: Энергия, 1973.
14. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники. Под ред. проф. П. А. Ионкина. М.: Энергоиздат, 1982.
15. Теоретические основы электротехники. Т. 1: Учебник для вузов. К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. Изд.-4-е

дополненное для самостоятельного изучения курса. Москва, Санкт-Петербург, Самара, Киев, Харьков, Минск, 2003.

16. Теоретические основы электротехники. Т. 2: Учебник для вузов. К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. Изд.-4-е дополненное для самостоятельного изучения курса. Москва, Санкт-Петербург, Самара, Киев, Харьков, Минск, 2003.

17. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern. Annalen der Physik. 1902. Bd 9, N 13. S. 1304 – 1329.

18. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern. Annalen der Physik. 1904. Bd 15, N 12. S. 385 – 394.