ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Е.Н. Кушнер

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

*Утверждено редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия*

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 517+512
ББК 517
К59

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:
Дементьев Ю.И. (МГТУ ГА) – канд. физ.-мат. наук;
Самохин А.В. (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН) –
д-р техн. наук

Кушнер Е.Н.
К59 Высшая математика [Текст] : учебное пособие / Е.Н. Кушнер. – М. : ИД Академии Жуковского, 2020. – 80 с.

ISBN 978-5-907275-67-6

Данное учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Высшая математика» по учебному плану для студентов I курса направления 20.03.01 «Техносферная безопасность», профиль «Безопасность технологических процессов и производств» очной формы обучения.

В учебном пособии приведены практические задания, которые сопровождены соответствующим им теоретическим материалом за первый курс.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 29.08.2020 г. и методического совета 29.08.2020 г.

УДК 517+512
ББК 517
Св. тем. план 2020 г.
поз. 34

КУШНЕР Елена Николаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 07.12.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 5 Усл. печ. л. 4,65
Заказ № 707/1008-УП08 Тираж 90 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907275-67-6

1 Матрицы

Задача 1. Определить вид и размер каждой из матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица $A_{3\times 3}$ – нижняя треугольная, $C_{3\times 3}$ – диагональная, $M_{2\times 2}$ – скалярная матрица, порождённая числом 2, $B_{3\times 2} = K^T_{2\times 3}$, $D_{3\times 3}$, $L_{2\times 2}$.

Суммой матриц $A_{m\times n} = \big(a_{ij}\big)$ и $B_{m\times n} = \big(b_{ij}\big)$ называется матрица $C_{m\times n} = \big(c_{ij}\big)$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Задача 2. Найти сумму матриц A и C (из задачи 1).

Решение. По определению

$$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 1+2 & 0+0 \\ 1+0 & 1+0 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A_{m\times n} = \big(a_{ij}\big)$ **на число** β называется матрица $C_{m\times n} = \big(c_{ij}\big)$, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на число β, т.е. $c_{ij} = a_{ij}\cdot\beta$.

Задача 3. Найти произведение матрицы A (из задачи 1) на число 3.

Решение. По определению

$$3\,A = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, у которой элемент, находящийся на пересечении i-той строки и j-того столбца, равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы $A_{m\times k}$ на соответствующие элементы j-того столбца матрицы $B_{k\times n}$, т.е. $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$ $(i = 1,\,2,\,\ldots m,\ j = 1,\,2,\,\ldots n)$.

Задача 4. Найти произведение матрицы B на матрицу K (из задачи 1).

Решение. Произведение $B\cdot K$ определено, поскольку число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Тогда

$$B_{3\times 2}\cdot M_{2\times 3} = C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot 1+3\cdot(-2) \\ 0\cdot 1+2\cdot 3 & 0\cdot 0+2\cdot 2 & 0\cdot 1+2\cdot(-2) \\ 1\cdot 1+(-2)\cdot 3 & 1\cdot 0+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 1+(-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -5 \\ 6 & 4 & -4 \\ -5 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2 Определители

Задача 5. Найти определители матриц $A = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Это матрицы первого порядка, поэтому их определители равны

$$\Delta A = -1,\ \Delta B = 3.$$

Задача 6. Найти определитель матрицы L (из задачи 1).

Решение. Это матрица второго порядка. Её определитель найдём по формуле

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \Longrightarrow \Delta L = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$$

Задача 7. Найти определитель матрицы D (из задачи 1).

Решение. Это матрица третьего порядка. Для вычисления её определителя дописываем к нему снизу первые две его строки. Проводим главную диагональ, и еще две линии в том же направлении. Выписываем произведения элементов, находящихся на каждой линии. Находим сумму этих произведений. Затем проводим побочную диагональ и еще две линии в том же направлении. Выписываем произведения элементов, находящихся на каждой линии. Находим сумму этих произведений. Из первой полученной суммы вычитаем вторую.

$$\Delta A = \begin{array}{|ccc|} a_{22} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} = \Big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}\Big) - \\ -\Big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}\Big).$$

$$\Delta D = \begin{array}{|ccc|} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{array} = \Big(1\cdot(-2)\cdot(-4) + (-3)\cdot 0\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot(-1)\Big) - \\ -\Big(3\cdot(-2)\cdot 4 + (-1)\cdot 0\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot(-3)\Big) = \\ = 0 - 0 = 0$$

Минором m_{ij} элемента d_{ij} матрицы $D_{n\times n}$, называется определитель матрицы размера $(n-1)$, полученной из матрицы D вычёркиванием i-той строки и j-того столбца. Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j}m_{ij}$ называется **алгебраическим дополнением элемента** d_{ij}.

Задача 8. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов d_{11} и d_{32} матрицы D (из задачи 1).

Решение. По определению, приведённому выше,

$$m_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-4) - 0\cdot(-1) = 8, \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\, m_{11} = 8,$$
$$m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 3\cdot(-3) = 8, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\, m_{32} = -8.$$

Теорема (о разложении определителя по строке или столбцу): Определитель матрицы $A_{n\times n} = (a_{ij})$ можно найти разложением по i-той строке (для любого $i = 1,\, 2,\, ...n$)

$$\Delta A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

или разложением по j-ому столбцу (для любого $j = 1,\, 2,\, ...n$)

$$\Delta A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Задача 9. Найти ΔD (из задачи 1) разложением по второй строке.

Решение. Согласно формуле разложения по строке вычислим:

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - 0\cdot 3 = -8, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\, m_{21} = 8,$$
$$m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4) - 4\cdot 3 = -16, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\, m_{22} = -16,$$
$$m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 4\cdot 2 = -8, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\, m_{23} = 8,$$

таким образом,

$$\Delta D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = (-3)\cdot 8 + (-2)\cdot(-16) + (-1)\cdot 8 = 0.$$

Задача 10. Найти ΔD (из задачи 1) разложением по третьему столбцу.

Решение. Согласно формуле разложения по столбцу вычислим:

$$m_{13} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 0 - 4\cdot(-2) = 8, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\, m_{13} = 8,$$
$$m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 4\cdot 2 = -8, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\, m_{23} = 8,$$
$$m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - (-3)\cdot 2 = 4, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\, m_{33} = 4,$$

таким образом,

$$\Delta D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = 3\cdot 8 + (-1)\cdot 8 + (-4)\cdot 4 = 24 - 8 - 16 = 0.$$

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A, если $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Задача 11. Найти матрицу, обратную к матрице A (из задачи 1).

Решение. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2.$$

Поскольку $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Для её нахождения вычислим миноры всех элементов матрицы A и их алгебраические дополнения

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2, && A_{11} = (-1)^{1+1}\, m_{11} = 2, \\
m_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, && A_{12} = (-1)^{1+2}\, m_{12} = 0, \\
m_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1, && A_{13} = (-1)^{1+3}\, m_{13} = -1, \\
m_{21} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, && A_{21} = (-1)^{2+1}\, m_{21} = 0, \\
m_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2, && A_{22} = (-1)^{2+21}\, m_{22} = 2, \\
m_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1, && A_{23} = (-1)^{2+3}\, m_{23} = -1, \\
m_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, && A_{31} = (-1)^{3+1}\, m_{31} = 0, \\
m_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, && A_{32} = (-1)^{3+2}\, m_{32} = 0, \\
m_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, && A_{33} = (-1)^{3+3}\, m_{33} = 1.
\end{aligned}$$

Составим матрицы $A^* = \big(A_{ij}\big)^T$ и A^{-1}

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Можно легко убедиться, что $A^{-1} \cdot A = E$, значит это и есть искомая матрица.

Задача 12. С помощью элементарных преобразований найти матрицу, обратную к матрице A (из задачи 1).

Решение. Допишем справа к рассматриваемой матрице единичную матрицу третьего порядка и, с помощью элементарных преобразований, приведём полученную матрицу к ступенчатому виду

$$\Big(A\,|\,E\Big) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{s_3 - s_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{s_3 - s_2}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[s_1+s_3]{\frac{s_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Выпишем отдельно правую половину полученной матрицы (это и есть искомая матрица)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3 Системы линейных алгебраических уравнений

Ранг матриц A – это число её линейно независимых строк.

Задача 13. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[s_3-s_1]{s_2-2s_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3-s_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \widetilde{A}.$$

Матрицы A и $\widetilde{A}$ эквивалентны. Поскольку матрица $\widetilde{A}$ имеет две линейно независимые строки, то $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$.

Задача 14. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[s_3-s_1]{s_2-2s_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3-s_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \widetilde{A}.$$

Матрицы A и $\widetilde{A}$ эквивалентны. Поскольку матрица $\widetilde{A}$ имеет три линейно независимые строки, то $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$.

Теорема: Система m линейных уравнений от n неизвестных **совместна** тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы. Если при этом, эти ранги равны количеству неизвестных системы, то эта система является **определённой** (имеет единственное решение). Если ранг основной матрицы рассматриваемой системы равен рангу её расширенной матрицы и меньше количества неизвестных системы, то система является **неопределённой** (т.е. имеет бесконечное множество решений).

Задача 15. Не решая систему, ответить на вопрос о количестве её решений

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 2, \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0, \\ x & + & y & + & z & = & 1. \end{cases}$$

Решение. Это система трёх уравнений с тремя неизвестными ($n = 3$). Выпишем расширенную матрицу коэффициентов этой системы и, с помощью элементарных преобразований, приведем её к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-s_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{s_3 \leftrightarrow s_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{array}\right) = \widetilde{\overline{A}}.$$

Матрицы $\overline{A}$ и $\widetilde{\overline{A}}$ эквивалентны. Поскольку матрица $\widetilde{\overline{A}}$ имеет три линейно независимые строки, значит $r(\overline{A}) = r(\widetilde{\overline{A}}) = 3$. До черты в этой матрице также три линейно независимые строки, значит $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$. Поскольку $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система имеет одно единственное решение.

Задача 16. Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 2, \\ 2x & + & 2y & - & 4z & = & 0, \\ x & - & y & + & z & = & 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем рассматриваемую систему в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную матрице коэффициентов. Для этого вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 4 - (4 + 4 - 2) = -4.$$

Поскольку $\Delta A \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Найдем миноры всех элементов заданной матрицы A:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & m_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6, & m_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \\ m_{21} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & m_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & m_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ m_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, & m_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8, & m_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \end{aligned}$$

а также их алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1}\, m_{11} = -2, & A_{12} &= (-1)^{1+2}\, m_{12} = -6, & A_{13} &= (-1)^{1+3}\, m_{13} = -4, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1}\, m_{21} = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2}\, m_{22} = -1, & A_{23} &= (-1)^{2+3}\, m_{23} = 0, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1}\, m_{31} = 0, & A_{32} &= (-1)^{3+2}\, m_{32} = 8, & A_{33} &= (-1)^{3+3}\, m_{33} = 4. \end{aligned}$$

Составим матрицы $A^* = \left(A_{ij}\right)^T$ и A^{-1}

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & 8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^* = \frac{1}{(-4)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & 8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим полученную матрицу справа на столбец свободных членов

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{(-4)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & 8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -6 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ -4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система имеет единственное решение: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Задача 17. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x + 2y - 4z = 0, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов этой системы и, с помощью элементарных преобразований, приведём её к диагональному виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3-s_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{-s_3 \\ s_1+s_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{s_2+2s_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Значит, система имеет одно единственное решение: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Задача 18. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 3x - y + 5z = 5, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов этой системы и, с помощью элементарных преобразований, приведём её к диагональному виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{s_2-s_1-s_3 \\ s_3-s_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{s_2-s_1 \\ -s_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}s_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Выпишем систему, соответствующую данной матрице:

$$\begin{cases} x_1 & = 1, \\ x_2 & + \dfrac{1}{2}x_3 = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = 1, \\ x_2 & = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

Значит, система имеет бесконечное множество решений: $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}z$, $z \in \mathbb{R}$.

Задача 19. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x & & & - & z & = & 2, \\ x & - & y & + & z & = & 5, \\ x & + & y & - & 2z & = & 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов этой системы и, с помощью элементарных преобразований, приведём её к диагональному виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{s_2 - s_1 - s_3 \\ s_3 - s_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right).$$

Поскольку в данной матрице есть строка, в которой коэффициенты до черты равны нулю, а после черты не равен нулю, то система не имеет решений.

Задача 20. Методом Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & 2, \\ 2x & + & 2y & - & 4z & = & 0, \\ x & - & y & + & z & = & 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу коэффициентов этой системы и найдем её определитель:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 4 - (4 + 4 - 2) = -4.$$

Поскольку $\Delta A \neq 0$, то система имеет единственное решение. Для его нахождения вычислим также определители ΔA_1, ΔA_2, ΔA_3, где ΔA_i – определитель, полученный из определителя матрицы A заменой i-того столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тогда согласно формулам Крамера получим:

$$x = \frac{\Delta A_1}{\Delta A} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad y = \frac{\Delta A_2}{\Delta A} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad z = \frac{\Delta A_3}{\Delta A} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

4 Комплексные числа

Запись числа z в виде $z = x + i\,y$ называют **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ называется комплексное число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ называется комплексное число $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$.

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ называется комплексное число $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа z имеет вид

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,,$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – **модуль** комплексного числа z,

$$\varphi = arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } z \in \text{I или IV четверти} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } z \in \text{II четверти} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } z \in \text{III четверти} \end{cases}$$

– **аргумент** этого комплексного числа.

Показательная форма записи комплексного числа имеет вид $z = re^{i\,\varphi}$, где равенство $e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$ называется равенством Эйлера.

Задача 21. Вычислить $(z_1 \pm z_2)$ и $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 2i$. И построить на комплексной плоскости числа z_1, z_2, $(z_1 \pm z_2)$.

Решение. Согласно приведённым выше формулам:

$$z_1 + z_2 = (3 - i) + (1 + 2i) = \\ = (3 + 1) + i\,(-1 + 2) = 4 + i,$$

$$z_1 - z_2 = (3 - i) - (1 + 2i) = \\ = (3 - 1) + i\,(-1 - 2) = 2 - 3i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - i) \cdot (1 + 2i) = \\ = \big(3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2\big) + i\,\big(3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1\big) = 5 + 5i.$$

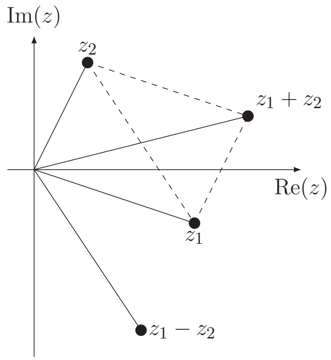

Рис. 1. К задаче 21.

Задача 22. Записать число $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. По условию задачи: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \varphi = arg(z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, тригонометрическая форма записи комплексного числа z имеет вид

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3},$$

а его показательная форма –

$$z = 1 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

Возведение комплексного числа $z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ **в степень** производят по формуле Муавра:

$$w = z^n = r^n\,(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi))\,.$$

Задача 23. Вычислить z^2, если $z = i$.

Решение. По условию задачи: $x = 0$, $y = 1$. Запишем тригонометрическую форму числа z. Для этого найдём:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1,\ arg(z) = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$z = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

а значит

$$w = z^2 = (1)^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)\right) = 1\cdot(\cos(\pi) + i\,\sin(\pi))$$

– тригонометрическая запись числа w. Вычислив значения тригонометрических функций, получим алгебраическую форму записи числа $w = i^2 = -1$.

Задача 24. Вычислить z^4, если $z = 1 - i$.

Решение. Из условия задачи имеем: $x = 1$, $y = -1$. Запишем число z в тригонометрической форме. Для этого найдём:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\ arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4},$$

поскольку число z принадлежит IV четверти. Тогда

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

а значит

$$w = z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 4\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\right) = 4\,(\cos(-\pi) + i\,\sin(-\pi))$$

– тригонометрическая запись числа w. В алгебраической форме получим

$$w = z^4 = (1 - i)^4 = -4.$$

Задача 25. Вычислить $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$.

Решение. На практике частное двух комплексных чисел находят путём умножения числителя и знаменателя на число, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{3+2i} = \frac{(1-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{1-5i}{9+4} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}\,i.$$

Задача 26. Вычислить $\dfrac{1}{i}$.

Решение. По аналогии с предыдущим примером получим:

$$\frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{(i)\cdot(-i)} = \frac{-i}{0+1} = -i.$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству $w^n = z$. Если комплексное число задано в тригонометрической форме $z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$, то при $k = 0,\,1,\,\ldots,\,(n-1)$ получим n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi\,k}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,k}{n}\right)\right).$$

Задача 27. Найти $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. По условию задачи: $z = -1$, значит $r = |z| = 1$, $arg(z) = \pi$, $n = 3$. Согласно приведённой выше формуле получим:

$$w_k = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi\,k}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi + 2\pi\,k}{3}\right)\right), \qquad k = 0,\,1,\,2.$$

$$k = 0 \Longrightarrow \quad w_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$k = 1 \Longrightarrow \quad w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi + 2\pi}{3}\right)\right) = \cos\pi + i\,\sin\pi = -1.$$

$$k = 2 \Longrightarrow \quad w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi + 4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 28. Решите уравнение $z^2 - 4\,z + 8 = 0$ в комплексных числах.

Решение. Найдем дискриминант этого уравнения. Поскольку $i^2 = -1$ (см. задача 23), то

$$D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 8 = 16 - 32 = -16 = (4\,i)^2.$$

Тогда искомые корни

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm 4\,i}{2} = 2 \pm 2\,i.$$

5 Предел и непрерывность

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x), \text{ если } \forall^{\varepsilon>0} \exists^{\delta>0} \forall^{x \neq x_0} \left[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right].$$

Задача 29. Доказать, что

$$\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5.$$

Решение. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon \Longrightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Longrightarrow |2x - 6| < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2\,|x - 3| < \varepsilon \Longrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, для любого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, что для всех $x \neq 2$, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$, а значит

$$\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5.$$

Предел константы равен этой константе: $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов (если эти пределы существуют):

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Задача 30. Вычислить $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \cos(2x) \right).$

Решение. Проверим возможность непосредственного вычисления предела и применим приведённое выше свойство:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \cos(2x) \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(2x) = 1 - (-1) = 2.$$

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов (если эти пределы существуют):

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} \left(c \cdot f(x) \right) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Задача 31. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{4}x^3 - x + 2\right)$.

Решение. Проверим возможность непосредственного вычисления предела и применим приведённые выше равенства

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{4}x^3 - x + 2\right) = \frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 4} x\right)^3 - \left(\lim_{x\to 4} x\right) + 2 = 14.$$

Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Задача 32. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+4}$.

Решение. Проверим возможность непосредственного вычисления предела и применим приведённые выше утверждения

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+4} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x+2\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+4\right)} = \frac{6}{6} = 1.$$

Задача 33. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Решение. При подстановке $x = -2$ в предел получаем неопределённость $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для её раскрытия, разложим числитель и знаменатель на множители и упростим выражение:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+4)}{(x^2-2x+4)} = \frac{1}{6}.$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e,$$

Эквивалентные бесконечно малые функции (при $x \to 0$):

$\sin x \sim x$	$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\log_a(x+1) \sim \dfrac{x}{\ln a}$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$a^x - 1 \sim x\ln a$	$\arcsin x \sim x$
$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$(1+x)^m - 1 \sim mx,\ m>0.$	

Задача 34. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}$.

Решение. При подстановке в предел $x = 0$ получаем неопределённость $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для её раскрытия, заменим приведённые в задаче бесконечно малые при $x \to 0$ функции на эквивалентные им бесконечно малые и упростим выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2\,x} = \frac{1}{2}.$$

Задача 35. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(3x-3)}{x-1}$.

Решение. С помощью замены переменных $t = 3x - 3 \to 0$, перенесем задачу в точку 0 (для того, чтобы заменить одну бесконечно малую на другую, эквивалентную ей)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(3x-3)}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 3\,\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t} = 3\,\lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 3.$$

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует число $M = M(\varepsilon)$ такое, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ также выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е.

$$A = \lim_{x\to\infty} f(x), \text{ если } \forall^{\varepsilon>0}\exists^{M=M(\varepsilon)}\forall^{x}\left[|x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right].$$

Задача 36. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x+4}$.

Решение. Предел числителя и знаменателя при $x \to \infty$ равны ∞. Поэтому получили неопределённость $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для её раскрытия, вынесем наибольшую степень переменной за скобки в числителе и знаменателе и упростим полученное выражение, применяя предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Задача 37. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi\,x}{2}$.

Решение. В данной задаче получили неопределённость $[0\cdot\infty]$. Её раскрытие происходит преобразованием данной неопределенности в одному из приведённых ранее неопределённостей. Произведём замену переменных $t = 1 - x \to 0$ и получим:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi\,x}{2} = [0\cdot\infty] = \lim_{t\to 0} t\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\,t}{2}\right) = \lim_{t\to 0} t\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi\,t}{2} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi\,t}{2}}.$$

Сделаем еще одну замену переменных $z = \dfrac{\pi t}{2} \to 0$, тогда

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{z\to 0}\frac{2z}{\pi\ \operatorname{tg} z} = \frac{2}{\pi}\lim_{z\to 0}\frac{z}{z} = \frac{2}{\pi}.$$

Задача 38. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right)$.

Решение. В данной задаче получили неопределённость $[\infty-\infty]$. Её раскрытие происходит путём умножения и деления на сопряженное выражение. Тогда,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+9x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+9x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+9x}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{\left(\sqrt{x^2+9x}+x\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}+1\right)} = \frac{9}{2}.$$

Задача 39. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение. $A = \lim\limits_{x\to 0+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x}}$.

Рассмотрим отдельно предел показателя степени и произведём в нём замену на эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$ функции

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow A = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Задача 40. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x = [1^\infty]$.

Этот предел будем сводить ко второму замечательному пределу. Для этого сделаем замену переменных $t = \dfrac{2}{x-1} \to 0$. Тогда $x = \dfrac{t+2}{t}$ и получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{t+2}{t}} = \lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{t+2} = \lim_{t\to 0}e^{(2+t)} = e^{\lim\limits_{t\to 0}(2+t)} = e^2.$$

Задача 41. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Определить характер разрыва.

Решение. Функция определена при всех действительных значениях аргумента, за исключением точки $x_0 = 1$, в которой знаменатель обращается в нуль (см. Рис. 2). В этой точке:

1. функция не определена,

2. предел функции слева и справа от точки x_0 равны

$$A_1 = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\ = \lim_{x\to 1-} (x+1) = 2,$$

$$A_2 = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\ = \lim_{x\to 1+} (x+1) = 2.$$

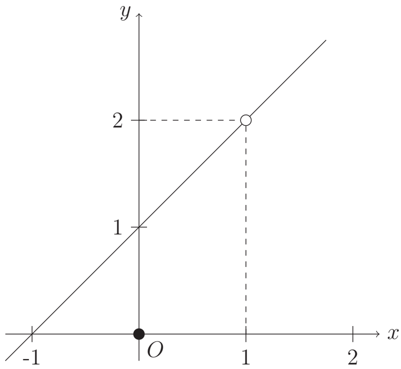

Рис. 2. К задаче 41.

Поскольку $A_1 = A_2$ и функция не определена в точке $x_0 = 1$, то в этой точке функция имеет разрыв 1 рода – устранимый разрыв. Для его устранения достаточно доопределить функцию

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{при } x \neq 1 \\ 2, & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

В результате она стала непрерывной.

Задача 42. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2+1, & \text{при } x \leq 1,5, \\ x-1, & \text{при } x > 1,5. \end{cases}$$

Определить характер разрыва.

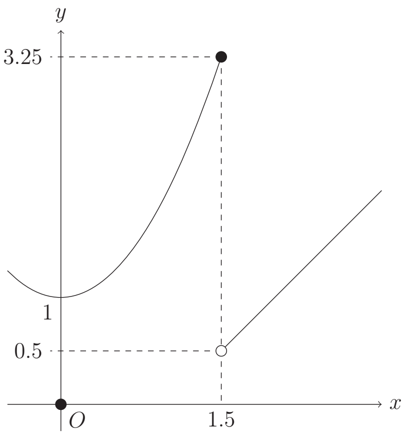

Рис. 3. К задаче 42.

Решение. Функция определена при всех действительных значениях аргумента (см. Рис. 3). В точке $x_0 = 1,5$ получаем:

1. $f(x_0) = 1,5^2 + 1 = 3,25$,

2. предел функции слева и справа от точки x_0 равны

$$A_1 = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to 1,5-} \left(x^2+1\right) = 3,25,$$

$$A_2 = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to 1,5+} (x-1) = 0,5.$$

Поскольку $f(x_0) = A_1 \neq A_2$, то в точке $x_0 = 1,5$ функция имеет разрыв 1 рода – конечный скачок на величину $|A_1 - A_2| = 2,75$.

Задача 43. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{2x-2}{2x-3}$. Определить характер разрыва.

Решение. Функция определена при всех действительных значениях аргумента, за исключением точки $x_0 = 1,5$, в которой знаменатель дроби обращается в ноль (см. Рис. 4). В этой точке:

1. функция не определена,
2. предел функции слева и справа от точки x_0 равны

$$A_1 = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to 1,5-} \frac{2x-2}{2x-3} = -\infty,$$

$$A_2 = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to 1,5+} \frac{2x-2}{2x-3} = +\infty.$$

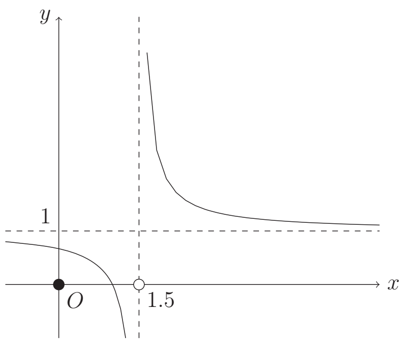

Рис. 4. К задаче 43.

Поскольку A_1 и A_2 бесконечны, то в точке $x_0 = 1,5$ функция имеет разрыв второго рода.

Вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, заданная уравнением $x = a$, если верно хотя бы одно из равенств

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \infty.$$

Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения x_0, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно в этих точках функция имеет разрыва второго рода.

Наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, заданная уравнением $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} (y - kx)\,.$$

Задача 44. Найти все асимптоты графика функции $y = \dfrac{1+x}{x}$.

Решение. 1. Заданная функция определена при всех действительных значениях аргумента, кроме $x_0 = 0$. В этой точке:

а) функция не определена,

б) пределы функции слева и справа от точки x_0 равны

$$A_1 = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1+x}{x} = -\infty, \quad A_2 = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1+x}{x} = +\infty.$$

Поскольку A_1 и A_2 бесконечны, то в точке $x_0 = 0$ функция имеет разрыв второго рода. Следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика функции.

2. Найдём асимптоты функции при $x \to +\infty$: $y = k\,x + b$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x^2} = 0, \;\; b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = 1.$$

Значит, при $x \to +\infty$ функция имеет только горизонтальную асимптоту $y = 1$.

3. Найдём асимптоты функции при $x \to -\infty$: $y = k\,x + b$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{x^2} = 0,\ b = \lim_{x\to-\infty} (y - kx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{x} = 1.$$

Значит, при $x \to -\infty$ функция имеет ту же горизонтальную асимптоту $y = 1$.

6 Производная и дифференциал функции одной переменной

Задача 45. Найти производную функции $y = C$ $(C = const)$, применяя понятия приращение функции и аргумента.

Решение. Аргументу x придадим приращение Δx и найдём соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0 \implies C' = 0.$$

Задача 46. Найти производную функции $y = x$, применяя понятия приращение функции и аргумента.

Решение. Аргументу x придадим приращение Δx и найдём соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1 \implies x' = 1.$$

Задача 47. Найти производную функции $y = 5\,x^2$, применяя понятия приращение функции и аргумента.

Решение. Аргументу x придадим приращение Δx и найдём соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 5\,\left(x + \Delta x\right)^2 - 5\,x^2 = 10\,x\Delta x + 5\,\left(\Delta x\right)^2.$$

По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (10\,x + 5\,\Delta x) = 10\,x \implies \left(5\,x^2\right)' = 10\,x.$$

Для дифференцируемых на некотором интервале $(a;\, b)$ функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ выполняются правила:

$$(C\cdot u)' = C\cdot u',\ \ (u \pm v)' = u' + v',\ \ (u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v',\ \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

Если функция $u = u(x)$ имеет производную u'_x в точке x_0, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет производную y'_x в точке x_0, причём

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;\, b)$ и имеет неравную нулю производную $f'_x \neq 0$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ в соответствующей точке также имеет производную φ'_y, причём

$$\varphi'_y = \frac{1}{f'_x}.$$

Таблица производных элементарных функций.

$(c)' = 0 \quad (c = \mathrm{const})$	$(x^n)' = n\, x^{n-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Задача 48. Найти производную функции $y = x^3 - 2x + 4$.

Решение. На основании табличных формул и правил дифференцирования имеем

$$y' = \left(x^3 - 2x + 4\right)' = \left(x^3\right)' - 2\,(x)' + 4' = 3x^2 - 2.$$

Задача 49. Найти производную функции $y = \sqrt[5]{x^5 - 5x}$.

Решение.

$$y' = \left(\left(x^5 - 5x\right)^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}\cdot\left(x^5 - 5x\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(x^5 - 5x\right)' = \frac{5x^4 - 5}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^5 - 5x\right)^4}} = \frac{x^4 - 1}{\sqrt[5]{\left(x^5 - 5x\right)^4}}.$$

Задача 50. Найти производную функции $y = 5^{x - 4x^2}$.

Решение. $y' = \left(5^{x-4x^2}\right)' = 5^{x-4x^2}\cdot \ln 5\left(x - 4x^2\right)' = 5^{x-4x^2}\cdot(\ln 5)\cdot(1 - 8x)\,.$

Задача 51. Найти производную функции $y = \ln\left(3x^4 - 5x^2 - 4x + 1\right)$.

Решение.

$$y' = \Big(\ln\left(3x^4 - 5x^2 - 4x + 1\right)\Big)' = \frac{\left(3x^4 - 5x^2 - 4x + 1\right)'}{\left(3x^4 - 5x^2 - 4x + 1\right)} = \frac{12x^3 - 10x - 4}{3x^4 - 5x^2 - 4x + 1}.$$

Задача 52. Найти производную функции $y = \ln\sqrt{4x + 1}$.

Решение.

$$y' = \left(\ln\sqrt{4x+1}\right)' = \frac{\left(\sqrt{4x+1}\right)'}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{\sqrt{4x+1}} \cdot \frac{(4x+1)'}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{4}{2\,(4x+1)} = \frac{2}{(4x+1)}.$$

Задача 53. Найти производную функции $y = \sin\left(x^2+1\right)$.

Решение. $y' = \left(\sin\left(x^2+1\right)\right)' = \cos\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)' = 2x\cos\left(x^2+1\right)$.

Задача 54. Найти производную функции $y = x \cdot \operatorname{arctg}(x+1)$.

Решение. $y' = (x\cdot\operatorname{arctg}(x+1))' = (x)'\cdot\operatorname{arctg}(x+1) + x\cdot(\operatorname{arctg}(x+1))' =$

$$= 1\cdot\operatorname{arctg}(x+1) + x\cdot\frac{(x+1)'}{1+(x+1)^2} = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x}{2+2x+x^2}.$$

Задача 55. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Решение. $y' = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \dfrac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right) - \left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} =$

$$= \frac{2\,x\left(x^2-1\right) - 2\,x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{4\,x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Задача 56. Найти производную функции $y(x)$, заданной неявно $x^2+y^2=9$.

Решение. Продифференцируем это уравнение по переменной x, рассматривая при этом y как функцию переменной x:

$$\left(x^2+y^2\right)' = (-9)' \implies 2\,x + 2\,y\,y' = 0 \implies x + y\,y' = 0.$$

Разрешим полученное равенство относительно y':

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Задача 57. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos(2t). \end{cases}$$

Решение. Найдём производные каждой функции по переменной t:

$$x' = \cos t, \qquad y' = -2\sin(2t).$$

Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2\sin(2t)}{\cos t} = -4\sin t = -4x.$$

Задача 58. Найти производную функции $y = x^{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Это показательно-степенная функция, поэтому для нахождения её производной прологарифмируем её по основанию e

$$\ln y = \ln\left(x^{\sqrt{x+1}}\right) \implies \ln y = \sqrt{x+1}\ln x.$$

А затем продифференцируем полученное равенство

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot\ln x + \sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{x} \implies \frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x},$$

и умножим его на y

$$y' = y\cdot\Big(\frac{\ln x}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x}\Big) \implies y' = \frac{x^{\sqrt{x+1}}\ln x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\cdot x^{\sqrt{x+1}-1}.$$

Задача 59. Найти производную функции $y = \left(x^2-1\right)^{\left(x^2+1\right)}$.

Решение. Это показательно-степенная функция, поэтому прологарифмируем её по основанию e

$$\ln y = \ln\Big(\left(x^2-1\right)^{\left(x^2+1\right)}\Big) \implies \ln y = \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2-1\right).$$

А затем продифференцируем полученное равенство :

$$\frac{y'}{y} = 2\,x\ln\left(x^2-1\right) + \left(x^2+1\right)\frac{2\,x}{x^2-1} \implies \frac{y'}{y} = 2\,x\ln\left(x^2-1\right) + \frac{2\,x\ \left(x^2+1\right)}{x^2-1},$$

и умножим его на y:

$$y' = y\cdot\Big(2\,x\ln\left(x^2-1\right) + \frac{2\,x\ \left(x^2+1\right)}{x^2-1}\Big),$$

$$y' = \left(x^2-1\right)^{\left(x^2+1\right)}\cdot 2x\cdot\ln\left(x^2-1\right) + \left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)^{x^2}\cdot 2x.$$

Задача 60. Найти производную 4-го порядка функции $y = x^7+x^5+x^3+x$.

Решение. Пользуясь тем, что $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, имеем

$y' = \left(x^7+x^5+x^3+x\right)' = 7x^6+5x^4+3x^2+1,$

$y'' = (y')' = \left(7x^6+5x^4+3x^2+1\right)' = 42x^5+20x^3+6x,$

$y''' = (y'')' = \left(42x^5+20x^3+6x\right)' = 210x^4+60x^2+6,$

$y^{(4)} = (y''')' = \left(210x^4+60x^2+6\right)' = 840x^3+120x.$

Задача 61. Найти третью производную функции заданной в задаче 56.

Решение. Итак, первая производная функции $x^2+y^2=9$ найдена в задаче 56:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Продифференцируем обе части этого равенства по переменной x:

$$(y')' = \left(-\frac{x}{y}\right) \implies y'' = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2}.$$

Подставим найденное ранее выражение для y':

$$y'' = -\frac{y - x\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} \implies y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}, \quad \implies \quad y'' = -\frac{9}{y^3}.$$

Продифференцируем ещё раз обе части этого равенства по x:

$$(y'')' = \left(-\frac{9}{y^3}\right)' \implies y''' = \frac{27\cdot y'}{y^4} \implies y''' = -\frac{27\cdot x}{y^5}.$$

Задача 62. Найти вторую производную y''_{xx} функции $y(x)$, заданной параметрически $x = \sin t$, $y = \cos(2t)$.

Решение. Итак, первая производная заданной функции по переменной x найдена в задаче 57:

$$y'_x = -4\sin t.$$

Найдём её производную по переменной t:

$$(y'_x)'_t = -4\cos t,$$

тогда, поскольку $x'_t = \cos t$, то

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-4\cos t}{\cos t} = -4.$$

Задача 63. Найти дифференциал функции $y = x^3 + 1 - \cos(2-x)$.

Решение. По определению дифференциала $dy = y^{prime}\,dx$. Следовательно, сначала найдём производную этой функции

$$y' = \big(x^3+1-\cos(2-x)\big)' = 3x^2 + \sin(2-x)\cdot(2-x)' = 3x^2 - \sin(2-x),$$

а затем выпишем её дифференциал

$$dy = \big(3x^2 - \sin(2-x)\big)\,dx.$$

7 Приложения производной

Если значение функции $y(x)$ в точке x_0 известно и $|x - x_0|$ мало, то для приближённого вычисления значения функции в точке x можно применять равенство

$$y(x) \approx y(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{1}$$

Задача 64. Вычислить приближённо $\sin(0,05)$.

Решение. По условию задачи: $f(x) = \sin x$, $x = 0,05$, $x_0 = 0$, следовательно

$$\Delta x = x = x_0 = 0,05, \quad f(x_0) = \sin 0 = 0, \quad f'(x) = \cos x, \quad f'(x_0) = \cos 0 = 1.$$

Следовательно, подставив эти данные в формулу (1), получим

$$\sin(0,05) \approx \sin 0 + \cos 0\cdot\Delta x = 0 + 1\cdot 0,05 = 0,05.$$

Задача 65. Вычислить приближённо: а) $\sqrt{24}$, б) $\sqrt{24,98}$.

Решение. а) По условию задачи: $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 24$, $x_0 = 25$, следовательно

$$\Delta x = x - x_0 = -1, \quad f(x_0) = \sqrt{25} = 5, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0,1.$$

Следовательно, подставив эти данные в формулу (1), получим

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot \Delta x = 5 + 0,1 \cdot (-1) = 5 - 0,1 = 4,9.$$

б) По условию задачи: $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 24,98$, $x_0 = 25$, следовательно

$$\Delta x = x - x_0 = -0,02, \quad f(x_0) = \sqrt{25} = 5, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0,1.$$

Следовательно, подставив эти данные в формулу (1), получим

$$\sqrt{24,98} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot \Delta x = 5 + 0,1 \cdot (-0,02) = 5 - 0,002 = 4,998.$$

Правило Лопиталя для неопределённости $\left[\dfrac{0}{0}\right]$: Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ и $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Задача 66. Найти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12}$.

Решение. На основании приведённого выше правила имеем

$$\lim_{x\to 2} \frac{8 - 2x^2}{x^2 + 4x - 12} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{\left(8 - 2x^2\right)'}{\left(x^2 + 4x - 12\right)'} = \lim_{x\to 2} \frac{-4x}{2x + 4} = -\frac{8}{8} = -1.$$

Правило Лопиталя для неопределённости $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$: Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0) и в этой окрестности $f(x_0) = \varphi(x_0) = \infty$, $\varphi'(x) \neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Задача 67. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 7x}$.

Решение. На основании приведённого выше правила имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{ctg}7x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{ctg}2x)'}{(\operatorname{ctg}7x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{\sin^2 2x}}{-\dfrac{7}{\sin^2 7x}}=\frac{2}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cos 7x}{\sin 2x\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos^2 7x-7\sin^2 7x}{2\cos^2 2x-2\sin^2 2x}=\frac{7}{2}.$$

Задача 68. Исследовать на монотонность функцию $y=\dfrac{1}{3}x^3-6x^2+11x-6$.

Решение. Данная функция определена при всех действительных значениях аргумента.

Найдём её производную

$$y'=x^2-12x+11$$

и приравняв её к нулю, найдём её нули

$$x^2-12x+11=0,$$

$$x_1=1,\quad x_2=1.$$

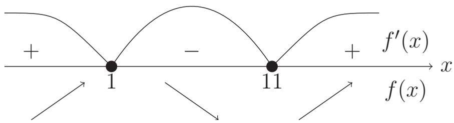

Рис. 5. К задаче 68.

Проверим знаки производной на полученных промежутках (см. Рис. 5). При $x\in(-\infty;\,1)\cup(11;\,+\infty)$ $y'>0$, значит функция возрастает на этом интервале. При $x\in(1;\,11)$ $y'<0$, значит функция убывает на этом интервале.

Задача 69. Исследовать на экстремум функцию $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Решение. Данная функция определена при всех действительных значениях аргумента кроме $x=\pm1$, т.е. $x\in(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,1)\cup(1;\,\infty)$.

Найдём её производную:

$$y'=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

и нули этой производной

$$-\frac{2x}{(x^2-1)^2}=0\quad\Longrightarrow\quad x=0,\ x\neq\pm1.$$

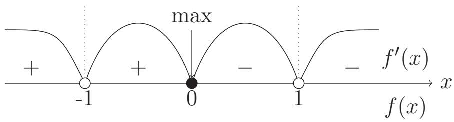

Рис. 6. К задаче 69.

Проверим знаки производной на полученных промежутках (см. Рис. 6). При $x=0$ функция определена и её производная меняет знак с «+» на «-», следовательно, $x=0$ – точка максимума заданной функции.

Задача 70. На отрезке $\left[-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}\right]$ найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+2x^2+x-6$.

Решение. Найдём критические точки функции на интервале $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Для этого найдём производную данной функции:

$$y' = 3x^2 + 4x + 1$$

и, решив уравнение $y' = 0$, найдём нули первой производной:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_1 = -1 \notin \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right],\ x_2 = -\frac{1}{3} \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$$

Значит на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ имеется только одна критическая точка $x = -\frac{1}{3}$.

Вычислим значения функции в этой точке и на концах отрезка

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -6\frac{4}{27},\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -6\frac{1}{8},\ f\left(\frac{1}{2}\right) - 4\frac{7}{8}.$$

Среди всех вычисленных значений функции выберем наибольшее и наименьшее

$$y_{\text{наим}} = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -6\frac{4}{27},\ y_{\text{наиб}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -4\frac{7}{8}.$$

Задача 71. Найти точки перегиба и промежутки выпуклости функции

$$y = x^3 + 2x^2 + x - 6$$

Решение. Найдём первую и вторую производные данной функции:

$$y' = 3x^2 + 4x + 1,\ y'' = 6x + 4.$$

Найдём нули второй производной этой функции

$$6x + 4 = 0 \implies x = -\frac{2}{3}.$$

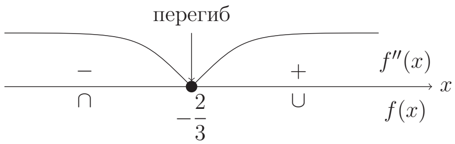

Рис. 7. К задаче 71.

Исследуем знак второй производной y'' слева и справа от найденной точки (см. Рис. 7). При $x \in \left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$ $y'' < 0$, значит график функции выпуклый вверх, при $x \in \left(-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$ $y'' > 0$, значит график функции выпуклый вниз.

Поскольку в точке $x = -\frac{2}{3}$ функция определена и её вторая производная меняет знак, то $x = -\frac{2}{3}$ – точка перегиба.

Задача 72. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{1 - x^2}$ и построить её график.

Решение. Область определения функции. Функция не определена в точках $x = \pm 1$, т.е.

$$x \in (-\infty;\, -1) \cup (-1;\, 1) \cup (1;\, +\infty)\,.$$

Точки пересечения графика с осями координат. Точки пересечения с осью OX определим из равенства $y = 0$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = 0, \\ 1 - x^2 \neq 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2,\, x_2 = 1 \\ x \neq \pm 1, \end{cases} \implies x = -2.$$

Точки пересечения с осью OY определим при $x = 0$, т.е. $y(0) = -2$.

Итак, с осями координат данная функция пересекается в точках $A\,(-2;\, 0)$, $B\,(0;\, -2)\,$.

Интервалы знакопостоянства функции. Проверим знаки функции на всех полученных промежутках (см. Рис. 8). Получили, что функция лежит выше оси OX при $x \in (-2;\, -1)\,$, и ниже оси OX при $x \in (-\infty;\, -2) \cup (-1;\, 1) \cup (1;\, +\infty)\,$.

Чётность.

$$f(-x) - f(x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 2}{1 - (-x)^2} - \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = \frac{-2x}{1 - x^2} \neq 0 \implies f(-x) \neq f(x),$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 2}{1 - (-x)^2} + \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = \frac{2x^2 - 4}{1 - x^2} \neq 0 \implies f(-x) \neq -f(x).$$

Поскольку при всех допустимых значениях аргумента $f(-x) \neq \pm f(x)$, то функция не является ни чётной, ни нечётной, следовательно её график не симметричен.

Периодичность. Если данная функция периодическая, то для неё при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x) \implies \frac{(x+T)^2 + (x+T) - 2}{1 - (x+T)^2} = \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2},$$

$$\left(x^2 + x(1+2T) + (T^2 + T - 2)\right)\left(1 - x^2\right) = \left(x^2 + x - 2\right)\left((1 - T^2) - 2Tx - x^2\right),$$

$$\begin{cases} 3 - T^2 - T = 3 - T^2 - 2T \\ 1 + 2T = 1 + 4T - T^2 \\ T^2 + T - 2 = 2T^2 - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} T = 0 \\ T^2 - 2T = 0 \\ T^2 - T = 0 \end{cases} \implies T = 0.$$

Следовательно, функция не является периодической.

Асимптоты. 1. Поскольку в точке $x = -1$ знаменатель рассматриваемой функции обращается в нуль, то функция в этой точке не определена. Кроме того,

$$A_1 = \lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2} = -\lim_{x \to -1-} \frac{x + 2}{1 + x} = \left[\frac{1}{0}\right] = -\infty,$$

$$A_2 = \lim_{x \to -1+} f(x) = -\lim_{x \to -1+} \frac{x + 2}{1 + x} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty,$$

Поскольку пределы A_1 и A_2 бесконечны, то в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода, а значит прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой графика этой функции.

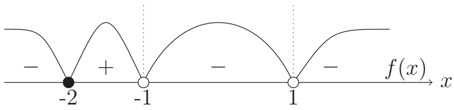

Рис. 8. К задаче 72: Знаки функции.

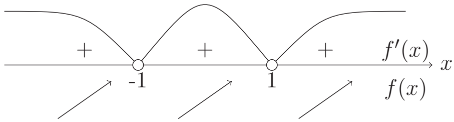

Рис. 9. К задаче 72: Знаки первой производной функции.

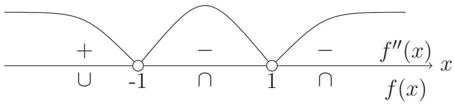

Рис. 10. К задаче 72: Знаки второй производной функции.

2. Поскольку в точке $x = 1$ знаменатель рассматриваемой функции обращается в нуль, то функция в этой точке не определена. Кроме того,

$$A_1 = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2+x-2}{1-x^2} = \\ = -\lim_{x\to 1-} \frac{x+2}{1+x} = \frac{3}{2},$$

$$A_2 = \lim_{x\to 1+} f(x) = -\lim_{x\to 1+} \frac{x+2}{1+x} = \frac{3}{2}$$

Поскольку пределы $A_1 = A_2$, то в точке $x = 1$ функция имеет разрыв первого рода – устранимый разрыв. Асимптоту эта точка не даёт.

3. Найдём асимптоты функции при $x \to +\infty$: $y = k\,x + b$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x\,(1-x^2)} = \\ = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y-kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{1-x^2} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{1+x} = -1.$$

Значит при $x \to +\infty$ функция имеет горизонтальную асимптоту $y = -1$.

4. Найдём асимптоты функции при $x \to -\infty$: $y = k\,x + b$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x\,(1-x^2)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x+x^2} = 0,$$
$$b = \lim_{x\to-\infty} (y-kx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{1-x^2} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{1+x} = -1.$$

Значит при $x \to -\infty$ функция имеет ту же горизонтальную асимптоту $y = -1$.

Интервалы монотонности и экстремумы функции. Найдём производную заданной функции

$$y' = \left(\frac{x^2+x-2}{1-x^2}\right)' = \frac{(2x+1)\left(1-x^2\right) - \left(x^2+x-2\right)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Она не обращается в нуль ни при каком значении x, значит у неё нет экстремумов.

Поставим недопустимые значения аргумента на числовую прямую и проверим знаки производной на полученных промежутках (см. Рис. 9). Поскольку $y' > 0$ на всей числовой прямой, за исключением точек $x = \pm 1$, то функция возрастает при всех допустимых значениях x, т.е. при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции. Найдём вторую производную заданной функции:

$$y'' = \left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

Она не обращается в нуль ни при каком значении x, значит график функции не имеет точек перегиба.

Поставим недопустимые значения аргумента на числовую прямую и проверим знаки второй производной на полученных промежутках (см. Рис. 10). Поскольку $y'' > 0$ при $x \in (-\infty; -1)$, то график функции выпуклый вниз; $y'' < 0$ при $x \in (-1; 1) \cup (1; +\infty)$, значит график функции выпуклый вверх.

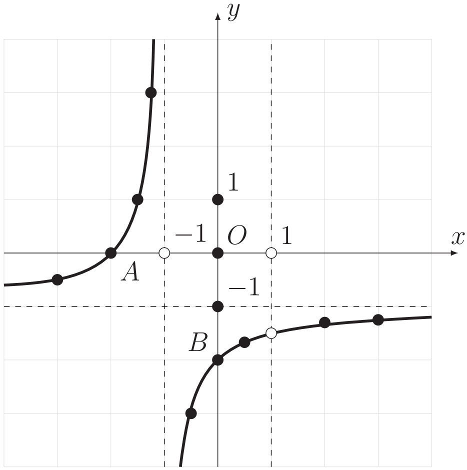

Рис. 11. К задаче 72.

Дополнительные точки.

x	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	1	3	-3	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$

График функции приведён на Рис. 11.

8 Неопределённый интеграл

Первообразной функции $y = f(x)$ называется функция $F(x)$, удовлетворяющая условию $f(x) = F'(x)$.

Таблица основных интегралов

$$\int 0\,dx = C \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Задача 73. Найти функцию, первообразная которой $F(x) = \cos x$.

Решение. Поскольку $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x$, то $F(x) = \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = -\sin x$. Обе функции определены на всей числовой прямой.

Задача 74. Найти функцию, первообразная которой $F(x) = x^2$.

Решение. Поскольку $F'(x) = (x^2)' = -2\,x$, то $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2\,x$. Обе функции определены на всей числовой прямой.

Задача 75. Найти $\displaystyle\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x\sqrt{x}}\right) dx$.

Решение. $\displaystyle\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(\frac{1}{3}x^2 - 3x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{1}{3}\int x^2\,dx - 3\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C_1 - 3\cdot\frac{x^{-\dfrac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C_2 = \frac{1}{9}\,x^3 + \frac{6}{\sqrt{x}} + C.$$

Задача 76. Найти $\displaystyle\int \frac{x^3\,\cos x + 7x}{x^3}\,dx$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{x^3\,\cos x + 7x}{x^3}\,dx = \int \left(\cos x + 7\,x^{-2}\right)\,dx =$

$$= \int \cos x\,dx + 7\int x^{-2}\,dx = \sin x + C_1 + 7\frac{x^{-1}}{(-1)} + C_2 = \sin x - \frac{7}{x} + C.$$

Задача 77. Найти $\displaystyle\int (3x-17)^{33}\,dx$

Решение. Сделаем замену переменных $t = 3x - 17$, тогда $dt = 3\,dx$ и

$$\int (3x-17)^{33}\,dx = \frac{1}{3}\int t^{33}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{34}}{34} + C = \frac{1}{102}\,(3x-17)^{34} + C.$$

Задача 78. Найти $\displaystyle\int \sin(5x+7)\,dx$

Решение. Сделаем замену переменных $t = 5x + 7$, тогда $dt = 5\,dx$ и

$$\int \sin(5x+7)\,dx = \frac{1}{5}\int \sin t\,dt = \frac{1}{5}\,(-\cos t) + C = -\frac{1}{5}\,\cos(5x+7) + C.$$

Задача 79. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x)^3}$.

Решение. Сделаем замену переменных $t = 1 + 2x$, тогда $dt = 2\,dx$ и

$$\int \frac{dx}{(1+2x)^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{(-2)} + C = -\frac{1}{4t^2} + C = -\frac{1}{4\,(1+2x)^2} + C.$$

Задача 80. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\,\cos^2(\operatorname{arctg} x)}$.

Решение. Сделаем замену переменных $t = \operatorname{arctg} x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{x^2+1}$ и

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\,\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + C = x + C.$$

Задача 81. Найти $\int \sin^2(mx)\,dx$.

Решение. Понизим степень тригонометрической функции в заданном интеграле

$$\int \sin^2(mx)\,dx = \int \frac{1}{2}\left(1-\cos(2mx)\right)\,dx = \\ = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos(2mx)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + C_1 - \int \cos(2mx)\,dx\right).$$

В полученном интеграле заменим переменные $t = 2mx$, тогда $dt = 2m\,dx$ и

$$\int \cos(2mx)\,dx = \frac{1}{2m}\int \cos t\,dt = = \frac{1}{2m}\sin t + C_2 = \frac{1}{2m}\cdot\sin(2mx) + C_2.$$

А значит, исходный интеграл равен

$$\int \sin^2(mx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + C_1 - \frac{1}{2m}\cdot\sin(2mx) - C_2\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\cdot\sin(2mx) + C.$$

Теорема об интегрировании по частям. Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве X и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)\cdot u'(x)$. Тогда на множестве X существует первообразная и для функции $u(x)\cdot v'(x)$, причём справедлива формула

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{2}$$

Задача 82. Найти $\int x\ln x\,dx$.

Решение. В рассматриваемом интеграле интегрирование по частям будем проводить так (поскольку при дифференцировании логарифмической функции появляется многочлен):

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

По формуле (2) получим:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \\ = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot x^2\ln x - \frac{1}{4}\cdot x^2 + C.$$

Задача 83. Найти $\int x\sin x\,dx$.

Решение. В рассматриваемом интеграле интегрирование по частям будем проводить так (поскольку при дифференцировании степень многочлена уменьшается):

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x. \end{cases}$$

Тогда по формуле (2) получим:

$$\int x\,\sin x\,dx = -x\cos x - \int (-\cos x)\;dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Задача 84. Найти $\int e^x\,\sin 2x\,dx$.

Решение. В рассматриваемом интеграле интегрирование по частям будем проводить так:

$$\begin{cases} u(x) = \sin 2x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 2\cos 2x \\ v(x) = e^x. \end{cases}$$

Тогда по формуле (2) получим:

$$\int e^x\,\sin 2x\,dx = e^x\,\sin 2x - 2\int e^x\,\cos 2x + C_1.$$

Полученный интеграл аналогичным образом разбъём на части:

$$\begin{cases} u(x) = \cos 2x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = -2\sin 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

и снова, применив формулу (2), получим:

$$\int e^x\,\cos 2x\,dx = e^x\,\cos 2x - (-2)\int e^x\,\sin 2x + C_2.$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int e^x\,\sin 2x\,dx = e^x\,\sin 2x - 2\left(e^x\,\cos 2x + 2\int e^x\,\sin 2x + C_2\right) + C_1 =$$
$$= e^x\,\sin 2x - 2\,e^x\,\cos 2x - 4\int e^x\,\sin 2x + C^*.$$

$$5\int e^x\,\sin 2x\,dx = e^x\left(\sin 2x - 2\,\cos 2x\right) + C^*,$$

тогда

$$\int e^x\,\sin 2x\,dx = \frac{1}{5}\,e^x\left(\sin 2x - 2\,\cos 2x\right) + C.$$

Этот пример показал, что в некоторых задачах интегрирование по частям можно проводить не один раз.

Задача 85. Разложить рациональную дробь $\dfrac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4}{(x-1)^4}$ на сумму простейших рациональных дробей.

Решение. Поскольку степень многочлена в числителе равна степени многочлена в знаменателе, то сначала выделим «целую часть» и представим полученную дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{x^4-4x^3+7x^2+4}{(x-1)^4}=1+\frac{x^2+4x+3}{(x-1)^4}=1+\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_4}{(x-1)^4}.$$

Приведём дроби в правой части равенства к общему знаменателю и упростим

$$\frac{x^2+4x+3}{(x-1)^4}=\frac{A_1(x-1)^3+A_2(x-1)^2+A_3(x-1)+A_4}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{A_1x^3+x^2\left(-3A_1+A_2\right)+x\left(3A_1-2A_2+A_3\right)+\left(-A_1+A_2-A_3+A_4\right)}{(x-1)^4}$$

Получили две равные дроби с одинаковыми знаменателями, значит, и их числители равны. Это два равных многочлена одинаковой степени, значит, сравнивая в них коэффициенты при x^3, x^2, x и свободные члены, приходим к системе четырёх уравнений с четырьмя неизвестными A_1, A_2, A_3, A_4.

$$\begin{array}{c|}x^3\\x^2\\x\\x^0\end{array}\quad\left\{\begin{array}{rcl}A_1&=&0\\-3A_1+A_2&=&1\\3A_1-2A_2+A_3&=&4\\-A_1+A_2-A_3+A_4&=&3\end{array}\right.\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{array}{rcl}A_1&=&0\\A_2&=&1\\A_3&=&6\\A_4&=&8\end{array}\right.$$

Таким образом, исходная дробно-рациональная функция примет вид

$$\frac{x^4-4x^3+7x^2+4}{(x-1)^4}=1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{6}{(x-1)^3}+\frac{8}{(x-1)^4}.$$

Задача 86. Найти $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}\,dx$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей (как указано выше)

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{(x^2+1)}.$$

Тогда исходный интеграл разложим в сумму интегралов и получим:

$$\int\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}\,dx=-\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx=$$
$$=-\int\frac{dx}{x-1}+3\int(x-1)^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{(x^2+1)}\,dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x+C.$$

Задача 87. Найти $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей и проинтегрируем:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right) =$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Задача 88. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$

Решение. Интеграл такой функции всегда может быть рационализирован с помощью так называемой универсальной подстановки:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \implies x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx=\frac{2\,dt}{t^2+1}\ \sin x=\frac{2\,t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Сделав универсальную подстановку, получим

$$\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5} = \int \frac{2\,dt}{(t^2+1)\left(\dfrac{8\,t}{1+t^2}+\dfrac{3-3t^2}{1+t^2}+5\right)} =$$
$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2}+C.$$

Задача 89. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

Решение. Сделаем универсальную подстановку (см. задачу 88) и получим

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{2\,dt}{(t^2+1)\left(\dfrac{2\,t}{(1+t^2)}\right)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Задача 90. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

Решение. Сделаем универсальную подстановку(см. задачу 88) и, применив результат задачи 87, получим

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{2\,dt}{(t^2+1)\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=-2\cdot\frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$
$$=-\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}\right|+C=-\ln\left|\frac{\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}\right|+C=$$
$$=-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=-\ln\left|\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Задача 91. Найти $\int \sin^2 x\, \cos^2 x\, dx$.

Решение. При интегрировании функции $R = \sin^m x \cos^n x$ в случае, когда числа m и n являются чётными (неотрицательными), функцию R можно преобразовать по формулам понижения степени:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos(2x), \qquad 2\cos^2 x = 1 + \cos(2x), \qquad 2\sin x \cos x = \sin(2x).$$

В нашей задаче, $m = n = 2$ – чётные, поэтому

$$\int \sin^2 x\, \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Задача 92. Найти $\int \sin^3 x\, \cos^3 x\, dx$.

Решение. При интегрировании функции $R = \sin^m x \cos^n x$ в случае, когда:

1) m – нечётно, тогда удобно сделать замену $t = \sin x$,;

2) n – нечётно, тогда удобно сделать замену $t = \cos x$,;

3) нечётными являются оба числа m и n, тогда можно выбрать любую из приведённых выше замен.

В нашем случае, сделаем замену переменных $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x\, dx$ и

$$\int \sin^3 x\, \cos^3 x\, dx = \int \sin^3 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x\, dx = \int t^3 \left(1 - t^2\right) dt =$$
$$= \int t^3\, dt - \int t^5\, dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Задача 93. Найти $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

Оба полученные интеграла найдем с помощью замены переменных $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\, dx$ и

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{-dt}{t^3} = \frac{1}{2t^2} + C_1 = \frac{1}{2\cos^2 x} + C_1,$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C_2 = -\ln|\cos(x)| + C_2.$$

Тогда исходный интеграл равен

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos(x)| + C.$$

Задача 94. Найти $\int \sin 3x\, \cos 5x\, dx$.

Решение. Интеграл такой функции найдём выполнив одно из преобразований:

$$\sin\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\, \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$$

$$\int \sin 3x\, \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin(-2x)\right)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 8x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{16}\, \cos 8x + \frac{1}{4}\, \cos 2x + C.$$

Задача 95. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$.

Решение. В нашей задаче интегрируется функция

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}} = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Если в подкоренном выражении $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ коэффициенты удовлетворяют неравенству $ad - bc \neq 0$, то для рационализации этого выражения весь корень принимают равным некоторой переменной. В остальных случаях, обычно, помогает элементарное преобразование подкоренного выражения. Заменим

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \Longrightarrow x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \Longrightarrow dx = -\frac{6t^2\, dt}{(t^3-1)^2} \text{ и } (x+1) = \frac{2t^3}{t^3-1},$$

тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}} = -\int t \cdot \frac{(t^3-1)\, 6t^2\, dt}{2t^3(t^3-1)^2} = -3\int \frac{dt}{t^3-1} =$$

$$= \int \left(\frac{t+2}{t^2+t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\, dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} - \int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+t+1\right)}{t^2+t+1} + \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \ln|t-1| + C = \ldots$$

Осталось сделать обратную замену переменных.

Задача 96. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Сделаем замену переменных $x = a\sin t$, тогда

$$t = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t, \quad dx = a\cos t\,dt.$$

Исходный интеграл примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos t\,dt}{a\cos t} = \int dt = t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Задача 97. Найти $\displaystyle\int \frac{\sqrt{7+x^2} + x\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{49-x^4}}\,dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sqrt{7+x^2} + x\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{49-x^4}} = \frac{\sqrt{7+x^2}}{\sqrt{49-x^4}} + \frac{x\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{49-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{7-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{7+x^2}},$$

тогда исходный интеграл примет вид

$$\int \frac{\sqrt{7+x^2} + x\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{49-x^4}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{7+x^2}}.$$

Первый из полученных интегралов найдём с помощью формулы, полученной в задаче 96

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C_1.$$

Для нахождения второго из полученных интегралов, сделаем в нём замену переменных $t = 7 + x^2$, тогда $dt = (7+x^2)'\,dx = 2x\,dx$ и получим

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7+x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C_2 = \sqrt{t} + C_2 = \sqrt{7+x^2} + C_2.$$

Следовательно, исходный интеграл равен

$$\int \frac{\sqrt{7+x^2} + x\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{49-x^4}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C_1 + \sqrt{7+x^2} + C_2 = \\ = \arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + \sqrt{7+x^2} + C.$$

Задача 98. Найти $\displaystyle\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$.

Решение. Рассмотрим подынтегральную функцию

$$\sqrt{5-4x-x^2} = \sqrt{9-(x^2+4x+4)} = \sqrt{9-(x+2)^2}.$$

Сделаем замену переменных $x + 2 = 3\sin t$, тогда

$$t = \arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right), \quad \sqrt{5-4x-x^2} = 3\cos t, \quad dx = 3\cos t\,dt.$$

Исходный интеграл примет вид

$$\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx = \int 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)\ dt =$$
$$= \frac{9}{2}\int dt + \frac{9}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{9}{2}\cdot t + \frac{9}{4}\sin 2t + C =$$
$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) + \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right)\right) + C =$$
$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) + \left(\frac{x+2}{2}\right)\sqrt{5-4x-x^2} + C.$$

Задача 99. Найти $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

Решение. Для рационализации такого интеграла сделаем замену переменных

$$x = \frac{a}{\sin t} \implies t = \arcsin\frac{a}{x},\ \sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{ctg} t,\ dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\,dt.$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int a\operatorname{ctg} t\left(-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\,dt\right) = -a^2\int \frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}\,dt = -a^2\int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}\ \sin t\,dt.$$

Сделаем ещё одну замену переменных $z = \cos t$, тогда $dz = -\sin t\,dt$ и получим дробно-рациональную функцию, которую представим в виде суммы простейших дробей и проинтегрируем

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = a^2\int \frac{z^2}{(1-z^2)^2}\,dz =$$
$$= \frac{a^2}{4}\int\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}\right)dz =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\ln|z-1| - \frac{1}{z-1} - \ln|z+1| - \frac{1}{z+1}\right) + C = \frac{a^2}{4}\left(\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{2z}{z^2-1}\right) + C.$$

Сделаем обратные замены переменных:

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{a^2}{4}\left(\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| - \frac{2\cos t}{\cos^2 t-1}\right) + C =$$
$$= \frac{a^2}{4}\cdot\ln\left|\frac{\cos\arcsin\dfrac{a}{x}-1}{\cos\arcsin\dfrac{a}{x}+1}\right| + \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2\cos\arcsin\dfrac{a}{x}}{\sin^2\arcsin\dfrac{a}{x}} + C = \frac{a^2}{4}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right| +$$
$$+ \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2\sqrt{x^2-a^2}}{x\cdot\left(\dfrac{a}{x}\right)^2} + C = -\frac{a^2}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C^*$$

Задача 100. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Решение. Для рационализации такого интеграла сделаем замену переменных

$$x = \frac{a}{\sin t} \implies t = \arcsin\frac{a}{x},\ \sqrt{x^2 - a^2} = a\operatorname{ctg} t,\ dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\,dt.$$

Исходный интеграл, с учётом интеграла из задачи 89, примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{-\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}\,dt}{a\operatorname{ctg} t} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\arcsin\dfrac{a}{x}}{2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1 - \cos\left(\arcsin\dfrac{a}{x}\right)}{\sin\left(\arcsin\dfrac{a}{x}\right)}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{a}\right| + C = -\ln\left|\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{a\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C^*.$$

Задача 101. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Решение. Сделаем замену $x = a\operatorname{tg} t$, тогда

$$t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \qquad \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t} \qquad \text{и} \qquad dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}.$$

Исходный интеграл, с учётом интеграла из задачи 90, примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{\cos t}{a}\left(\frac{a\,dt}{\cos^2 t}\right) = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + 1}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}} = \frac{\cos\dfrac{t}{2} + \sin\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}} = \frac{1 + \sin t}{\cos t},$$

то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right| + C = \ln\left|\frac{1 + \sin\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}}{\cos\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}}\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C^*.$$

Задача 102. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решение. Подынтегральная функция

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+4x+4}} = \frac{2}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}.$$

Эту функцию можно рационализировать с помощью замены

$$t = 2x+1 \implies x = \frac{t-1}{2},\ \sqrt{4x^2+4x+4} = \sqrt{t^2+3} \text{ и } dt = 2dx.$$

Исходный интеграл, с учётом интеграла из задачи 101, равен:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+3}\right| + C =$$
$$= \ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + C^*.$$

9 Определённый интеграл

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – какая-либо её первообразная на указанном отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Задача 103. Вычислить определённый интеграл $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница (3) получим

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Задача 104. Вычислить определённый интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница (3) и с учётом интеграла из задачи 101, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Задача 105. Вычислить определённый интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница (3) получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Задача 106. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2\, dx$.

Решение. Сделаем замену переменных $t = x^2$, тогда

$$dt = 2x\, dx,\ \ x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6},\ \ x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Теорема об интегрировании по частям: Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\, dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)\, dx. \tag{4}$$

Задача 107. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Применяя формулу (4), разобъём подинтегральное выражение на части так:

$$\begin{cases} u(x) = \operatorname{arctg} x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \\ v(x) = x, \end{cases}$$

тогда получим

$$A = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2}.$$

Рассмотрим отдельно полученный интеграл и сделаем в нём замену переменных $t = x^2+1$, тогда $dt = 2x\, dx$ и

$$\int \frac{x\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Следовательно, исходный интеграл равен

$$A = x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln \left(x^2+1\right) \Big|_0^1 =$$

$$= \Big(1 \cdot \operatorname{arctg} 1 - 0 \cdot \operatorname{arctg} 0\Big) - \frac{1}{2}\Big(\ln 2 - \ln 1\Big) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

10 Несобственные интегралы

Если существует конечный предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ на неограниченном интервале $[-\infty;\, b]$ или **несобственным интегралом I рода** и обозначают

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

Задача 108. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Это несобственный интеграл I рода. Тогда по формуле (5) получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{4} - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Получили, что несобственный интеграл сходится и его величина равна $\frac{3\pi}{4}$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ на неограниченном интервале $[a;\, +\infty]$ или **несобственным интегралом I рода** и обозначают

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{6}$$

Задача 109. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Решение. Это несобственный интеграл I рода. Тогда по формуле (6) получим:

$$\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_e^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_e^b=\left(\lim_{b\to+\infty}\ln|b|\right)-1=+\infty.$$

Значит, несобственный интеграл расходится.

Задача 110. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна, поэтому представим данный интеграл в виде суммы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}.$$

Первый из полученных интегралов – это несобственный интеграл I рода. Тогда по формуле (5) получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}x)^3\Big|_a^0=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{a\to-\infty}\Big((\operatorname{arctg}0)^3-(\operatorname{arctg}a)^3\Big)=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3=\frac{\pi^3}{24}.$$

Получили, что несобственный интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi^3}{24}$.

Второй из полученных интегралов – это несобственный интеграл I рода. Тогда по формуле (6) получим:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}x)^3\Big|_0^b=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{b\to+\infty}\Big((\operatorname{arctg}b)^3-(\operatorname{arctg}0)^3\Big)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3=\frac{\pi^3}{24}.$$

Получили, что несобственный интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi^3}{24}$.

Следовательно, исходный интеграл также сходится и его величина равна

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi^3}{24}=\frac{\pi^3}{12}.$$

Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$, а также интегралы от них

$$B_1=\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx,\qquad B_2=\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx.$$

Теоремы о сходимости несобственных интегралов 1 рода:
1. Если начиная с некоторого $x = a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла B_2 следует сходимость интеграла B_1, а из расходимости интеграла B_1 следует расходимость интеграла B_2.
2. Если существует конечный положительный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, то интегралы B_1 и B_2 ведут себя одинаково с смысле сходимости, т.е. либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Задача 111. Выяснить, сходится ли несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(3^x - 1)}$.

Решение. По условию задачи: $f(x) = \dfrac{1}{x^2(3^x-1)}$, и $x \in [1; +\infty)$. Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \in [1; +\infty)$. Проинтегрируем её на этом интервале

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b} - 1\right) = 1.$$

Данный интеграл сходится.

При любом $x \in [1; +\infty)$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2(3^x-1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{-3^x}{x^2(3^x-1)} < 0.$$

Значит, выполняется неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. А поскольку рассмотренный выше интеграл функции $g(x)$ сходится, то также сходится и исходный интеграл.

Задача 112. Выяснить, сходится ли несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx$.

Решение. На промежутке $[1; +\infty)$ интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (см. выше), значит он сходится и на промежутке $[2; +\infty)$. Поскольку при любом $x \in [2; +\infty)$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

– конечное положительное число, то интегралы $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ и $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Поскольку первый интеграл сходится, то также сходится и второй интеграл.

Несобственным интегралом II рода от функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a;\, b)$ и имеющей в точке $x = b$ разрыв 2 рода, называют предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ (если он существует) и обозначают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Несобственным интегралом II рода от функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(a;\, b]$ и имеющей в точке $x = a$ разрыв 2 рода, называют предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ (если он существует) и обозначают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{8}$$

Задача 113. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ или доказать его расходимость

Решение. Это несобственный интеграл II рода. Для данного интеграла особой точкой на отрезке $[0;\, 1]$ является точка $x = 1$. Значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится и его величина равна $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 114. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^0 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ или доказать его расходимость.

Решение. Это несобственный интеграл II рода. Для данного интеграла особой точкой на отрезке $[-1;\, 0]$ является точка$x = -1$. Значит,

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon)) = \arcsin 0 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится и его величина равна $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 115. Вычислить несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x}$ или доказать его расходимость.

Решение. Это несобственный интеграл II рода. Для данного интеграла особой точкой на отрезке $[-2;\ 0]$ является точка $x = 0$. Значит,

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x|\Big|_{-2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln|-\varepsilon| - \ln|-2|)) = -\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$, которые непрерывны на промежутке $[a;\ b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв II рода, а также интегралы от них

$$B_1 = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx, \qquad B_2 = \int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

Теоремы о сходимости несобственных интегралов 2 рода:
1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла B_2 следует сходимость интеграла B_1, а из расходимости интеграла B_1 следует расходимость интеграла B_2.
2. Если существует конечный положительный предел $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, то интегралы B_1 и B_2 ведут себя одинаково с смысле сходимости, т.е. либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Задача 116. Доказать сходимость или расходимость несобственного интеграла $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{(x+1)\,dx}{\sin^2 x}$.

Решение. На промежутке $(0;\ 1]$ функция $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ непрерывна, а в точке $x = 0$ терпит разрыв второго рода. Найдём её интеграл на заданном промежутке

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{dx}{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty \text{ – расходится.}$$

Поскольку при любом $x \in (0;\ 1]$ функция $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ непрерывна, в точке $x = 0$ терпит разрыв второго рода и

$$k = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x+1}{\sin^2 x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} = 1$$

– положительное число, то интегралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ и $\int\limits_0^1 \frac{(x+1)\,dx}{\sin^2 x}$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Поскольку первый интеграл расходится, то также расходится и второй интеграл.

Задача 117. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{6x}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

Решение. Найдём точки пересечения графиков функций (см. Рис. 12), решив уравнение

$$\sqrt{6x} = \frac{x^2}{6} \Longrightarrow x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 6.$$

Тогда площадь заданной фигуры равна

$$S = \int\limits_a^b (y_1(x) - y_2(x))\,dx =$$

$$= \int\limits_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right)\,dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\,x^{3/2} - \frac{x^3}{18}\right)\Bigg|_0^6 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot 6^{3/2} - \frac{6^3}{18}\right) - 0 = 12.$$

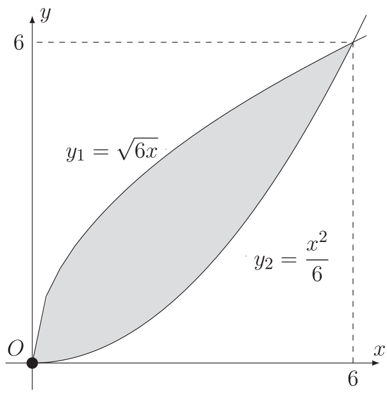

Рис. 12. К задаче 117.

Задача 118. Вычислить площадь эллипса, заданного параметрически уравнениями $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$ (см. Рис. 13).

Решение. У заданного эллипса осями симметрии являются оси координат, поэтому её площадь равна площади фигуры, лежащей в первой четверти, умноженной на 4.

Для сектора эллипса, лежащего в первой четверти x меняется от 0 до 4, при этом t меняется от $\dfrac{\pi}{2}$ до 0, тогда площадь этого сектора равна

$$S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t)\cdot x'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 3\sin t\cdot(-4\sin t)\;dt =$$

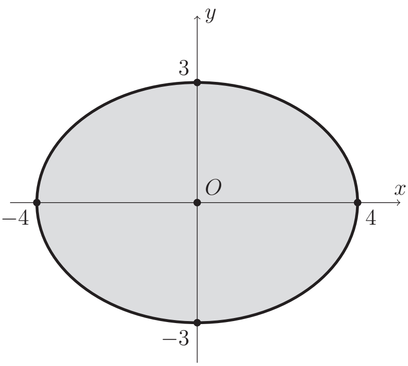

Рис. 13. К задаче 118.

$$= -12 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t \, dt = -6 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos(2t)) \, dt = -6 \left(t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= -6 \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) = -6 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 3\pi.$$

Значит, площадь всего эллипса равна

$$S = 4\, S_1 = 12\pi.$$

Задача 119. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним витком архимедовой спирали $r(\varphi) = \varphi$.

Решение. Заданная фигура изображена в полярных координатах на Рис. 14. У неё угол меняется φ от $\alpha = 0$ до $\beta = 2\pi$, а площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \varphi^2 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{6} \left((2\pi)^3 - 0^3 \right) = \frac{4\pi^3}{3}.$$

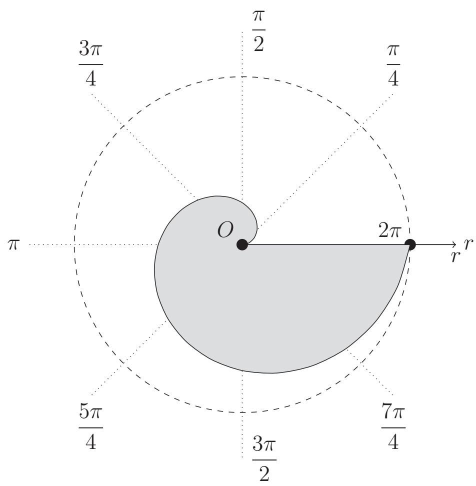

Рис. 14. К задаче 119.

Задача 120. Вычислить длину окружности, заданной уравнениями

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t.$$

Решение. Для заданной окружности $0 \le t \le 2\pi$. Поскольку

$$x'(t) = -2\sin t, \quad y'(t) = 2\cos t,$$

то

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 = 4,$$

а значит

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt = 2 \int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2 \cdot \Big[t \Big]_0^{2\pi} = 2 \cdot (2\pi - 0) = 4\pi.$$

Задача 121. Вычислить длину одного витка архимедовой спирали $r(\varphi) = \varphi$.

Решение. Заданная фигура изображена в полярных координатах на Рис. 14. У неё угол φ меняется от 0 до 2π, а длина одного витка спирали равна

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2} \, d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} \, d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left| \varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1} \right| \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right).$$

Задача 122. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением ломаной OAB вокруг оси OX, при условии, что $A(2;\,2)$, $B(6;\,0)$

Решение. Определим уравнения, задающие ломаную OAB. Участок OA: $\left\{(x;\,y)\middle|\, 0 \geq x \geq 2,\ y = x\right\}$.

Участок AB: $\left\{(x;\,y)\middle|\, 2 \geq x \geq 6,\ y = 3 - \dfrac{x}{2}\right\}$.

Площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой вокруг оси OX равна

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

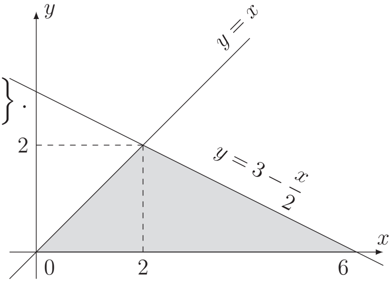

Рис. 15. К задаче 122.

В нашем случае, поверхность состоит из двух частей (конусов), разделённых плоскостью $x = 2$ (сечение плоскостью OXY см. на Рис. 15), поэтому площадь такой поверхности равна

$$S_x = 2\pi \int\limits_0^2 y_1\sqrt{1 + (y_1')^2}\, dx + 2\pi \int\limits_2^6 y_2\sqrt{1 + (y_2')^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \left(\int\limits_0^2 x\sqrt{1 + 1^2}\, dx + \int\limits_2^6 \left(3 - \frac{x}{2}\right) \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\, dx \right) =$$

$$= 2\pi \left(\sqrt{2} \int\limits_0^2 x\, dx + \frac{\sqrt{5}}{2} \int\limits_2^6 \left(3 - \frac{x}{2}\right)\, dx \right) = 4\pi \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right).$$

Задача 123. Вычислить объём чаши эллиптического параболоида $y^2 + z^2 = 4x$, заключенной между плоскостями $x = 0$ и $x = 4$.

Решение. Осью симметрии этого параболоида является ось OX. Рассекая данный гиперболоид плоскостью, параллельной плоскости OYZ и на расстоянии x от неё $(0 \leq x \leq 4)$ получим окружность $y^2 + z^2 = 4x$ с радиусом $r = 2\sqrt{x}$, площадь которой равна $S(x) = \pi r^2 = 4\pi x$. Поэтому, имеем

$$V = \int\limits_0^4 S(x)\, dx = \int\limits_0^4 4\pi x\, dx = 2\pi \left[x^2\right]_0^4 = 32\pi.$$

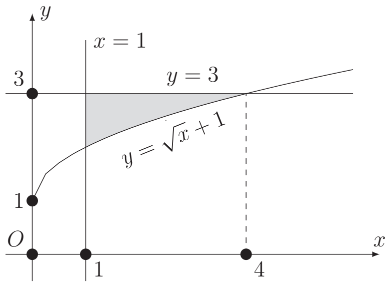

Рис. 16. К задаче 124.

Задача 124. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x} + 1$, $y = 3$, $x = 1$.

Решение. Найдём точки пересечения данных линий. Приравняв функции $y = \sqrt{x}+1$ и $y = 3$ получим $x = 4$. Начертим данную фигуру на плоскости Oxy (см. Рис. 16).

В нашем случае,

$$a = 1,\ b = 4,\ f_1(x) = 3,\ f_2(x) = \sqrt{x}+1.$$

$$V = \pi\int\limits_a^b \Big((f_1(x))^2 - (f_2(x))^2\Big)\,dx = \pi\int\limits_1^4 \big(3^2 - (\sqrt{x}+1)^2\big)\,dx =$$

$$= \pi\int\limits_1^4 \Big(8 - x - 2x^{\frac{1}{2}}\Big)\,dx = \pi\left(8x - \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}(\sqrt{x})^3\right)\Bigg|_1^4 = \frac{43\pi}{6}.$$

11 Кратные интегралы

Если функция $f(x;\,y)$ интегрируема в прямоугольной области

$$D = \Big\{(x;\,y)\,\Big|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d\Big\},$$

то

$$\iint\limits_D f(x;\,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;\,y)\,dy. \tag{9}$$

Задача 125. Найти интеграл от функции $f(x;\,y) = x^2\,y$ по области, ограниченной прямыми: $y = 1$, $y = 2$, $y = 1$, $x = 3$.

Решение. Область интегрирования $D = \Big\{(x;\,y)\,\Big|\,1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 2\Big\}$. Тогда по формуле (9)

$$\iint\limits_D f(x;\,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dx\int\limits_1^2 \big(x^2\,y\big)\ dy = \int\limits_1^3 x^2\,dx\,\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\int\limits_1^3 x^2\,dx = \frac{3}{2}\,\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 13.$$

Если функция $f(x;\,y)$ интегрируема в области

$$D = \Big\{(x;\,y)\,\Big|\, a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\Big\},$$

то

$$\iint\limits_D f(x;\,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;\,y)\,dy. \tag{10}$$

Задача 126. Найти интеграл от функции $f(x;\,y) = x^2\,y^3$ по области, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x$.

Решение. Определим область интегрирования $D = \left\{(x;\,y)\,\Big|\,0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\right\}$ (см. Рис. 17). Тогда по формуле (10) получим:

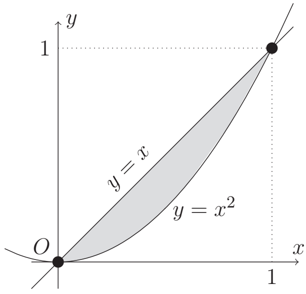

Рис. 17. К задаче 126.

$$\iint\limits_D f(x;\,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} \left(x^2\,y^3\right)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2\,dx\,\left[\frac{y^4}{4}\right]_{x^2}^{x} = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(x^6 - x^{10}\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^{11}}{11}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{77} = \frac{1}{77}.$$

Задача 127. Вычислить двумя способами $\iint\limits_D (2\,x - y)\,dx\,dy$, где область D, ограниченной кривыми $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = 0$, $x + y - 4 = 0$.

Решение. Построим область D (см. Рис. 18)

$$D = \left\{(x;\,y)\,\Big|\,0 \le y \le 2,\ \sqrt{2\,y} \le x \le 4 - y\right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_D (2\,x - y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2\,y}}^{4-y} (2\,x - y)\,dx = \int\limits_0^2 dy\,\left[x^2 - y\,x\right]_{\sqrt{2\,y}}^{4-y} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(2\,y^2 - 14\,y + \sqrt{2}\,y^{\frac{3}{2}} + 16\right)\,dy = \left[\frac{2\,y^3}{3} - 7\,y^2 + \frac{2\,\sqrt{2}\,y^{\frac{5}{2}}}{5} + 16\,y\right]_0^2 = \frac{188}{15}.$$

С другой стороны, этот же интеграл можно вычислить, разбив область D на две части D_1 и D_2 прямой $x = 2$ и определив границы интегрирования следующим образом:

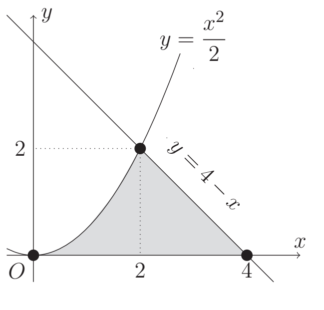

Рис. 18. К задаче 127.

$$D_1 = \left\{(x;\,y)\,\Big|\,0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{x^2}{2}\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x;\,y)\,\Big|\,2 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4 - x\right\}.$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\iint\limits_D (2\,x - y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D_1} (2\,x - y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} (2\,x - y)\,dx\,dy,$$

где

$$\iint\limits_{D_1} (2\,x-y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} (2\,x-y)\,dy = \int\limits_0^2 dx\, \left[2\,x\,y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{x^2}{2}} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{8}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{40}\right]_0^2 = 4 - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}.$$

$$\iint\limits_{D_2} (2\,x-y)\,dx\,dy = \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{4-x} (2\,x-y)\,dy = \int\limits_2^4 dx\, \left[2\,x\,y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x} =$$

$$= \int\limits_2^4 \left(-\frac{5}{2}\,x^2 + 12\,x - 8\right) dx = \left[-\frac{5}{6}\,x^3 + 6\,x^2 - 8\,x\right]_2^4 = \frac{28}{3}.$$

Итак,

$$\iint\limits_{D} (2\,x-y)\,dx\,dy = \frac{16}{5} + \frac{28}{3} = \frac{188}{15}.$$

Задача 128. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = 1-x^2-y^2$ и $z = 0$.

Решение. Область D получим решив уравнение

$$1 - x^2 - y^2 = 0 \implies x^2 + y^2 = 1.$$

Значит, D – это область, лежащая внутри окружности с центром в начале координат и радиусом 1. Поэтому для решения данной задачи удобно перейти к полярной системе координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда подынтегральная функция примет вид

$$f(x;\,y) = 1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2 = g(r;\,\varphi),$$

якобиан $J\,(r;\,\varphi) = r$, область интегрирования

$$D' = \left\{(r;\,\varphi)\,\middle|\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1\right\}.$$

Тогда

$$V = \iint\limits_{D} f(x;\,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} g(r;\,\varphi)\,|J\,(r;\,\varphi)\,|\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{D'} \left(1 - r^2\right)\,r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\,\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r - r^3\right)\,dr = \int\limits_0^{2\,\pi} d\varphi\, \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\,\pi} d\varphi = \frac{1}{4}\left[\varphi\right]_0^{2\,\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 129. Найти площадь поверхности $f(x;\,y) = 1 - \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$, расположенной над плоскостью OXY.

Решение. Эта поверхность существует над плоскостью OXY только при условии

$$1-\sqrt{(x^2+y^2)^3}\geq 0 \implies x^2+y^2\leq 1,$$

т.е. внутри окружности с центром в начале координат и радиусом 1. Поэтому для решения данной задачи удобно перейти к полярной системе координат по формулам: $x=r\,\cos\varphi$, $y=r\,\sin\varphi$. Тогда производные подынтегральной функции

$$f'_x=-3\,x\,\sqrt{x^2+y^2}=-3\,r^2\,\cos\varphi,\ \ f'_y=-3\,y\,\sqrt{x^2+y^2}=-3\,r^2\,\sin\varphi,$$

$$\sqrt{1+(f'_x)^2+\left(f'_y\right)^2}=\sqrt{1+9\,r^4},$$

якобиан $J\,(r;\,\varphi)=r$, область $D'=\left\{(r;\,\varphi)\,\middle|\,0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq 1\right\}$. Тогда

$$S_{\text{пов}}=\iint\limits_D\sqrt{1+(f'_x)^2+\left(f'_y\right)^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1+9\,r^4}\,r\,dr.$$

Вычислим отдельно внутренний интеграл, сделав замену переменных

$$R=3\,r^2\implies dR=6\,r\,dr,\ \ r=0\Rightarrow R=0,\ \ r=1\Rightarrow R=3.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1\sqrt{1+9\,r^4}\,r\,dr=\frac{1}{6}\int\limits_0^3\sqrt{1+R^2}\,dR=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{R}{2}\sqrt{1+R^2}+\frac{1}{2}\ln\left|R+\sqrt{1+R^2}\right|\right]_0^3=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10}+\frac{1}{3}\ln\left|3+\sqrt{10}\right|\right).$$

Следовательно,

$$S_{\text{пов}}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10}+\frac{1}{3}\ln\left|3+\sqrt{10}\right|\right)\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10}+\frac{1}{3}\ln\left|3+\sqrt{10}\right|\right)\cdot\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{10}+\frac{1}{3}\ln\left|3+\sqrt{10}\right|\right).$$

12 Криволинейные интегралы 1 рода

Если в криволинейном интеграле 1 рода плоская кривая AB, задана уравнением $y=f(x)$ в декартовых координатах при $a\leq x\leq b$, то

$$\int\limits_{AB}f(x;\,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x;\,y(x))\,\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{11}$$

Задача 130. Вычислить $\int\limits_L x^2\, y\, dl$, где L – отрезок прямой, лежащий между точками (1; 3) и (3; 1).

Решение. В нашей задаче, кривая $L: y = 4 - x$ задана явно в декартовых координатах, тогда $a = 1$, $b = 3$, $y(x) = 4 - x$, $y'(x) = -1$. Значит,

$$\int\limits_L \left(x^2\, y\right)\, dl = \sqrt{2} \int\limits_1^3 \left(4\, x^2 - x^3\right)\, dx = \sqrt{2}\, \left[\frac{4}{3}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^4\right]_1^3 = \frac{44\sqrt{2}}{3}.$$

Если в криволинейном интеграле 1 рода плоская кривая AB, задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$ при $\alpha \le \varphi \le \beta$ и функции $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\, \beta]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;\, y)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(r\, \cos\varphi;\, r\, \sin\varphi\right)\, \sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2}\, d\varphi. \qquad (12)$$

Задача 131. Вычислить $\int\limits_L (x - y)\, dl$, где кривая L – правый лепесток лемнискаты $r(\varphi) = \sqrt{\cos\left(2\,\varphi\right)}$.

Решение. Правый лепесток лемнискаты соответствует углам $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ (см. Рис. 19). Тогда

$$r(\varphi) = \sqrt{\cos\left(2\,\varphi\right)},\ r'(\varphi) = \frac{-\sin\left(2\,\varphi\right)}{\sqrt{\cos\left(2\,\varphi\right)}},$$

$$\sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\cos\left(2\,\varphi\right)}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\left(2\,\varphi\right)}{\sqrt{\cos\left(2\,\varphi\right)}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\cos\left(2\,\varphi\right)}} = \frac{1}{r}.$$

А, следовательно,

$$\int\limits_L (x - y)\, dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(r\, \cos\varphi - r\, \sin\varphi\right)}{r}\, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\varphi - \sin\varphi\right)\, d\varphi =$$

$$= \Big[\sin\varphi + \cos\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

Если в криволинейном интеграле 1 рода плоская кривая AB, задана уравнениями в в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \left[t_1;\, t_2\right]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, тогда

$$\int\limits_{AB} f(x;\, y)\, dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t);\, y(t)\right)\, \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (13)$$

Задача 132. Найти площадь цилиндрической поверхности $z = f(x;\,y) = y^2$, построенной на одной арке циклоиды

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\,\pi.$$

Решение. Построим график кривой L в декартовой системе координат (см. Рис. 20). Здесь $t_1 = 0$, $t_2 = 2\,\pi$,

$$f\,(x;\,y) = y^2 = (1-\cos t)^2,$$

$$x'(t) = 1 - \cos t,\;\; y'(t) = \sin t,$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\,\cos t} = \left|2\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

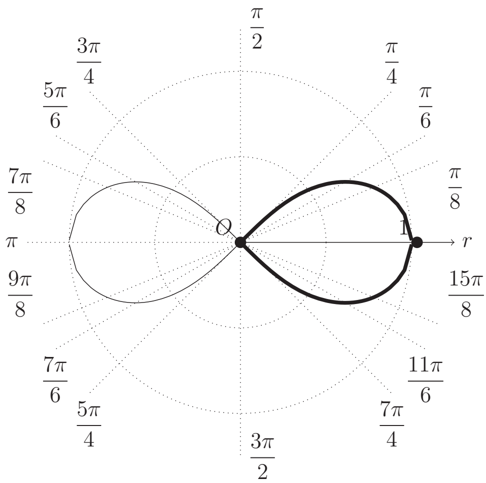

Рис. 19. К задаче 131.

Следовательно, поскольку

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \ge 0$$

при $x \in [0;\,2\pi]$, то

$$S = \sqrt{2}\int_0^{2\,\pi} (1-\cos t)^2\,\sqrt{1-\cos t}\,dt =$$

$$= 8\int_0^{2\,\pi}\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\,dt = 8\int_0^{2\,\pi}\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

Сделаем замену переменных

$$R = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \implies dR = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt,\;\; t = 0 \Rightarrow R = 1,\;\; t = 2\,\pi \Rightarrow R = -1.$$

Тогда искомая площадь цилиндрической поверхности равна

$$S = -16\int_1^{-1}\left(1 - R^2\right)^2\,dR =$$

$$= -16\int_1^{-1}\left(1 - 2\,R^2 + R^4\right)\,dR =$$

$$= -16\left[R - \frac{2}{3}\,R^3 + \frac{1}{5}\,R^5\right]_1^{-1} = \frac{256}{15}.$$

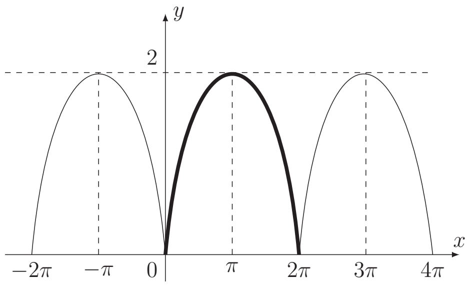

Рис. 20. К задаче 132.

13 Криволинейные интегралы 2 рода

Задача 133. Вычислить $\int\limits_L \Big((x^2-2\,x\,y)\,dx+(y^2-2\,x\,y)\,dy\Big)$, где кривая L – участок параболы $y=x^2$ при $-1\le x\le 1$.

Решение. Поскольку $L:\ y=x^2$, то $dy=2\,x\,dx$. Следовательно,

$$\int\limits_L \Big((x^2-2\,x\,y)\,dx+(y^2-2\,x\,y)\,dy\Big)=\int\limits_{-1}^{1}\Big(x^2-2\,x^3+2\,x^5-4\,x^4\Big)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{4\,x^5}{5}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}-\frac{8}{5}=-\frac{14}{15}.$$

Если в криволинейном интеграле 2 рода плоская кривая AB, задана уравнениями в в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1;\,t_2]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, тогда

$$\int\limits_{AB}\left(P\,(x;\,y)\ dx+Q\,(x;\,y)\ dy\right)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(P\big(x(t);\,y(t)\big)\,x'(t)+Q\big(x(t);\,y(t)\big)\,y'(t)\Big)\,dt.$$

Задача 134. Вычислить $\int\limits_L\Big((2-y)\,dx+x\,dy\Big)$, где кривая L – арка циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\,\pi$.

Решение. По условию задачи, $t_1=0$, $t_2=2\,\pi$, $dx=(1-\cos t)\,dt$, $dy=\sin t\,dt$. Следовательно,

$$\int\limits_L\Big((2-y)\,dx+x\,dy\Big)=\int\limits_0^{2\,\pi}\Big((1+\cos t)\,(1-\cos t)\,dt+(t-\sin t)\ \sin t\,dt\Big)=$$

$$=\int\limits_0^{2\,\pi}t\ \sin t\,dt=\left\{\begin{array}{c}\text{по частям:}\\ u=t\ \Rightarrow\ du=dt\\ dv=\sin t\,dt\Rightarrow v=-\cos t\end{array}\right\}=\Big[-t\ \cos t\Big]_0^{2\,\pi}+\int\limits_0^{2\,\pi}\cos t\,dt=$$

$$=\Big[-t\ \cos t+\sin t\Big]_0^{2\,\pi}=-2\,\pi.$$

Задача 135. Вычислить площадь фигуры, лежащей внутри астроиды:

$$\begin{cases}x=a\ \cos^3\varphi,\\ y=a\ \sin^3\varphi.\end{cases}$$

Решение. Кривая L обходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки. При этом параметр t изменяется от 0 до $2\,\pi$. Кроме того,

$$x'=-3\,a\ \cos^2\varphi\ \sin\varphi,\ \ y'=3\,a\ \sin^2\varphi\ \cos\varphi,$$

$$x\,dy - y\,dx = \Big(3\,a^2\,\cos^4\varphi\,\sin^2\varphi + 3\,a^2\,\sin^4\varphi\,\cos^2\varphi\Big)\,d\varphi =$$

$$= 3\,a^2\,\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{3\,a^2}{4}\,\sin^2(2\varphi)\,d\varphi = \frac{3\,a^2}{8}\,\left(1-\cos(4\varphi)\right)\,d\varphi$$

Тогда площадь фигуры найдём по формуле

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx = \frac{3\,a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos(4\,\varphi))\,d\varphi =$$

$$= \frac{3\,a^2}{16}\left[\varphi - \frac{1}{4}\sin(4\,\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\,\pi\,a^2}{8}.$$

Теорема Остроградского-Грина: Если функции $P = P(x;\,y)$ и $Q = Q(x;\,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными P'_y и Q'_x в области D, то имеет место формула

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy, \tag{14}$$

где L – граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (против часовой стрелки; при движении вдоль кривой L, область D остается слева).

Задача 136. С помощью формулы Остроградского-Грина вычислить

$$\oint\limits_L (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy,$$

где L – контур треугольника с вершинами $A(1;\,1)$, $B(3;\,2)$, $C(2;\,5)$, пробегаемый в положительном направлении.

Решение. В нашей задаче

$$P(x;\,y) = (x+y)^2, \qquad Q(x;\,y) = -(x^2+y^2),$$

следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2\,(x+y),\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -2\,x \implies \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2\,x - 2\,(x+y) = -4\,x - 2\,y.$$

При этом прямые, ограничивающие контур, имеют уравнения (см. Рис. 21)

$$AB:\ y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}, \quad BC:\ y = -3\,x + 11,$$

$$CA:\ y = 4\,x - 3.$$

Тогда, по формуле (14), имеем

$$I = \oint\limits_L (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \iint\limits_D (-4\,x - 2\,y)\;dx\,dy.$$

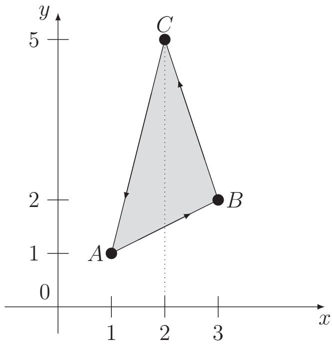

Рис. 21. К задаче 136.

Разобъём область D на две части $D = D_1 \cup D_2$, причём

$$D_1 = \left\{(x;\,y)\Big|\,1 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2} \le y \le 4\,x - 3\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x;\,y)\Big|\,2 \le x \le 3,\ \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2} \le y \le -3\,x + 11\right\}.$$

Тогда

$$I = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{4x-3} (-4\,x - 2\,y)\;dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-3x+11} (-4\,x - 2\,y)\;dy =$$

$$= \int\limits_1^2 dx \Big[-4\,x\,y - y^2\Big]_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{4x-3} + \int\limits_2^3 dx \Big[-4\,x\,y - y^2\Big]_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-3x+11} =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(-\frac{119}{4}\,x^2 + \frac{77}{2}\,x - \frac{35}{4}\right)dx + \int\limits_2^3 \left(\frac{21}{4}\,x^2 + \frac{49}{2}\,x - \frac{483}{4}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{119}{12}\,x^3 + \frac{77}{4}\,x^2 - \frac{35}{4}\,x\right]_1^2 + \left[\frac{7}{4}\,x^3 + \frac{49}{4}\,x^2 - \frac{483}{4}\,x\right]_2^3 = -\frac{140}{3}.$$

Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования: Для того чтобы криволинейный интеграл 2 рода общего вида не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой непрерывными являются функции P, Q, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (15)$$

Задача 137. Вычислить

$$\int\limits_L (x - 3\,y)\,dx - (3\,x - y)\,dy,$$

где кривая L – контур, соединяющий точки $A(1;\,1)$ и $B(3;\,2)$.

Решение. В нашей задаче

$$P(x;\,y) = x - 3\,y,\ Q(x;\,y) = -(3\,x - y) \implies \frac{\partial P}{\partial y} = -3 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно, криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Поэтому мы можем выбрать любой контур интегрирования.

Рассмотрим контур ACB, который состоит из частей AC и CB, параллельных координатным осям (см. Рис. 22). Тогда

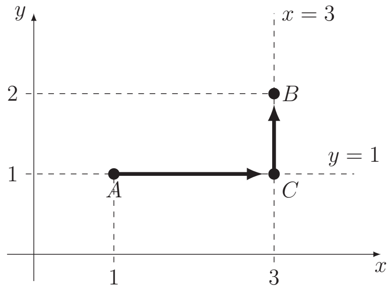

Рис. 22. К задаче 137.

$$\int\limits_L (x - 3\,y)\,dx - (3\,x - y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{AC} (x - 3\,y)\,dx - (3\,x - y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{CB} (x - 3\,y)\,dx - (3\,x - y)\,dy.$$

Участок AC контура: $AC = \Big\{(x;\,y)\,\Big|\,1 \le x \le 3,\ y = 1\Big\}$. При этом $dy = 0$ и

$$\int\limits_{AC} (x - 3\,y)\,dx - (3\,x - y)\,dy = \int\limits_1^3 (x - 3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3\,x\right]_1^3 = -2.$$

Участок CB контура: $CB = \Big\{(x;\,y)\,\Big|\,1 \le y \le 2,\ x = 3\Big\}$. При этом $dx = 0$ и

$$\int\limits_{CB} (x - 3\,y)\,dx - (3\,x - y)\,dy = \int\limits_1^2 (y - 9)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} - 9\,y\right]_1^2 = -\frac{15}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L (x - 3\,y)\,dx - (3\,x - y)\,dy = -2 - \frac{15}{2} = -\frac{19}{2}.$$

14 Дифференциальные уравнения

Задача 138. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x\,y\,dx + (x + 1)\,dy = 0$$

и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Разделив переменные (при $x \neq -1$ и $y \neq 0$), получим уравнение

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{x+1}.$$

Проинтегрируем это уравнение и упростим полученный результат

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x\,dx}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -x + \ln|x+1| + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = C\,(x+1)\,e^{-x}$$

– общее решение исходного уравнения, где $C = \pm\, e^{C_1}$ может быть произвольным положительным или отрицательным числом, но не нулем. Отметим, что найденное общее решение не определяет множество всех интегральных кривых данного дифференциального уравнения, так как интегральные кривые $x = -1$ и $y = 0$ не содержатся в этом множестве. Эти кривые определяют особые решения.

Для нахождения частного решения, в общем решении положим $x = 0$ и $y = 1$. Получим $C = 1$ и $y = (x+1)\,e^{-x}$ – искомое частное решение.

Задача 139. Решить дифференциальное уравнение $(x+y)\,dx - (y-x)\,dy = 0$.

Решение. Поскольку $P(x;\,y) = x + y$ и $Q(x;\,y) = -(y-x)$, то для них выполняются равенства

$$P(tx;\,ty) = tx + ty = t(x+y) = t\,P(x;\,y),$$
$$Q(tx;\,ty) = -(ty - tx) = t(-y+x) = t\,Q(x;\,y),$$

а значит, $P(x;\,y)$ и $Q(x;\,y)$ – однородные функции первой степени однородности. Следовательно, данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением.

Положим $y = u\,x$. Тогда $dy = x\,du + u\,dx$. Подставим выражения для y и dy в исходное уравнение и получим

$$(x + u\,x)\,dx - (u\,x - x)\,(x\,du + u\,dx) = 0,$$

$$x\Big((1 + 2\,u - u^2)\,dx - x\,(u-1)\,du\Big) = 0.$$

Данное уравнение эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ (1 + 2\,u - u^2)\,dx - x\,(u-1)\,du = 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности $x = 0$ не определяет решение, поскольку при подстановке в исходное уравнение не превращает его в тождество.

Рассмотрим второе уравнение совокупности

$$(1 + 2\,u - u^2)\,dx - x\,(u-1)\,du = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{(u-1)\,du}{1 + 2\,u - u^2} = \frac{dx}{x}$$

и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{(u-1)\,du}{1+2\,u-u^2} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln|1+2\,u-u^2| = \ln|x| + C_1.$$

Упростим это выражение и получим

$$\ln|1+2\,u-u^2| = \ln\left|\frac{e^{C_1}}{x^2}\right| \implies (1+2\,u-u^2)\,x^2 = C, \quad C = \pm e^{C_1}.$$

Сделаем обратную замену переменных и получим

$$\left(1+2\,\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)x^2 = C \implies x^2+2\,y\,x-y^2 = C$$

– искомый общий интеграл исходного уравнения.

Задача 140. Решить дифференциальное уравнение $y' = \sin(2\,x+y)$.

Решение. Это уравнение вида

$$y' = f(a\,x+b\,y), \tag{16}$$

где постоянные a и b отличны от нуля. Поэтому произведём замену переменных

$$z = 2\,x+y \quad \Rightarrow \quad z' = 2+y' \quad \Rightarrow \quad y' = z'-2.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, получим

$$z'-2 = \sin z \quad \text{или} \quad z' = \sin z + 2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение

$$\frac{dz}{\sin z+2} = dx \implies \int \frac{dz}{\sin z+2} = \int dx.$$

Интеграл в левой части равенства вычислим отдельно, при помощи тригонометрической подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin z = \frac{2\,t}{t^2+1}, \quad dz = \frac{2\,dt}{t^2+1}.$$

Тогда

$$\int \frac{dz}{\sin z+2} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\,t+1}{\sqrt{3}} + C^*.$$

Возвращаясь к уравнению, получаем

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\,t+1}{\sqrt{3}} = x + C_1.$$

Сделаем обратные замены: $t = \operatorname{tg}\dfrac{z}{2}$ и $z = 2\,x + y$, тогда

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2\,\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}+1}{\sqrt{3}} = x + C_1 \implies \frac{2}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\,\operatorname{tg}\frac{2\,x+y}{2}+1\right) = x + C_1.$$

Выразим y, тогда получим общее решение

$$y = 2\,\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + C\right) - \frac{1}{2}\right) - 2\,x.$$

Задача 141. Решить дифференциальное уравнение $y' = -2\,\left(\dfrac{y-2}{x-y+1}\right)^2$.

Решение. Выпишем и решим систему уравнений

$$\begin{cases} y-2 &= 0,\\ x-y+1 &= 0.\end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 1,\\ y_0 = 2\end{cases}$$

Тогда заменим переменные $x = X + 1$, $y = Y + 2$. Тогда $dx = dX$, $dy = dY$, а правая часть уравнения

$$-2\,\left(\frac{y-2}{x-y+1}\right)^2 = -2\,\left(\frac{Y}{X-Y}\right)^2$$

– однородная функция нулевой степени однородности, значит, само уравнение – однородное

$$Y' = -2\,\left(\frac{Y}{X-Y}\right)^2.$$

Положим в нём $Y = u\,X$, тогда $Y' = X\,u' + u$. Подставим выражения для Y и Y' в полученное уравнение

$$X\,u' + u = -2\,\left(\frac{u}{1-u}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad X\,u' = \frac{-u-u^3}{(1-u)^2}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\frac{(1-u)^2}{-u-u^3}\,du = \frac{dX}{X} \implies \int\frac{(1-u)^2}{-u-u^3}\,du = \int\frac{dX}{X}$$

$$-\int\frac{du}{u} + 2\int\frac{du}{u^2+1}\,du = \int\frac{dX}{X} \implies -\ln|u| + 2\,\operatorname{arctg}u = \ln|X| + C_1.$$

Упростим это равенство и сделаем обратные замены

$$u = \frac{Y}{X},\ X = x-1,\ Y = y-2,$$

тогда

$$2\,\operatorname{arctg}\frac{y-2}{x-1} = \ln|C\,(y-2)|$$

– искомое общее решение исходного уравнения.

Задача 142. Найти общее решение уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$.

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения сделаем замену переменных $y = u\,v$ и получим:

$$u'\,v + u\,v' - \frac{u\,v}{x} = x^2 \implies u'\,v + u\,\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2.$$

Выберем функцию v так, чтобы скобка обращалась в нуль. Тогда исходное уравнение будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} &= 0, \\ \quad u'\,v &= x^2. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим в нём переменные и проинтегрируем полученное равенство

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \implies \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \implies \ln|v| = \ln|x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad v = C\,x.$$

Значит, функцию v выберем в виде $v = x$.

Рассмотрим второе уравнение системы с учётом того, что функция v найдена выше.

$$u'\,v = x^2 \implies u'\,x = x^2 \implies u' = x \implies u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения запишется в виде

$$y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\,x.$$

Это же уравнение можно решить также методом вариации произвольного постоянного (описан ниже).

Второй способ решения. Для решения данного уравнения рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \implies \ln|y| = \ln|x| + C^* \implies y = C\,x \quad \left(C = \pm e^{C^*}\right).$$

Теперь константу C мы представляем как функцию $C(x)$. И тогда, общее решение исходного уравнения мы будем искать в виде

$$y = C(x)\,x.$$

Подставим эту функцию в исходное уравнение и получим

$$\Big(C'(x)\,x + C(x)\Big) - \frac{C(x)\,x}{x} = x^2 \implies C'(x) = x \implies C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) x = \frac{x^3}{2} + C_1\, x.$$

Задача 143. Найти решение уравнения $y' + \dfrac{y}{x} = x^2\, y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Тогда сделаем замену переменных $y = u\, v$ и получим

$$u'\, v + u\, v' + \frac{u\, v}{x} = x^2\, (u\, v)^2 \implies u'\, v + u\, \left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2\, u^2\, v^2.$$

Выберем функцию v так, чтобы скобка обращалась в нуль. Тогда исходное уравнение будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} &= 0, \\ \quad u'\, v &= x^2\, u^2\, v^2. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим в нём переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \implies \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \implies \ln|v| = -\ln|x| + C_1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{C}{x}.$$

Значит, функцию v выберем в виде $v = \dfrac{1}{x}$.

Рассмотрим второе уравнение системы при условии что $v = \dfrac{1}{x}$:

$$u'\, v = x^2\, u^2\, v^2 \implies u' = x\, u^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому разделим в нём переменные и проинтегрируем полученное равенство

$$\frac{du}{u^2} = x\, dx \implies \int \frac{du}{u^2} = \int x\, dx \implies -\frac{1}{u} = \frac{x^2}{2} + C_1 \implies u = -\frac{2}{x^2 + C}.$$

Тогда общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения запишется в виде

$$y = u \cdot v = -\frac{2}{x(x^2 + C)}.$$

Учитывая начальное условие $y(1) = 1$, решим уравнение

$$1 = -\frac{2}{1 + C} \implies C = -3.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{2}{x(3 - x^2)}.$$

Задача 144. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(2x + 3x^2y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0.$$

Решение. В данном дифференциальном уравнении: $P = 2x + 3x^2y$, $Q = x^3 - 3y^2$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Значит, рассматриваемое уравнение – уравнение в полных дифференциалах.

Выпишем равенство $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x;\, y)$ и проинтегрируем по переменной x

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + 3x^2y \implies \int \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \int \left(2x + 3x^2y\right)\,dx \implies U = x^2 + x^3y + \varphi(y).$$

Продифференцируем функцию U по переменной y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + \varphi'(y),$$

но с другой стороны,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q = x^3 - 3y^2.$$

Значит,

$$x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2 \implies \varphi'(y) = -3y^2 \implies \varphi(y) = -y^3 + C_1.$$

Подставляем найденную функцию $\varphi(y)$ в функцию U

$$U = x^2 + x^3y - y^3 + C_1.$$

Следовательно, общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$x^2 + x^3y - y^3 = C.$$

Задача 145. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(x^2 - y)\,dx + (x^2y^2 + x)dy = 0.$$

Решение. 1 Этап. 1. В данном дифференциальном уравнении: $P = x^2 - y$, $Q = x^2y^2 + x$. Тогда

$$P'_y = -1, \qquad Q'_x = 2xy^2 + 1 \quad \implies \quad P'_y \neq Q'_x.$$

Значит, рассматриваемое уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Рассмотрим выражение

$$P'_y - Q'_x = -1 - 2xy^2 - 1 = -2(1 + xy^2).$$

Поскольку

$$Q = x^2y^2 + x = x(xy^2 + 1),$$

то интегрирующий множитель будем искать как функцию, зависящую только от переменной x

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{-1 - 2xy^2 - 1}{x^2y^2 + x} = \frac{-2(1 + xy^2)}{x(xy^2 + 1)} = -\frac{2}{x}.$$

Найдём интегрирующий множитель

$$\mu\,(x) = \exp\left(\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx\right) = \exp\left(-2\int \frac{1}{x}\,dx\right) = \exp\left(-2\ln|x|\right) = \frac{1}{x^2}$$

и умножим на него исходное уравнение

$$\frac{x^2 - y}{x^2}\,dx + \frac{xy^2 + 1}{x}\,dy = 0$$

и рассмотрим его отдельно.

2 этап. В полученном дифференциальном уравнении: $P = \dfrac{x^2 - y}{x^2} = 1 - \dfrac{y}{x^2}$, $Q = \dfrac{xy^2 + 1}{x} = y^2 + \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$P'_y = -\frac{1}{x^2},\ Q'_x = -\frac{1}{x^2} \implies P'_y = Q'_x.$$

Значит, рассматриваемое уравнение – уравнение в полных дифференциалах.

Выпишем равенство $U'_x = P$ и проинтегрируем его по переменной x

$$U'_x = 1 - \frac{y}{x^2} \implies \int U'_x\,dx = \int \left(1 - \frac{y}{x^2}\right)\,dx \implies U = x + \frac{y}{x} + \varphi(y).$$

Дифференцируем функцию U по переменной y

$$U'_y = \frac{1}{x} + \varphi'(y),$$

но с другой стороны,

$$U'_y = Q \implies U'_y = y^2 + \frac{1}{x} \implies \frac{1}{x} + \varphi'(y) = y^2 + \frac{1}{x} \implies \varphi'(y) = y^2.$$

Интегрируем эту функцию по переменной y и подставим найденную функцию $\varphi(y)$ в функцию U

$$\varphi(y) = \frac{y^3}{3} + C_1 \implies U = x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} + C_1.$$

Следовательно, общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = C.$$

Задача 146. Решить дифференциальное уравнение $y''' = \sin^2(2\,x)$.

Решение. Это уравнение третьего порядка, не содержащее искомую функцию и её производные кроме старшей. Следовательно, проинтегрируем это уравнение по переменной x и получим:

$$\int y''' \, dx = \int \sin^2(2\,x)\, dx \implies y'' = \frac{1}{2}\int \left(1-\cos(4\,x)\right)\, dx,$$

$$y'' = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,\sin(4\,x) + C_1$$

– уравнение второго порядка, не содержащее искомую функцию и её производные кроме старшей. Проинтегрируем его по переменной x:

$$\int y^{('')} \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,\sin(4\,x) + C_1\right) dx \implies y' = \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{16}\,\cos(4\,x) + C_1\,x + C_2$$

– уравнение первого порядка, не содержащее искомую функцию и её производные кроме старшей. Проинтегрируем его по переменной x:

$$\int y' \, dx = \int \left(\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{16}\,\cos(4\,x) + C_1\,x + C_2\right) dx,$$

поэтому

$$y = \frac{1}{12}\,x^3 + \frac{1}{64}\,\sin(4\,x) + \frac{C_1}{2}\,x^2 + C_2\,x + C_3$$

– искомое общее решение.

Задача 147. Решить дифференциальное уравнение $y'' \cdot y' = x + 3$.

Решение. Это уравнение второго порядка, не содержащее искомую функцию. Следовательно, заменим младшую производную $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда, поскольку $y'' = p'$, то исходное уравнение примет вид

$$p'\,p = x + 3.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его по переменной x

$$p\,dp = (x+3)\,dx \implies \int p\,dp = \int (x+3)\,dx \implies \frac{1}{2}\,p^2 = \frac{1}{2}\,(x+3)^2 + C_1.$$

Поскольку $p = y'$, то получим новое уравнение

$$\left(y'\right)^2 = (x+3)^2 + 2\,C_1 \quad \text{или} \quad y' = \pm\sqrt{(x+3)^2 + 2\,C_1}.$$

Это пара уравнений первого порядка. Проинтегрируем их по переменной x

$$\int y'\,dx = \pm\int \sqrt{(x+3)^2 + 2\,C_1}\,dx.$$

Следовательно,

$$y = \pm\left(\frac{(x+3)}{2}\sqrt{(x+3)^2 + 2\,C_1} + C_1 \ln\left|x + 3 + \sqrt{(x+3)^2 + 2\,C_1}\right|\right) + C_2$$

– пара искомых общих решений.

Задача 148. Решить дифференциальное уравнение $x\,y''' - y'' = 0$.

Решение. Это уравнение третьего порядка, не содержащее искомую функцию и её первую производную.

Следовательно, заменим $y'' = p$. Тогда, поскольку $y''' = p'$, то исходное уравнение примет вид

$$x\,p' - p = 0 \quad \text{или} \quad p' = \frac{p}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его по переменной x:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \implies \ln|p| = \ln|x| + C^* \implies p = C_1\,x, \quad \left(C_1 = \pm e^{C^*}\right).$$

Поскольку $p = y''$, то получим новое уравнение

$$y'' = C_1\,x.$$

Это уравнение второго порядка, не содержащее искомую функцию и её первую производную. Понизить порядок этого уравнения можно просто проинтегрировав его по переменной x. Тогда

$$\int y''\,dx = \int C_1\,x\,dx \implies y' = \frac{C_1}{2}\,x^2 + C_2 \implies \int y'\,dx = \int \left(\frac{C_1}{2}\,x^2 + C_2\right) dx.$$

Следовательно,

$$y = \frac{C_1}{6}\,x^3 + C_2\,x + C_3$$

– искомое общее решение.

Задача 149. Решить задачу Коши: $y'' = 64\,(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Решение. Это уравнение второго порядка, не содержащее искомую функцию и независимую переменную. Понизим его порядок с помощью замены переменных $y' = p(y)$. Тогда, поскольку $y'' = p\,p'$, то исходное уравнение примет вид

$$p\,p' - 64\,p^2 = 0 \implies p\,(p' - 64\,p) = 0 \implies \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ p' - 64\,p = 0. \end{array}\right.$$

Первое из уравнений совокупности $p = 0$, т.е. $y' = 0$ противоречит условию задачи $y'(0) = 1$. Поэтому это решение не рассматриваем.

Проинтегрируем второе уравнение совокупности по переменной y:

$$p' - 64\,p = 0 \implies \frac{dp}{p} = 64\,dy \implies \int \frac{dp}{p} = \int 64\,dy.$$

$$\ln|p| = 64\,y + C^* \implies p = C_1\,e^{64\,y}, \quad \left(C_1 = \pm e^{C^*}\right).$$

Поскольку $p = y'$, то получим новое уравнение

$$y' = C_1\,e^{64\,y}.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем его по переменной x:

$$e^{-64\,y}dy = C_1\,dx \implies \int e^{-64\,y}dy = \int C_1\,dx \implies -\frac{1}{64}\,e^{-64\,y} = C_1\,x + C_2.$$

Следовательно, выразив y, получим общее решение исходного уравнения

$$y = -\frac{1}{64}\ln\left(-64\,C_1\,x - 64\,C_2\right).$$

Для нахождения его частного решения, удовлетворяющего условию Коши, решим систему уравнений

$$\begin{cases} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1, \end{cases} \implies \begin{cases} -\dfrac{1}{64}\ln\left(-64\,C_1\cdot 0 - 64\,C_2\right) &= 0, \\ C_1\,e^{64\cdot 0} &= 1, \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 &= -\dfrac{1}{64}, \\ C_1 &= 1. \end{cases}$$

Значит искомое решение исходной задачи Коши имеет вид:

$$y = -\frac{1}{64}\ln\left(1 - 64\,x\right).$$

Задача 150. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2\,y' - 3\,y = 0$.

Решение. Для заданного дифференциального уравнения выпишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\,k - 3 = 0.$$

Его корнями являются действительные числа $k_1 = -3$, $k_2 = 1$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1\,e^{-3\,x} + C_2\,e^{x}.$$

Задача 151. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 16\,y' + 64\,y = 0$.

Решение. Для заданного дифференциального уравнения выпишем характеристическое уравнение

$$k^2 + 16\,k + 64 = 0 \implies (k+8)^2 = 0 \implies k_1 = k_2 = -8.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \left(C_1\,x + C_2\right)\,e^{-8\,x}.$$

Задача 152. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2\,y' + 5\,y = 0$.

Решение. Для заданного дифференциального уравнения выпишем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2\,k + 5 = 0 \implies (k-1)^2 + 4 = 0 \implies (k-1)^2 = -4 \implies k_{1,2} = 1 \pm 2\,i.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^{x}\Big(C_1\,\cos\left(2\,x\right) + C_2\,\sin\left(2\,x\right)\Big).$$

Задача 153. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(4)} - 4\,y''' + 6\,y'' - 4\,y' - 15\,y = 0.$$

Решение. Для заданного дифференциального уравнения выпишем характеристическое уравнение и упростим его:

$$k^4 - 4\,k^3 + 6\,k^2 - 4\,k - 15 = 0,$$

$$k^4 - 4\,k^3 + 6\,k^2 - 4\,k + 1 = 16 \quad \Rightarrow \quad (k-1)^4 = 16.$$

Его корнями являются числа $k_1 = 3$, $k_2 = -1$, $k_{3,4} = 1 \pm 2\,i$.

Число $k_1 = 3$ – простой действительный корень характеристического уравнения, значит его вклад в общее решение имеет вид: $C_1\,e^{3\,x}$.

Число $k_2 = -1$ – простой действительный корень характеристического уравнения, значит его вклад в общее решение имеет вид: $C_2\,e^{-x}$.

Числа $k_{3,4} = 1 \pm 2\,i$ – пара простых комплексно сопряженных корней характеристического уравнения, у которых $a = \mathrm{Re}(k_{3,4}) = 1$, $b = |\mathrm{Im}(k_{3,4})| = 2$, значит их вклад в общее решение имеет вид: $e^x\left(C_3\,\cos(2\,x) + C_4\,\sin(2\,x)\right)$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения –

$$y = C_1\,e^{3\,x} + C_2\,e^{-x} + e^x\left(C_3\,\cos(2\,x) + C_4\,\sin(2\,x)\right).$$

Задача 154. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' + 3\,y'' - 9\,y' - 27\,y = 0.$$

Решение. Для заданного дифференциального уравнения выпишем характеристическое уравнение

$$k^3 + 3\,k^2 - 9\,k - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-3)\,(k+3)^2 = 0.$$

Его корнями являются числа $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = -3$.

Число $k_1 = 3$ – простой действительный корень характеристического уравнения, значит его вклад в общее решение имеет вид: $C_1\,e^{3\,x}$.

Число $k_2 = -3$ – действительный корень характеристического уравнения кратности 2, значит его вклад в общее решение имеет вид экспоненты умноженной на многочлен первой степени: $(C_2\,x + C_3)\,e^{-3\,x}$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения –

$$y = C_1\,e^{3\,x} + (C_2\,x + C_3)\,e^{-3\,x}.$$

Задача 155. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(5)} + 18\,y''' + 81\,y' = 0.$$

Решение. Для заданного дифференциального уравнения выпишем характеристическое уравнение

$$k^5 + 18\,k^3 + 81\,k = 0,$$

$$k\left(k^4 + 18\,k^2 + 81\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k\,\left(k^2 + 9\right)^2 = 0.$$

Его корнями являются числа $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 3\,i$, $k_{4,5} = -3\,i$.

Число $k_1 = 0$ – простой действительный корень характеристического уравнения. Его вклад в общее решение имеет вид: $C_1\,e^{0\,x} = C_1$.

Числа $k_{2,4} = \pm 3\,i$ – пара комплексно сопряженных корней характеристического уравнения кратности 2, у которых $a = \mathrm{Re}(k_{2,4}) = 0$, $b = |\mathrm{Im}(k_{2,4})| = 3$, значит их вклад в общее решение имеет вид:

$$e^{0\,x}\Big((C_2\,x + C_3)\,\cos(3\,x) + (C_4\,x + C_5)\,\sin(3\,x)\Big) =$$
$$(C_2\,x + C_3)\,\cos(3\,x) + (C_4\,x + C_5)\,\sin(3\,x).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения –

$$y = C_1 + (C_2\,x + C_3)\,\cos(3\,x) + (C_4\,x + C_5)\,\sin(3\,x).$$

Задача 156. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2\,y' - 3\,y = x$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2\,y' - 3\,y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\,k - 3 = 0$$

имеет корни $k_1 = -3$, $k_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1\,e^{-3\,x} + C_2\,e^{x}.$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку правая часть исходного уравнения – многочлен **первой** степени и среди корней характеристического уравнения нет числа 0, то частное решение исходного уравнения будем искать в виде многочлена **первой** степени

$$y_{\text{чн}} = B_0\,x + B_1 \implies y' = B_0, \qquad y'' = 0,$$

то подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$0 + 2\,B_0 - 3\Big(B_0\,x + B_1\Big) = x \quad\Rightarrow\quad -3\,B_0\,x + \Big(2\,B_0 - 3\,B_1\Big) = x.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} -3\,B_0 &= 1, \\ 2\,B_0 - 3\,B_1 &= 0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad B_0 = -\frac{1}{3}, \quad B_1 = -\frac{2}{9}.$$

А, значит,

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{9}\,(3\,x + 2)$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1\,e^{-3\,x} + C_2\,e^{x} - \frac{1}{9}\,(3\,x + 2)\,.$$

Задача 157. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2\,y' = 4\,x - 2$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2\,y' = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\,k = 0 \quad \Rightarrow \quad k\,(k+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0,\; k_2 = -2.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1\,e^{0\,x} + C_2\,e^{-2\,x} = C_1 + C_2\,e^{-2\,x}.$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку правая часть исходного уравнения – многочлен **первой** степени и число 0 является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение исходного уравнения будем искать в виде многочлена **первой** степени, умноженного на x^1:

$$y_{\text{чн}} = x^1\left(B_0\,x + B_1\right) = B_0\,x^2 + B_1\,x \implies y' = 2\,B_0\,x + B_1, \qquad y'' = 2\,B_0.$$

Подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$2\,B_0 + 2\left(2\,B_0\,x + B_1\right) = 4\,x - 2 \quad \Rightarrow \quad 4\,B_0\,x + \left(2\,B_1 + 2\,B_0\right) = 4\,x - 2.$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{rl|l} 4\,B_0 & = 4 & x, \\ 2\,B_1 + 2\,B_0 & = -2 & x^0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} B_0 & = 1 \\ B_1 & = -2. \end{array}\right.$$

Поэтому

$$y_{\text{чн}} = x\,(x-2)$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 + C_2\,e^{-2\,x} + x\,(x-2)\,.$$

Задача 158. Решить дифференциальное уравнение $y^{(4)} + 9\,y'' = x^2 - 4$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(4)} + 9\,y'' = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^4 + 9\,k^2 = 0 \implies k^2\,\left(k^2 + 9\right) = 0 \implies k_1 = k_2 = 0,\; k_{3,4} = \pm 3\,i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = (C_1\,x + C_2)\,e^{0\,x} + C_3\,\cos(3\,x) + C_4\,\sin(3\,x).$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку правая часть исходного уравнения – многочлен **второй** степени и число 0 является корнем кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение исходного уравнения будем искать в виде многочлена **второй** степени, умноженного на x^2

$$y_{\text{чн}} = x^2\,\left(B_0\,x^2 + B_1\,x + B_2\right) = B_0\,x^4 + B_1\,x^3 + B_2\,x^2.$$

Поскольку

$$y' = 4\,B_0\,x^3 + 3\,B_1\,x^2 + 2\,B_2\,x, \quad y'' = 12\,B_0\,x^2 + 6\,B_1\,x + 2\,B_2,$$

$$y''' = 24\,B_0\,x + 6\,B_1, \quad y^{(4)} = 24\,B_0,$$

то подставив в исходное уравнение функцию и её производные и упростив его, получим:

$$24\,B_0 + 9\left(12\,B_0\,x^2 + 6\,B_1\,x + 2\,B_2\right) = x^2 - 4,$$

$$108\,B_0\,x^2 + 54\,B_1\,x + (18\,B_2 + 24\,B_0) = x^2 - 4,$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{rl|l} 108\,B_0 & = 1 & x^2 \\ 54\,B_1 & = 0 & x \\ 18\,B_2 + 24\,B_0 & = -4 & x^0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} B_0 & = \dfrac{1}{108} \\ B_1 & = 0 \\ B_2 & = -\dfrac{19}{81}. \end{array}\right.$$

Поэтому

$$y_{\text{чн}} = x^2\,\left(\frac{1}{108}\,x^2 - \frac{19}{81}\right) = \frac{1}{108}\,x^4 - \frac{19}{81}\,x^2$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1\,x + C_2 + C_3\,\cos{(3\,x)} + C_4\,\sin{(3\,x)} + \frac{1}{108}\,x^4 - \frac{19}{81}\,x^2.$$

Задача 159. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2\,y' + 3\,y = (4\,x - 2)\,e^x$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2\,y' + 3\,y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 - 2\,k + 3 = 0 \implies k_1 = 3,\, k_2 = -1.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1\,e^{3\,x} + C_2\,e^{-x}.$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку правая часть исходного уравнения – многочлен **первой** степени, умноженный на e^x, и среди корней характеристического уравнения нет числа $(\alpha \pm \beta i) = 1$, то частное решение исходного уравнения будем искать в виде многочлена **первой** степени, умноженного на e^x

$$y_{\text{чн}} = \Big(B_0\,x + B_1\Big)\,e^x.$$

Поскольку

$$y' = B_0\,e^x + \Big(B_0\,x + B_1\Big)\,e^x = \Big(B_0\,x + B_1 + B_0\Big)\,e^x,$$

$$y'' = B_0\,e^x + \Big(B_0\,x + B_1 + B_0\Big)\,e^x = \Big(B_0\,x + B_1 + 2\,B_0\Big)\,e^x,$$

то подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим:

$$\Big(B_0\,x + B_1 + 2\,B_0\Big)\,e^x - 2\,\Big(B_0\,x + B_1 + B_0\Big)\,e^x + 3\,\Big(B_0\,x + B_1\Big)\,e^x = (4\,x - 2)\,e^x,$$

$$2\,B_0\,x + 2\,B_1\Big) = 4\,x - 2.$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\,B_0 & = 1 \\ 2\,B_1 & = -2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 4, \\ x^0. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} B_0 & = 2 \\ B_1 & = -1. \end{array}\right.$$

Поэтому

$$y_{\text{чн}} = (2\,x - 1)\;e^x$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1\,e^{3\,x} + C_2\,e^{-x} + (2\,x - 1)\;e^x.$$

Задача 160. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2\,y' - 8\,y = 3\,e^{2\,x}$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2\,y' - 8\,y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\,k - 8 = 0 \implies k_1 = 2,\; k_2 = -4.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{-4\,x}.$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку правая часть исходного уравнения – константа – многочлен **нулевой** степени, умноженный на $e^{2\,x}$, и число $(\alpha \pm \beta i) = 2$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^1\,B_0\,e^{2\,x}.$$

Поскольку

$$y' = B_0\,e^{2\,x} + 2\,x\,B_0\,e^{2\,x} = B_0\left(2\,x+1\right)e^{2\,x},$$

$$y'' = 2\,B_0\,e^{2\,x} + 2\left(2\,B_0\,x + B_0\right)e^{2\,x} = B_0\left(4\,x+4\right)e^{2\,x},$$

то подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим:

$$B_0\left(4\,x+4\right)e^{2\,x} + 2\,B_0\left(2\,x+1\right)e^{2\,x} - 8\,B_0\,x\,e^{2\,x} = 3\,e^{2\,x}, \quad \Rightarrow \quad B_0 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$y_{\text{чн}} = \frac{1}{2}\,x\,e^{2\,x}$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{-4\,x} + \frac{1}{2}\,x\,e^{2\,x}.$$

Задача 161. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2\,y' + 5\,y = 4\,\cos x + x\,\sin x.$$

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2\,y' + 5\,y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\,k + 5 = 0 \implies k_{1,2} = -1 \pm 2\,i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = e^{-x}\left(C_1\,\cos(2\,x) + C_2\,\sin(2\,x)\right).$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку:

во-первых правая часть исходного уравнения – сумма косинуса и синуса (с аргументами x, т.е. $\beta = 1$, $\alpha = 0$), умноженных на многочлены **нулевой** и **первой** степени соответственно (т.е. $n = 0$, $m = 1$), и

во-вторых среди корней характеристического уравнения нет чисел $\pm i$,

то частное решение исходного уравнения будем искать в виде суммы косинуса и синуса (с теми же аргументами x), умноженных на многочлены **первой** степени (т.к. $\max(0;\,1) = 1$)

$$y_{\text{чн}} = \left(A_0\,x + A_1\right)\cos x + \left(B_0\,x + B_1\right)\sin x.$$

Поскольку

$$y' = \left(B_0\,x + A_0 + B_1\right)\cos x + \left(-A_0\,x - A_1 + B_0\right)\sin x,$$

$$y'' = \Big(-A_0\,x - A_1 + 2\,B_0 \Big)\,\cos x + \Big(-B_0\,x - 2\,A_0 - B_1 \Big)\sin x,$$

то подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$\Big((4\,A_0 + 2\,B_0)\;x + (2\,A_0 + 2\,B_0 + 4\,A_1 + 2\,B_1) \Big)\,\cos x +$$
$$+ \Big((-2\,A_0 + 4\,B_0)\;x + (-2\,A_0 + 2\,B_0 - 2\,A_1 + 4\,B_1) \Big)\,\sin x =$$
$$= 4\,\cos x + x\,\sin x.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 4\,A_0 + 2\,B_0 &= 0, \\ 2\,A_0 + 2\,B_0 + 4\,A_1 + 2\,B_1 &= 4, \\ -2\,A_0 + 4\,B_0 &= 1, \\ -2\,A_0 + 2\,B_0 - 2\,A_1 + 4\,B_1 &= 0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A_0 = -\dfrac{1}{10}, & A_1 = \dfrac{41}{50}, \\ B_0 = \dfrac{1}{5}, & B_1 = \dfrac{13}{50}. \end{cases}$$

Поэтому

$$y_{\text{чн}} = \left(-\frac{1}{10}\,x + \frac{41}{50} \right)\,\cos x + \left(\frac{1}{5}\,x + \frac{13}{50} \right)\,\sin x$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = e^{-x}\Big(C_1\,\cos(2\,x) + C_2\,\sin(2\,x) \Big) +$$
$$\left(-\frac{1}{10}\,x + \frac{41}{50} \right)\,\cos x + \left(\frac{1}{5}\,x + \frac{13}{50} \right)\,\sin x.$$

Задача 162. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4\,y = -\cos(2\,x)$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 4\,y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 4 = 0 \implies k_{1,2} = \pm 2\,i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1\,\cos(2\,x) + C_2\,\sin(2\,x).$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку:

во-первых правая часть исходного уравнения – косинус (с аргументом $2\,x$, т.е. $\beta = 2$, $\alpha = 0$), умноженный на многочлен **нулевой** степени (т.к. $n = 0$, $m = 0$ и $Q_m = 0$), и

во-вторых числа $\pm 2\,i$, являются простыми корнями характеристического уравнения, то частное решение исходного уравнения будем искать в виде произведения выражения x^1 на сумму косинуса и синуса (с теми же аргументами $2\,x$), умноженных на многочлены **нулевой** степени

$$y_{\text{чн}} = x\Big(A_0\,\cos(2\,x) + B_0\,\sin(2\,x)\Big).$$

Поскольку

$$y' = \Big(2\,B_0\,x + A_0\Big)\,\cos(2\,x) + \Big(-2\,A_0\,x + B_0\Big)\,\sin(2\,x),$$

$$y'' = \Big(-4\,A_0\,x + 4\,B_0\Big)\,\cos(2\,x) + \Big(-4\,B_0\,x - 4\,A_0\Big)\sin(2\,x),$$

то подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$4\,B_0\,\cos(2\,x) - 4\,A_0\,\sin(2\,x) = -\cos(2\,x).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 4\,B_0 &= -1, \\ -4\,A_0 &= 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_0 &= 0, \\ B_0 &= -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Поэтому

$$y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}\,x\,\sin(2\,x)$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1\,\cos(2\,x) + C_2\,\sin(2\,x) - \frac{1}{4}\,x\,\sin(2\,x).$$

Задача 163. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2\,y' + y = e^x\,(x+1)\,\sin x.$$

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид $y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$.

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2\,y' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\,k + 1 = 0 \implies k_{1,2} = -1.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = (C_1\,x + C_2)\,e^{-x}.$$

2) Найдём частное решение исходного неоднородного уравнения. Поскольку в правой части уравнения:

во-первых среди корней характеристического уравнения нет чисел $1 \pm i$, значит $r = 0$,

во-вторых синус умножается на многочлен **первой** степени (т.е. $n = 0$, $P_n = 0$ и $m = 1$),

то частное решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^0\, e^x \Big((A_0\, x + A_1) \cos x + (B_0\, x + B_1) \sin x \Big),$$

$$y_{\text{чн}} = e^x \Big((A_0\, x + A_1) \cos x + (B_0\, x + B_1) \sin x \Big).$$

Так как

$$y' = e^x \Big(\big((A_0 + B_0)\, x + A_0 + A_1 + B_1 \big) \cos x + \\ + \big((-A_0 + B_0)\, x - A_1 + B_0 + B_1 \big) \sin x \Big),$$

$$y'' = e^x \Big(\big(2\, B_0\, x + 2\, A_0 + 2\, B_0 + 2\, B_1 \big) \cos x + \\ + \big(-2\, A_0\, x - 2\, A_0 - 2\, A_1 + 2\, B_0 \big) \sin x \Big)$$

то подставив y, y' и y'' в исходное уравнение, получим

$$\Big((3\, A_0 + 4\, B_0)\, x + (4\, A_0 + 2\, B_0 + 3\, A_1 + 4\, B_1) \Big) \cos x + \\ + \Big((-4\, A_0 + 3\, B_0)\, x + (4\, B_0 - 2\, A_0 - 4\, A_1 + 3\, B_1) \Big) \sin x = (x + 1) \sin x,$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 3\, A_0 + 4\, B_0 & = 0, \\ 4\, A_0 + 2\, B_0 + 3\, A_1 + 4\, B_1 & = 0, \\ -4\, A_0 + 3\, B_0 & = 1, \\ 4\, B_0 - 2\, A_0 - 4\, A_1 + 3\, B_1 & = 1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_0 = -\dfrac{4}{25}, & A_1 = \dfrac{2}{125}, \\ B_0 = \dfrac{3}{25}, & B_1 = \dfrac{11}{125}. \end{cases}$$

Поэтому

$$y_{\text{чн}} = e^x \left(\left(-\frac{4}{25}\, x + \frac{2}{125} \right) \cos x + \left(\frac{3}{25}\, x + \frac{11}{125} \right) \sin x \right)$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = (C_1\, x + C_2)\, e^{-x} + \\ + e^x \left(\left(-\frac{4}{25}\, x + \frac{2}{125} \right) \cos x + \left(\frac{3}{25}\, x + \frac{11}{125} \right) \sin x \right).$$

Литература

[1] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.1: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1999. – 304 с.: ил.

[2] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1999. – 416 с.: ил.

[3] Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Издательство Айрис-пресс, 2013.

[4] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 200, 176 стр.

[5] Шипачёв В. С. Высшая математика. Учебное пособие для бакалавров. Издательство Юрайт, 2013.

Содержание