

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ



**К.Н. Матюхин,
Е.Б. Биктеева**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
И ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ
ЭКСПЛУАТАЦИИ
ТРАНСПОРТНОГО
РАДИООБОРУДОВАНИЯ**

Учебное пособие

Москва

2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)»**

**Кафедра технической эксплуатации радиоэлектронного
оборудования воздушного транспорта**

К.Н. Матюхин, Е.Б. Биктеева

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
И ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ
ЭКСПЛУАТАЦИИ
ТРАНСПОРТНОГО
РАДИООБОРУДОВАНИЯ**

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия

Москва
2019

УДК

ББК 0561-082

М-35

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

Петров В.И. (МГТУ ГА) – канд. техн. наук, доцент;

Полосин С.А. (ГосНИИ АС) – ведущий специалист

Матюхин К.Н.

М-35 Моделирование систем и процессов в задачах эксплуатации транспортного радиооборудования: учебное пособие. /К.Н. Матюхин, Е.Б. Биктеева. — Воронеж: ООО «МИР», 2019. — 96 с.

ISBN

Учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Моделирование систем и процессов в задачах эксплуатации транспортного радиооборудования» по учебному плану для студентов III и IV курсов специальности 25.05.03 всех форм обучения.

В Учебном пособии приведен материал по основным вопросам моделирования на персональных компьютерах (ПК) радиосистем и радиоустройств, а также входных воздействий с учетом воздействий случайного характера. Изложены: общие вопросы моделирования; моделирование сигналов детерминированного и случайного характера; основные методы моделирования на ПК линейных и нелинейных систем и математические методы преобразования воздействий в радиоустройствах; вопросы статистической обработки результатов моделирования и оптимизации параметров радиоустройств по показателям качества. Рассмотрение вопросов моделирования предполагает использование наиболее перспективных на данном этапе сред программирования и программного обеспечения, среди которых особое внимание уделяется программам «Mathcad» и «Matlab».

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 19.06.2019 г. и методического совета 19.06.2019 г.

В авторской редакции.

ББК 0561-082

Св. тем. план 2019 г.

поз.11

ISBN

© Московский государственный
технический университет ГА, 2019

Содержание

1. Общие сведения о моделировании	5
1.1. Основные понятия и определения	5
1.2. Основные задачи при моделировании	6
1.3. Структурная схема моделирования	7
1.4. Классификация математических моделей	8
1.5. Методология имитационного моделирования	9
1.6. Классификация, выбор и обоснование методов математического моделирования	14
1.7. Классификация функциональных звеньев РТУ и С	16
2. Математические модели воздействий на радиоустройства	17
2.1. Классификация воздействий и радиосигналов. Элементарные сигналы	17
2.2. Дискретизация и квантование непрерывных воздействий	22
2.3. Методы и алгоритмы моделирования воздействий	25
2.3.1. Моделирование детерминированных сигналов	25
2.3.2. Методы моделирования случайных величин	28
2.3.3. Моделирование случайных величин с типовыми законами распределения	31
2.3.4. Общий принцип моделирования случайных процессов	33
2.3.5. Методы и алгоритмы моделирования СП с нормальным законом распределения	35
2.3.6. Моделирование стационарного СП, порождаемого нормальным процессом	38
2.3.7. Моделирование нестационарных, случайных процессов	40
2.3.8. Моделирование марковских, случайных процессов	41
2.3.9. Моделирование случайных потоков	42
3. Математические модели преобразований воздействий в радиоустройствах	44
3.1. Постановка задач моделирования систем. Общие сведения о линейных и нелинейных системах	44
3.2. Классификация методов математического моделирования радиоустройств	45
3.3. Методы и алгоритмы моделирования линейных инерционных систем	48
3.3.1. Принцип дискретной аппроксимации непрерывной линейной инерционной системы	48
3.3.2. Метод дискретной свертки	51
3.3.3. Метод рекуррентных разностных уравнений	53
3.3.4. Метод отображения	56
3.3.5. Частотный метод	57
3.3.6. Метод конечных разностей	58
3.3.7. Моделирование узкополосных линейных устройств методом комплексной огибающей	59
3.3.8. Моделирование узкополосных линейных устройств методом низкочастотного эквивалента	60
3.4. Алгоритмы моделирования наиболее употребляемых звеньев	61

3.5. Моделирование нелинейных преобразований узкополосных воздействий	64
3.5.1. Структуры нелинейных преобразований узкополосных воздействий	64
3.5.2. Алгоритмы моделирования типовых нелинейных элементов	66
3.6. Моделирование сложных РТУ и С	69
3.6.1. Общие сведения о моделировании сложных РТУ и С	69
3.6.2. Метод статистических эквивалентов	69
3.6.3. Метод информационного параметра	71
3.7. Общие сведения о методах повышения точности моделирования	76
3.7.1. Ошибки дискретизации	76
3.7.2. Ошибки округления, вызванные конечной длиной слов (машинных кодов) в ПК	77
4. Обработка и интерпретация результатов моделирования радиоустройств	77
4.1. Анализ характеристик процесса на выходе модели	77
4.1.1. Оценка статистических характеристик случайного выходного параметра модели	78
4.2. Методы проверки адекватности модели и оригинала	81
4.3. Представление результатов моделирования в виде гистограмм	81
5. Оптимизация параметров радиоустройств с помощью математических моделей	83
5.1. Общие сведения о проблеме оптимизации	83
5.2. Методы синтеза параметров радиоустройств	85
Литература	94

1. Общие сведения о моделировании.

1.1. Основные понятия и определения.

Техническая эксплуатация авиационного (РЭО) неразрывно связана с оценкой его характеристик: эксплуатационных, тактических и технических. Эксплуатационные характеристики связаны с качеством технической эксплуатации РЭО, с работой средств контроля, а также с полнотой контроля и достоверностью оценки работоспособного состояния РЭО.

Под тактическими понимают характеристики, описывающие возможности практического использования РЭО для решения задач радиолокации, радионавигации и связи. Так для радиолокационных станций (РЛС) основными тактическими характеристиками являются: зона действия (сектор обзора), дальность действия, точность получения координат цели, разрешающая и пропускная способности, помехозащищенность и другие.

Тактические характеристики реализуются за счет выбора и поддержания на требуемом уровне технических характеристик. Для РЛС это следующие характеристики: несущая частота, параметры сигнала (длительность, период повторения, ширина спектра), мощность передатчика, чувствительность приемника, характеристика антенны и ряд других.

В настоящее время существуют три основных метода оценки характеристик РЭО: расчетный (аналитический), натуральных испытаний и опытно-теоретический.

Расчетный метод заключается в аналитических расчетах характеристик РЭО с использованием общих отношений и формульных зависимостей, основанных на положениях теории эксплуатации, локации, навигации и связи.

Метод натуральных испытаний РЭО подразумевает снятия характеристик конкретной аппаратуры. Он лишен недостатка аналитического метода, связанного с расчетами при ряде допущений. Так включив на стенде (или на борту на стоянке самолета) реальное РЭО, можно снять и реальные характеристики. Однако, когда речь идет об авиационном РЭО, эти характеристики не всегда удовлетворяют решаемым задачам технической эксплуатации. Поэтому допущения при наземных натуральных испытаниях все же остаются. Главное из них, как правило, связано со статикой испытательных сигналов. Так уровень сигнала не изменяется, как это происходит в реальном полете. Не изменяются и другие параметры радиосигнала (задержка, фаза и т.д.), что происходит, например, в радионавигационных системах при приеме сигналов радиомаяка в полете.

Поэтому в настоящее время при проектировании и испытаниях сложных систем широко применяется *опытно-теоретический метод* оценки характеристик РЭО. Натурные испытания используются в небольшом объеме при широком применении математического моделирования на ПК. Это позволяет решить ряд проблем, в том числе связанных с имитацией динамики полета самолета.

Моделированием называется метод изучения системы путем исследования замещающей ее модели с переносом, полученной информации на изучаемый объект. Моделирование связано с математическим описанием сущности явлений, процессов, протекающих в реальной системе, которое позволяет прогнозировать поведение системы и оценивать ее характеристики при изменении входных воздействий и параметров.

Изучаемый объект называют обычно оригиналом, а испытываемый – моделью. Оригинал и модель должны находиться в отношении подобия, кото-

рое должно быть достаточно строго определено. Подобие может заключаться либо в сходстве физических характеристик, либо в сходстве функций, выполняемых моделью и оригиналом, либо в тождестве математического описания поведения модели и оригинала в сходных условиях.

В зависимости от способа воплощения оригинала в модели различают физическое, математическое и смешанное моделирование. При физическом моделировании оригинал замещается моделью, сохраняющей его физическую природу (лабораторный макет радиоустройства). При математическом моделировании модель представляется в виде формул, уравнений, описывающих процессы в исследуемом объекте. Имитация работы оригинала осуществляется на основе этих формул и уравнений по программе, составленной для ПК.

Смешанная модель состоит из математической модели и части оригинала исследуемой системы. Математическая модель должна работать в реальном масштабе времени, так как она сопряжена с частью оригинала. Смешанное моделирование проводится тогда, когда часть радиосистемы уже изготовлена, а другая часть еще отсутствует (не изготовлена или модернизируется).

Весьма важно учитывать, что для исследования радиосистемы на ПК, необходимо ее математическую модель преобразовать в цифровую – специальный моделирующий алгоритм, который можно реализовать на ПК.

1.2. Основные задачи при моделировании.

К числу основных задач, которые приходится решать методом математического моделирования по эксплуатации авиационного РЭО, относятся следующие:

- оценка качества функционирования РЭО в конкретных условиях эксплуатации (оценка показателей помехоустойчивости, электромагнитной совместимости, надежности и т.д.);
- оптимизация структуры, режимов и параметров РЭО с учетом конкретных внешних воздействий;
- оценка эффективности процессов технической эксплуатации РЭО и оптимизация их параметров;
- оптимизация проектного решения устройств цифровой обработки сигналов перед этапом аппаратурной реализации (цифровых фильтров и т.п.).

Поэтому задачи моделирования РЭО по характеру можно разделить на две большие группы: задачи анализа и задачи синтеза.

Задача анализа (или прямая задача): заданы характеристики объекта моделирования и условия его функционирования; требуется определить показатели качества функционирования объекта. Для РЭО условия функционирования – это совокупность помех и сигналов, действующих на объект моделирования, отказы элементов объекта в силу их ненадежности, изменение параметров внешней среды и т.п.

Показатель качества функционирования – это количественный показатель, характеризующий степень достижения цели функционирования объекта. Например, вероятность правильной передачи информации за заданный промежуток времени, ошибка измерения координат радиолокационной цели и т.п. Радиоинженеру по эксплуатации РЭО чаще всего приходится решать задачи анализа качества функционирования РЭО в конкретных условиях эксплуатации

с учетом требований электромагнитной совместимости РЭО различных типов, отказов элементов и нестационарности воздействий внешней среды.

Задача синтеза (обратная задача): заданы характеристики условий функционирования объекта и требования к показателям качества функционирования; требуется определить структуру и характеристики объекта моделирования, при которых обеспечиваются значения показателей качества не хуже требуемых. Частным видом задачи синтеза является задача синтеза параметров объекта (или задача оптимизации параметров), структура которого задана (известна).

Метод математического моделирования на ПК применим для решения задач анализа и синтеза параметров. Задача синтеза в общем виде с помощью данного метода может решаться только в рамках дискретного синтеза, то есть путем выбора наилучшего объекта из ограниченного набора объектов простым перебором. При этом показатели качества, по которым осуществляется оптимизация, определяется в результате решения задачи анализа для каждого объекта из указанного набора.

1.3. Структурная схема моделирования.

Обычно сложную систему при математическом моделировании разбивают на подсистемы и блоки. Частные модели подсистем и блоков отражают наиболее существенные функции и характеристики сложной системы. Такой путь моделирования менее трудоемкий, более гибкий и может быть реализован на ПК различных типов. Цифровые модели подсистем могут иметь самостоятельную ценность и реализовываться на ПК с ограниченной емкостью ОЗУ.

Математическое описание (формализацию) процессов, протекающих в РЭО, лучше проводить поблочно или поэлементно. Уровень разбиения РЭО на блоки и элементы зависит от вида решаемой задачи. Составив блочную структуру РЭО, можно объединить тесно связанные элементы. Блочное построение модели облегчает ее управление и организацию программирования на ПК.

Структурная схема моделирования РЭО приведена на рис. 1.1.



Рис. 1.1.

Математическое описание для моделей воздействий к модели объекта проводится с помощью единых математических представлений. Модель воздействий представляет собой генератор отдельных реализаций воздействий на объект. Такими воздействиями в задачах анализа процессов технической эксплуатации авиационного РЭО могут быть сигналы, помехи, переключения режимов работы (регулярные воздействия), отказы оборудования (случайные воздействия) и другие возмущения.

Воздействия могут быть внешними и внутренними. Так имитация переключений штатных режимов оператором РЭО должна быть в модели внешней.

Она требует диалогового режима работы алгоритма математической модели. Внутренние воздействия связаны, например, с моделированием внутреннего шума приемоусилительных устройств и других помех внутреннего происхождения.

Воздействия на модель извне считаются внешними. Модель объекта моделирует реакцию устройств на входные воздействия. Сложность модели объекта определяется точностью описания элементов РЭО и задания исходных данных, а также заданной точностью статистических оценок характеристик РЭО при моделировании.

В состав структурной схемы модели входит блок интерпретации результатов. Эта часть модели обрабатывает результаты моделирования. При этом могут определяться среднеквадратическая ошибка, показатели надежности и другие показатели качества функционирования и эксплуатации РЭО.

По данной схеме реализуется прямой вероятностный метод математического моделирования. На модели воспроизводится процесс функционирования оригинала. Причем достигается прямое структурное сходство модели и оригинала (имитация). Это позволяет в ходе моделирования изменять параметры модели. Вероятностный – считается потому, что оценка показателя качества функционирования находится методом статистических испытаний (Монте-Карло). При этом производится серия независимых экспериментов с моделью (при разных реализациях воздействия) и статистическая обработка полученных результатов. Точность статистических оценок определяется, как правило, общим количеством испытаний в серии и слабо зависит от точности единичного эксперимента.

1.4. Классификация математических моделей.

Основными характеристиками модели являются тип рабочего сигнала, способ представления модели, характер зависимостей, уравнения и т.д. Все это приводит к достаточно разветвленной классификации математических моделей РЭО. Так по способу представления моделей различают аналитические, алгоритмические, табличные, графические модели и схемы замещения.

В *аналитической модели* решается некоторое уравнение вида $F(x_{i,j}) = 0$. Причем модель обычно бывает проста, так как получение общей функциональной зависимости $F(x_{i,j})$ для сложной системы не всегда возможно.

Алгоритмические модели наиболее универсальны. Их удобно использовать для моделирования как отдельного элемента РЭО, например, фильтра, так и для блоков и системы в целом.

Табличные модели часто используются как составляющие общей модели РЭО. Это быстрые модели и частое обращение к ним незначительно увеличивает машинное время. Табличные модели используются часто при моделировании входных воздействий.

Графические модели – новое направление моделирования, получившее широкое распространение при работе на ПК. Работа с графикой предусматривается в интегрированных пакетах ПК для автоматизированных рабочих мест (АРМ), в обучающих программах и т.д.

Схемы замещения используются для упрощенного списания отдельных явлений в реальной схеме РЭО с учетом определенных допущений и ограничений.

В системах проектирования РЭО классификация моделей производится по уровню проектирования. В этом случае модели представляются для структурного, функционального, логического и схемотехнического моделирования.

Структурное моделирование ограничивается сходством на уровне структурной схемы объекта, представляющей состав и взаимосвязь достаточно крупных блоков РЭО.

Исходными данными для структурного проектирования РЭО являются:

- тип блоков и элементов, входящих в состав объекта;
- параметры и характеристики отдельных блоков, например, надежность, точность, пропускная способность блоков и другие;
- требования к выходным параметрам и характеристикам объекта в целом.

Функциональное моделирование связано с исследованием процесса преобразования входного воздействия на уровне функциональной схемы объекта. При этом выполняются следующие операции:

- разбиение РЭО на типовые, функциональные звенья и элементы, выполняющие известный вид преобразования сигнала (усиление, ограничение, фильтрацию и т.п.);
- расчет формы сигнала и его основных параметров на выходе каждого звена функциональной схемы объекта, включая выходное звено объекта.

Основным требованием при функциональном моделировании является высокая скорость работы программы, необходимая для исследования различных вариантов модели и имитации большого числа реализаций входных воздействий.

Проектирование дискретной вычислительной техники на уровне функциональной схемы требует применения *логического моделирования*. Модель на уровне логических элементов позволяет проверить правильность логического функционирования устройства, а также исследовать временные характеристики процессов.

Схемотехническое моделирование применяется при моделировании РЭО на уровне принципиальной электрической схемы. Типовыми задачами этого вида моделирования являются:

- расчет статического режима элемента схемы для составления карт режимов по постоянному току;
- расчет переходных процессов в схеме;
- расчет частотных характеристик схемы.

Полученные результаты могут использоваться для оценки параметров сигналов, чувствительности схемы к вариации характеристик ее элементов, оптимизации параметров схемы и др.

1.5. Методология имитационного моделирования.

Известно, что сущность функционирования любой радиосистемы состоит в извлечении и (или) передаче на расстояние информации с помощью радиоволн. Следовательно, РТУ и С относятся к широкому классу информационных

систем, главной функцией которых является функции передачи и приема информации (или сигналов), несущих эту информацию со входа на выход при минимальных искажениях. Так специалисту по эксплуатации авиационного РЭО приходится иметь дело со следующими типами радиосистем:

- системы передачи и приема информации (СПИ) от отправителя к получателю;

- радиолокационные системы (РЛС), или системы извлечения информации, обеспечивающие обнаружение, сопровождение движущихся объектов и измерение их координат;

- радионавигационные системы (РНС), обеспечивающие определение местоположения и параметров движения различных движущихся объектов на самих объектах;

- радиосистемы управления (РСУ) технологическими процессами и различными объектами на расстоянии.

Радиосистема как объект моделирования обладает следующими особенностями:

- большое число элементов, функциональных связей между ними и в ряде случаев вероятностный характер их возникновения;

- случайный характер внешних и внутренних воздействий;

- высокое быстродействие, так как процессы, связанные с преобразованием радиосигналов, протекают намного быстрее по сравнению с информационными процессами;

- большое число показателей качества функционирования.

Для решения данных задач часто используется имитационное моделирование.

В широком смысле имитационное моделирование представляет собой процесс создания логико-математической модели исследуемой системы, описывающей ее структуру и поведение в заданных условиях. В результате создается моделирующий алгоритм, записанные в виде программы для ПК. С имитационной моделью на ПК проводится эксперимент с целью получения информации о функционировании системы в заданных условиях на определенном временном интервале.

Будучи алгоритмической по способу представления, имитационная модель может быть создана практически для любой системы. Внесение изменений в имитационную модель проще, чем в аналитическую.

Рассмотрим этапы имитационного моделирования, полная или частичная реализация которых обычно возможна для любого вида РЭО.

Начальным этапом является формулировка задачи моделирования. Прежде всего, нужно задать *цели моделирования и ограничения*. В значительной степени это зависит от типа радиосистемы и заданной глубины ее исследования. Специалисту по технической эксплуатации транспортного радиооборудования (наземного или бортового) приходится иметь дело со следующими видами РЭО: системы передачи информации (радиосвязи), радиолокационные системы, радионавигационные системы, радиосистемы управления технологическими процессами и объектами, системы технической диагностики РЭО.

В соответствии с целями исследования для данного вида РЭО на втором этапе разрабатывается *предварительное неформализованное описание*, при ко-

тором выделяются наиболее существенные элементы и связи. Именно после второго этапа можно сделать вывод о целесообразности имитационного моделирования.

Далее осуществляется *формализация (математическое описание) модели* в терминах выбранной математической теории. Причем при моделировании на ПК особенности РЭО приводят к необходимости:

- понижения размерности модели по сравнению с оригиналом за счет упрощения связей между элементами радиосистемы;
- применения специальных методов моделирования, учитывающих различие в скорости протекания физических и информационных процессов;
- сокращения до минимума числа испытаний модели при условии получения достаточно достоверных результатов моделирования.

Однако при этом возникает проблемная ситуация, которая состоит в том, что каждому типовому радиозвену можно привести в соответствие несколько математических моделей, которые различаются точностью представления оригинала и сложностью их реализации на ПК. Как правило, более точная модель является и более сложной, то есть требует больших вычислительных затрат, используя дополнительный объем памяти и временные показатели. Поэтому уровень сложности описания модели часто понижают, используя следующие общие принципы выбора типа модели.

– *Принцип специализации.*

В этом случае вместо сложной модели для оценки нескольких показателей качества оригинала строятся ряд простых моделей. Каждая из них позволяет оценить только один показатель и исследуется отдельно, но с учетом результатов моделирования других моделей. Например, можно строить модели надежности, пропускной способности, помехоустойчивости и т.д.

– *Принцип декомпозиции.*

Он содержит процедуру расщепления несущественных связей в объекте и фиксации существенных, исходя из существа решаемой задачи. При этом реализуется функциональный принцип моделирования, при котором для определенного режима работы модель является соединением типовых радиозвеньев с известными свойствами (полосовой фильтр, преобразователь частоты, детектор, усилитель и т.д.).

– *Принцип блочного представления.*

При нем используется объединение нескольких функциональных звеньев в блоки, и модель строится из укрупненных блоков и типовых звеньев. Упрощение модели достигается за счет того, что:

- некоторые функциональные звенья полностью исключаются из рассмотрения (несущественные связи);
- ряд звеньев заменяются идеальными связями, обеспечивающими операции тождественного преобразования сигналов (передачу без искажений);
- часть звеньев (часто периферийных) заменяется эквивалентными воздействиями.

– *Принцип ограничения диапазона изменения параметров и воздействий.*

В этом случае реализуется ограниченный диапазон изменения параметров оригинала и входных воздействий, что позволяет применить метод «замораживания» параметра (считать его неизменным в течение определенных отрезков

времени). Причем, при условии малости входных воздействий, некоторые нелинейные звенья могут быть линеаризованы.

– *Принцип эквивалентности.*

В модель включается эквивалент сложного звена или части системы. Так звено, работающее в условиях воздействия шума, можно заменить его статистическим эквивалентом по принципу равенства математических ожиданий выходных реакций исходного звена и эквивалента. А эффект воздействия шума учитывается путем добавления к выходной флуктуационной составляющей, найденной при анализе звена на подготовительном этапе. Поэтому структура эквивалента обычно намного проще структуры оригинала. Простота эквивалента покупается за счет потери универсальности, так как эквивалентность обеспечивается при ограниченном наборе входных воздействий.

После этапа формализации математической модели осуществляется подготовка исходных данных для имитационного моделирования. В условиях недостаточной априорной информации выдвигаются необходимые рабочие гипотезы о свойствах объекта.

Описание системы, составленное по ее функциональной схеме с использованием определенного базиса операторов, позволяющих по входным воздействиям найти реакцию системы в общем виде, назовем обобщенной математической моделью или формальным описанием.

Чтобы составить формальное описание, необходимо, используя функциональную схему системы, ввести множество характеризующих ее параметров и базис операторов, которые устанавливают отношения между этими параметрами. Поэтому первым шагом при построении формального описания системы является определение множества ее параметров

$$\mathbf{Q} = \{q_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и базиса операторов

$$\mathbf{A} = \{a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Под параметрами системы далее понимаются постоянные или переменные во времени величины, которые характеризуют состояние системы в данный момент времени, задают ее свойства и характеристики. При этом структура системы определяется ее функциональной схемой, элементы которой должны быть описаны соответствующими операторами a_i из множества \mathbf{A} .

Все параметры радиосистемы можно разбить на четыре подмножества

$$\mathbf{Q} = \{V, \alpha, \beta, \gamma\},$$

где $V = \{v_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) – фазовые переменные (координаты) системы; $\alpha = \{\alpha_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, l$) – внешние параметры; $\beta = \{\beta_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) – внутренние параметры; $\gamma = \{\gamma_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – выходные параметры.

Оператор A_j ($j = 1, 2, \dots, m$) представляет собой правило, по которому каждому элементу x_j множества \mathbf{X} входных переменных (детерминированных или случайных) ставится в однозначное или взаимнооднозначное соответствие элемент y_j множества \mathbf{Y} выходных переменных. При этом имеет место следующее операторное уравнение:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}. \tag{1.1}$$

Вследствие этого принято называть:

– внешними параметрами системы - физические величины, численные значения которых определяют характеристики входных переменных $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\alpha, t)$;

– внутренними параметрами системы - физические величины, численные значения которых характеризуют свойства функциональных звеньев, образующих систему и описываемых операторами $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\beta)$;

– выходными параметрами системы - физические величины, численные значения которых характеризуют качество работы системы, которые позволяют оценить правильность работы и выполнение системой поставленной задачи. Они определяются переменными \mathbf{Y} .

С учетом введенных внешних и внутренних параметров операторное уравнение (1.1) принимает вид

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}(\beta) \cdot \mathbf{X}(\alpha, t), \quad (1.2)$$

где α и β в свою очередь могут быть функциями времени t .

Формальная схема системы, отображающая это описание, показана на рис. 1.2.

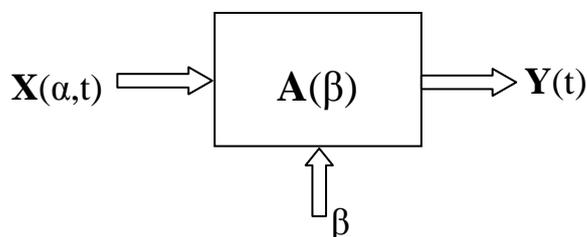


Рис. 1.2.

По документации, подготовленной на рассмотренных выше начальных четырех этапах, осуществляется разработка алгоритма и программная реализация модели. Используются универсальные программные средства или специальные программные средства. Причем при выборе языков и ПО следует учитывать:

- удобство программирования научных расчетов;
- независимость от типа ПК;
- переносимость программ из одного ПО в другое, а также из одной операционной системы в другую;
- удобство при описании сложных структур данных, отличающихся от числовых;
- удобство доступа к устройствам ввода/вывода.

Ранее отмечалось, что для облегчения моделирования на ПК разработан целый перечень программного обеспечения (ПО): Microcap, Matlab, Mathcad, P-Spice, Or-cad и др. Однако с позиции научных и технических расчетов наибольшей популярностью пользуются программные среды Matlab и Mathcad. Основная причина этой популярности кроется в том, что они дали ученым и инженерам возможность с непревзойденной легкостью применять к произвольным данным, представленным в виде векторов и матриц, разнообразнейшие численные алгоритмы. При этом используется удобный язык программирования высокого уровня, в котором благодаря матричной ориентации системы значительно уменьшилась необходимость в циклах, что еще больше расширило сферу применения данных сред при моделировании объектов в процессе их исследования и оптимизации параметров. Важным достоинством является то, что

вычисления в процессе моделирования обработка результатов проводится с действительными и комплексными числами. Это значительно упрощает процедуру графического представления переходных процессов с колебательной характеристикой во временной области, а также модуля и фазы – в спектральной области. Данные пакеты обладают достаточно удобными окнами графического отображения результатов, как в двумерном, так и в трехмерном пространстве с процедурой анимации. Здесь важно отметить, что, если приведенные пакеты обрабатывают математические выражения в процессе моделирования, то ПО Matlab дополняется еще расширением Simulink.

Simulink – это графическая среда моделирования аналоговых и дискретных систем. Моделирование производится введением в окно создаваемой модели блоков из библиотеки, входящую в состав среды, и соединением между блоками необходимыми связями. Большое число имеющихся библиотек позволяет моделировать самые разнообразные электрические, механические, гидравлические и другие системы. После создания модели запускается процесс моделирования, и Simulink создаст систему дифференциальных уравнений, описывающих модель, и начнет выполнять ее решение численным методом. Следует отметить, что в одно окно дисплея можно поместить множество других необходимых окон. Так одновременно можно отобразить кроме окна модели, окна трехканального осциллографа, анализатора спектра, графика импульсной характеристики фильтра и др. Причем в процессе моделирования графики постоянно обновляются. Более подробно о данных программах можно прочитать в изданиях [1,2].

1.6. Классификация, выбор и обоснование методов математического моделирования.

Главным признаком, по которому производится выбор метода моделирования, является способ представления входных воздействий (сигналов и помех). Этот признак определяет сложность всего процесса моделирования. Входное воздействие можно представить в виде: - модулированного высокочастотного сигнала (радиосигнала) $u_c[t, \lambda_c(t)]$, где $\lambda_c(t)$ – информационный параметр (например, передаваемое сообщение); - комплексной огибающей сигнала $\check{U}_c[t, \lambda_c(t)]$, информационного параметра $\lambda_c(t)$.

В зависимости от этого различают следующие методы моделирования:

- метод несущей;
- метод комплексной огибающей;
- формульный метод;
- метод статистических эквивалентов;
- метод информационного параметра.

Метод несущей основан на воспроизведении в модели сигналов и помех с точностью до мгновенных значений напряжений и токов в элементах РТУ. При этом моделирование осуществляется с наибольшей полнотой, так как в модели воспроизводится переносчик информации – радиосигнал. Однако этот метод приводит к большим затратам машинного времени и при моделировании на ПК используется редко.

Метод комплексной огибающей основан на учете узкополосного характера радиосигналов и РТУ, когда выполняется условие $\Delta f_c \approx \Delta f \ll f_0 \approx f_c$, где

Δf_c – ширина спектра модулированного высокочастотного колебания; Δf – ширина полосы пропускания РТУ; f_0 – частота настройки высокочастотного тракта РТУ, примерно равная несущей частоте f_c сигнала.

В этом случае радиосигнал можно записать в комплексной (символической) форме

$$u_c[t, \lambda_c(t)] = \operatorname{Re} \{ \check{U}_c[t, \lambda_c(t)] \cdot \exp(j\omega_c \cdot t) \}, \quad (1.3)$$

где $\check{U}_c[t, \lambda_c(t)] = U_c[t, \lambda_c(t)] \cdot \exp(j\{\Phi[t, \lambda_c(t)] + \varphi_0\})$ – медленно меняющаяся во времени комплексная огибающая; $U_c[t, \lambda_c(t)]$, $\Phi[t, \lambda_c(t)]$ – законы амплитудной и угловой (частотной, фазовой) модуляции; φ_0 – начальная фаза.

При моделировании в качестве входного воздействия используется только комплексная огибающая радиосигнала, содержащая всю полезную информацию о сигнале. В модели РТУ осуществляется преобразование этой огибающей таким образом, как она преобразуется в реальном устройстве. В качестве модели используется так называемый низкочастотный эквивалент РТУ. Метод комплексной огибающей обеспечивает значительную экономию вычислительных затрат по сравнению с методом несущей и чаще всего применяется при моделировании узкополосных трактов РТУ.

Формульный метод можно использовать, когда аналитически удается получить формулу для реакции на выходе РТУ:

$$Z[t, \lambda_c(t)] = F_t\{\lambda_c(t), u_c(t), u_n(t), t\}, \quad (1.4)$$

где $F_t\{\cdot\}$ – известный функционал; $u_n(t)$ – помеха на входе РТУ. Моделирование осуществляется путем подстановки в функционал известных функций $\lambda_c(t)$, $u_c(t)$, $u_n(t)$, ... и вычисления $Z(t)$ по данной формуле. При этом сложная формула может быть разделена на отдельные математические блоки, никак не связанные с физическими блоками моделируемого РТУ. Достоинство метода – экономия вычислительных затрат, недостаток – потеря структурного подобия между моделью и оригиналом.

Метод статистических эквивалентов. Реальное звено или часть РТУ с входным воздействием $u(t) = u_c[t, \lambda_c(t)] + \sum_{i=1}^N u_{ni}(t)$ и реакцией $Z[t, \lambda_c(t)]$ при моделировании заменяется статистическим эквивалентом – более простым звеном с реакцией $Z_\Delta[t, \lambda_c(t)]$, эквивалентной реакции $Z[t, \lambda_c(t)]$ в статистическом смысле (в среднем) и в соответствии с выбранным критерием. Например, таким критерием может быть равенство математических ожиданий и дисперсий реакций Z и Z_Δ . Для определения статистического эквивалента требуется проведение специальных исследований, которые оказываются успешными только в рамках ограниченного набора входных воздействий. Следовательно, при данном методе простота модели покупается ценою потери ее универсальности. Однако выигрыш по вычислительным затратам получается обычно большим по сравнению с методом комплексной огибающей.

Метод информационного параметра целесообразно применять в тех случаях, когда информационный параметр $\lambda_c(t)$ не только выделяется на выходе РТУ, но и непосредственно используется в работе отдельных звеньев, подвергаясь различным преобразованиям. Примером таких РТУ являются: следящие демодуляторы, устройства АРУ, АПЧ, следящие радиодальномеры, угломерные РТУ и т.п. Суть метода информационного параметра сводится к замене моде-

лируемого РТУ с входным воздействием $u_c[t, \lambda_c(t)]$ его низкочастотным эквивалентом по отношению к информационному параметру $\lambda_c(t)$. При этом воздействием на входе модели-эквивалента является параметр $\lambda_c(t)$, а реакцией на выходе модели – оценка этого параметра $\hat{\lambda}_c(t)$. Данный метод обычно применяется в сочетании с методом статистических эквивалентов, причем последний используется при моделировании отдельных, нелинейных звеньев радиоустройств. Достоинства и недостатки этих двух методов одинаковы.

Математический аппарат, с помощью которого осуществляется математическое описание процесса преобразования сигналов в моделируемых РТУ делят на три группы:

- методы на основе дифференциальных уравнений;
- спектральный и операторный методы на основе преобразований Фурье и Лапласа;
- временные методы на основе интеграла Дюамеля и ортогональных разложений.

1.7. Классификация функциональных звеньев РТУ и С.

Все радиозвенья можно разделить на две большие группы: линейные и нелинейные. Звенья этих групп могут быть инерционными и безынерционными, стационарными и нестационарными. Линейные безынерционные звенья это звенья, описываемые уравнением $y(t) = k \cdot x(t - \tau)$. Частные виды звеньев:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| $\tau = 0, k = 1,$ | $y(t) = u(t)$ | – повторение; |
| $\tau = 0, k = -1,$ | $y(t) = -u(t)$ | – инверсное повторение; |
| $\tau = 0, k > 1,$ | $y(t) = k \cdot u(t)$ | – усиление; |
| $\tau = 0, k < 1,$ | $y(t) = k \cdot u(t)$ | – ослабление; |
| $\tau \neq 0, k = 1,$ | $y(t) = u(t - \tau)$ | – чистое запаздывание. |

Линейные инерционные звенья математически описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами (стационарное звено) или переменными коэффициентами (нестационарное звено):

$$y(t) = \frac{d}{dt}[u(t)] \quad \text{– дифференцирование;}$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \text{– интегрирование;}$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad \text{– временная свертка (интеграл Дюамеля).}$$

Нелинейные инерционные звенья математически описываются нелинейными дифференциальными уравнениями: $y(t) = \Psi[u(t)]$, где $\Psi[x]$ – нелинейная функция. Среди них различают: - функциональные инерционные нелинейные звенья, которые можно разделить на безынерционный нелинейный и инерционный линейный элементы (простейшие звенья); - нефункциональные инерционные нелинейные звенья, где вышеприведенное разделение невозможно (например, диодный амплитудный детектор, моделируемый на основе принципиальной схемы).

2. Математические модели воздействий на радиоустройства.

2.1. Классификация воздействий и радиосигналов. Элементарные сигналы.

Ранее отмечалось, что воздействия могут быть внешние и внутренние. К внешним воздействиям относятся, входные воздействия в виде радиосигналов и помех. Сигнал (от латинского *signum* - знак) является физический процессом, несущим сообщение о каком-либо событии, состоянии объекта и т.д. Сигналом-воздействием, не предназначенным для передачи полезной информации, является помеха.

Физическим процессом, представляющим радиотехнический сигнал, служит электрическое колебание, которое может быть регулярной или случайной функцией времени. Описание данных функций является задачей математического моделирования воздействий на радиоустройства.

Принципы моделирования сигналов, несущих полезную информацию, и помех одинаковы. Поэтому будем рассматривать моделирование сигналов, подразумевая полезные сигналы и сигналы-помехи. Математическими моделями сигналов в радиосистемах являются функции времени и некоторых параметров (частоты, фазы, амплитуды, времени, появления и т. п.) В общем случае сигнал можно записать в виде $s(t, \vec{\alpha})$, где $\vec{\alpha} = \{\alpha_i\}$, $i = \overline{1, \ell}$ – вектор параметров воздействия. Чаще всего $s(t, \vec{\alpha})$ – это случайная функция времени (или случайный процесс).

Любая случайная функция времени в фиксированный момент времени является случайной величиной. Поэтому воспроизведение на модели случайной функции времени осуществляется путем моделирования последовательности случайных величин. Следовательно, случайные величины являются элементами модели случайного процесса – сигнала или помехи на входе радиосистемы. Частным видом случайного процесса является случайный поток событий $s(\vec{\tau}, \vec{\alpha})$, где $\vec{\tau} = \{\tau_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ – вектор моментов появления событий параметров; $\vec{\alpha} = \{\alpha_{ki}\}$, $k = 1, 2, \dots$, $i = \overline{1, \ell}$ – вектор параметров события; k – номер события. При этом общее число событий на заданном интервале наблюдения, в общем случае, является случайным.

Примеры событий: поток отказов оборудования, поток сообщений в канале связи, поток сообщений о координатах воздушных целей в системе. Таким образом, при моделировании воздействий на РТУ и С основными математическими моделями являются:

- детерминированная функция времени;
- случайная величина;
- функция времени, зависящая от случайного параметра;
- система случайных величин (или случайный вектор);
- случайная функция времени (или случайный процесс);
- случайная функция нескольких независимых переменных, например, времени и координат (или случайное поле);
- случайный поток событий.

При этом суть задачи моделирования воздействий состоит в формировании на ПК для заданных моментов времени случайных величин с заданными

свойствами. Однако при моделировании часто приходится иметь дело и с детерминированными сигналами.

Регулярными (детерминированными) сигналами называются сигналы, параметры которых однозначно определены в любой момент времени. Такие сигналы могут быть как периодическими, так и непериодическими, непрерывными и дискретными. Примером детерминированного сигнала можно считать сигнал на выходе передающего устройства, сигнал опорного генератора и т.п. При этом определены функции изменения таких параметров как амплитуда, частота, фаза и прочие параметры. Примером случайного сигнала является внутренний шум приемника. Сложные сигналы часто можно представить в виде совокупности более простых. Поэтому сначала рассмотрим описание некоторых типовых элементарных сигналов.

Единичная импульсная функция (дельта-функция или δ -функция, единичный импульс, функция Дирака) определяется следующим соотношением

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1, & a < t_0 < b \\ 1/2, & t_0 = a \text{ или } t_0 = b \\ 0, & t_0 < a \text{ или } t_0 > b \end{cases}$$

Здесь t_0 – момент действия импульса, a и b – произвольные действительные числа.

Математической моделью такой функции может служить импульс исчезающе малой длительности, который записывается в виде

$$\delta(t) = \lim_{T_n \rightarrow 0} \delta_{T_n}(t), \quad (2.2)$$

где $\delta_{T_n}(t)$ - импульс с длительностью T_n , действующий в момент времени $t = t_0$.

Приведем также примеры часто применяемых математических моделей некоторых сигналов:

прямоугольный импульс

$$\delta_{T_n}(t) = \begin{cases} 1/T_n, & |t| < T_n/2, \\ 0, & |t| > T_n/2, \end{cases} \quad (2.3)$$

Колокольный (гауссов) импульс

$$\delta_{T_n}(t) = \frac{1}{T_n \sqrt{2\pi}} \exp(-t^2 / 2 \cdot T_n^2), \quad (2.4)$$

Для построения функции в Mathcad составим программу для двух значений импульсов $T = 1$ и $T = 0,5$ соответственно $u(t)$ и $u1(t)$. Первым вводится начальное

значение диапазона, далее шаг отсчетов и конечное значение диапазона, после этого – функциональное выражение $t=0.01, 0.02..10$ $u(t) = \frac{e^{(-t^2/2)}}{\sqrt{2\pi}}$ $u1(t) = \frac{e^{(-t^2/8)}}{2 \cdot \sqrt{2\pi}}$.

Вызывается двумерное графическое построение функции и по оси абсцисс вводится параметр t , а по оси ординат – $u(t)$ и $u1(t)$. Результат моделирования представлен на рис. 2.1, где сплошной линией показан график для $T = 1$.

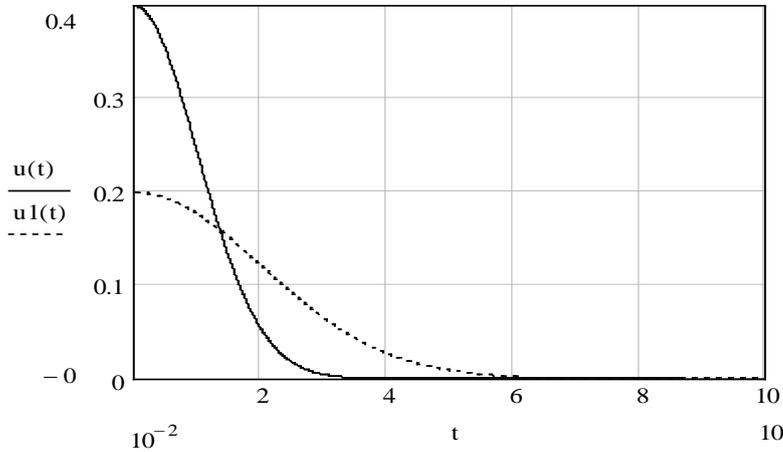


Рис. 2.1.

функция отсчетов

$$\delta_{T_n}(t) = \frac{1}{\pi \cdot T_n} \cdot \frac{\sin(t/T_n)}{t/T_n} \quad (2.5)$$

Аналогичное построение для функции отсчетов приведено на рис. 2.2 а, где сплошной линией показан график для $T = 1$.

Для отображения данной функции временными отсчетами изменим исходную программу, задав временные параметры в виде $t = 0.1, 0.5..10$.

График построения функции временными отсчетами показан на рис. 2.2 б.

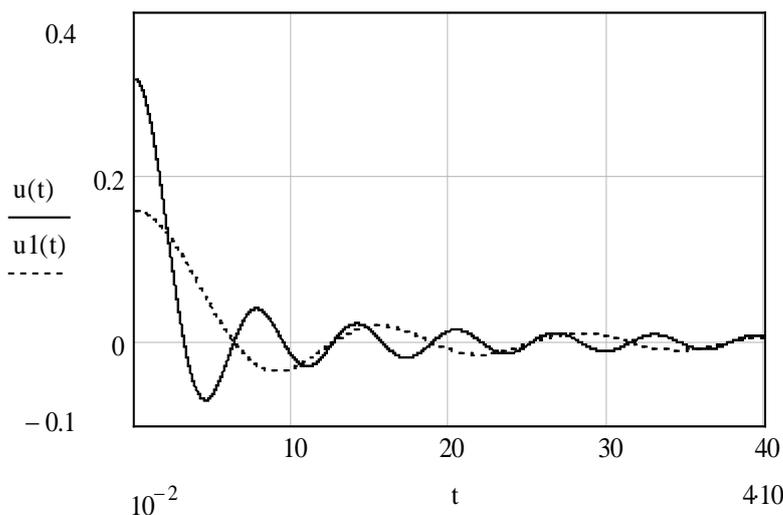


Рис. 2.2 а.

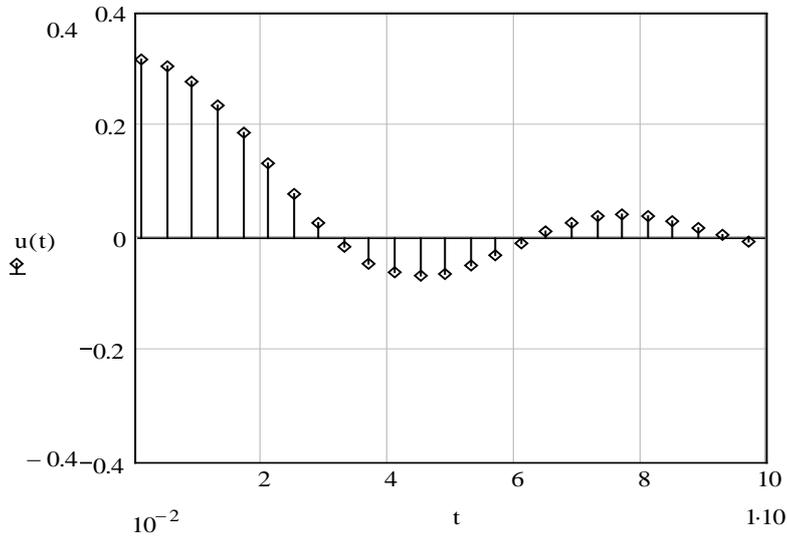


Рис. 2.2 б.

Функция Коши

$$\delta_{T_n}(t) = \frac{1}{\pi \cdot T_n} \cdot \frac{1}{1 + (t/T_n)^2}. \quad (2.6)$$

Построение функции приведено на рис. 2.3.

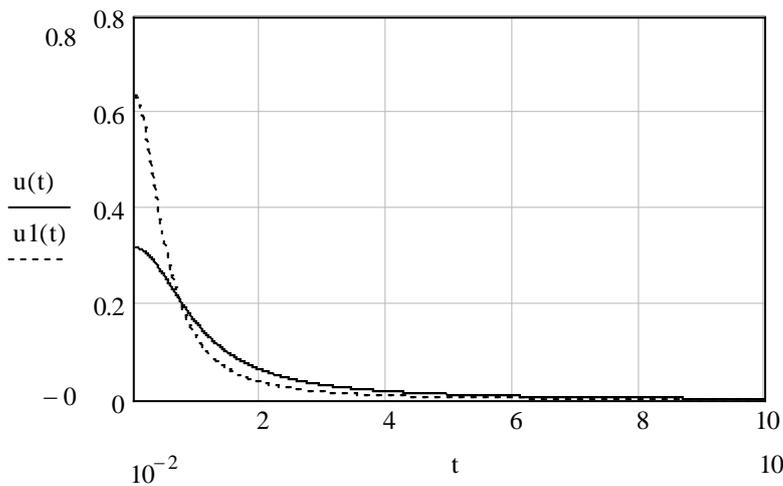


Рис.2.3.

Единичная функция (импульс включения, единичный скачок, функция Хевисайда) определяется следующим соотношением

$$1(t) = \lim_{T_n \rightarrow 0} 1_{T_n}(t). \quad (2.7)$$

Для нахождения $1_{T_n}(t)$ можно воспользоваться (2.3) – (2.6) и следующим равенством

$$1_{T_n}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{T_n}(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

В пределе получится единичная функция со следующими свойствами

$$l(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Гармоническое колебание (синусоидальное колебание, косинусоидальное колебание) описывается периодической функцией

$$u(t) = U \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.10)$$

или в комплексной форме

$$u(t) = \operatorname{Re}[U \cdot \exp(j(\omega_0 t + \varphi))] = \operatorname{Re}[\dot{U} \cdot \exp(j\omega_0 t)], \quad (2.11)$$

где $\dot{U} = U \cdot \exp(j\varphi)$ – комплексная амплитуда.

Построение гармонического колебания с параметрами $U = 1$ и соответственно частотой $\omega = 1$ и $\omega_1 = 2$ приведено на рис. 2.4.

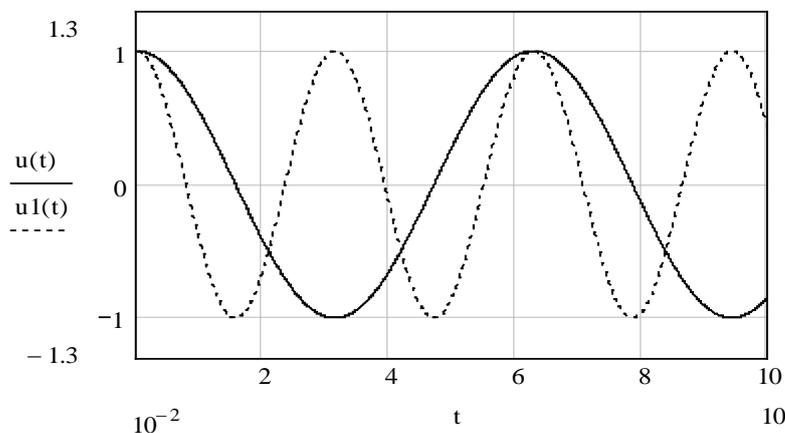


Рис. 2.4.

Часто удобно пользоваться формулой Эйлера

$$\cos(\omega t) = 0,5 \cdot (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Тогда

$$u(t) = 0,5 \cdot U \cdot \exp(j(\omega_0 t + \varphi)) + 0,5 \cdot U \cdot \exp(-j(\omega_0 t + \varphi)) = \\ 0,5 \cdot \dot{U} \cdot \exp(j\omega_0 t) + \left(0,5 \cdot \dot{U}\right)^* \cdot \exp(-j\omega_0 t) \quad (2.12)$$

где $\left(\dot{U}\right)^* = U \cdot \exp(-j\varphi)$ – комплексно-сопряженная величина по отношению к \dot{U} .

Гармоническое колебание с амплитудной модуляцией.

За основу берем выражение (2.10), в котором принимаем $\varphi = 0$, а амплитуду $U = \cos(\omega_0 \cdot t/40)$. Тогда программа запишется в виде:

$$t = 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2} \dots 400 \quad u(t) = \cos(t/40) \cdot \cos(t),$$

а график для 100% амплитудной модуляции – (рис. 2.5).

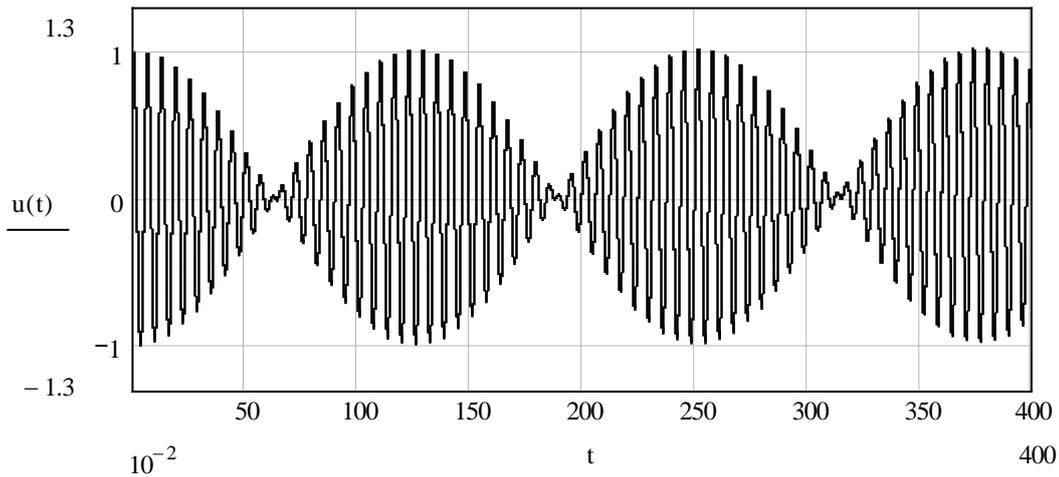


Рис. 2.5.

Для модуляции с меньшим индексом модуляции программа имеет вид
 $t = 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2} \dots 400$ $u(t) = 0.2 \cdot (\cos(t/40) + 4) \cdot \cos(t)$,

а график – (рис. 2.6).

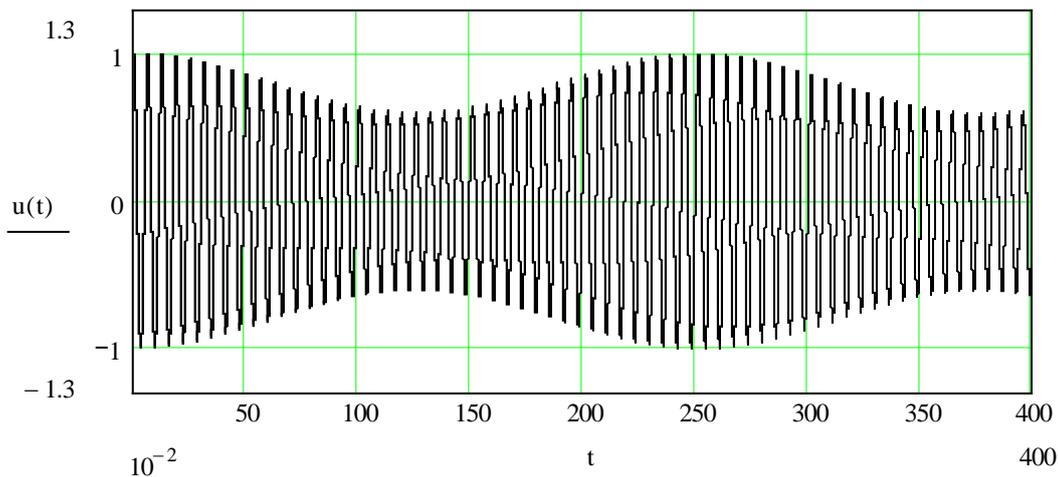


Рис. 2.6.

Аналогичным образом, давая изменения частоты или фазы в некоторых диапазонах, можно моделировать сигналы с частотной и фазовой модуляцией.

2.2. Дискретизация и квантование непрерывных воздействий.

Применение ПК имеет определенную специфику, которая заключается в том, что они оперируют только с дискретными величинами – числами. Однако, математические модели воздействий на РТУ и С чаще всего содержат элементы в виде непрерывных случайных величин, непрерывных детерминированных или случайных функций времени. Таким образом, при моделировании на ПК непрерывных функций времени необходимо осуществить переход от математической модели к цифровой. Суть такого перехода состоит в том, что непрерывному процессу $u(t)$ приводится в соответствие последовательность дискретных величин $\{u_n\}$ в которой n -й элемент соответствует значению процесса $u(t)$ в момент времени $t = n \cdot \Delta t$, где Δt – шаг дискретизации по времени.

Такие модели можно реализовать на ПК только приближенно путем дискретизации непрерывных функций времени по уровню (квантование) и по времени. Следовательно, неизбежно появление ошибки моделирования за счет дискретизации и квантования, которую необходимо свести до минимума. Только частный вид случайного процесса – это дискретный, случайный процесс с дискретным временем (например, конечная цепь Маркова) может быть точно воспроизведен на ПК.

Дискретизация сигналов по времени сводится к заданию отсчетов U_n непрерывного сигнала $U(t)$ в дискретные моменты времени $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где Δt – шаг дискретизации. В математической модели для фиксации моментов времени t_n используется периодическая последовательность δ -функций

$$U_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \delta(t - t_n) \Delta t, \quad (2.13)$$

где $U_d(t)$ – дискретный аналог непрерывного сигнала.

Дискретный сигнал можно представить рядом Фурье

$$U_d(t) = U(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(jn(2\pi/\Delta t)t). \quad (2.14)$$

Шаг равномерной дискретизации сигнала по времени Δt связан с шагом дискретности его представления в частотной области $\Delta\omega$ равенством

$$\Delta\omega = 2\pi/\Delta t. \quad (2.15)$$

Спектральные плотности дискретного $S_d(\omega)$ и исходного непрерывного $S(\omega)$ сигналов связаны соотношением

$$S_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\Delta\omega). \quad (2.16)$$

Суммирование периодически повторяющихся спектральных плотностей дает ряд особенностей спектра (рис. 2.7). Очевидно, чем больше Δt , тем больше перекрываются «хвосты» различных периодически повторяющихся составляющих спектра.

Это приводит к искажению информации о быстрых изменениях сигнала. Таким образом, следствием введенной дискретизации сигнала является отсутствие уменьшения спектральной плотности с ростом частоты. Звенья дискретной имитационной модели объекта должны учитывать этот фактор.

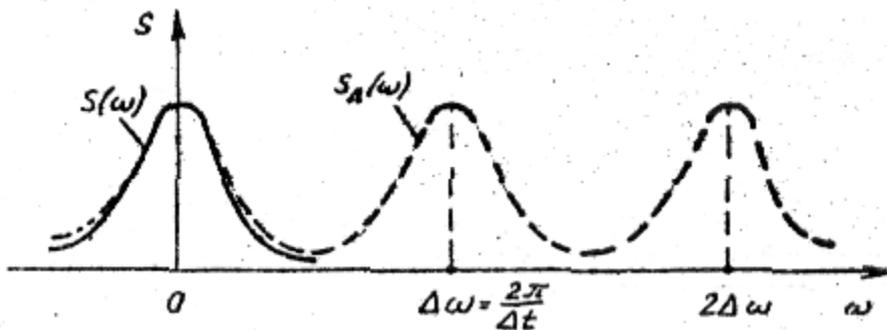


Рис. 2.7.

Шаг Δt нужно выбирать так, чтобы цифровая модель сигнала достаточно точно воспроизводила исходный процесс. Выбирать его слишком малым нецелесообразно, так как при этом увеличивается время на обработку процесса.

Согласно теореме В.А. Котельникова (теорема отсчетов), процесс $U(t)$ можно точно восстановить, если воспользоваться соотношением

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \frac{\sin(\omega_b(t-t_k))}{\omega_b(t-t_k)}, \quad (2.17)$$

где $U_k = u[k] = u(k \cdot \Delta t)$ – дискретный отсчет сигнала; $\omega_b = 2\pi \cdot f_b$ – граничная (верхняя) частота спектра; $t_k = k \cdot \Delta t$; $\Delta t = 1/(2 \cdot f_b)$.

Применение (2.17) к реальным сигналам приводит к ошибкам по двум причинам:

– реальный процесс $u(t)$ существует на ограниченном интервале наблюдения $(0, T_H)$ и число отсчетов $N = 2 \cdot f_b \cdot T_H + 1$ получается конечным, а сумма в (2.17) – усеченной;

– спектр конечных по длительности сигналов (финитных) в принципе не может быть ограниченным по частоте, то есть существует также на интервале (ω_b, ∞) .

Ошибка восстановления (интерполяция) $\Delta u(t)$ в общем случае является случайным процессом. Например, для стационарного центрированного случайного процесса с односторонним энергетическим спектром $G(\omega)$ дисперсия ошибки равна

$$\delta_{\Delta U}^2 = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_b}^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (2.18)$$

Мощность процесса $u(t)$ определяется формулой

$$\delta^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (2.19)$$

Для инженерных задач считается допустимым, если ошибка $\delta_{\Delta U}^2$ составляет не более $(5 \dots 10)\%$ от δ^2 . Из этого ограничения по (2.18), (2.19) можно найти ω_b и, в конечном счете, $\Delta t = \pi/\omega_b$.

Поскольку операция интерполяции при цифровом моделировании не производится, то описанный выше метод получения ошибки дает ее оценку снизу. Такая оценка является оптимистической и, в связи с этим, рекомендуется выбирать шаг дискретизации из более жесткого условия

$$\Delta t \leq (0,1 \dots 0,2) \cdot \pi/\omega_b. \quad (2.20)$$

При действии на входе РТУ и С аддитивной суммы сигналов, шаг Δt выбирается для наиболее широкополосного сигнала (чаще всего это помеха типа внутреннего шума приемного устройства).

После отладки цифровой модели радиосистемы в целом производится уточнение шага Δt , для чего делается несколько «прогонов» модели при заданных значениях $\Delta t_1 < \Delta t_2 < \dots < \Delta t$, где Δt – шаг, полученный на основе теоремы Котельникова. Уменьшение Δt проводится до тех пор, пока не удастся стабилизировать величину выходного эффекта (показателя) радиосистемы, то есть обеспечить не критичность показателя к величине Δt .

Дискретизация сигналов по уровню (квантование) возникает при моделировании за счет представления в ПК величины отсчета сигнала с помощью двоичного кода. Конечное число разрядов такого кода приводит к замене непрерывной величины $U(n \cdot \Delta t)$ ближайшим дискретным значением U_n^* на сетке квантования уровня сигнала с шагом Δu , зависящим от «цены младшего разряда двоичного ко-

да (рис. 2.8). При этом величина u_n принимается равной ближайшему сверху уровню квантования.

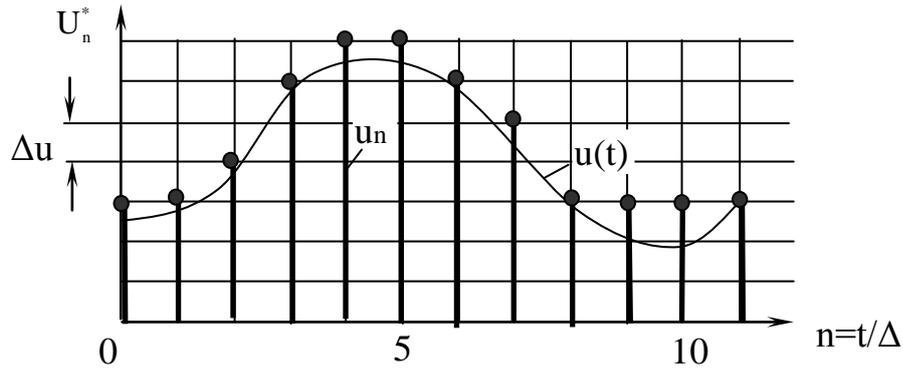


Рис. 2.8.

Ошибка восстановления (или интерполяции) $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$ в общем случае является случайным процессом и зависит от Δt , T_n и характеристик процесса $u(t)$.

Случайный процесс $\xi(t) = U(n \cdot \Delta t) - U_n^*$ называется шумом квантования. Его плотность вероятности $W(\xi)$ равномерна и равна

$$W(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta u}, & -\frac{\Delta u}{2} \leq \xi \leq \frac{\Delta u}{2} \\ 0, & \xi < -\frac{\Delta u}{2}, \xi > \frac{\Delta u}{2} \end{cases} \quad (2.21)$$

Из (2.21) легко определить дисперсию шума квантования

$$\sigma_\xi^2 = \int_{-\Delta u/2}^{\Delta u/2} \xi^2 W(\xi) d\xi = \frac{\Delta u^2}{12} \quad (2.22)$$

Пример. Пусть на ПК используются числа с фиксированной запятой, представленные в прямом коде. Старший разряд является знаковым, а остальные B разрядов определяют модуль числа. Максимальное значение сигнала условно считаем равным единице, то есть $u_{\max} = 1$.

Тогда $\Delta u = u_{\max}/2^B = 2^{-B}$ и $\sigma^2 = 2^{-2B}/12$.

Если дисперсия сигнала составляет σ_c^2 , то отношение сигнал/шум квантования равно $A_{\text{дб}} = 10 \cdot \lg(\sigma_c^2 / \sigma_\xi^2) = 10 \cdot \lg(12 \cdot \sigma_c^2 \cdot 2^{2B})$.

Выполним расчет для сигнала в виде централизованного нормального случайного процесса $u_c(t)$. Если принять $\sigma_c = 0,25$, то есть установить величину σ_c равной 25% от $u_{\max} = 1$, то вероятность превышения сигналом единичного порога пренебрежимо мала ($P < 10^{-4}$). Для дисперсии сигнала $\sigma_c^2 = 0,0625$, задаваясь отношением сигнал/шум $A_{\text{дб}}$, можно получить требование к числу разрядов $B = (A_{\text{дб}} - 10 \lg 12 - 10 \lg \sigma_c^2) / (20 \lg 2) = A_{\text{дб}} / 6$.

Если $A_{\text{дб}} = 60$ дБ, то $B = 10$.

2.3. Методы и алгоритмы моделирования воздействий.

2.3.1. Моделирование детерминированных сигналов.

Моделирование детерминированных сигналов возможно следующими методами:

- явным методом;
- табличным методом;
- методом порождающих уравнений;
- методом формирующего фильтра.

Явный метод предусматривает замену в сигнале $u(t)$ времени t на дискретную величину $t_n = n\Delta t$ и вычисление значения $u(t_n)$ с помощью библиотеки стандартных программ ПК. Например, фрагмент программы на языке Mathcad для сигнала

$$\delta_{T_n}(t) = \frac{1}{T_n \sqrt{2\pi}} \exp(-t^2 / 2 \cdot T_n^2)$$

показан и графически построен в (2.4, рис. 2.1).

Обращение к встроенным функциям языка программирования производится на каждом шаге моделирования, что существенно увеличивает машинное время. В этом состоит основное неудобство применения явного метода.

Табличный метод лишен данного недостатка. Значения функции (не обязательно встроенной) предварительно находятся для каждого n -го шага и заносятся в массив (таблицу), который при работе программы хранится в оперативной памяти ПК. Данный метод реализует максимальное быстродействие, но требует большой памяти ОЗУ. Некоторого сокращения необходимой памяти можно добиться, снизив размерность массива. Для этого в промежутках между более редкими дискретными используются известные интерполяционные формулы.

Метод порождающих уравнений используется, если сигнал является решением несложного разностного или дифференциального уравнения. Например, гармонический сигнал (2.10) может быть смоделирован путем численного решения уравнения

$$u''(t) + \omega^2 \cdot u(t) = 0, \quad u(0) = U \cdot \sin\varphi, \quad u'(0) = U \cdot \omega \cdot \sin\varphi. \quad (2.23)$$

Ошибка моделирования зависит от способа перехода от дифференциального уравнения к разностному и от величины шага дискретизации Δt .

Если удастся сразу найти порождающее уравнение в виде разностного уравнения, то ошибка определяется только округлением при выполнении арифметических операций на ПК. Например, процесс

$$u(t) = c + v \cdot t \quad (2.24)$$

моделируется путем решения разностного уравнения

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u, \quad (2.25)$$

где $\Delta u = v \cdot \Delta t$ - константа.

Заметим, что явный метод приводит к алгоритму

$$u_n = c + v \cdot n \cdot \Delta t. \quad (2.26)$$

Порождающее уравнение (2.25) содержит меньшее число операций.

Аналогично моделируется экспоненциальный процесс

$$u(t) = U \cdot e^{-at}. \quad (2.27)$$

При этом используется разностное уравнение

$$u_n = c \cdot u_{n-1}, \quad (2.28)$$

где $c = \exp(-a \cdot \Delta t)$ – константа.

Пример. Смоделировать гармонический процесс, не прибегая к стандартным функциям. Воспользуемся рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned}\sin(n \cdot \Delta x) &= \sin[(n-1) \cdot \Delta x] \cdot \cos \Delta x + \cos[(n-1) \cdot \Delta x] \cdot \sin \Delta x, \\ \cos(n \cdot \Delta x) &= \cos[(n-1) \cdot \Delta x] \cdot \cos \Delta x - \sin[(n-1) \cdot \Delta x] \cdot \sin \Delta x.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Тогда квадратурные сигналы (синусоидальный компонент u_s и косинусоидальный компонент u_c) находятся с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned}u_s[n] &= c \cdot u_s[n-1] + s \cdot u_c[n-1], \\ u_c[n] &= c \cdot u_c[n-1] - s \cdot u_s[n-1],\end{aligned}\quad (2.30)$$

где $u_s(t) = U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$; $u_c(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi)$; $t = n \cdot \Delta t$; $s = \sin(\omega \cdot \Delta t)$; $c = \cos(\omega \cdot \Delta t)$.

На первом шаге используются начальные условия

$$u_s(0) = U \cdot \sin(\varphi); \quad u_c(0) = U \cdot \cos(\varphi).\quad (2.31)$$

Программа на Mathcad представляется в следующем виде:

$i = 0..50$ – диапазон отсчетов;

$C = \cos(\pi/16)$, $S = \sin(\pi/16)$ – условно выбрано 16 отсчетов за полпериода;

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ – начальные условия для синуса и косинуса;}$$

$$\begin{pmatrix} s_{i+1} \\ c_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \cdot s_i + S \cdot c_i \\ C \cdot c_i - S \cdot s_i \end{pmatrix} \text{ – рекуррентное выражение.}$$

Выражения представлены в векторно-матричной форме, так как в рекуррентных формулах имеется взаимосвязь между синусоидальными и косинусоидальными составляющими s_i и c_i .

По составленной программе построен график для синусоидальной и косинусоидальной составляющих с заданными начальными условиями и количеством отсчетов (рис. 2.9).

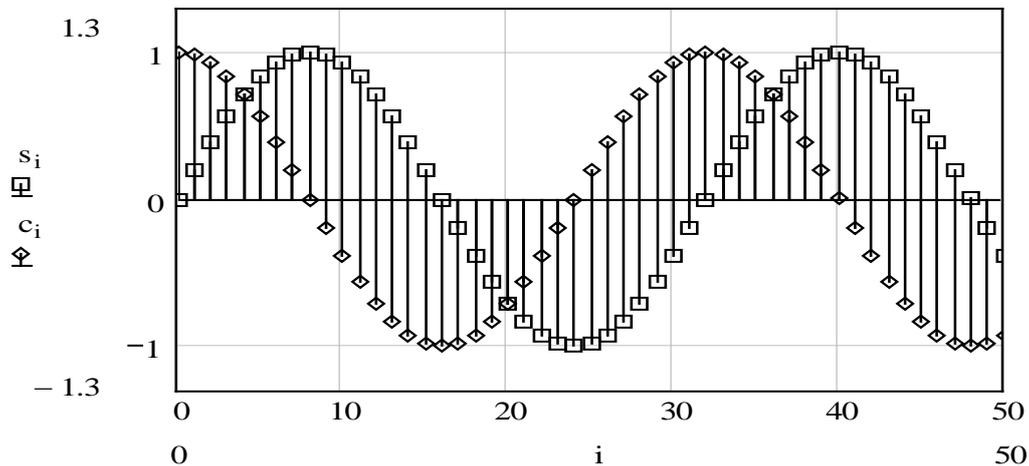


Рис. 2.9.

Заметим, что алгоритм (2.30) не перегружает оперативную память ПК. Скорость вычисления максимальна, т. к. нет обращения к встроенным функциям языка программирования (начальные условия (2.31) и коэффициенты s и c являются константами). Поэтому считается, что рекуррентные алгоритмы примерно на порядок сокращают требуемое время вычислений по сравнению с вычислениями с помощью стандартных программ.

Метод формирующего фильтра используется, когда сигнал можно представить как результат прохождения некоторого простого процесса через фильтр. Операторный коэффициент передачи фильтра считается известным. Моделирование сводится решению разностного или дифференциального уравнения, описывающего работу формирующего фильтра.

В радиосистемах часто встречаются квазидетерминированные воздействия в виде функций времени, зависящих от случайных параметров. Например, радиосигнал со случайной начальной фазой: $s(t, \lambda, \varphi_0) = S(t, \lambda)\cos[\omega t + \varphi_0]$. Случайный параметр φ_0 – это случайная величина, которая имеет равномерный закон распределения плотности вероятности в интервале $(-\pi, \pi)$. В течение одной реализации сигнала $\varphi_0 = \text{const}$, а от одной реализации к другой меняется как случайная величина. Алгоритм цифрового моделирования отдельной реализации квазидетерминированного сигнала совпадает с алгоритмом моделирования детерминированного сигнала с учетом конкретного параметра в данной реализации. При переходе от одной реализации к другой в алгоритме необходимо предусмотреть дополнительную программу формирования случайной величины – параметра сигнала. Случайный параметр может быть вектором: $\vec{\alpha} = \{S_0, \varphi_0, \varphi_1, \dots\}$. При этом требуется генерировать программным путем совокупность статистически связанных случайных величин.

2.3.2. Методы моделирования случайных величин.

Формирование случайных величин с равномерным законом распределения в интервале $(0,1)$.

Для моделирования РТУ и С на ПК требуется генерация десятков или даже сотен тысяч случайных величин – заданными статистическими характеристиками. На формирование одной случайной величины (СВ) должно тратиться как можно меньше времени. В универсальных ПК применяется следующий принцип формирования СВ с заданным законом распределения. С помощью стандартной программы формируется одна или несколько независимых СВ с равномерным законом распределения на интервале $(0,1)$. Затем эти СВ подвергаются функциональному преобразованию, которое обеспечивает получение СВ с заданным законом распределения.

Плотность вероятности СВ X , равномерно распределенной на интервале (a, b) , имеет вид

$$W(x) = 1/(b - a).$$

Для рассматриваемого случая $a = 0$, $b = 1$, $W(x) = 1$. При этом математическое ожидание СВ $m_x = 0,5$ и дисперсия $D_x = 1/12$.

Известны различные процедуры получения СВ с равномерным законом распределения. Однако в настоящее время почти все библиотеки стандартных программ для вычисления последовательностей равномерно распределенных СВ основаны на конгруэнтной процедуре. Оно описывается в виде рекуррентного соотношения

$$x_{i+1} = \lambda \cdot x_i + \mu \cdot (\text{mod } M), \quad (2.32)$$

где x_i , λ , μ , M – неотрицательные целые числа, $i = 0, 1, \dots$

Если задано начальное значение x_0 , множитель λ и константа μ , то выражением (2.32) однозначно определяется последовательность целых чисел $\{x_i\}$, причем $x_i < M$.

По целым числам последовательности $\{x_i\}$ можно построить последовательность $\{z_i\} = \{x_i/M\}$ рациональных чисел из единичного интервала $(0,1)$.

Другим известным способом получения последовательности псевдослучайных квазиравномерно распределенных СВ является мультипликативный метод. При мультипликативном методе $\mu = 0$, и последовательность неотрицательных целых чисел $\{x_i\}$, не превосходящих M , задается формулой

$$x_{i+1} = \lambda \cdot x_i \cdot (\text{mod } M).$$

Для машинной реализации наиболее удобно выбирать $M = 2^m$, где m – число бит в машинном слове.

Алгоритм построения последовательности сводится к выполнению следующих операций:

- выбрать в качестве x_0 произвольное нечетное число;
- найти произведение $\lambda \cdot x_0$;
- взять m младших разрядов в качестве первого члена x_1 последовательности $\{x_i\}$;
- определить дробь $z_1 = x_1/2^m$ из интервала $(0,1)$;
- присвоить $x_0 = x_1$;
- вернуться к п. 2.

Пример. Получить элементы последовательности для $m = 4$, используя мультипликативный метод.

Полагаем $\lambda = 5$ (в двоичной форме $\lambda = 0101$). Выбираем $x_0 = 7$ ($x_0 = 0111$). Тогда

$$\lambda \cdot x_0 = (0101) \cdot (0111) = 00100011, \quad x_1 = 0011, \quad z_1 = 3/16 = 0,1875;$$

$$\lambda \cdot x_1 = (0101) \cdot (0011) = 00001111, \quad x_2 = 1111, \quad z_2 = 15/16 = 0,9375 \text{ и т.д.}$$

Формирование СВ с заданным законом распределения методом нелинейного преобразования, обратной функции распределения.

Метод нелинейного преобразования сводится к нахождению взаимосвязи $x = f(\xi)$. (2.33)

С этой целью вычисляется интегральный закон распределения

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) d\eta, \quad (2.34)$$

где $w(\eta)$ – требуемая (заданная) плотность вероятностей величины x . Если обозначить

$$\xi = W(x), \quad 0 < \xi < 1, \quad (2.35)$$

то обратная зависимость

$$x = W^{-1}(\xi) = f(\xi)$$

и будет искомым преобразованием.

Пример. Сформировать последовательность чисел $\{x_i\}$ с равномерным законом распределения на произвольном интервале (a,b) .

Алгоритм моделирования:

$$- \text{находим функцию распределения } z = Q(y) = \begin{cases} 0, & y < a \\ \frac{y-a}{b-a}, & a \leq y \leq b; \\ 1, & y > b \end{cases} \quad (2.36)$$

– находим обратную функцию $y = 1/Q(z) = a + (b - a) \cdot z$;

– сформировать базовую СВ $\{\xi_i\}$;

– вычислить СВ $\{x_i\}$ $x_i = a + (b - a) \cdot \xi_i$.

Формирование СВ методом Неймана.

Метод Неймана не требует вычисления интеграла от плотности вероятностей и последующего нахождения обратной функции. Для этого предварительно выполняются следующие операции. Исходная плотность вероятности исследуется на предмет отсечения «хвостов» с малыми значениями $W(x)$. Рабочим интервалом изменения случайной величины x становится интервал (a, b) , в котором w больше принятого минимума.

Из датчика равномерно распределенного числа ξ извлекаются две случайной величины ξ_1 и ξ_2 , после чего формируются величины:

$$z_1 = a + (b - a) \cdot \xi_1; \quad (2.37)$$

$$z_2 = w_m \cdot \xi_2;$$

где w_m – максимальное значение $W(x)$.

Алгоритм моделирования сводится к проверке условия

$$z_2 \leq w(z_1).$$

Если оно выполняется, то в качестве искомой величины x выдается z_1 . При невыполнении (2.37) опыт не засчитывается и извлекается следующая пара чисел ξ_1 и ξ_2 и т. д.

Недостатком метода является увеличение машинного времени, так как не все пары ξ_1, ξ_2 дают выходной сигнал.

Метод деления отрезка применяется для моделирования дискретных, случайных величин. Пусть задано дискретное распределение вероятностей для случайной величины x

$$p_i = P\{x = X_i\}; \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.38)$$

где X_i – значения, которые может принимать x ; $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ - условие нормировки.

Положим, что интервал, в котором находятся значения X_i , равен $(0, 1)$. Данное условие можно выполнить соответствующим преобразованием (нормировкой).

Используем следующее свойство базовой последовательности случайных величин ξ с равномерным распределением:

$$P\{\xi \in (a, b)\} = P(a < \xi < b) = b - a, \quad (2.39)$$

где интервал (a, b) является частью интервала $(0, 1)$. Для моделирования заданного дискретного распределения необходимо:

- запомнить подряд значения X_1, X_2, \dots, X_n ;

- вычислить и запомнить значения $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots, 1$;

- сравнить ξ с p_1 и, если $\xi < p_1$, то принять $x = X_1$; иначе – сравнить ξ с $p_1 + p_2$ и, если $\xi < p_1 + p_2$, то принять $x = X_2$; иначе – сравнить ξ с $p_1 + p_2 + p_3$ и т. д.

2.3.3. Моделирование случайных величин с типовыми законами распределения.

Сформировать последовательность чисел, $\{x_i\}$, являющихся случайными величинами с экспоненциальным законом распределения. Для решения используем алгоритм примера (2.36).

- находим функцию распределения

$$z = Q(y) = \int_{y_0}^y a \cdot \exp(-a(u - y_0)) du = 1 - \exp(-a(y - y_0))$$

$$q(y) = \begin{cases} a \cdot \exp(-a(y - y_0)), & y > y_0; \\ 0 & y \leq y_0 \end{cases};$$

- находим обратную функцию $y = 1/Q(z) = y_0 - \ln(1 - z)/a$;

- сформировать базовую СВ $\{\xi_i\}$;

- вычислить СВ $\{x_i\}$ по формуле $x_i = y_0 - \ln(\xi_i/a)$.

Сформировать последовательность чисел, $\{x_i\}$, являющихся случайными величинами с релеевским законом распределения

$$q(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma^2}\right),$$

где $y \geq 0$, σ^2 – параметр распределения. Запишем функцию распределения

$$z = Q(y) = \int_0^y \frac{t}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) dt,$$

проводим замену переменной $u = t^2/(2 \cdot \sigma^2)$, тогда

$$z = Q(y) = \int_0^{\frac{y^2}{2 \cdot \sigma^2}} \exp(-u) du = 1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma^2}\right);$$

- находим обратную функцию $y = 1/Q(z) = \sigma \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - z)}$;

- формируем СВ $\{\xi_i\}$;

- вычисляем $x_i = \sigma \sqrt{-2 \cdot \ln(\xi_i)}$.

Сформировать последовательность чисел, $\{x_i\}$, являющихся случайными величинами с показательным законом распределения

$$W(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Вычислим по (2.34) интегральный закон

$$W(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Найдем функциональное преобразование (2.33)

$$x = W^{-1}(\xi) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi).$$

Случайная величина $1 - \xi$, как и ξ , распределена равномерно на интервале $(0,1)$. Поэтому можно использовать алгоритм

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(\xi).$$

Гауссово (нормальное) распределение величины x

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

можно получить, используя для формирования этой величины сумму N независимых чисел базового датчика ξ_j :

$$x = \sigma \sqrt{\frac{12}{N}} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j - \frac{N}{2} \right) + m. \quad (2.40)$$

Обычно для практики достаточно выбрать $N = 8 \dots 12$.

Обобщенное релейское распределение (закон Райса)

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{a \cdot x}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0,$$

где $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя реализуется с использованием пары независимых нормальных случайных чисел y_1, y_2 , полученных с учетом (2.40):

$$x = \sqrt{(y_1 + a)^2 + y_2^2}. \quad (2.41)$$

Числа y_1, y_2 , должны иметь нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2 . При $a = 0$ алгоритм (2.41) позволяет моделировать релейскую величину.

Методы моделирования случайных величин на основе вторичных преобразований.

Под вторичным преобразованием будем понимать функциональное преобразование СВ, полученных с помощью базовых СВ ξ_i .

– СВ x_i с экспоненциальным законом распределения

$$q(y) = \frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad y \geq 0.$$

Правило формирования $x_i = z_{i1}^2 + z_{i2}^2$, где z_{i1}, z_{i2} – независимые СВ с нормальным законом распределения, нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$;

– СВ x_i с релейским законом распределения

$$q(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma^2}\right), \quad y \geq 0.$$

Правило формирования $x_i = z_{i1}^2 + z_{i2}^2$, где z_{i1}, z_{i2} соответствуют предшествующему случаю;

– СВ x_i с обобщенным релейским законом распределения (или законом

Райса)
$$q(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(\frac{y^2 + a^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \cdot I_0 \cdot \left(\frac{y \cdot a}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0,$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; $I_0(0) = 1$.

Правило формирования $x_i = \sqrt{(z_{i1} + a)^2 + z_{i2}^2}$.

2.3.4. Общий принцип моделирования случайных процессов.

Считается, что случайным процессом (СП) является процесс, описываемый случайной функцией $\xi(t)$, значение которой в любой момент времени t представляет собой случайную величину с определенным законом распределения плотности вероятности. Наиболее полной характеристикой СП $\xi(t)$ является n -мерная плотность распределения вероятностей

$$W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Очевидно, чем больше значение n , тем более детально описывается СП. Однако для решения ряда задач достаточно знать более простые характеристики. На практике наибольшее применение получили:

- математическое ожидание СП $\xi(t)$

$$m(t) = M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot W_1(\xi, t) d\xi;$$

- дисперсия СП

$$D(t) = M\{[\xi(t) - m_\xi(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot W_1(\xi, t) d\xi;$$

- корреляционная функция СП

$$R(t_1, t_2) = M\{[\xi_1(t_1) - m(t_1)] \cdot [\xi_2(t_2) - m(t_2)]\} = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - m(t_1)] \cdot [\xi_2 - m(t_2)] \cdot W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания. Для стационарных, случайных процессов $m(t) = m$; $D(t) = D$; $R(t_1, t_2) = R(\tau)$.

Важной характеристикой СП является спектральная плотность мощности $G(\omega)$. Для центрированного СП ($m = 0$) $G(\omega)$ определяется как преобразование Фурье от корреляционной функции $R(\tau)$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (2.42)$$

Справедливо и обратное преобразование Фурье

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (2.43)$$

Принцип моделирования СП аналогичен принципу моделирования случайных величин. Однако в этом случае для моделирования используется модель базового, случайного процесса – стационарного, нормального белого шума. Далее с помощью нелинейного преобразования и линейного формирующего фильтра из базового процесса формируется СП с требуемым законом распределения и корреляционной функцией.

Моделирование СП типа белого шума требует наличия датчика последовательности $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ независимых случайных чисел. Эта последовательность является дискретным широкополосным СП. В этом случае корреляционная функция имеет вид

$$K_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - |\tau|/\Delta t), & |\tau| \leq t \\ 0, & |\tau| > t \end{cases}, \quad (2.44)$$

где Δt – интервал дискретизации, σ^2 – дисперсия случайной величины x_i .

Энергетический спектр равен

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) d\tau = 2\sigma^2 \frac{1 - \cos(\omega\Delta t)}{\omega^2 \Delta t}. \quad (2.45)$$

На частотах, близких к нулевой

$$S_x(0) = \sigma^2 \Delta t.$$

Алгоритм моделирования центрированного белого шума, используемого в имитационной модели системы с эффективной полосой пропускания много меньшей ширины спектра (2.45), сводится к использованию базового датчика величины ξ с равномерным законом распределения на интервале (0,1):

$$x = \sqrt{\frac{12 \cdot S_x(0)}{\Delta t}} (\xi - 0,5), \quad (2.46)$$

где $S_x(0)$ – требуемая спектральная плотность белого шума.

При моделировании радиосистем чаще всего встречаются следующие типы случайных процессов:

- стационарный, нормальный случайный процесс (СП);
- стационарный СП, не являющийся нормальным, но порождаемый нормальным СП при нелинейном преобразовании;
- нестационарный, нормальный СП;
- марковские СП с произвольным законом распределения с дискретным и непрерывным временем;
- случайный поток событий.

Как уже отмечалось, модель СП с заданными: одномерной плотностью распределения вероятностей $q(y)$ и корреляционной функцией $R_y(\tau)$ получается из базовой модели СП. Преобразование базового СП осуществляется с помощью нелинейного, функционального преобразователя и линейного формирующего фильтра. При этом нелинейное безынерционное преобразование обеспечивает получение заданного закона распределения $q(y)$, а преобразование с помощью фильтра – заданной корреляционной функции $R_y(\tau)$.

Структура моделирования имеет вид, представленный на рис. 2.10.

Этапы подготовительной работы:

- зная $p(\xi)$, $p(x)$, $q(y)$, находим нелинейное преобразование $y = f(x)$;
 - зная $R_y(\tau)$ и $f(x)$, находим требуемую корреляционную функцию $R_x(\tau)$;
 - зная $R_\xi(\tau)$, $R_x(\tau)$, находим комплексную частотную характеристику формирующего фильтра $K(j\omega)$;
 - осуществляем цифровое моделирование согласно приведенной схеме.
- Отметим, что наибольшие трудности возникают при реализации 2-го этапа – определение $R_x(\tau)$.

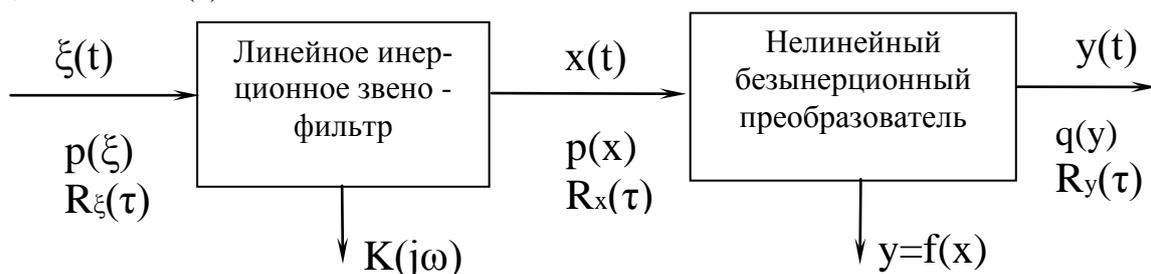


Рис. 2.10.

2.3.5. Методы и алгоритмы моделирования СП с нормальным законом распределения.

Алгоритм моделирования СП с нормальным законом распределения методом формирующего фильтра основан на нормализации плотности распределения белого шума $\xi(t)$ при его прохождении через формирующий фильтр с комплексным коэффициентом передачи $K_{\text{фф}}(j\omega)$. В этом случае спектральная плотность процесса на выходе фильтра

$$S_x(\omega) = S_\xi(0) |K_{\text{фф}}(j\omega)|^2. \quad (2.47)$$

Пример. Нормальный СП со спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{c^2}{a^2 + \omega^2}$$

является результатом прохождения белого шума со спектральной плотностью $S_\xi(0) = c^2$ через фильтр с коэффициентом передачи

$$K_{\text{фф}}(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}.$$

Метод факторизации заданной спектральной плотности непосредственно приводит к разностному уравнению формирующего фильтра. Вначале производится факторизация

$$S_x(\omega) / \Delta t = S_1(j\omega) \cdot S_1(-j\omega). \quad (2.48)$$

Далее по $S_1(j\omega)$ находится передаточная функция $K_{\text{фф}}(j\omega) = S_1(j\omega)$. Методом z-преобразования по $K_{\text{фф}}(j\omega) = S_1(j\omega)$ определяется передаточная функция дискретного фильтра $K_{\text{фф}}(z)$ в виде

$$K_{\text{фф}}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_n z^{-n}}. \quad (2.49)$$

Учитывая свойства обратного z-преобразования

$$Z^{-1}\{U(z)\} = U(t_k),$$

$$Z^{-1}\{z^{-m}U(z)\} = U(t_{k-m}),$$

записывается разностное уравнение

$$x_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \dots + a_n x_{k-n} + b_0 \xi_k + b_1 \xi_{k-1} + \dots + b_n \xi_{k-n}.$$

Начальные значения x_k при $k < 0$ полагают нулевыми.

Пример. Получить разностное уравнение для формирующего фильтра, СП на выходе которого имеет спектральную плотность

$$S_x(\omega) = \frac{2 \cdot \sigma^2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

После факторизации имеем

$$S_x(\omega) / \Delta t = \frac{\sigma \sqrt{2\alpha} / \Delta t}{j\omega + \alpha} \cdot \frac{\sigma \sqrt{2\alpha} / \Delta t}{-j\omega + \alpha}$$

следовательно

$$S_1(j\omega) = \frac{\sigma \sqrt{2\alpha} / \Delta t}{j\omega + \alpha} = K_{\text{фф}}(j\omega). \quad (2.50)$$

При переходе к $K_{\text{фф}}(z)$ используем метод δ -аппроксимации, когда дискретное звено получается добавлением к непрерывному звену на его входе корректирующего элемента в виде безынерционного ключа с коэффициентом передачи $K_{\text{кэ}} = \Delta t$. Тогда, воспользовавшись таблицами z -преобразования, для $K_{\text{фф}}(z) = \Delta t \cdot Z\{K_{\text{фф}}(s)\}$

с учетом (2.50) получим

$$K_{\text{фф}}(z) = \frac{\sigma\sqrt{2\bar{\alpha}} \cdot z}{z-d} = \frac{\sigma\sqrt{2\bar{\alpha}}}{1-d \cdot z^{-1}}, \quad (2.51)$$

где $\bar{\alpha} = \alpha \cdot \Delta t$, $d = \exp(-\bar{\alpha})$.

Из (2.51) получаем с учетом (2.49) разностное уравнение формирующего фильтра

$$x_k = d \cdot x_{k-1} + \sigma\sqrt{2 \cdot \bar{\alpha}} \cdot \xi_k.$$

Рекомендуемое значение шага $\Delta t \in [0,05/\bar{\alpha}; 0,5/\bar{\alpha}]$.

Метод скользящего суммирования для моделирования СП используется в случае, когда факторизация спектральной плотности затруднительна. Алгоритм моделирования записывается в виде

$$x_k = \sum_{i=-N}^N c_i \cdot \xi_{k-i}, \quad (2.52)$$

где ξ_i – случайные некоррелированные числа с единичной дисперсией, нулевым средним и произвольным законом распределения;

c_i – весовые коэффициенты

$$c_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\Delta t \cdot S_x(\omega)} \cdot \exp(j\omega \cdot i \cdot \Delta t) d\omega.$$

Число N можно определить, исходя из требования близости дисперсии чисел

$$\overline{x_k^2} = \sum_{i=-N}^N c_i^2$$
 к заданной дисперсии моделируемого процесса $\{x_k\}$, $k=1,2,\dots$

Метод скользящего суммирования применим к процессам с недробно-рациональными спектральными плотностями.

Пример. Случайный процесс с гауссовой формой энергетического спектра

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma^2 \sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right) \text{ и функцией корреляции } K_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-a^2 \tau^2)$$

может быть смоделирован по алгоритму (2.52), если положить

$$c_i = \frac{\sigma\sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta t}}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(-2(a \cdot i \cdot \Delta t)^2).$$

Для класса СП, спектры которых имеют вид дробно-рациональной функции $S(\omega) = A(\omega)/B(\omega)$, где $A(\omega)$, $B(\omega)$ соответственно полиномы степени l и $m > l$, оператор линейного преобразования формирующего фильтра, записывается в виде

$$u[n] = \int_{k=-\infty}^{\infty} c[k] \cdot \xi[n-k],$$

где $c[k]$ – весовые коэффициенты, определяемые заданной корреляционной функцией $R_u(\tau)$ или энергетическим спектром $S_u(\omega)$ и вычисляется по формуле

$$c[k] = \frac{1}{\omega_B} \int_0^{\omega_a} K_0[\omega] \cdot \cos\left(\frac{k\pi\omega}{\omega_B}\right) d\omega,$$

где $K_0(\omega) = \sqrt{S(\omega)/S_0} = |K(j\omega)|$ – модуль комплексной частотной характеристики формирующего фильтра.

При этом считается, что в спектре $S(\omega)$ составляющими на частотах $|\omega| > \omega_B$ можно пренебречь. При вычислении $c[k]$ удобно использовать нормированную (безразмерную) частоту $x = \omega/\omega_B$, тогда

$$c[k] = \int_0^1 K_0^*[x] \cdot \cos(k\pi x) dx, \text{ где } K_0^*(x) = K_0(\omega_B x).$$

Следовательно $c[k]$ – это коэффициенты Фурье в разложении функции $K_0^*(x)$ на интервале $(-1,1)$. При k стремящимся к бесконечности $c[k]$ стремится к нулю достаточно быстро, и можно использовать усеченную сумму в формуле скользящего суммирования

$$u[n] = \sum_{k=-p}^p c[k] \cdot \xi[n-k].$$

Суть алгоритма скользящего суммирования состоит в том, что каждый элемент $u[n]$ моделируемого процесса формируется путем суммирования $N = 2p + 1$ последовательно формируемых независимых случайных величин ξ . При этом сетка весовых коэффициентов $c[k]$ как бы скользит относительно базовой последовательности СВ ξ . Статистическая зависимость $u[n]$ и $u[n+m]$ обусловлена наличием общих слагаемых в суммах с различными весами. Для удобства вычислений можно применить другую запись алгоритма, поскольку процессы $\xi(t)$ и $u(t)$ стационарные

$$u[n] = \sum_{k=1}^N c[k] \cdot \xi[n-k], \text{ где } N = 2p + 1, c[k] = c[k-p-1].$$

Параметр p ограничивает число слагаемых, и его можно выбирать из условия

$$\left| 1 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=-p}^p c^2[k] \right| < \varepsilon,$$

где ε – наперед заданное малое число (ошибка алгоритма); $\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) d\omega$ – дисперсия процесса $u(t)$. Следует отметить, что поскольку $c[k] = c[-k]$ – весовая функция является четной, то при моделировании в памяти ПК достаточно хранить только $c[k]$ при $k \geq 0$.

Изложим основные этапы моделирования:

- при заданных $S(\omega)$, $S_0(\omega) = \Delta t$, ε вычисляются и запоминаются $(p+1)$ весовых коэффициентов $c[k]$ при $k \geq 0$;
- выбирается последовательность нормальных СВ ξ с нулевым математическим ожиданием ($a = 0$) и единичной дисперсией ($\sigma^2 = 1$);
- выбирается СВ $u[n]$ по формуле скользящего суммирования.

Пример. Моделирование стационарного, нормального процесса с треугольной корреляционной функцией

$$R_y(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - \omega_* \cdot |\tau|), & |\tau| \leq 1/\omega_* \\ 0, & |\tau| > 1/\omega_* \end{cases}$$

– вычисление $c[k]$ приводит к тому, что весовые коэффициенты одинаковы: $c[k] = c[0] = \sigma/\sqrt{N}$, где $N = [1/\gamma] + 1$, $[x]$ – целая часть числа x ; $\gamma = \omega_* \cdot \Delta t$. Если $1/\gamma$ – целое число, то методическая ошибка отсутствует;

– формирование ξ ;

– вычисление $u[n] = c[0] \sum_{k=0}^{N-1} \xi[n-k]$ – равновесное скользящее суммирование.

Отметим, что только в случае равновесного скользящего суммирования в качестве базовых СВ ξ при $N > 8$ можно выбирать СВ с равномерным законом распределения на интервале $(0,1)$, так как нормализация исходной последовательности и формирование корреляционных связей происходит одновременно. Алгоритм моделирования принимает вид:

$$u[n] = \sigma \sqrt{\frac{12}{N}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \xi[n-k] - \frac{N}{2} \right).$$

2.3.6. Моделирование стационарного СП, порождаемого нормальным процессом.

Общих методов моделирования негауссовых процессов с произвольным энергетическим спектром не существует. Однако в большинстве случаев можно воспользоваться структурой для построения алгоритма моделирования, представленной на рис. 2.10.

Рассмотрим случай, когда требуется смоделировать СП $y(t)$ с заданной одномерной плотностью распределения $q(y)$ и корреляционной функцией $R_y(\tau)$. В качестве исходного СП используется обычно стационарный, нормальный случайный процесс $x(t)$. Применяя метод нелинейного преобразования, обратного заданной функции распределения, по заданным $q(y)$ и $p(x)$ определяем нелинейное безынерционное преобразование $y = f(x)$, которое определяет вид зависимости $R_y(\tau) = \Psi[R_x(\tau)]$. Поскольку задана $R_y(\tau)$, то требуется найти $R_x(\tau) = \Psi^{-1}[R_y(\tau)]$. Рассмотрим решение данной задачи моделирования на примере логарифмически-нормального СП:

– с заданной одномерной плотностью распределения

$$q(y) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_0 \cdot y}} \exp\left(-\frac{\ln^2 y}{2 \cdot \sigma_0^2}\right);$$

– математическим ожиданием $M\{y\} = \sqrt{e} \cdot \sigma_0$;

– дисперсией $D\{y\} = \sigma_y^2 = e(e-1) \cdot \sigma_0^2$;

где σ_0 – параметр распределения.

Такой процесс хорошо отображает свойства атмосферных и промышленных помех в радиосистемах.

Логарифмически-нормальный СП $y(t)$ является результатом нелинейного безынерционного преобразования стационарного, нормального СП $x(t)$ с параметрами $(0, \sigma_0^2)$ и характеристикой преобразования $y = f(x) = e^x$. При этом нормированные корреляционные функции (или коэффициенты корреляции) процессов $y(t)$ и $x(t)$ связаны соотношением

$$r_x(\tau) = \ln[1 + (e - 1)r_y(\tau)], \text{ где } r_x(\tau) = R_x(\tau)/\sigma_0^2; \quad r_y(\tau) = R_y(\tau)/\sigma_y^2 = R_y(\tau)/e(e - 1)\sigma_0^2.$$

Таким образом, для моделирования логарифмически-нормального СП $y(t)$ с корреляционной функцией $R_y(\tau)$ нужно сформировать стационарный, нормальный СП $x(t)$ с корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = \sigma_0^2 \ln[1 + (e - 1) \cdot R_y(\tau)/\sigma_y^2],$$

а затем пропустить его через нелинейный элемент с характеристикой $y = f(x) = e^x$.

Некоторые частные виды СП можно формировать с помощью нелинейного безынерционного преобразования $y = f(x_1, x_2)$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ – два независимых стационарных, нормальных СП с параметрами $(0, \sigma_0^2)$.

Пример. Моделирование стационарного СП с экспоненциальным распределением плотности вероятности

$$q(y) = \frac{1}{2 \cdot \sigma_0^2} \exp\left(-\frac{y}{2 \cdot \sigma_0^2}\right), \quad y \geq 0; \quad m_y = 2 \cdot \sigma_0^2; \quad \sigma_y^2 = 4\sigma_0^4;$$

где σ_0 – параметр распределения; корреляционная функция $R_y(\tau)$.

Используем уже известное соотношение для СВ с экспоненциальным распределением:

$$y = x_1^2 + x_2^2. \tag{2.53}$$

Из статистической радиотехники известно, что, если вместо $x_1(t)$ и $x_2(t)$ подставлять значения нормальных стационарных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с корреляционными функциями этих процессов $R_x(\tau) = \sigma_0^2 r_x(\tau)$, то получим процесс $u(t)$ с корреляционной функцией

$$R_y(\tau) = \sigma_y^2 r_y(\tau) + m_y^2 = 4\sigma_0^4 r_y(\tau) + 4\sigma_0^4 = 4\sigma_0^4(1 + r_y(\tau)).$$

При этом справедливо соотношение

$$R_y(\tau) = 4\sigma_0^4(1 + r_x^2(\tau)).$$

Следовательно,

$$r_x(\tau) = \sqrt{r_y(\tau)} = \sqrt{R_y(\tau)/4\sigma_0^4 - 1}$$

$$\text{и } R_x(\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{R_y(\tau) - m_y^2}.$$

Таким образом, для моделирования СП $u(t)$ необходимо смоделировать два независимых СП $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с корреляционными функциями $R_x(\tau)$ и параметрами $(0, \sigma_0^2)$, а затем подвергнуть их преобразованию ($y = x_1^2 + x_2^2$).

Пример. Моделирование стационарного СП с релеевским законом распределения

$$q(y) = \frac{y}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma_0^2}\right), \quad y \geq 0; \quad m_y = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \sigma_y^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_0^2;$$

где σ_0 – параметр распределения; корреляционная функция $R_y(\tau)$.

Используем преобразование

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.54)$$

Из статистической радиотехники известна взаимосвязь $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$:

$$R_y(\tau) = \frac{\pi}{2} \sigma_0^2 \left[1 + \frac{4 - \pi}{\pi} r_y(\tau) \right] = \frac{\pi}{2} \sigma_0^2 \left[1 + \frac{1}{4} r_x^2(\tau) + \frac{1}{64} r_x^4(\tau) + \dots \right] \approx \frac{\pi}{2} \sigma_0^2 \left[1 + \frac{1}{4} r_x^2(\tau) \right]$$

Тогда $\frac{4 - \pi}{\pi} r_y(\tau) = \frac{1}{4} r_x^2(\tau)$ и $r_x(\tau) = \left\{ 2 \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} \right\} \sqrt{r_y(\tau)} \approx \sqrt{r_y(\tau)}$, так как

$$y = x_1^2 + x_2^2 = 1,04$$

$$R_x(\tau) = \sigma_0^2 \sqrt{r_y(\tau)} = \sigma_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{4 - \pi}} \sqrt{\frac{R_y(\tau) - m_y^2}{m_y^2}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}} \sqrt{R_y(\tau) - m_y^2}.$$

Таким образом, для моделирования $u(t)$ с релеевским законом распределения нужно смоделировать $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с корреляционной функцией $R_x(\tau)$ и подставить в (2.54).

Пусть $R_y(\tau) - m_y^2 = \sigma_y^2 \exp(-\omega_* \cdot |\tau|)$, то есть экспоненциальная корреляционная функция.

Находим:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \sigma_0^2 \sqrt{r_y(\tau)} = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}} \sqrt{\sigma_y^2 \exp(-\omega_* \cdot |\tau|)} = \\ &= \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}} \sqrt{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_0^2 \exp(-\omega_* \cdot |\tau|)} = \sigma_0^2 \exp\left(-\omega_* \frac{|\tau|}{2}\right). \end{aligned}$$

Применяем алгоритм

$$\xi_1[n] = \sigma_0 \sqrt{1 - \rho^2} \xi_{01}[n] + \rho \xi_1[n - 1]; \quad \xi_2[n] = \sigma_0 \sqrt{1 - \rho^2} \xi_{02}[n] + \rho \xi_2[n - 1],$$

где $\rho = \exp(-\omega_* \cdot |\Delta t| / 2)$, $\xi_{01}(t)$ и $\xi_{02}(t)$ – независимые нормальные СВ с равномерным законом распределения на интервале (0,1).

$$\text{Тогда } u[n] = \sqrt{\xi_1^2[n] + \xi_2^2[n]}.$$

2.3.7. Моделирование нестационарных, случайных процессов.

Нестационарный, нормальный СП можно свести к преобразованию базового стационарного процесса с помощью безынерционного линейного преобразователя с функцией преобразователя, зависящей от времени, то есть в системе с переменными параметрами (нестационарной системе)

$$\eta(t) = f(t) \cdot \xi(t) + g(t), \quad (2.55)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – неслучайные функции времени.

Пусть $\xi(t)$ – стационарный, нормальный СП с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$. Тогда для выходного СП $\eta(t)$ можно записать

$$\begin{aligned} M\{\eta(t)\} &= g(t); \\ R_\eta(t, \tau) &= f(t) \cdot f(t + \tau) \cdot R_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Для моделирования исходными данными являются $g(t)$ и $R_\eta(t, \tau)$. Тогда из (2.56), учитывая $\sigma_\xi^2 = 1$, находим

$$f(t) = \sqrt{R_\eta(t, 0) / R_\xi(0)} = \sigma_\eta(t).$$

Моделирование $\eta(t)$ сводится к формированию на ПК последовательности СВ с помощью алгоритма из (2.55)

$$\eta[n] = f[n] \cdot \xi[n] + g[n],$$

где $f[n]$ и $g[n]$ – модели детерминированных функций времени; $\xi[n]$ – модель стационарного, нормального СП с характеристиками $(0, 1)$.

2.3.8. Моделирование марковских, случайных процессов.

До сих пор рассматривались нормальные СП и производные от них СП. Однако на практике часто возникает необходимость выйти за пределы класса СП с нормальным законом распределения. При этом задача моделирования в общем случае сильно усложняется. Тем не менее существует класс негауссовских СП, моделирование которых не вызывает сильных затруднений. Это марковские СП. Доступность этих СП для исследователя объясняется простотой их спектрально-корреляционных свойств. Однако в этом состоит и причина ограничений области их применения.

Марковским называется СП, у которого условная плотность распределения вероятностей в произвольный момент времени $t_n > t_{n-1}$ удовлетворяет соотношению

$$q(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \xi_1, t_1) = q(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1}) = q_0(\xi_n, \xi_{n-1}, t_n, t_{n-1}),$$

то есть зависит только от значения процесса в один из предшествующих моментов времени.

Для моделирования марковского СП достаточно знать $q(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1})$ и плотность вероятностей $q_0(\xi_0, t_0)$ начального значения ξ_0 в момент времени t_0 .

Алгоритм моделирования состоит в следующем:

– моделируется для момента времени $t = t_0$ СВ ξ_0 с плотностью вероятностей $q(\xi_0, t_0)$;

– для момента времени $t = t_1$ моделируется СВ ξ_1 с условной плотностью вероятностей $q(\xi_1, t_1 | \xi_0, t_0)$;

– для момента времени $t = t_2$ моделируется СВ ξ_2 с условной плотностью вероятностей $q(\xi_2, t_2 | \xi_1, t_1) = q(\xi_1, t_1 | \xi_0, t_0)$;

и т.д.

Получается последовательность коррелированных СВ $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n\}$, которая является моделью марковского СП.

В случае, когда плотности вероятностей $q(\xi_0, t_0)$ и $q(\xi_n, t_n | \xi_{n-1}, t_{n-1})$ являются нормальными, а процесс $\xi(t)$ является стационарным, то результатом считается марковский нормальный СП с экспоненциальной корреляционной

вероятностное описание потока при помощи многомерной плотности вероятностей интервалов между моментами наступления событий

$$q(z_1, \dots, z_k),$$

где $z_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ – непрерывные СВ. При этом задача моделирования сводится к формированию на ПК реализаций случайного вектора $\vec{z} = \{z_k\}$.

Моменты наступления событий получаются по простой рекуррентной формуле $\tau_k = z_k + \tau_{k-1}$.

Моделирование потоков следует начать с декомпозиции (расчленения) всей совокупности потоков на потоки однородных (или неразличимых) событий. Далее каждый однородный поток моделируется отдельно.

На практике широко используются модели случайных потоков с ограниченным последствием – это потоки Пальма, для которых интервалы z_1, \dots, z_k между событиями статистически независимы в совокупности, и, следовательно, $q(z_1, \dots, z_k) = q_1(z_1) \cdot q_2(z_2) \dots q_k(z_k)$.

Частный вид потоков с ограниченным последствием – рекуррентный (стационарный) поток, для которого $q_2(z_2) = q_3(z_3) = \dots = q_k(z_k) = q(z)$. Такой поток полностью задается двумя плотностями вероятностей $q_1(z_1)$ и $q(z)$. При этом справедлива формула Пальма

$$q_1(z_1) = \lambda \left[1 - \int_0^{z_1} q(u) du \right], \text{ где } \lambda - \text{интенсивность потока,}$$

определяемая выражением
$$M\{z\} = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} z \cdot q(z) dz .$$

Пример. Моделирование простейшего (пуассоновского стационарного) потока событий с интенсивностью λ .

Плотность распределения вероятностей является экспоненциальной $q(z) = \lambda \cdot \exp(-\lambda z)$, $z > 0$.

По формуле Пальма находим

$$q_1(z_1) = \lambda \left[1 - \int_0^{z_1} \lambda \cdot e^{-\lambda u} du \right] = \lambda \cdot \exp(-\lambda z_1) = q(z).$$

Равенство $q_1(z_1) = q(z)$ объясняется отсутствием последствия в потоке Пуассона.

Задача моделирования простейшего потока сводится к формированию последовательности независимых СВ с плотностью вероятностей $q(z)$ по формуле

$$z = -\ln(\xi)/\lambda,$$

где ξ – СВ с равномерным распределением на интервале $(0,1)$.

Моменты наступления событий вычисляются рекуррентно по формуле $\tau_k = z_k + \tau_{k-1}$, причем $\tau_0 = 0$.

3. Математические модели преобразований воздействий в радиоустройствах.

3.1. Постановка задач моделирования систем. Общие сведения о линейных и нелинейных системах.

При исследовании радиотехнических систем методом моделирования на ПК наряду с моделированием сигналов и помех, которое рассмотрено во второй главе, возникает необходимость в построении цифровых моделей систем.

Радиотехнические системы, как и радиозвенья (раздел 1.7 часть I), можно разделить на два основных класса: линейные системы и нелинейные системы.

Линейная система подчиняется принципу суперпозиции. В математической форме этот принцип выражается следующим образом

$$L\left[\sum_{i=1}^k u_i(t)\right] = \sum_{i=1}^k L[u_i(t)], \quad L[q \cdot u(t)] = q \cdot L[u(t)],$$

где L – оператор, характеризующий воздействие системы на входные сигналы $u(t)$, $u_i(t)$; q – произвольное число.

К нелинейным системам принцип суперпозиции неприменим. Это делает непригодным при их исследовании спектрального и иных методов анализа, основанных на разложении сложного сигнала на составляющие.

Заметим, что указанное разделение систем является условным. В зависимости от режима работы одни и те же системы могут быть отнесены к линейным и нелинейным.

Системы также можно разделить на инерционные (динамические) и безынерционные.

Инерционные системы – это системы, выходной сигнал которых определяется не только величиной входного сигнала в рассматриваемый момент времени, но и «предысторией» этого сигнала. Иначе говоря, инерционная система обладает некоторой конечной или бесконечной «памятью», от характера которой зависят особенности преобразования входного сигнала.

Безынерционные системы – это системы, где мгновенное установление выходной реакции происходит вслед за изменением внешнего входного воздействия.

Основными характеристиками линейных систем являются: комплексная частотная характеристика $K(j\omega)$: импульсная характеристика $h(t)$, представляющая собой реакцию системы на сигнал в виде дельта-функции $\delta(t)$: передаточная функция $K(p)$, где $p = \sigma + j\omega$ – комплексная частота. Все эти характеристики функционально связаны между собой преобразованиями Фурье и Лапласа:

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt,$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega,$$

$$K(p) = \int_0^{\infty} h(t) \cdot \exp(-pt) dt.$$

Нелинейные безынерционные системы характеризуются нелинейной, функциональной зависимостью между входным сигналом $u(t)$ и выходным сигналом $v(t)$:

$$v(t) = \Psi[u(t)].$$

Во многих случаях исследуемые радиотехнические системы можно представить в виде соединений линейных инерционных звеньев и нелинейных безынерционных звеньев. При этом моделирование системы сводится к моделированию отдельных звеньев.

Обычно задачу моделирования системы формулируют следующим образом. По известным характеристикам системы требуется определить вычислительный алгоритм, позволяющий получать на ПК дискретные значения $v[n] = v(n\Delta t)$ процесса $v(t)$ на выходе системы по известным дискретным значениям $u[n] = u(n\Delta t)$ входного процесса $u(t)$, где Δt – интервал дискретизаций, $n=0,1,\dots$

Основными требованиями к таким алгоритмам являются: минимальный объем вычислений на ПК, допустимые ошибки счета, минимальный объем подготовительных работ, а также возможность легко изменять параметры систем при проведении исследований.

3.2. Классификация методов математического моделирования радиоустройств.

В зависимости от уровня (глубины) описания работы реального радиоустройства, вида воздействий, исследуемых параметров радиоустройства, способов представления воздействий различают следующие методы математического моделирования:

- метод несущей;
- метод комплексной огибающей;
- метод информационного параметра;
- метод статистических эквивалентов;
- формульный метод.

Метод несущей. Этот метод моделирования радиозвеньев, основанный на воспроизведении мгновенных значений динамических процессов как на высокой частоте так и на низкой. Радиосигналы моделируются на частоте несущей ω_0 , которая является переносчиком информации. Низкочастотные сигналы после детектора можно считать частным случаем, когда $\omega_0 = 0$.

Так как моделируются сигналы с определенным спектром, то интервал дискретизации в модели должен быть связан с их верхней частотой ω_v . Величина Δt должна быть малой, что приводит к чрезмерным временным затратам при решении на ПК даже простейших задач. Задачи обработки высокочастотных (ВЧ) сигналов решать практически не удастся, если не допустить изменение масштаба времени и снизить частоту ω_0 .

При моделировании широкополосной системы метод несущей практически не применяется. Однако данный метод достаточно часто используется при моделировании низкочастотных радиоустройств.

Метод комплексной огибающей. Этот метод часто используется при моделировании ВЧ трактов (антенно-фидерные системы, усилители высокой частоты, усилители промежуточной частоты, преобразователи частоты и т. п.),

преобразования в которых описаны уравнениями для комплексных амплитуд. Причем на входе и выходе моделируемых устройств действуют узкополосные колебания.

Пусть реальный сигнал имеет вид

$$u(\lambda, t) = U(\lambda, t) \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \varphi(\lambda, t)], \quad (3.1)$$

где ω_0 – центральная частота спектра сигнала; $U(\lambda, t)$, $\varphi(\lambda, t)$ – амплитуда и фаза, зависящие от информационного параметра $\lambda(t)$.

Для сохранения при моделировании полной информации нет необходимости воспроизводить мгновенное значение сигнала (3.1). Сообщение $\lambda(t)$ содержится в амплитуде и фазе. Поэтому достаточно описать сигнал его комплексной амплитудой

$$\dot{U}(t) = U(t) \cdot \exp[j\varphi(t)], \quad (3.2)$$

Возможна также запись через квадратурные компоненты

$$\dot{U}(t) = U_c(t) + jU_s(t), \quad (3.3)$$

Где: $U_c(t) = U(t) \cdot \cos[\varphi(t)]$; $U_s(t) = U(t) \cdot \sin[\varphi(t)]$.

В модели, построенной по методу комплексной огибающей, необходимо вначале записать все сигналы в виде (3.1), при этом следует использовать одно и то же значение ω_0 . После этого находятся комплексные амплитуды (3.2), (3.3). Причем описание детерминированных процессов удобно представлять выражением (3.2).

Пример. Сигнал с фазовой модуляцией $\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_m \cdot \cos(\Omega_M \cdot t)$ и амплитудной модуляцией $U(t) = U_0 \cdot [1 + m \cdot \lambda(t)]$

имеет комплексную амплитуду $\dot{U}(t) = U_0 [1 + m \cdot \lambda(t)] \cdot \exp[j(\varphi_0 + \varphi_m \cos(\Omega_M \cdot t))]$.

Моделирование комплексных амплитуд случайных колебаний удобно проводить, используя соотношение (3.3).

Пример. Для нормального случайного процесса квадратурные компоненты также имеют нормальный закон распределения вероятностей. Их полной характеристикой являются автокорреляционные и взаимные корреляционные функции. Процесс описывается корреляционной матрицей

$$K(\tau) = \begin{vmatrix} K_{cc}(\tau) & K_{cs}(\tau) \\ K_{sc}(\tau) & K_{ss}(\tau) \end{vmatrix},$$

в которой $K_{cc}(\tau) = K_{ss}(\tau) = \overline{U_c(t)U_c(t+\tau)} = \overline{U_s(t)U_s(t+\tau)}$ – автокорреляционные функции; $K_{cs}(\tau) = -K_{sc}(\tau) = \overline{U_c(t)U_s(t+\tau)} = -\overline{U_s(t)U_c(t+\tau)}$ – взаимные корреляционные функции.

Для произвольного стационарного узкополосного процесса элементы корреляционной матрицы находятся следующим образом. Для двустороннего энергетического спектра

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

находится смещенный в область низких частот на величину ω_0 спектр

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{cases} 2 \cdot S(\omega + \omega_0), & \omega \geq -\omega_0; \\ 0, & \omega < -\omega_0 \end{cases}$$

При этом двухсторонний спектр $S(\omega)$ можно представить в виде сумм спектров $S^+(\omega)$ и $S^-(\omega)$ (рис. 3.1).

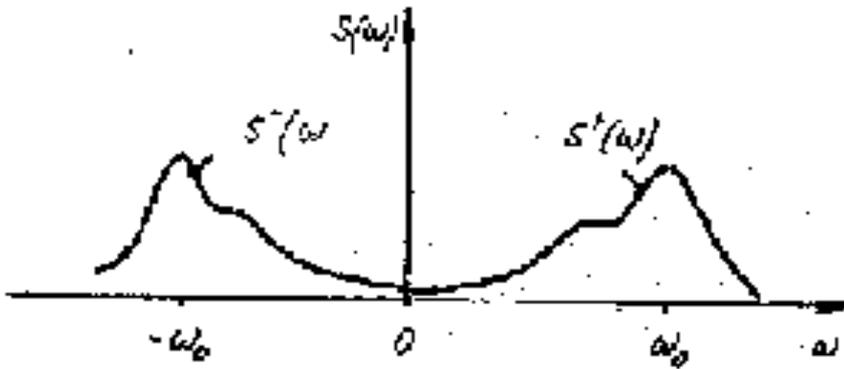


Рис. 3.1.

Смещенный спектр приближенно равен

$$\tilde{S}(\omega) = 2 \cdot S^+(\omega + \omega_0).$$

Корреляционная функция комплексной амплитуды записывается в виде

$$\dot{K}(\tau) = \frac{1}{2} \overline{\dot{U}^*(t)} \cdot \dot{U}(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) \cdot \exp(j\omega\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

где символ $*$ обозначает комплексно-сопряженную величину.

Для квадратурных компонент $\dot{K}(\tau) = K_{cc}(\tau) + jK_{cs}(\tau)$.

Если $\tilde{S}(\omega)$ – четная функция, в случае (1.4), то $K(\tau)$ является действительной функцией, тогда

$$K_{cs}(\tau) = -K_{sc}(\tau) = 0.$$

В этом случае квадратурные компоненты некоррелированы, а для нормального процесса означает, статистически независимы, что облегчает моделирование процесса (1.3).

Следует отметить некоторые свойства комплексных амплитуд:

– для вычисления амплитуды и фазы сигнала используются уравнения

$$U(t) = \left| \dot{U}(t) \right| = \sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)};$$

$$\varphi(t) = \arg \dot{U}(t) = \begin{cases} \text{arctg}(U_s / U_c), & U_c(t) \geq 0 \\ -\text{arctg}(U_s / U_c + \pi), & U_s(t) \geq 0, U_c(t) < 0 \\ \text{arctg}(U_s / U_c - \pi), & U_s(t) < 0, U_c(t) < 0 \end{cases}$$

– при суммировании колебаний их комплексные амплитуды складываются

$$u_1(t) + u_2(t) \rightarrow \dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t),$$

– при умножении колебания на действительную функцию на нее же умножается комплексная амплитуда

$$f(t) \cdot u(t) \rightarrow f(t) \cdot \dot{U}(t),$$

где $f(t)$ – действительная функция,

– сдвиг частоты колебания на величину Ω дает умножение комплексной амплитуды на величину $\exp(j \cdot \Omega \cdot t)$

$$u(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow \dot{U}(t) = U(t) \exp(j\varphi)$$

$$u_1(t) = U(t) \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi] \rightarrow \dot{U}_1(t) = \dot{U}(t) \exp(j\Omega t) = U(t) \exp[j(\Omega \cdot t + \varphi)]$$

Пример. Сигнал с линейной частотной модуляцией $\omega(t) = \omega_0 + \gamma \cdot t$

имеет комплексную амплитуду $\dot{U}(t) = U(t) \exp[j(\gamma \cdot t^2 / 2 + \varphi_0)]$,

где φ_0 – начальная фаза несущего колебания.

Пример. Сигнал является суммой ФМ и АМ сигналов

$$u_1(t) = U_1 \cos[\omega_0 \cdot t + \varphi_1(t)], \quad u_2(t) = U_2 [1 + m \cdot \cos(\Omega_M t)] \cdot \cos(\omega_0 t).$$

Комплексная амплитуда равна

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) = U_1 \cdot \exp[j\varphi_1(t)] + U_2 [1 + m \cdot \cos(\Omega_M t)].$$

Пример. Сигнал формируется управляемым по частоте генератором. Управляющее напряжение $u_y(t)$, крутизна характеристики управления S_y

$$\dot{U}(t) = U_0 \cdot \exp\left\{j \cdot \left[S_y \int_0^t u_y(\tau) d\tau + \varphi_0\right]\right\}.$$

3.3. Методы и алгоритмы моделирования линейных инерционных систем.

При моделировании большинства радиосистем и радиоустройств необходимо уметь строить модели звеньев двух типов – линейных инерционных и нелинейных безынерционных. Обычно можно считать, что между звеньями имеется развязка, при этом свойства каждого звена не зависят от присоединения к нему других звеньев. Поэтому для построения модели достаточно иметь алгоритмы звеньев, не учитывающие влияние на них других звеньев. Нелинейные инерционные устройства (например, узкополосный частотный детектор, резонансный усилитель – ограничитель) тоже могут быть представлены в виде соединения указанных двух типов звеньев. Таким образом, из двух основных типов звеньев, можно строить модели линейных и нелинейных радиосистем любой сложности путем наращивания структуры модели. Причем задача моделирования решается проще для разомкнутых систем, содержащих последовательно и параллельно включенные звенья. Более сложной является задача моделирования замкнутых систем, содержащих один или несколько контуров обратной связи.

3.3.1. Принцип дискретной аппроксимации непрерывной линейной инерционной системы.

Переход от непрерывной линейной системы к ее дискретному аналогу (цифровой модели) целесообразно произвести, используя понятие импульсной системы. Представим схему импульсной линейной системы (рис. 3.2), в состав которой входит моделируемая непрерывная система с передаточной функцией $K(p)$:

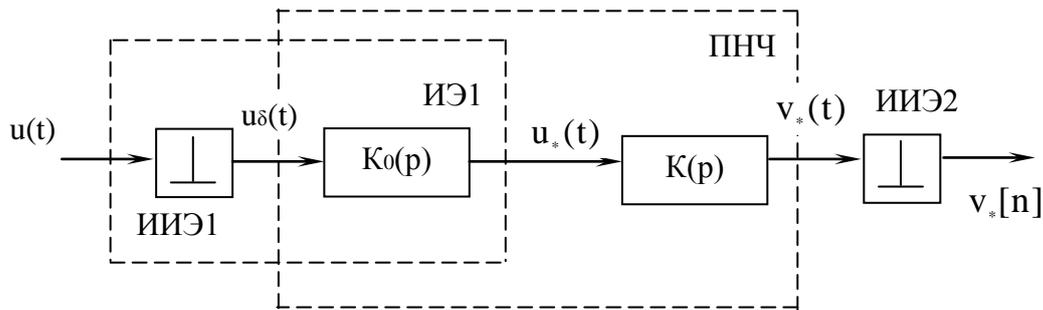


Рис. 3.2.

где ИЭ – импульсный элемент; ИИЭ – идеальный импульсный элемент; ПНЧ – приведенная непрерывная часть дискретного аналога непрерывной системы.

Пусть ИЭ1 (ключ) переходит в замкнутое состояние на время $\delta \cdot \tau$ через равные интервалы времени Δt . При этом $0 \leq \delta \cdot \tau \leq \Delta t$. Очевидно, что при $\delta \cdot \tau \leq \Delta t$ импульсная система вырождается в непрерывную (ключ постоянно замкнут). При $\delta \cdot \tau \rightarrow 0$ на вход непрерывной системы с передаточной функцией $K(p)$ поступает вместо непрерывного воздействия $u(t)$ периодическая последовательность коротких импульсов, модулированных по амплитуде этим процессом

$$u_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \delta(t - n\Delta t).$$

При этом реакция $v_*(t)$ непрерывной системы будет в наибольшей степени отличаться от реакции $v(t)$ на воздействие $u(t)$. Этот случай имеет место при цифровом моделировании, так как ПК может оперировать только с числами – отсчетами $u(t)$ в моменты времени $t = n \cdot \Delta t$, $n = 1, 2, \dots$. В импульсной системе на выходе ИЭ1 действует последовательность импульсов конечной длительности, модулированная по амплитуде процессом $u(t)$ (рис.3.3)

$$u_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n \cdot \Delta t) \cdot h_0(t - n \cdot \Delta t),$$

где $h_0(t)$ – функция, описывающая форму отдельного импульса.

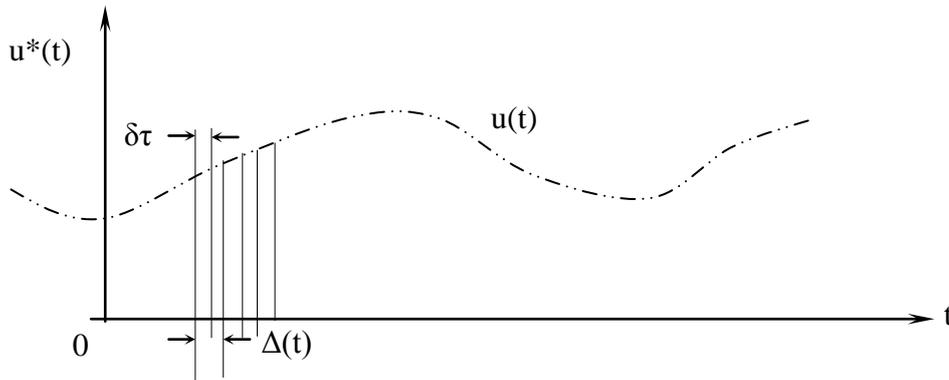


Рис. 3.3.

Например, для импульса прямоугольной формы

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \delta\tau \\ 0, & t < 0, t > \delta\tau \end{cases}$$

и импульсный элемент ИЭ1 можно описать с помощью передаточной функции

$$K_0(p) = L\{h_0(t)\} = p^{-1}[1 - \exp(-p\delta\tau)],$$

где $L\{\cdot\}$ – преобразование Лапласа.

Очевидно, чем меньше различие $\delta\tau$ и Δt , тем меньше различие между $v_*(t)$ и $v(t)$. При цифровом моделировании $\delta\tau \rightarrow 0$, в этом случае различие между $v_*(t)$ и $v(t)$ можно уменьшить за счет имитации импульсов $h_0(t)$, то есть интерполяции процесса $u_\delta(t)$. Для этой цели после идеального импульсного элемента ИИЭ1 включается интерполирующий фильтр с импульсной переходной характеристикой $h_0(t)$, примерно воспроизводящей форму импульсов физически отсутствующих в цифровой модели.

Интерполирующий фильтр далее учитывается как коррекция моделируемой непрерывной системы, то есть образует вместе с системой – оригиналом так называемую приведенную непрерывную часть (ПНЧ) дискретного аналога. Тогда передаточная функция ПНЧ равна

$$K_*(p) = K_0(p)K(p),$$

где $K_0(p) = L\{h_0(t)\}$ – передаточная функция интерполирующего фильтра, связанная прямым преобразованием Лапласа с импульсной переходной характеристикой $h_0(t)$.

В дальнейшем определяется алгоритм цифрового моделирования ПНЧ с передаточной функцией $K_*(p)$ или импульсной переходной характеристикой $h_*(t)$ методами, которые будут рассмотрены в последующих разделах.

Применение цифровой модели ПНЧ в схеме учитывается включением ИИЭ2. Так как ПНЧ находится под воздействием δ – импульсов, то на выходе приведенной части имеем

$$v_*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \cdot h_*(t - k \cdot \Delta t), \quad \text{где } h_*(t) = L^{-1}\{K_*(p)\}.$$

Тогда на выходе дискретного аналога в результате действия идеального импульсного элемента ИИЭ2 имеем (переход к дискретному времени $t = n\Delta t$)

$$v_*[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \cdot h_*[n-k].$$

В результате получен алгоритм скользящего суммирования. На практике при $t < 0$ $u(t) \equiv h_*(t) \equiv 0$, то есть принимаются нулевые начальные условия. Поэтому окончательно при $k \leq n-1$

$$v_*[n] = \sum_{k=0}^{n-1} u[k] \cdot h_*[n-k].$$

3.3.2. Метод дискретной свертки.

Данный метод применяется для цифрового моделирования линейных непрерывных инерционных звеньев, для которых известна импульсная переходная характеристика $h_0(t)$ и начальные условия являются нулевыми.

Реакция звена на произвольное воздействие $u(t)$ может быть определена с помощью интеграла свертки (Дюамеля):

$$v(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot h_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t u(t-\tau) \cdot h_0(\tau) d\tau.$$

Применим простейший метод численного интегрирования – метод прямоугольников, основанный на замене подынтегральной функции ступенчатой кривой при достаточно малом шаге дискретизации Δt . Заменим

$$d\tau = \Delta t,$$

$$t = n \cdot \Delta t, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\tau = k \cdot \Delta t, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

так как $\tau \leq t$, $k \leq n-1$.

Представим интеграл приближенно конечной суммой и получим

$$v[n] = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} u[k] \cdot h_0[n-k]. \quad (3.5)$$

Это соотношение является простейшим алгоритмом скользящего суммирования, суть которого состоит в том, что реакция модели в n -й отсчет времени равна сумме входных воздействий $u[k]$ при $k = \overline{0, n-1}$ с различными весами $h_0[n-k]$, причем вес тем меньше, чем больше различие между k и n (рис. 3.4).

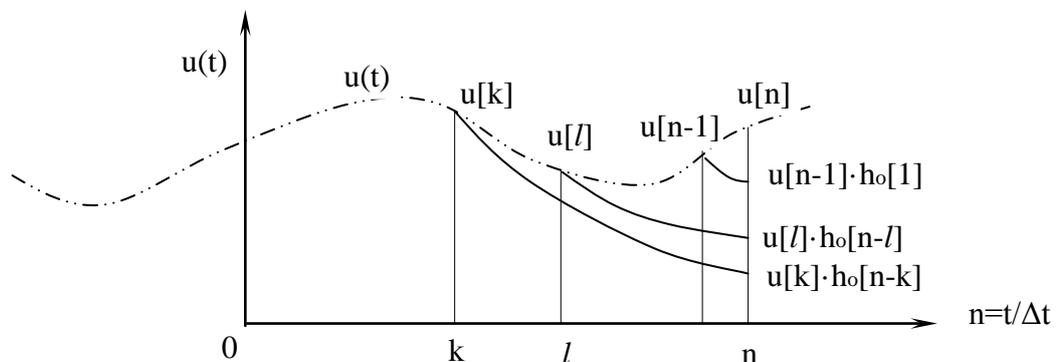


Рис. 3.4.

Алгоритм скользящего суммирования является универсальным, так как не накладывает каких либо ограничений на вид интегрального оператора $h_o(t)$ или дифференциального оператора $K_o(p)$ моделируемого звена. Единственным ограничением является начальные условия, которые должны быть нулевыми. Метод применим как для стационарных, так и для нестационарных систем. В последнем случае сетка весовых коэффициентов $h_o[n-k]$, которая скользит относительно $u[n]$, меняется во времени.

Недостаток алгоритма состоит в том, что суммирование по «к» необходимо производить заново для каждого нового «n», что приводит к значительным затратам машинного времени (алгоритм не является рекуррентным).

Часто для повышения точности моделирования применяют более совершенные методы численного интегрирования (метод трапеций, метод Симпсона). Форма алгоритма скользящего суммирования видоизменяется незначительно. Сравним $v[n]$ с реакцией $v_*[n]$ дискретного алгоритма и получим $h_*(t) = \Delta t \cdot h(t)$. Поскольку

$$h_*(t) = \int_0^t h_o(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_0^t h_o(t - \tau) \cdot h_o(\tau) d\tau = \Delta t \cdot h(t)$$

при $h_o(t) = \Delta t \cdot \delta(t)$, то интерполирующий фильтр является безынерционным линейным звеном с коэффициентом усиления Δt . Таким образом, алгоритм дискретной свертки – частный случай дискретной аппроксимации.

Следует отметить, что выражение (3.5) описывает поведение дискретных линейных фильтров, передаточные функции которых определяются как отношение z -преобразование дискретного выходного сигнала $v[n]$ к z -преобразованию дискретного входного сигнала $u[n]$, имеют вид [13]

$$K(z) = \frac{Z\{v[n]\}}{Z\{u[n]\}} = \sum_{k=0}^{n-1} q[k] \cdot z^{-k}, \quad (3.6)$$

где $q[k] = \Delta t \cdot h[k]$, $z = \exp(p \cdot \Delta t)$.

Заметим, что при дискретной свертке численное интегрирование не обязательно должно выполняться методом прямоугольников, как при получении (1.5). Однако другие методы интегрирования приводят к более сложным, но более точным алгоритмам дискретной свертки.

Пример. Линейный фильтр, используя метод комплексной огибающей, описывается уравнением

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \dot{H}(\tau) \cdot U(t - \tau) d\tau, \quad \text{где} \quad \dot{H}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega - \text{комплекс-}$$

ная импульсная характеристика фильтра

$$\tilde{K}(j\omega) = \begin{cases} K \cdot j(\omega + \omega_0), & \omega \geq -\omega_0 \\ 0, & \omega < -\omega_0 \end{cases}$$

– смещенный коэффициент передачи ($\tilde{K}(j\omega) \approx K^+ \cdot j(\omega + \omega_0)$) – коэффициент передачи в положительной области частот, лежащий для узкополосного фильтра около частоты ω_0).

Для узкополосного фильтра $\tilde{K}(j\omega) \approx \frac{1}{1 + j\omega T}$,

где $T = 1/\Delta\Omega_{0,7}$ – постоянная времени фильтра; $2\Delta\Omega_{0,7}$ – полоса пропускания фильтра по уровню 0,7 и $\dot{H}(t) = \frac{2}{T} \exp(-t/T)$.

Расчетное соотношение с учетом узкополосности фильтра имеет вид

$$\dot{V}(t) \approx \frac{1}{2} \int_0^t \dot{H}(\tau) \cdot U(t - \tau) d\tau.$$

Для сигнала с расстройкой Ω относительно ω_0

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_0(t) \exp(j\Omega t) \text{ получим } \dot{V}(t) \approx A \int_0^t \exp(-\tau/T) \cdot \exp(-j\Omega \tau) d\tau,$$

Где $A = \frac{U_0}{T} \exp(j\Omega t)$.

Численное интегрирование в можно выполнить по методу трапеций

$$\int_0^t f(x) dx \approx \frac{\Delta t}{2} [f(0) + 2f(\Delta t) + 2f(2\Delta t) + \dots + 2f[(N-1)\Delta t] + f(N\Delta t)],$$

где Δt – шаг интегрирования; N – число интервалов разбиения.

3.3.3. Метод рекуррентных разностных уравнений.

Данный метод при дискретной аппроксимации основан на применении дискретного аналога непрерывной линейной системы. Система должна быть стационарной, а оператор $K(p)$ – дробно-рациональной функцией. Начальные условия полагаются нулевыми.

Методика определения рекуррентного уравнения связана с описанием приведенной непрерывной части и зависит от вида корректирующего фильтра. Этапы составления рекуррентного уравнения следующие:

- задаться операторами $K(p)$ и $K_0(p)$;
- найти $K_*(p) = K_0(p) \cdot K(p)$;
- используя обратное преобразование Лапласа, найти $h_*(t)$;
- найти изображение в смысле z -преобразование импульсной переходной функции: $K_*(z) = z\{h_*(k\Delta t)\}$;
- передаточную функцию $K_*(z)$ представить в виде дробно-рациональной функции от переменной z^{-k} ;
- записать рекуррентное уравнение по известной формуле.

Так как, по определению, z -преобразования функции времени и ее изображения по Лапласу $X(s)$ совпадают $z\{X(s)\} = z\{x(t)\}$,

То $K_*(z) = z\{h_*(k\Delta t)\} = z\{K_*(s)\}$,

что позволяет в вышеприведенных этапах составления уравнения опустить третий этап.

Если представить передаточную функцию дискретной модели в виде

$$K_*(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_n z^{-n}}, \quad (3.7)$$

то рекуррентное уравнение имеет вид
$$v[n] = \sum_{k=1}^q a_k v[n-k] + \sum_{k=0}^m b_k u[n-k].$$

Разновидности этого алгоритма получаются при выборе различных типов интерполирующего фильтра с передаточной функцией $K_0(p)$. В частности, простейший метод z -преобразований основан на применении фильтра с характеристиками $K_0(p) = \Delta t$ и $h_0(t) = \Delta t \cdot \delta(t)$ и соответствует простейшему методу дискретной свертки при использовании численного интегрирования по методу прямоугольников.

Главное преимущество рекуррентных алгоритмов в сравнении с алгоритмом скользящего суммирования – экономия вычислительных затрат за счет использования на каждом шаге результатов вычислений на предыдущих шагах, а также за счет значительно меньшего числа операции умножения и суммирования. Основным недостатком является накопление ошибок для последующих вычислений за счет округления предыдущих значений.

Основные методы получения рекуррентных алгоритмов моделирования:

Метод аппроксимации	$K_0(p)$	$K_*(z)$
z -преобразование	Δt	$\Delta t \cdot Z\{K(p)\}$
Цыпкина-Гольденберга	$\frac{1 - \exp(-p \cdot \Delta t)}{p}$	$(1 - z^{-1})Z\left\{\frac{K(p)}{p}\right\}$
Рагазини-Бергена	$\frac{[1 - \exp(-p \cdot \Delta t)]^2}{\Delta t \cdot p^2}$	$\frac{(1 - z^{-1})^2}{\Delta t} Z\left\{\frac{K(p)}{p^2}\right\}$

В одинаковых условиях применения наибольшей точностью обладает метод Рагазини-Бергена, основанный на линейной интерполяции (импульс $h_0(t)$ - треугольный). Метод Цыпкина-Гольденберга (ступенчатая интерполяция - $h_0(t)$ - прямоугольный) несколько уступает по точности. Интерполяция $h_0(t)$ в виде δ -функции (метод z -преобразования) обладает наименьшей точностью. Однако повышение точности путем усложнения $h_0(t)$ по отношению к линейной интерполяции практически нецелесообразно, так как приводит к неоправданно большим затратам машинного времени. Выгоднее несколько уменьшить шаг дискретизации.

При использовании экстраполятора порядка q (метод квадратичной, кубической и т. д. аппроксимации)

$$K_*(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{q+1} Z\left\{\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 \Delta t} + \dots + \frac{1}{s^{q+1} (\Delta t)^q}\right] K(s)\right\}.$$

Все методы дискретной аппроксимации дают полностью устойчивые цифровые модели (при любом шаге Δt).

Рассмотрим более подробно метод z -преобразования. На основании выражений (3.5 и 3.6), полагая, что $N = \infty$, можно записать

$$K(z) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k} = \Delta t \cdot Z\{h[k]\}. \quad (3.8)$$

Таким образом, передаточная функция $K(z)$ равна z -преобразованию дискретных значений импульсной характеристики системы, умноженному на интервал дискретизации Δt .

Импульсная характеристика $h(t)$ линейной системы с передаточной функцией $K(p)$ в виде дробно-рациональной функции, согласно теореме разложения Хевисайда [13], имеет вид

$$h(t) = \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} C_{v\mu} \frac{t^\mu}{\mu!} \exp(p_v t), \quad (3.9)$$

где p_v , $v = 0, 1, \dots, s$ – полюсы передаточной функции $K(p)$ с кратностями r_v , $s+1$ – число различных полюсов p_v , $m = r_0 + \dots + r_s$ – общее число полюсов;

$$C_{v\mu} = \frac{1}{(r_v - \mu - 1)!} \frac{d^{r_v - \mu - 1}}{dp^{r_v - \mu - 1}} [K(p)(p - p_v)^{r_v}]_{p=p_v}.$$

Из (3.8) следует, что

$$h(t) = \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} C_{v\mu} \Delta t^\mu \frac{k^\mu}{\mu!} \exp(q_v k), \quad (3.10)$$

где $q_v = p_v \cdot \Delta t$.

Подставляя (3.10) в (3.8), после ряда преобразований с учетом свойства линейности z -преобразования получаем

$$K(z) = \sum_{v=0}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} C_{v\mu} \frac{\Delta t^{\mu+1}}{\mu!} K_{v\mu}(z), \quad (3.11)$$

где

$$K_{v\mu}(z) = Z\{k^\mu \exp(q_v k)\} = \frac{d^\mu}{dq_v^\mu} \left(\frac{1}{1 - \exp(q_v)z^{-1}} \right).$$

При отсутствии кратных полюсов ($r_v = 1$) у передаточной функции $K(p)$ системы выражение (3.10) для импульсной характеристики принимает вид

$$h(t) = \sum_{v=0}^{m-1} C_{v0} \exp(p_v t),$$

где

$$C_{v0} = [K(p)(p - p_v)]_{p=p_v}.$$

При этом формулу (1.10) можно записать как

$$K(z) = \sum_{v=0}^{m-1} C_{v0} \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{1}{1 - \exp(q_v)z^{-1}} \right). \quad (3.12)$$

Пример. Моделирование инерционного звена с передаточной функцией $K(p) = 1/(1+pT)$.

При использовании метода дискретной аппроксимации Рагаззини-Бергена получаем:

$$v[n] = a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] - b_1 v[n-1],$$

где $a_1 = 1 - [1 - \exp(-H)]/H$; $a_2 = [1 - \exp(-H)]/H - \exp(-H)$;
 $b_1 = -\exp(-H)$; $H = \Delta t/T$ – нормированный шаг дискретизации.

Пример. Моделирование резонансного усилителя с одиночным колебательным контуром с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{K_0 p}{p^2 + p \cdot \Delta\omega + \omega_0^2},$$

где K_0 – коэффициент передачи на резонансной частоте ω_0 ; $\Delta\omega$ – ширина полосы пропускания по уровню 0,707.

При использовании метода Цыпкина-Гольденберга получаем:

$$v[n] = a_2 u[n-2] + a_1 u[n-1] - b_2 v[n-2] - b_1 v[n-1],$$

где $a_1 = K_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sin(H_0)$; $a_2 = -a_1$; $b_1 = -2 \exp\left(-\frac{H}{2}\right) \cos(H_0)$; $b_2 = \exp(-H)$;

$$H_0 = \omega_0 \Delta t; \quad H = \Delta\omega \cdot \Delta t.$$

Пример. Методом z-преобразования определить алгоритм моделирования линейной системы с передаточной функцией вида

$$K(p) = \frac{K_0(1 + pT_1)}{p^2}.$$

Передаточная функция имеет только один полюс $p_0 = 0$ кратности $r_0 = 2$. Тогда параметры ν и μ принимают значения: $\nu = 0$, $\mu = 0$ и 1.

Согласно (3.9) получаем

$$C_{00} = \frac{d}{dp} \left[\frac{K_0(1 + pT_1)}{p^2} p^2 \right]_{p=0} = K_0 T_1, \quad C_{01} = \left[\frac{K_0(1 + pT_1)}{p^2} p^2 \right]_{p=0} = K_0.$$

Находим выражения для функций $K_{\nu\mu}(z)$:

$$K_{00}(z) = \frac{1}{1 - \exp(q_0)z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad K_{01}(z) = \frac{d}{dq_v} \left(\frac{1}{1 - \exp(q_v)z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}.$$

Подставляя эти выражения в (3.11), находим

$$K(z) = K_0 T_1 \Delta t \frac{1}{1 - z^{-1}} + K_0 \Delta t^2 \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}.$$

С учетом (3.7) определяем следующий рекуррентный алгоритм моделирования системы:

$$v[n] = K_0 T_1 \cdot \Delta t \cdot u[n] + K_0 \cdot \Delta t \cdot (\Delta t - T_1) \cdot u[n-1] + 2 \cdot v[n-1] - v[n-2].$$

3.3.4. Метод отображения.

Метод основан на конформном отображении $s \rightarrow z$. При известном типе преобразования для получения рекуррентного уравнения в функции передачи $K(s)$ аналогового фильтра вместо s подставляется некоторая функция z . Данному методу можно в ряде случаев поставить в соответствие методы численного интегрирования.

Явное преобразование Эйлера

$$s = (z - 1)/\Delta t. \tag{3.13}$$

Неявное преобразование Эйлера, соответствующее интегрированию методом прямоугольников

$$s = (z - 1)/z \cdot \Delta t. \quad (3.14)$$

Билинейное преобразование, соответствующее интегрированию методом трапеций

$$s = 2(z - 1)/(z + 1)\Delta t. \quad (3.15)$$

Преобразования (3.14), (3.15) дают полностью устойчивые цифровые модели для устойчивых аналоговых фильтров. Преобразование (3.13) является условно устойчивым, так как при увеличении Δt модель устойчивого звена становится неустойчивой.

3.3.5. Частотный метод.

Рассмотренные ранее методы являлись методами моделирования во временной области. В данном методе используется частотный подход к анализу прохождения сигналов через линейные системы. В его основу положена зависимость спектральной плотности $V(j\omega)$ выходного сигнала $v(t)$ от спектральной плотности $U(j\omega)$ входного сигнала $u(t)$:

$$V(j\omega) = K(j\omega) \cdot U(j\omega).$$

Основными операциями частотного метода моделирования являются дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ).

ДПФ для сигнала, заданного последовательностью N временных отсчетов $u(\Delta t) = u[n]$, имеет следующий вид: $U(k\Omega) = U[k] = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \cdot \exp(-j2\pi nk/n)$, где $\Omega = 2\pi / N\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. При $k > N - 1$ функция $U[k]$ повторяется периодически.

Исходную последовательность временных отсчетов $u[n]$ определяют через ОДПФ: $u[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U[k] \cdot \exp(j2\pi nk/N)$ где $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Вне интервала $0 \leq n \leq N - 1$ ОДПФ определяет периодическое продолжение исходной последовательности.

Для цифрового моделирования стационарных линейных инерционных систем требуется выполнить три основных операции:

- определение спектра входного сигнала $u[n]$ с помощью ДПФ, то есть представление сигнала в виде суперпозиции гармоник;
- умножение дискретного спектра входного сигнала на соответствующие значения частотной комплексной частотной характеристики $K(j\omega)$;
- вычисление выходной последовательности $v[n]$ с помощью обратного ДПФ, применяемого к дискретному спектру процесса $v[n]$.

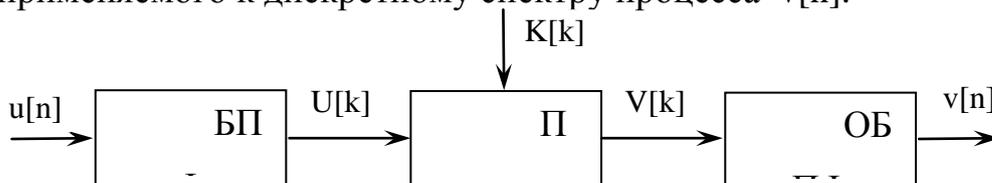


Рис. 3.5.

В результате БПФ получаются спектральные отсчеты $U[k]$ входного сигнала $u[n]$, которые умножаются на отсчеты $K[k]$ комплексной частотной характеристики $K(j\omega)$ линейной системы, определенные заранее и введенные в память ПК. Для получения выходного сигнала $v[n]$ производится ОБПФ спектральных отсчетов $V[k]$. На рис. 3.5 представлена схема алгоритма, реализующего частотный метод моделирования.

3.3.6. Метод конечных разностей.

В ряде случаев требуется построить цифровую модель линейной инерционной системы при ненулевых начальных условиях. Методы, основанные на использовании импульсной характеристики, функции передачи и БПФ непригодны. Поэтому приходится обращаться к прямым методам решения дифференциального уравнения, описывающего моделируемую систему.

Пусть на вход непрерывной системы подается произвольное воздействие $u(t)$. Реакция $v(t)$ системы на это воздействие может быть определена в результате решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с правой частью (то есть неоднородного):

$$A_m v^{(m)} + A_{m-1} v^{(m-1)} + \dots + A_1 v^{(1)} + A_0 v = u(t).$$

Для получения цифровой модели на основе решения данного уравнения можно использовать аппарат решетчатых функций. Введем нормированное время $\bar{t} = t/\Delta t$ и будем рассматривать значение процессов $u(t)$ и $v(t)$ только в целочисленные моменты времени $n = t/\Delta t = 0, 1, 2, \dots$. Тогда последовательности $u[n]$ и $v[n]$ будут называться решетчатыми функциями времени.

- Для решетчатых функций аналогом производной является разность
- разность первого порядка (первая разность) – $\Delta u[n] = u[n+1] - u[n]$;
 - вторая разность – $\Delta^2 u[n] = \Delta u[n+1] - \Delta u[n]$;
 - разность порядка m – $\Delta^m u[n] = \Delta^{m-1} u[n+1] - \Delta^{m-1} u[n]$.

Аналогом интеграла является конечная сумма: $J_n = J[n] = \sum_{i=0}^{n-1} u[i]$.

Дифференциальному уравнению для дискретного аналога системы соответствует уравнение в конечных разностях порядка m :

$$a_m \Delta^m v[n] + a_{m-1} \Delta^{m-1} v[n] + \dots + a_1 \Delta v[n] + a_0 v[n] = u[n].$$

Для решения этого уравнения должны быть известны начальные условия, то есть значение $v[0]$ и значения всех ее разностей включая $(m-1)$ -ю.

Чтобы решить уравнение на ПК, применим следующие преобразования:

$$\Delta v[n] = v[n+1] - v[n];$$

$$\Delta^2 v[n] = v[n+2] - 2v[n+1] + v[n];$$

.....

$$\Delta^m v[n] = \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v v[n+1-v],$$

где $C_m^v = \frac{m!}{v!(m-v)!}$ - биномиальные коэффициенты.

Применяя эти соотношения, записываем уравнение в конечных разностях в виде рекуррентного алгоритма:

$$u[n] = b_m v[n+m] + b_{m-1} v[n+m-1] + \dots + b_1 v[n+1] + b_0 v[n].$$

После замены переменной $n+m = k$ получаем

$$v[k] = \frac{1}{b_m} \{u[k-m] - b_{m-1} v[k-1] - \dots - b_1 v[k-m+1] - b_0 v[k-m]\}.$$

Пример. Моделирование линейного инерционного звена с передаточной функцией $K(p) = 1/(1+pT) = \alpha/(p+\alpha)$, $\alpha = 1/T$.

Записываем дифференциальное уравнение для непрерывной системы $dv/dt + \alpha \cdot v = \alpha \cdot u$.

Введем новую переменную – нормированное время $\bar{t} = t/\Delta t$. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{dv(\bar{t})}{d\bar{t}} + \alpha \cdot v(\bar{t}) = \alpha \cdot u(\bar{t}).$$

Так как $\frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{1}{\Delta t}$, то $\frac{dv(\bar{t})}{d\bar{t}} + \alpha \cdot \Delta t \cdot v(\bar{t}) = \alpha \cdot \Delta t \cdot u(\bar{t})$.

Переходим к $u[n]$, $v[n]$ и запишем разностное уравнение $v[n+1] - v[n] + \alpha \cdot \Delta t \cdot v[n] = \alpha \cdot \Delta t \cdot u[n]$.

Окончательно при $k = n+1$ находим

$$v[k] = \alpha \cdot \Delta t \cdot u[k-1] + (1 - \alpha \cdot \Delta t) \cdot v[k-1].$$

Знание начальных условий позволяет моделировать, начиная с $k=1$, так как $v[0]$ задано и необязательно равно нулю.

3.3.7. Моделирование узкополосных линейных устройств методом комплексной огибающей.

Ранее отмечалось, что метод комплексной огибающей основан на учете узкополосного характера радиосигналов и устройств их обработки. Если выполняется условие $\Delta\omega_c \approx \Delta\omega_b \ll \omega_0$, где $\Delta\omega_c$ – ширина спектра модулированного радиосигнала; $\Delta\omega_b$ – ширина полосы пропускания тракта приема и обработки радиосигнала; ω_0 – резонансная (или центральная) частота радиотракта, то можно записать соответственно для импульсной характеристики устройства, входного воздействия и выходной реакции

$$h(t) = H(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi_h(t)] = \text{Re}\{\dot{H}(t) \cdot \exp(j\omega_0 t)\};$$

$$u(t) = U(t) \cdot \cos[\omega_c t + \varphi_u(t)] = \text{Re}\{\dot{U}(t) \cdot \exp(j\omega_0 t)\};$$

$$v(t) = V(t) \cdot \cos[\omega_c t + \varphi_v(t)] = \text{Re}\{\dot{V}(t) \cdot \exp(j\omega_0 t)\};$$

где $\dot{H}(t) = H(t) \cdot \exp[j\varphi_h(t)]$; $\dot{U}(t) = U(t) \cdot \exp\{j \cdot [\Omega \cdot t + \varphi_u(t)]\}$;

$\dot{V}(t) = V(t) \cdot \exp\{j \cdot [\Omega \cdot t + \varphi_v(t)]\}$; $\Omega = \omega_c - \omega_0$ – расстройка радиосигнала относительно резонансной частоты ω_0 тракта приема.

Подставляя в интеграл свертки, имеем

$$v(t) = \int_0^t u(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

Представляя $u(t)$ и $h(t)$ в комплексной форме, можно получить формулу комплексной свертки $\dot{V}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \dot{U}(\tau)\dot{H}(t - \tau)d\tau.$

Применим метод численного интегрирования по правилу прямоугольников и получим алгоритм скользящего суммирования для комплексной огибающей

$$\dot{V}[n] = \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \dot{U}(k)\dot{H}(n - k).$$

В полученной цифровой модели узкополосной линейной системы воспроизводится только комплексная огибающая сигнала, содержащая полезную информацию, и ее преобразование с помощью низкочастотного эквивалента, имеющего импульсную переходную характеристику $\dot{H}_\ominus(t) = \frac{1}{2} \dot{H}(t).$

Реализация модели на ПК требует использования операций сложения и умножения над комплексными числами, которые выполняются по стандартным программам. Величина шага дискретизации Δt выбирается, исходя из верхней границы спектра модулирующей функции, а не спектра радиосигнала, как это имеет место при методе несущей. Ориентировочно принимается $0,05 \leq \Delta t/T_\phi \leq 0,5.$

На практике часто можно ограничиться операциями над действительными (вещественными) числами, если применить декартовую форму записи комплексных чисел:

$$\dot{H}_\ominus(t) = H_{\ominus c}(t) + jH_{\ominus s}(t); \quad \dot{U}(t) = U_c(t) + jU_s(t); \quad \dot{V}(t) = V_c(t) + jV_s(t).$$

Для часто встречающихся на практике узкополосных радиоустройств с постоянными параметрами (при отсутствии расстройки)

$$\varphi_h(t) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{H}_\ominus(t) = H_{\ominus c}(t),$$

например, для одиночного параллельного колебательного контура

$$\dot{H}_\ominus(t) = H_{\ominus c}(t) = H_0 \exp(-\alpha t),$$

алгоритм скользящего суммирования принимает вид

$$V_c[n] = \sum_{k=0}^{n-1} U_c(k)H_\ominus(n - k); \quad V_s[n] = \sum_{k=0}^{n-1} U_s(k)H_\ominus(n - k); \quad \text{так как} \quad H_{\ominus s}(t) = 0.$$

Комплексная огибающая реакции

$$\dot{V}[n] = V[n] \cdot \exp\{j \cdot (\Omega \cdot n \cdot \Delta t + \varphi_v[n])\},$$

где $V[n] = \sqrt{V_c^2[n] + V_s^2[n]}; \quad \Omega \cdot n \cdot \Delta t + \varphi_v[n] = \text{arctg}\{V_s[n]/V_c[n]\}.$

3.3.8. Моделирование узкополосных линейных устройств методом низкочастотного эквивалента.

Низкочастотным эквивалентом узкополосной линейной системы принято считать низкочастотное звено (с комплексными координатами) с входным воздействием в виде комплексной огибающей узкополосного сигнала заменяющее

радиозвено с узкополосным входным воздействием. При этом, следует помнить, что такая замена не всегда может быть реализована.

Низкочастотный эквивалент узкополосной системы имеет импульсную переходную характеристику $H_0(t)$ и передаточную функцию $K_0(p)$. Очевидно, для $K_0(p)$ в виде дробно-рациональной функции можно найти рекуррентные разностные алгоритмы моделирования методами дискретной аппроксимации.

Имея в виду известные цифровые модели линейных инерционных звеньев, модель на основе метода комплексной огибающей представим в обобщенном виде

$$\vec{V}[n] = D(\vec{U}[n]), \text{ где } \vec{V}[n] = \{V_c[n], V_s[n]\}, \vec{U}[n] = \{U_c[n], U_s[n]\}.$$

Пример низкочастотного эквивалента типовой узкополосной системы:

– усилитель с фильтром

$$K_0(p) = \frac{K_0}{1 + pT},$$

где $T = \frac{2}{\omega_0 \delta} = \frac{1}{\Delta\Omega_{0,7}}$; $2\Delta\Omega_{0,7}$ – полоса пропускания фильтра по уровню 0,7, δ

– затухание фильтра, $\dot{H}(t) = (2/T) \cdot \exp(-t/T)$.

Расчетное соотношение с учетом свойства узкополосности фильтра имеет

$$\text{вид } \dot{V}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \dot{U}(\tau) \dot{H}(t - \tau) d\tau.$$

Для сигнала с расстройкой Ω относительно ω_0

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_0(t) \cdot \exp(j\Omega t) \text{ получим } \dot{V}(t) = A \int_0^t \exp(-t/T) \cdot \exp(-j\Omega\tau) d\tau, \quad (3.16)$$

где $A = (U_0/T) \cdot \exp(j\Omega t)$.

Численное интегрирование (3.16) можно выполнить по методу трапеций:

$$\int_0^t f(x) dx \approx \frac{\Delta t}{2} \{f(0) + 2f(\Delta t) + 2f(2\Delta t) + \dots + 2f[(N-1)\Delta t] + f(N\Delta t)\},$$

где Δt – шаг интегрирования; N – число интервалов разбиения.

3.4. Алгоритмы моделирования наиболее употребляемых звеньев.

Моделирование линейного инерционного звена с передаточной функцией $K(p) = 1/(1 + pT) = \alpha/(p + \alpha)$, где $\alpha = 1/T$.

Можно смоделировать с помощью дискретной модели, имеющей передаточную функцию $K(z) = \frac{d_0 z + d_1}{z + c_1}$.

Значения коэффициентов c_1 , d_0 , d_1 зависят от используемого метода дискретной аппроксимации (таблица 3.1).

Таблица 3.1.

Метод дискретной аппроксимации	Коэффициенты		
	c1	d0	d1
Дельта-аппроксимация	- d	\bar{a}	0
Ступенчатая аппроксимация	- d	0	1- d
Явное преобразование Эйлера	$\bar{a} - 1$	0	\bar{a}
Интегрирование по методу прямоугольников	$-1/(1 + \bar{a})$	$\bar{a}/(1 + \bar{a})$	0
Билинейное преобразование	$(\bar{a} - 2)/(2 + \bar{a})$	$\bar{a}/(2 + \bar{a})$	$\bar{a}/(2 + \bar{a})$

В таблице обозначено $\bar{a} = \alpha \cdot \Delta t$, $d = \exp(-\bar{a})$.

Заметим, что достоинством метода билинейного преобразования является воспроизведение при моделировании таких характеристик звена, как АЧХ и ФЧХ.

$$\text{Фильтр с передаточной функцией } K(p) = \frac{pT}{1 + pT}$$

моделируется с помощью дискретной модели, имеющей передаточную функцию, которая получена с помощью билинейного преобразования

$$p = 2(z - 1)/(z + 1)\Delta t.$$

Произведя замену, получим передаточную функцию с новой переменной z :

$$K(p) = \frac{pT}{1 + pT} = \frac{T}{1/p + T}, K(z) = \frac{T}{(z + 1)\Delta t / 2(z - 1) + T} = \frac{1}{(z + 1)\Delta t / 2T(z - 1) + 1},$$

дальнейшие преобразования дают следующее

$$= \frac{2(z - 1)}{(z + 1)\Delta t / T + 2(z - 1)} = \frac{2z(\Delta t / T + 2) - 2(\Delta t / T + 2)}{z + \frac{\Delta t / T - 2}{\Delta t / T + 2}} = \frac{zb_0 + b_1}{z + a_1} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

Используя метод рекуррентных уравнений, когда для дробно-рациональной функции (3.7) рекуррентное уравнение имеет вид

$$v[n] = \sum_{k=1}^q a_k v[n - k] + \sum_{k=0}^m b_k u[n - k],$$

проводим вычисления для искомой модели. Причем вычислительные затраты невелики, так как количество членов сумм связано с порядком системы и не бывает большим. В нашем случае по коэффициентам знаменателя это один член, а по числителю два.

Фильтр второго порядка с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{a_0}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

моделируется с помощью дискретной модели, имеющей передаточную функцию, которая получена с помощью билинейного преобразования

$$K(z) = \frac{d_0 z^2 + d_1 z + d_2}{z^2 + c_1 z + c_2},$$

где $d_0 = B/D$; $d_1 = 2B/D$; $d_2 = B/D$; $c_1 = (-8 + 2B)/D$; $c_2 = (4 - 2A + B)/D$;

$A = a_1 \cdot \Delta t$; $B = a_0 \cdot (\Delta t)^2$; $D = 4 + 2A + B$.

Приведем функцию передачи билинейного преобразования к виду удобному для использования метода рекуррентных уравнений при дискретной аппроксимации

$$K(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}},$$

и по выше приведенной формуле проведем вычисления отсчетов цифровой модели, учитывая, что начальные условия принимаются нулевыми:

$$b_0 = d_0; \quad b_1 = d_1; \quad b_2 = d_2; \quad a_1 = -c_1; \quad a_2 = -c_2;$$

$$v[0] = 0 + b_0 u[0] = 0;$$

$$v[1] = a_1 v[0] + b_0 u[1] + b_1 u[0] = b_0 u[1];$$

$$v[2] = a_1 v[1] + a_2 v[0] + b_0 u[2] + b_1 u[1] + b_2 u[0] = a_1 v[1] + b_0 u[2] + b_1 u[1];$$

$$v[3] = a_1 v[2] + a_2 v[1] + b_0 u[3] + b_1 u[2] + b_2 u[1];$$

.....

Заметим, что коэффициенты модели при билинейном преобразовании не зависят от характера корней знаменателя передаточной функции (комплексные корни, действительные корни).

$$\text{Фильтр с передаточной функцией } K(p) = \frac{\Delta\omega \cdot (p + \Delta\omega)}{p^2 + \Delta\omega \cdot p + \omega_0^2}.$$

Такой фильтр моделируется по методу билинейного преобразования дискретным звеном с передаточной функцией

$$K(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}},$$

где $d_0 = (2 \cdot \Delta\omega / \Delta t + \Delta\omega^2) / A$; $d_1 = 2\Delta\omega^2 / A$; $d_2 = (\Delta\omega^2 - 2\Delta\omega / \Delta t) / A$;
 $c_1 = (2\omega_0^2 - 8 / \Delta t^2) / A$; $c_2 = (4 / \Delta t^2 - 2\Delta\omega / \Delta t + \omega_0^2) / A$; $A = 4 / \Delta t^2 + 2\Delta\omega / \Delta t + \omega_0^2$.

Далее моделирование проводится по выше приведенному алгоритму.

Фильтры с передаточными функциями

$$K_I(p) = \frac{1 + pT_1}{p(1 + pT)}; \quad K_{II}(p) = \frac{1 + pT_1}{p^2(1 + pT)}; \quad (3.17)$$

Данные передаточные функции интересны тем, что они эквивалентны функциям передач разомкнутой петли систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Причем первое соотношение соответствует системе ФАПЧ с астатизмом первого порядка, а второе – системе ФАПЧ с астатизмом второго порядка.

Эти передаточные функции можно отобразить в виде

$$K_I(p) = K_1(p) \cdot K_2(p); \quad K_{II}(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot K_3(p);$$

где $K_1(p) = \frac{1}{1+pT}$; $K_2(p) = \frac{1+pT_1}{p}$; $K_3(p) = \frac{1}{p}$.

Для передаточной функции $K_1(p)$ алгоритм моделирования был приведен выше. Звенья с передаточными функциями $K_2(p)$ и $K_3(p)$ для моделирования преобразовываются к виду

$$K_2(z) = \frac{d_0 z + d_1}{z-1}; \quad K_3(z) = \frac{Q_0 z + Q_1}{z-1}; \quad \text{где } d_0 = \frac{\Delta t}{2} + T_1; \quad d_1 = \frac{\Delta t}{2} - T_1; \quad Q_0 = Q_1 = \frac{\Delta t}{2}.$$

Возможен также вариант перехода к цифровой модели, используя билинейное преобразование $p = 2(z-1)/(z+1)\Delta t$ к выражениям (3.17). Однако после этого для получения рекуррентных уравнений нужно результат преобразования привести к виду (3.7) и использовать вышеприведенный алгоритм моделирования.

3.5. Моделирование нелинейных преобразований узкополосных воздействий.

3.5.1. Структуры нелинейных преобразований узкополосных воздействий.

Как правило, в типовых нелинейных элементах РТУ и С имеют место преобразования одного или нескольких узкополосных процессов.

Общая схема нелинейного преобразования имеет вид (рис. 3.6). Звенья $K_{11}(p), K_{12}(p), \dots, K_{1M}(p), K_2(p)$

– являются линейными инерционными ($K_{1i}(p)$ – узкополосными в ряде случаев), а звено $\Psi(u)$ – нелинейным безынерционным.

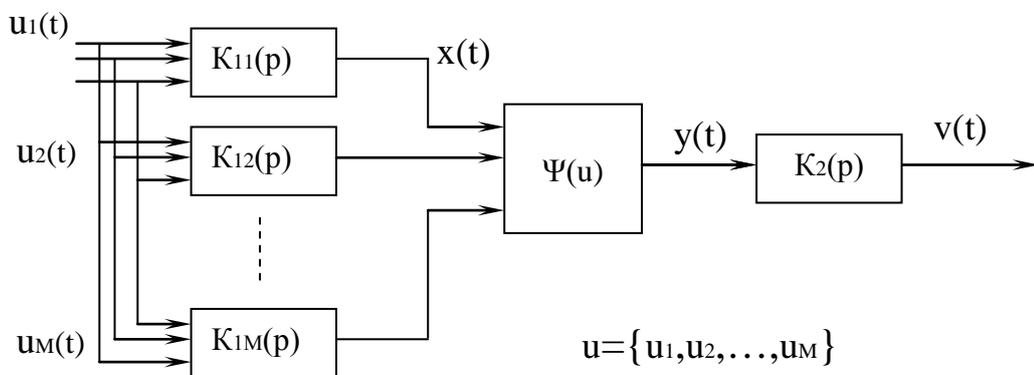


Рис. 3.6.

В первой группе преобразований, когда имеет место преобразование одного узкополосного процесса, структуру можно представить, как широкополосный фильтр – нелинейный элемент – узкополосный фильтр. Моделирование таких преобразований осуществляется методом комплексной огибающей, используя соотношения между амплитудой, фазой, а также мгновенной частотой радиоимпульса и огибающими квадратурных составляющих этого сигнала.

Рассмотрим сущность метода огибающей и фазы. Если на нелинейное безынерционное звено $y = G(x)$ подан узкополосный сигнал

$$x(t) = \text{Re}\{\dot{U}(t) \cdot \exp(j\omega_c t)\} = U(t) \cdot \cos[\Phi(t)],$$

то его выходной сигнал можно представить в виде обобщенного ряда Фурье

$$y(t) = G\{U(t)\cos[\Phi(t)]\} = G[U\cos(\Phi)] \approx y_0(t) + \sum_{k=1}^n y_k(t) = L_0(U) + \sum_{k=1}^n L_k(U)\cos(k\Phi)$$

где $L_0(U) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi_0}^{\pi} G[U \cdot \cos(\Phi)] d\Phi$, $L_k(U) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi_0}^{\pi} G[U \cos(\Phi)] \cdot \cos(k\Phi) d\Phi$.

Полученное разложение имеет полосовую структуру, таким образом на выходе нелинейного радиозвена имеем

$$y_0(t) = L_0[U(t)]; \quad y_k(t) = L_k[U(t)] \cdot \cos\{k[\omega_c t - \psi(t)]\}, \quad k \geq 1.$$

Полученные соотношения позволяют вывести необходимые алгоритмы преобразования комплексной огибающей для аналогов нелинейных радиозвеньев

$$\dot{U}_{Y_k}(t) = U_{Y_k}(t) \cdot \exp[-j\phi_{Y_k}(t)],$$

$$U_{Y_k}(t) = L_k[U_k(t)], \quad k \geq 0;$$

$$\phi_{Y_k}(t) = k \cdot \phi_X(t), \quad k \geq 1.$$

Причем завершающая часть преобразований представляется последовательно соединенными произвольным нелинейным элементом $y = G(x)$ и «формирующим» элементом, пропускающим без искажений (с некоторым коэффициентом передачи) k -ю полосу биений (рис. 3.7), расположенную вокруг k -й гармоники $k \cdot \omega_c$ несущей частоты входного радиосигнала. Тогда при $k = 0$ имеем БНРЗ типа детектора, при $k = 1$ – нелинейный усилитель, при $k \geq 2$ – умножитель частоты.

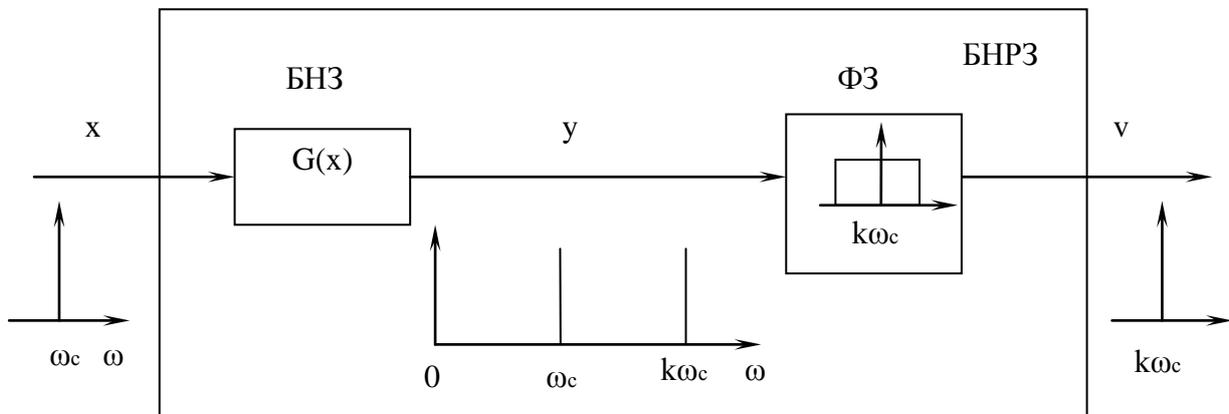


Рис. 3.7.

Вторая группа преобразований – это преобразования типа – узкополосный фильтр – нелинейный элемент – узкополосный фильтр. В этом случае инерционные свойства входных узкополосных звеньев с передаточными функциями $K_{\text{н}}(p)$ определяют вид характеристики нелинейного преобразования. Типичным представителем этой группы является частотный детектор на расстроенных контурах (рис. 3.8).

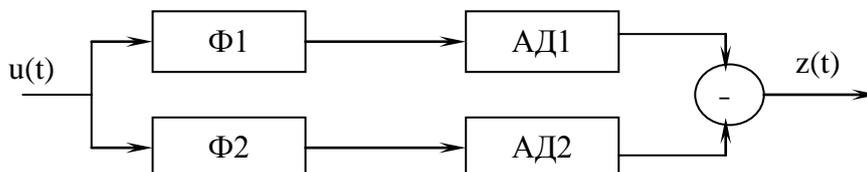


Рис. 3.8.

Цифровая модель такого детектора строится по схеме (рис. 3.9)

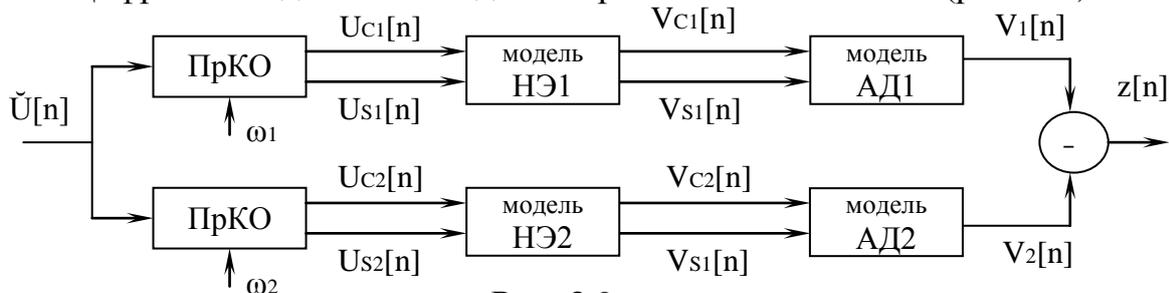


Рис. 3.9.

где Пр КО – преобразователь комплексной огибающей (КО), осуществляющий преобразование КО из полярной формы в декартовую и одновременным изменением частоты, относительно которой задана КО (замена ω_c на ω_1 или ω_2 , где ω_1 и ω_2 – частоты подстройки контуров Φ_1 и Φ_2).

При моделировании преобразований ЧМ сигналов необходимо учитывать соответствие между мгновенной частотой и фазой входного сигнала:

$$\dot{U}(t) = U(t) \cdot \exp[j\Phi_U(t)];$$

где $\Phi_U(t) = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau$ – полная фаза комплексной огибающей, $\Omega(t) = \omega_c(t) - \omega_0$ – текущая расстройка задания комплексной огибающей относительно частоты ω_0 .

При заданном законе $\Omega(t)$ в цифровой модели необходимо предусмотреть модель идеального интегратора с передаточной функцией $P(t) = 1/p$. Например, методом Рагазини-Бергена получаем

$$\Phi[n] = H(x[n] - x[n - 1])/2 + \Phi[n - 1],$$

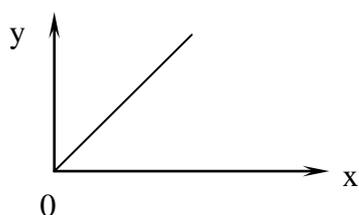
где $x = \Omega \cdot T$ – безразмерная расстройка, $H = \Delta t/T$, $T = 2/\Delta\omega = 2/\omega_0\delta$ – постоянная времени НЭ резонансного контура ЧД, δ – затухание контура.

3.5.2. Алгоритмы моделирования типовых нелинейных элементов:

– линейный амплитудный ДМ. Линейный амплитудный детектор имеет характеристику преобразования,

$$y = \begin{cases} k_d x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

а его графическое отображение имеет вид.



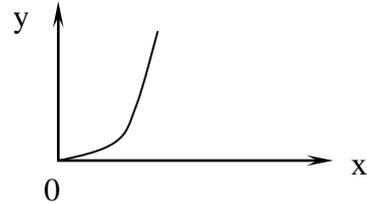
Для низкочастотной составляющей его выходной реакции можно записать

$$y_0(t) = \frac{k_d}{\pi} |\dot{U}(t)|,$$

где k_d – коэффициент передачи амплитудного ДМ, $\dot{U}(t)$ – комплексная огибающая входного воздействия. Выходной сигнал детектора, представленный в квадратурном виде равен $\frac{v(t)}{K_{DM}} = \sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)}$.

– квадратичный амплитудный ДМ с характеристикой преобразования

$$y = \begin{cases} k_d x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



В этом случае выходной сигнал с учетом низкочастотного фильтра можно представить соотношением

$$y_0(t) = \frac{k_d}{4} |\dot{U}(t)|^2,$$

где также k_d – коэффициент передачи амплитудного детектора, $\dot{U}(t)$ – комплексная огибающая входного воздействия.

Сигнал на выходе в квадратурных координатах равен:

$$\frac{v(t)}{K_{DM}} = U_c^2(t) + U_s^2(t).$$

– амплитудный ДМ с произвольной характеристикой передачи $y = F(x)$

$$\frac{v(t)}{K_{DM}} = F\left\{\sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)}\right\}.$$

– фазовый ДМ можно моделировать как перемножитель сигналов с одинаковой частотой $u_1(t) = \text{Re}[\dot{U}_1(t) \cdot \exp(j\omega_0 t)]$, $u_2(t) = \text{Re}[\dot{U}_2(t) \cdot \exp(j\omega_0 t)]$.

С учетом ФНЧ на выходе этого детектора выходной сигнал имеет вид

$$v(t) = \frac{1}{2} K_{\phi d} \text{Re}[\dot{U}_1^*(t) \cdot \dot{U}_2(t)].$$

Сигнал на выходе в квадратурных координатах равен:

$$\frac{v(t)}{K_{DM}} = \text{arctg} \left[\frac{U_s(t)}{U_c(t)} \right].$$

– когерентный ДМ $\frac{v(t)}{K_{DM}} = U_c(t)$ или $U_s(t)$.

– частотный ДМ $\frac{v(t)}{K_{DM}} = \frac{U_c(t) \frac{dU_s(t)}{dt} - U_s(t) \frac{dU_c(t)}{dt}}{\sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)}}$,

где K_{DM} – коэффициент передачи демодулятора.

Цифровая модель таких ДМ_получается в результате перехода от непрерывного к дискретному времени в выше приведенных соотношениях. В частности, используя понятие первой разности, получаем:

$$\frac{v[n]}{K_{DM}} = \Omega[n] = \frac{1}{\Delta t} \frac{U_s[n]U_c[n-1] - U_c[n]U_s[n-1]}{\sqrt{U_c^2[n] + U_s^2[n]}};$$

$$\frac{v[n]}{K_{DM}} = \varphi_u[n] = \Delta t \cdot \Omega[n] + \varphi_u[n-1];$$

так как
$$\Omega(t) = \frac{d\varphi_u(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \arctg \left[\frac{U_s(t)}{U_c(t)} \right].$$

– смеситель двух радиосигналов

$$u_1(t) = U_1(t) \cdot \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)], \quad u_2(t) = U_2(t) \cdot \cos[\omega_2 t + \varphi_2(t)].$$

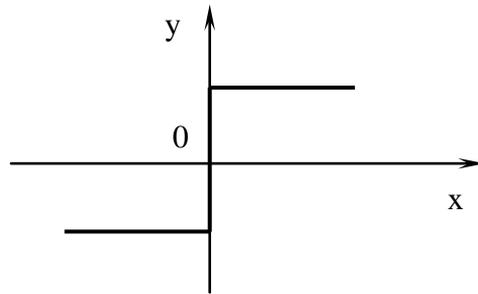
моделируется также как перемножитель этих сигналов. При наличии на его выходе полосового фильтра, выделяющего составляющую с промежуточной частотой $\omega_{пр} = \omega_1 - \omega_2$, выходная реакция смесителя

$$v(t) = \frac{1}{2} K_{cm} \cdot U_1(t) \cdot U_2(t) \cdot \cos[\omega_{пр} t + \varphi_1(t) - \varphi_2(t)].$$

Комплексная амплитуда выходной реакции
$$\dot{V}(t) = \frac{1}{2} K_{cm} \cdot \dot{U}_1(t) \cdot \dot{U}_2^*(t).$$

– идеальный амплитудный ограничитель радиосигнала имеет характеристику преобразования, а ее графическое отображение.

$$y = \begin{cases} k_0, & x \geq 0 \\ -k_0, & x < 0 \end{cases}.$$



При выделении на его выходе первой гармоники с помощью полосового фильтра выходной сигнал можно представить соотношением

$$y(t) = \frac{4k_0}{\pi} \frac{\dot{U}(t)}{|\dot{U}(t)|},$$

где k_0 – коэффициент передачи амплитудного ограничителя, $\dot{U}(t)$ – комплексная огибающая входного воздействия.

Цифровая модель идеального симметричного ограничителя по амплитуде в резонансном усилителе может быть получена на основе следующих соотношений:

$$V_c[n] = \frac{2U_0}{\pi} \frac{U_c[n]}{\sqrt{U_c^2[n] + U_s^2[n]}} = \frac{2U_0}{\pi} \cos(\varphi_u[n]);$$

$$V_s[n] = \frac{2U_0}{\pi} \frac{U_s[n]}{\sqrt{U_c^2[n] + U_s^2[n]}} = \frac{2U_0}{\pi} \sin(\varphi_u[n]);$$

где U_0 – порог ограничения по амплитуде сигнала $u(t)$ при условии $U_0 \ll U(t)$.

3.6. Моделирование сложных РТУ и С.

3.6.1. Общие сведения о моделировании сложных РТУ и С.

Используя рассмотренные ранее методы, можно, допустим в рамках метода комплексной огибающей, описывать различные звенья функциональных схем радиосистем и радиоустройств. Однако для сложных РТУ и С характерно наличие нелинейных инерционных звеньев, замкнутых контуров регулирования, устройств с различной скоростью процессов (радиотракт и видеотракт обработки сигналов), действие разнообразных помех. Поэтому при моделировании таких РТУ и С все шире применяются принципы блочного представления модели (объединение функциональных звеньев в крупные блоки) и эквивалентирования (замена частей оригинала простыми эквивалентами). Поэтому с целью упрощения чаще всего используют метод статистических эквивалентов и метод информационного параметра.

3.6.2. Метод статистических эквивалентов.

Суть метода состоит в замене реального звена или части системы с входным воздействием в виде смеси сигнала и помехи (шума) $u(t, \lambda)$ и реакцией на это звено $z(t, \lambda)$, которую можно описать выражением

$$z(t, \lambda) = F\{u(t, \lambda)\}, \quad (3.18)$$

некоторым более простым звеном, формирующим статистически эквивалентный сигнал $z_{\text{эк}}(t, \lambda)$, близким к реакции $z(t, \lambda)$ в смысле заданного критерия,

$$z_{\text{эк}}(t, \lambda) = G\{\lambda\} + \xi_{\text{эк}}(t), \quad (3.19)$$

где $\xi_{\text{эк}}(t)$ – случайный компонент выходной реакции (эквивалентный шум). Статистическими характеристиками эквивалентности могут быть математическое ожидание и дисперсия на выходе, которые в (3.18) и (3.19) должны совпадать. Для определения статистического эквивалента требуется проведения специального предварительного анализа. При этом набор входных воздействий ограничен, что снижает универсальность модели. Однако при наличии статистического эквивалента данный метод дает существенный выигрыш по вычислительным затратам.

Схематически такую замену можно представить как: СЭ – статистический эквивалент (рис.3.10).

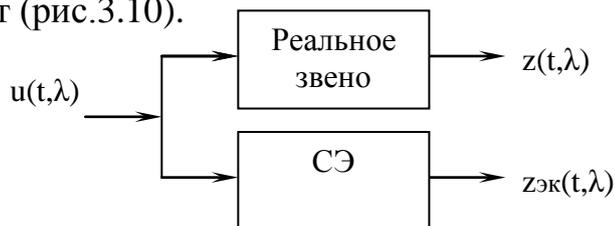


Рис.3.10.

В общем случае можно записать:

$$z(t, \lambda) = m(t, \lambda) + z^\circ(t, \lambda); \quad z_{\text{ЭК}}(t, \lambda) = m_{\text{ЭК}}(t, \lambda) + z^\circ_{\text{ЭК}}(t, \lambda);$$

где m , $m_{\text{ЭК}}$ – математические ожидания; z° , $z^\circ_{\text{ЭК}}$ – центрированные случайные процессы (флуктуации), обусловленные действием помех различного происхождения.

В общем случае реальное звено является нелинейным. Его статистический эквивалент можно получить, например, методом статистической линеаризации. Тогда в качестве статистического эквивалента выбирают линейное звено с известными характеристиками, при которых адекватность процессов $z(t, \lambda)$ и $z_{\text{ЭК}}(t, \lambda)$ для нелинейного звена и его линейного эквивалента требует выполнения условий по нескольким критериям:

- равенство математических ожиданий – $m_{\text{ЭК}}(t, \lambda) = m(t, \lambda)$ и дисперсий – $D\{z^\circ_{\text{ЭК}}(t, \lambda)\} = D\{z^\circ(t, \lambda)\}$;
- равенство корреляционных функций – $R_{z^\circ_{\text{ЭК}}}(t_1, t_2) = R_{z^\circ}(t_1, t_2)$;
- минимум среднеквадратической ошибки – $\min \delta^2 = \min \{|z(t, \lambda) - z_{\text{ЭК}}(t, \lambda)|^2\}$.

При этом обеспечивается эквивалентность в рамках корреляционной теории.

Наибольший интерес представляет статистическая линеаризация безынерционных нелинейных звеньев с нелинейной зависимостью $z = \psi(u)$. Необходимые выходные характеристики находятся через заданные законы распределения входного процесса

$$\begin{aligned} m_v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \cdot f_U(u, t) du; \\ D_v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(u) \cdot f_U(u, t) du - m^2(t); \\ R_v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u_1) \psi(u_2) \cdot f_U(u_1, u_2, t_1, t_2) du_1 du_2 - m(t_1) m(t_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

При использовании первых двух критериев применяются два типа статистических эквивалентов

- линейный по флуктуациям, для которого $m_{\text{ЭК}} = \psi_0(u)$, $z^\circ_{\text{ЭК}}(t) = K_1(t) \cdot z^\circ(t)$;
- линейный по математическому ожиданию и флуктуациям, для которого

$$m_{\text{ЭК}} = K_0(t) \cdot m(t), \quad z^\circ_{\text{ЭК}}(t) = K_1(t) \cdot z^\circ(t);$$

где K_1 , K_0 , ψ_0 – коэффициенты статистической линеаризации. Чтобы найти их по первому критерию адекватности достаточно воспользоваться соотношениями (3.20):

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}\{m_U(t)\} &= m_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \cdot f_U(u, t) du, \\ K_0^{(1)}(t) &= \frac{m_{\text{ЭК}}(t)}{m(t)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \cdot f_U(u, t) du}{m(t)}, \end{aligned}$$

$$K_1^{(1)}(t) = \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(u) \cdot f_U(u, t) du - m_{\text{ЭК}}^2(t)}}{\delta_U(t)}.$$

Тогда схема преобразования будет иметь вид (рис. 3.11).

В случае использования второго критерия адекватности $K_0^{(2)}(t) = K_0^{(1)}(t)$;

$$K_1^{(2)}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \psi(u) \cdot f_U(u, t) du - m(t) \cdot m_V(t)}{\delta_U^2(t)}.$$

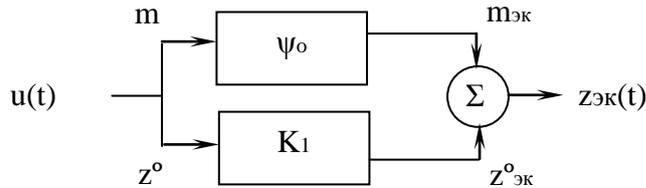


Рис. 3.11.

При статистической линейзации инерционных нелинейных звеньев они представляются в виде комбинации БНЗ и ИЛЗ, последние моделируются методом несущей.

Частным видом статистического эквивалента является статистический эквивалент, определяемый методом фильтрации информационного параметра (рис. 3.12)

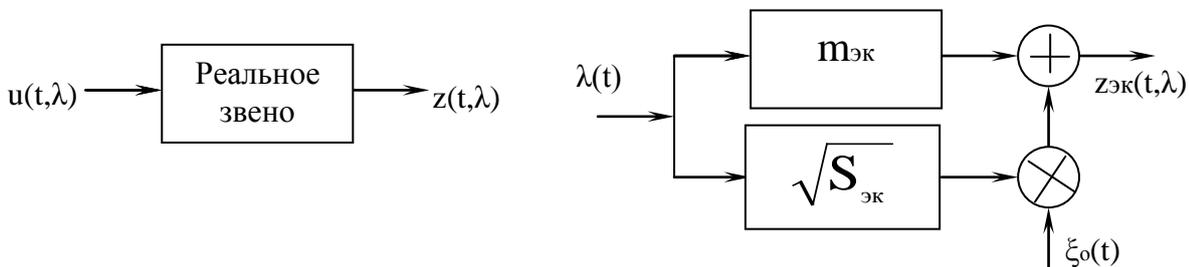


Рис.3.12.

$$z_{\text{ЭК}}(t, \lambda) = m_{\text{ЭК}}(t, \lambda) + \sqrt{S_{\text{ЭК}}(t, \lambda)} \cdot \xi_0(t),$$

где $S_{\text{ЭК}}(t, \lambda)$ – спектральная плотность флуктуаций $z_{\text{ЭК}}^0(t, \lambda)$ на нулевой частоте; $\xi_0(t)$ – белый шум с единичной спектральной плотностью. Очевидно, что параметры статистического эквивалента должны быть определены заранее аналитическим путем или моделированием.

3.6.3. Метод информационного параметра.

Данный метод применяется при моделировании РТУ и С, в которых осуществляется преобразование информационного параметра $\lambda(t)$, а не только его передача со входа на выход. Это прежде всего различные радиозвенья и РТУ и С следающего типа (ФАП, ЧАП, АРУ, РТУ слежения за координатами и параметрами движения объектов и т. п.).

Использование данного метода предусматривает следующие этапы:

- замена входной смеси $u(t, \lambda)$ информационным параметром $\lambda(t)$;
- замена дискриминатора его статистическим эквивалентом $F_{c\varepsilon}(\varepsilon)$;
- замена сглаживающей цепи обратной связи низкочастотным эквивалентом с характеристикой $K_{нэ}(p)$;
- составление математического описания петли автоматического регулирования (система дифференциальных уравнений или предварительное упрощение – линеаризация) с последующим переходом к цифровой модели.

Обобщенная структурная схема следящего измерителя параметра имеет вид (рис. 3.13)

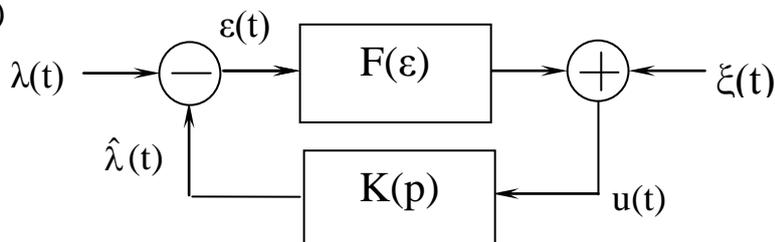


Рис. 3.13.

где $F(\varepsilon)$ – безынерционный дискриминатор с характеристикой нелинейного преобразования $F(\varepsilon)$; например частотный дискриминатор в ЧАП $F(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \exp(-\varepsilon^2)$; $K(p)$ – сглаживающие цепи с передаточной функцией $K(p)$; $\xi(t)$ – помеха, пересчитанная к выходу дискриминатора.

Так как главным вопросом математического моделирования является обеспечение статистической адекватности модели, изображенной на рисунке, и реальной следящей системы, то нетрудно видеть, что основу схемы составляет статистический эквивалент реального дискриминатора, полученный по методу фильтрации информационного параметра. Причем, как правило, удовлетворяются идентичностью дифференциальных уравнений по оценке $\hat{\lambda}(t)$ или сигналу ошибки $\varepsilon(t) = \lambda(t) - \hat{\lambda}(t)$.

Цифровая модель может быть получена непосредственно по структурной схеме (рис. 3.14).

Алгоритм моделирования:

$$\varepsilon[n] = \lambda[n] - \hat{\lambda}[n-1]; \quad u[n] = F(\varepsilon[n]) + \xi[n]; \quad \hat{\lambda}[n-1] = D(u[n]).$$

Искусственная задержка на один такт в цепи обратной связи необходима для устойчивой работы модели, хотя и вносит некоторую ошибку моделирования.

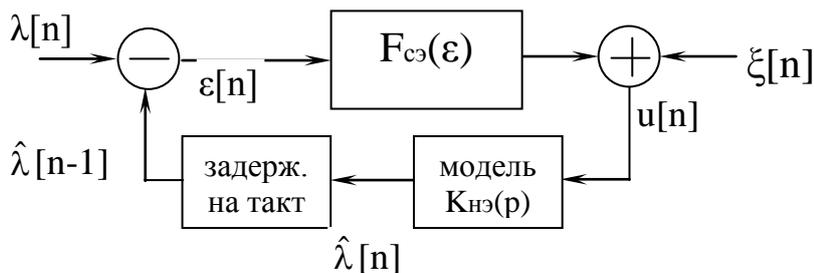


Рис. 1.14.

Другой путь моделирования – путь решения дифференциального уравнения, составленного по структурной схеме. Пусть

$$K(p) = a/(1 + pT).$$

В символической форме записи

$$\hat{\lambda}(t) = K(p) \{F[\varepsilon(t)] + \xi(t)\} = K(p) \{F[\lambda(t) - \hat{\lambda}(t)] + \xi(t)\}.$$

После подстановки $K(p)$ имеем

$$T \cdot p \cdot \hat{\lambda} + \hat{\lambda} = a \cdot [F(\lambda - \hat{\lambda}) + \xi].$$

В классической форме записи
$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} + \frac{1}{T}\hat{\lambda} - \frac{a}{T}F(\lambda - \hat{\lambda}) = \frac{a}{T}\xi,$$

получили $\dot{\hat{\lambda}} = f(t, \lambda, \hat{\lambda}, \xi)$ – стохастическое, нелинейное, дифференциальное уравнение 1-го порядка.

Такое уравнение можно решить на ПК стандартными методами численного интегрирования дифференциальных уравнений (методом Эйлера, методом Рунге-Кутты). Алгоритм такого решения – это цифровая модель системы при каждой реализации $\xi(t)$. Эксперимент на модели – многократное решение задачи при различных реализациях $\xi(t)$.

Пример. Проведем моделирование процесса установления системы фазовой автоподстройки с астатизмом второго порядка, изображенной на рис. 3.15. При моделировании используем метод решения дифференциальных уравнений для стационарной системы.

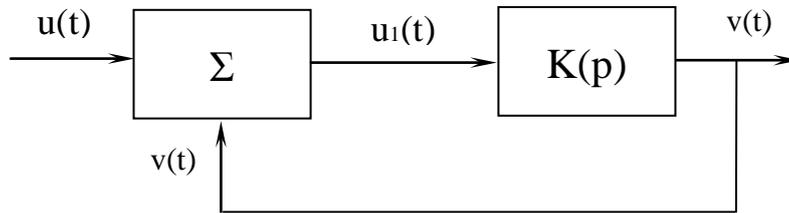


Рис. 3.15.

Функция передачи разомкнутой системы ФАПЧ была приведена в (3.17)

$$K(p) = \frac{K_0(1 + pT_1)}{p^2(1 + pT_2)}, \quad (3.21)$$

где K_0 – коэффициент усиления разомкнутой петли ФАПЧ.

Представив (3.21) как отношение выходного и входного сигналов, а оператор Лапласа (p), как производную по времени, запишем систему уравнений замкнутой системы

$$\frac{v(t)}{u_1(t)} = \frac{K_0 \left(1 + \frac{1}{dt} T_1\right)}{\frac{1}{dt^2} \left(1 + \frac{1}{dt} T_2\right)}$$

$$u_1(t) = u(t) - v(t)$$

Подставив второе уравнение в первое, получим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3 v(t)}{dt^3} T_2 + \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = K_0 u(t) - K_0 v(t) + \frac{u(t)}{dt} T_1 K_0 - \frac{v(t)}{dt} T_1 K_0. \quad (3.22)$$

Используя правило, при котором дифференциальному уравнению для дискретного аналога системы соответствует уравнение в конечных разностях порядка m (п. 1.3.6), составим систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} \nabla^3 v[n] &= \nabla^2 v[n] - \nabla^2 v[n-1] = v[n] - 3v[n-1] + 3v[n-2] - v[n-3] \\ \nabla^2 v[n] &= \nabla v[n] - \nabla v[n-1] = v[n] - 2v[n-1] + v[n-2] \\ \nabla v[n] &= v[n] - v[n-1]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Заменяя в (3.22) производные уравнениями в конечных разностях (3.23), получим

$$v[n] = a_1 v[n-1] + a_2 v[n-2] + a_3 v[n-3] + b_0 u[n] + b_1 u[n-1]$$

где $a_1 = \frac{3T_2 + 2 + K_0 T_1}{c}$; $a_2 = \frac{-(3T_2 + 1)}{c}$; $a_3 = \frac{T_2}{c}$ $b_0 = \frac{K_0(1 + T_1)}{c}$; $b_1 = \frac{-K_0 T_1}{c}$;
 $c = T_2 + 1 + K_0(1 + T_1)$.

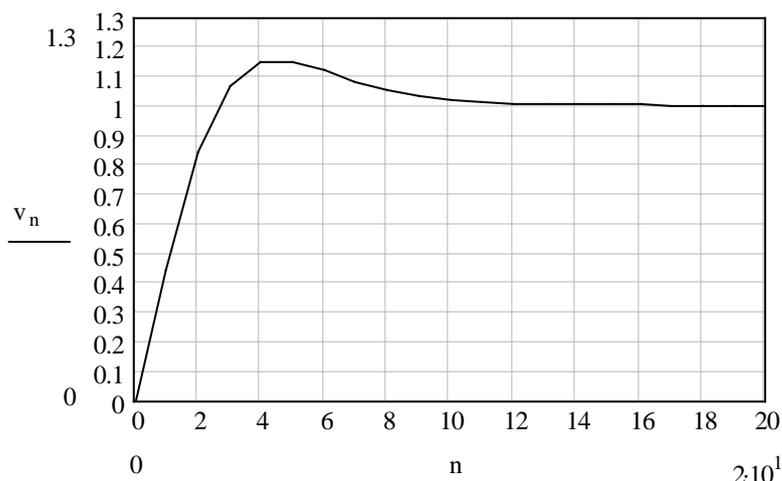


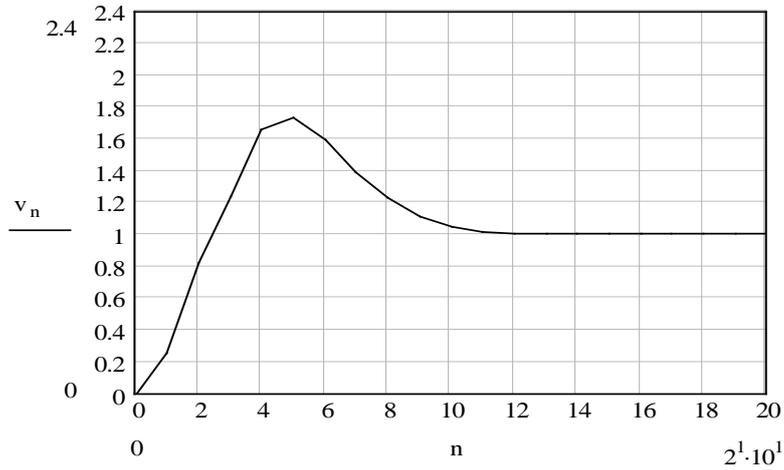
Рис. 3.16.

По приведенным соотношениям в Mathcad был построен график переходного процесса от скачка входного напряжения $u(t) = 1$ при $t > 0$ (рис. 3.16). При этом были приняты параметры [12]: $K_0 = 0,289$; $T_1 = 3,437$; $T_2 = 0,59$.

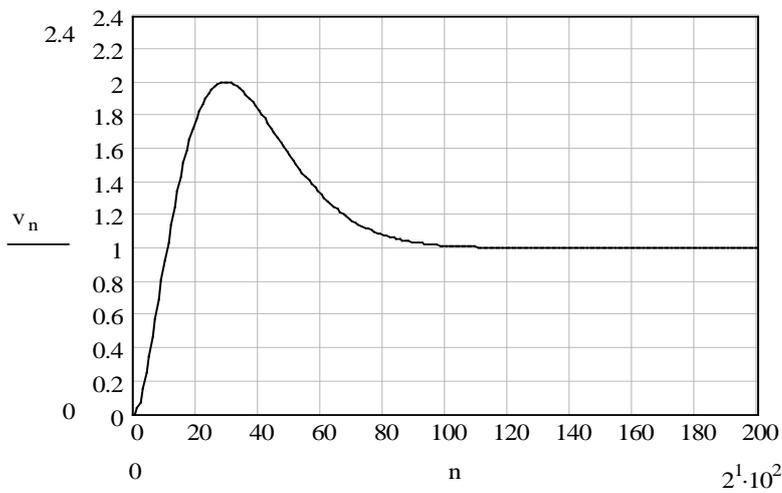
Заметим, что система устойчива, так как входит в режим синхронизации, а переходной процесс имеет затухающий характер.

Данный способ анализа воздействий на систему достаточно простой и экономичный, однако позволяет определять выходные величины только для целочисленных отсчетов.

Другим способом моделирования, позволяющим использовать дробные значения отсчетов, является метод z -преобразований (п. 3.3.3). Результаты моделирования для различных значений $\Delta t = 1; 0,1; 0,01$ представлены на рис. 3.17 соответственно.



а



б

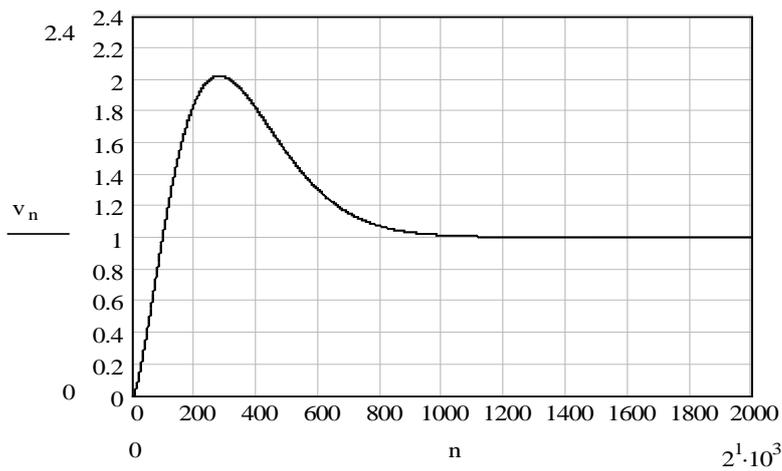


Рис. 3.17 в.

Анализ показывает, что уменьшение шага дискретизации Δt качественно повышает точность отображения процесса установления. Причем длительность процесса установления практически не изменяется. Ниже приведена программа, по которой проводилось моделирование в среде Mathcad.

$$\begin{aligned}
n &:= 0..20^1 \cdot 10^2 & K0 &:= 0.289 & T1 &:= 3.437 & T2 &:= 0.59 & \Delta t &:= 1. & u_0 &:= 0 \\
C1 &:= K0 \cdot \Delta t^2 & * & C2 &:= K0 \cdot \Delta t \cdot (T1 - T2) & * & C3 &:= K0 \cdot \Delta t \cdot T2 \cdot (T2 - T1) & * \\
v_0 &:= 0 & C4 &:= C2 + C3 + 1 & * & & & & & & d &:= e^{-\frac{\Delta t}{T2}} & * \\
B0 &:= \frac{C2 + C3}{C4} & * & B1 &:= \frac{C1 - C2 \cdot (1 + d) - C3 \cdot 2}{C4} & * \\
B2 &:= \frac{d \cdot (C2 - C1) + C3}{C4} & * & A1 &:= \frac{C2 \cdot (1 + d) + C3 \cdot 2 + 2 + d - C1}{C4} & * \\
A2 &:= \frac{d \cdot (C1 - 2 - C2) - C3 - 1}{C4} & * & A3 &:= \frac{d}{C4} & * \\
u_{n+3} &:= \begin{cases} 1 & \text{if } n > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & u_{n+1} &:= \begin{cases} 1 & \text{if } n > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & u_{n+2} &:= \begin{cases} 1 & \text{if } n > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & u_n &:= \begin{cases} 1 & \text{if } n > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
v_1 &:= B0 \cdot 1 & * & v_2 &:= A1 \cdot v_1 + B0 + B1 \cdot 1 & * & v_3 &:= A1 \cdot v_2 + A2 \cdot v_1 + B0 + B1 + B2 & * \\
v_{n+3} &:= A1 \cdot v_{n+2} + A2 \cdot v_{n+1} + A3 \cdot v_n + B0 \cdot u_{n+3} + B1 \cdot u_{n+2} + B2 \cdot u_{n+1}
\end{aligned}$$

3.7. Общие сведения о методах повышения точности моделирования.

3.7.1. Ошибки дискретизации.

Ранее отмечалось, что ошибки временной дискретизации связаны с выбором шага дискретизации Δt . Уменьшение Δt приближает дискретный процесс – модель к реальному непрерывному процессу. Как правило, моделируемая динамическая система включает звенья, инерционность которых различна. Если программа составлена так, что сигнал сразу пропускается через весь тракт, то шаг Δt должен выбираться исходя из постоянной времени самого широкополосного фильтра $T_{\text{шф}}$.

Опыт моделирования показывает, что интервал приемлемых значений Δt достаточно широк. Это зависит от задачи моделирования и требований к точности получаемых результатов. Можно считать, что Δt лежит в пределах $0,05 \leq \Delta t / T_{\text{шф}} \leq 0,5$.

Начинать отладку программ рекомендуется со значений $0,1 \dots 0,2$, постепенно уменьшая шаг дискретизации.

Если имеются фильтры первого и второго порядков, то следует рассчитать относительную величину $\Delta t/\tau$. Здесь

$$\tau = \min(T, \xi/\omega_0),$$

где T – постоянная времени фильтра первого порядка; ξ – коэффициент демпфирования (величина обратная добротности) фильтра второго порядка.

Меньшие значения Δt целесообразно выбирать, если интересует начальный участок процесса. Анализ переходных процессов требует учета производных более высокого порядка. При этом следует учитывать, что увеличение анализируемого отрезка времени приводит к большему числу циклов рабо-

ты программы, что дает накопление ошибок округления и уменьшает точность моделирования.

3.7.2. Ошибки округления, вызванные конечной длиной слов (машинных кодов) в ПК.

Данные ошибки возникают на каждом шаге вычисления по программе. Чем меньше арифметических операций, тем меньше значение общей ошибки округления.

При моделировании фильтров высоких порядков рекуррентные уравнения усложняются. Поэтому в этом случае ошибки округления выше, чем при моделировании фильтра первого порядка.

Ошибки округления случайны и могут рассматриваться как шум округления. Его прохождение в модели через звенья с простыми рекуррентными уравнениями предпочтительнее. Если заменить один фильтр высокого порядка цепочкой простых фильтров, дающих эквивалентный коэффициент передачи

$$K(z) = \prod_{i=1}^n K_{1i}(z) \prod_{i=1}^k K_{2i}(z),$$

где $K_{1i}(z)$, $K_{2i}(z)$ - фильтры первого и второго порядков, то ошибку округления можно снизить.

Этот результат можно трактовать как фильтрацию шума округления в каждом последующем фильтре.

Выбор метода дискретной аппроксимации при цифровом моделировании влияет на точность воспроизведения характеристик аналоговых фильтров. Так метод билинейного преобразования дает модель, хорошо воспроизводящую не только АЧХ, но и ФЧХ. Для модели фильтра первого порядка предпочтительнее метод ступенчатой аппроксимации, а для модели фильтра второго порядка – метод δ -аппроксимации.

4. Обработка и интерпретация результатов моделирования радиоустройств.

4.1. Анализ характеристик процесса на выходе модели.

Оценочный вектор выходных параметров $\vec{\gamma} = \{\gamma_i\}$, $i = \overline{1, n}$ позволяет получить количественную оценку качества работы системы и степень достижения системой поставленной цели. В общем случае вектор $\vec{\gamma}$ определяется в результате анализа и преобразования вектора реакций системы, на входные воздействия, то есть $\vec{\gamma} = F[\vec{Y}(t)]$, где $\vec{Y} = \{y_i(t)\}$, $i = \overline{1, p}$, $0 \leq t \leq T_n$, T_n – время наблюдения одной реализации $y_i(t)$; p – количество реализаций реакции $y(t)$.

При использовании метода статистических испытаний (Монте-Карло) осуществляется p независимых прогонов модели. В этом случае оценка выходного параметра γ производится путем статистической обработки ансамбля реализаций $y_i(t)$. Алгоритм статистической обработки является составной частью цифровой модели радиосистемы. При выборе данного алгоритма нужно стремиться к получению необходимой точности статистических оценок при минимальном объеме эксперимента на модели (минимальном числе прогонов).

При этом большое значение имеет правильный выбор выходного параметра модели, который определяется существом решаемой задачи моделирования.

Чаще всего оценочный выходной параметр γ - это показатель качества функционирования радиосистемы, который задается заказчиком при разработке системы.

4.1.1. Оценка статистических характеристик случайного выходного параметра модели.

При статистической обработке определяют, чаще всего, следующие характеристики: – закон распределения, то есть функцию распределения или плотность распределения вероятностей; – числовые характеристики такие, как математическое ожидание, средний квадрат, дисперсию; – корреляционную функцию или спектральную плотность случайного процесса.

Методика обработки состоит в следующем. В ходе эксперимента на цифровой модели получают ансамбль из p реализаций выходного параметра модели (например, ошибки слежения по частоте, фазе, углу): $v_1[n], v_2[n], \dots, v_p[n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$; p – число реализаций. Данные подвергаются предварительной обработке, которая дает возможность корректно использовать статистические методы, составляющие содержание операторной обработки F . Предварительная обработка подразумевает обычно отсев грубых погрешностей (аномальные или сильно выделяющиеся значения) и проверка соответствия результатов измерения нормальному закону. Если эта гипотеза неприемлема, следует также проверить возможность приведения (преобразования) распределения экспериментальных данных к нормальному закону. Возможность использования нормального закона значительно расширяет спектр используемых при обработке результатов моделирования инструментов. Для отсеивания аномальных значений используется, например, критерий Смирнова:

$$K = \left| \hat{v}_{\text{cp}} - v \right| / \sigma \sqrt{\frac{p-1}{p}},$$

где \hat{v}_{cp} - статистическая оценка математического ожидания. Измерение v признается аномальным и исключается из рассмотрения, если $K > K_p$, где K_p - расчетные величины, зависящие от числа опытов p .

Одним из простых способов проверки гипотезы о нормальности распределения эмпирических данных является использование среднего абсолютного отклонения $\sigma_{\text{cp}} = \sum_i \frac{|v_i - \hat{v}_{\text{cp}}|}{p}$.

Для выборки, имеющей приближенно нормальный закон, справедливо

$$\left| \frac{\sigma_{\text{cp}}}{\hat{\sigma}} - 0,7979 \right| < 0,4\sqrt{p}.$$

Пусть требуется определить характеристики выходного параметра для момента времени $n = k$. Для этого момента имеем выборочные значения $v_1[k], v_2[k], \dots, v_p[k]$, которые являются независимыми случайными величинами с одинаковым законом распределения. Совокупность этих значений называется одномерной, случайной выборкой объема p .

По аналогии совокупность пар выборочных значений $v_1[k], v_1[m]; v_2[k], v_2[m]; \dots, v_p[k], v_p[m]$ называют двумерной, случайной выборкой объема p .

Статистические характеристики дискретного процесса $v[n]$ для $n = k$ оценивают путем статистического усреднения по достаточно большому объему выборок. На практике объем p выборки ограничен и оценки характеристик получаются неточными, то есть с ошибкой. Чем больше p , тем представительнее выборки и меньше ошибка.

Пример. Оценка одномерного закона распределения.

По определению

$P(x, k) = B_{cp}\{v[k] \leq x\}$ – функция распределения;

$p(x, k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_{cp}\{x < v[k] \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$ – плотность распределения вероятностей.

ностей.

При использовании метода Монте-Карло статистические оценки

$F = \hat{P}(x, k)$ и $f = \hat{p}(x, k)$

находятся по формулам

$F = m_1/P$ и $f = m_2/p$,

где m_1 – количество значений $v[k]$, удовлетворяющих условию $v[k] \leq x$ (*); m_2 – количество значений $v[k]$, удовлетворяющих условию $x < v[k] \leq x + \Delta x$ (**), при достаточно малом Δx .

Алгоритм реализация на ПК:

– выбирается из каждой реализации значение $v[k]$;

– проверяется выполнение условий (*) и (**);

– фиксируется счетчиком текущее m_1 и m_2 ;

– вычисляется после получения p реализаций частоты F и f .

Алгоритмы вычисления оценок числовых характеристик и корреляционной функции имеют вид (алгоритмы точечных оценок):

$$\hat{v}_{cp}[k] = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p v_i[k]; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (v_i[k] - \hat{v}_{cp}[k])^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p v_i^2[k] - \frac{1}{p^2} \left(\sum_{i=1}^p v_i[k] \right)^2;$$

$$\hat{R}[k, l] = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (v_i[k] - \hat{v}_{cp}[k])(v_i[l] - \hat{v}_{cp}[l]) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p v_i[k]v_i[l] - \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^p v_i[k] \sum_{i=1}^p v_i[l].$$

Можно вычислить эти характеристики последовательным способом. Сначала получить и запомнить все выборки $\{v_i[k]\}_{i=1, p}$, $i = \overline{1, p}$, а потом сделать вычисление по приведенным формулам, тогда для этого требуется большой объем оперативной памяти. В этом случае оперативной памяти может не хватить, а обращение к внутренней памяти приведет к дополнительным затратам машинного времени.

Более продуктивным считается параллельный способ, при котором каждое новое выборочное значение $v_i[k]$ в ходе эксперимента обрабатывается сразу же и в дальнейшем не запоминается. Тогда в памяти ПК хранятся значения только текущих сумм, которые изменяются после каждого нового прогона модели. После завершения p -го прогона вычисляются оценки характеристик по приведенным формулам ($\hat{\sigma}^2[k]$ и $\hat{R}[k, l]$).

Следует отметить, что для стационарного эргодического процесса $v[n]$ статистические характеристики одинаковы в любой момент времени, и их оценки можно получить на основе только одной реализации $v[n]$, $n=0,1,2,\dots$ методом усреднения по времени. Например,

$$\hat{v}_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v[n], \quad \text{где } N = \frac{T_H}{\Delta t}, \quad T_H - \text{ время наблюдения.}$$

Рассмотрим вопрос о точности оценок, получаемых методом статистических испытаний. Оценка \hat{g} некоторой характеристики g является случайной величиной и в общем случае имеет место ошибка оценки $\delta g = \hat{g} - g$, которая зависит, в частности, от объема выборки p . При неограниченном увеличении p оценка \hat{g} согласно закону больших чисел приближается (по вероятности) к истинному значению g . Но для исследователя важно иметь минимальные затраты машинного времени. Поэтому возникает задача определения минимального количества реализаций, достаточного для обеспечения заданной точности статистических оценок.

Пример. Пусть определяется оценка математического ожидания при $n = k$

$$\hat{v}_{cp}[k] = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p v_i[k].$$

Дисперсия случайной величины $v_i[k]$ равна σ^2 . Требуется найти p_{min} , при котором обеспечивается заданная точность оценки:

$$|\hat{v}_{cp}[k] - v_{cp}[k]| < \varepsilon.$$

Поскольку $\hat{v}_{cp}[k]$ - это случайная величина, то нужно задаться достоверностью α оценки согласно уравнению

$$B_{cp}\{|\hat{v}_{cp}[k] - v_{cp}[k]| < \varepsilon\} = \alpha.$$

Согласно центральной предельной теореме при большом p ($p > 10$) оценка $\hat{v}_{cp}[k]$ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами

$$M\{\hat{v}_{cp}[k]\} = v_{cp}[k]; \quad \sigma_{oc}^2 = \sigma^2 / p.$$

Примем правило «трех сигм»: отклонение оценки \hat{v}_{cp} от истинного значения v_{cp} с вероятностью $\alpha=0,997$ не превышает величины $3 \cdot \sigma_{oc}$. Следовательно

$$|\hat{v}_{cp}[k] - v_{cp}[k]| < 3 \cdot \sigma_{oc} = 3 \cdot \sigma / \sqrt{p} \quad \text{с вероятностью } 0,997.$$

С другой стороны $|\hat{v}_{cp}[k] - v_{cp}[k]| < \varepsilon$. Следовательно, справедливо равенство

$$\varepsilon = 3 \cdot \sigma / \sqrt{p}.$$

Отсюда, при заданных точности ε и достоверности $\alpha=0,997$, минимальное число испытаний p_{min} равно

$$p_{min} = 9 \cdot \sigma^2 / \varepsilon^2.$$

Метод статистических испытаний устойчив к сбоям в работе модели, но требует большого числа испытаний p .

4.2. Методы проверки адекватности модели и оригинала.

Цифровая модель является дискретной аппроксимацией непрерывной системы. Ошибка аппроксимации зависит от шага дискретизации, вида входного воздействия, характеристик моделируемой системы и от выбранной числовой меры ошибки (отклонение сигнала на выходе модели от сигнала на выходе оригинала, различие в статистических характеристик этих сигналов). В настоящее время не существует общего метода оценки адекватности модели и оригинала. Но потребность в оценке ошибки моделирования необходима, прежде всего, для того, чтобы правильно выбрать шаг дискретизации Δt (не слишком малым). На практике адекватность модели и оригинала оценивают следующими методами:

- методом сравнения переходных характеристик модели и оригинала при воздействии входного сигнала в виде функции включения;
- методом сравнения частотных характеристик модели и оригинала при воздействии входного сигнала в виде гармонического колебания;
- путем сравнения статистических характеристик выходных сигналов модели и оригинала при стационарном, случайном входном сигнале.

Самый простой метод – это сравнение характеристик выходного параметра модели при выбранном шаге Δt и заведомом, малом шаге $\Delta t_{\min} \ll \Delta t$, когда величина шага практически не влияет на точность моделирования. Необходимую точность моделирования получают путем дробления шага дискретизации ($\Delta t/2$, $\Delta t/4$, ...) до тех пор, пока на выходной параметр модели влияние шага дискретизации будет исключено.

4.3. Представление результатов моделирования в виде гистограмм.

Построение гистограмм является распространенной формой представления результатов имитационного моделирования. В процессе моделирования для любой из выходных переменных получают ряд значений $\{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$, где n – любое число прогонов модели. Значения $\{x_i\}$ могут быть описаны статистически.

Результаты моделирования представляют, например, в порядке возрастания. В этом случае получается вариационный ряд

$$\{x^{(k)}\}, (\forall k, x^{(k)} \leq x^{(k+1)}, k = \overline{1, n}).$$

Функция накопления частот значений (кумулятивная функция), соответствующая данным имитационного моделирования, определяется следующим образом

$$F_n(X) = \frac{\text{Число событий } : x_1, x_2, \dots, x_n \leq X}{n} \quad (4.1)$$

Функция (4.1) является эмпирической функцией распределения переменной X .

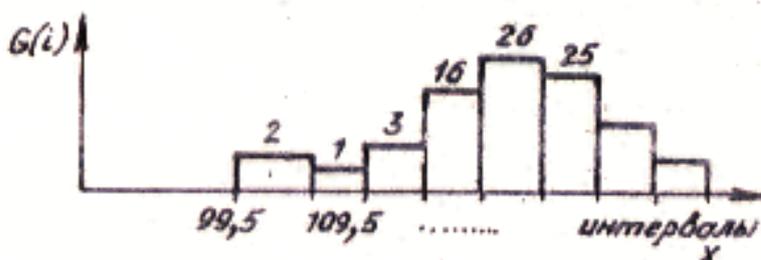


Рис. 4.1.

При большом n использования вариационного ряда требует хранения большого объема чисел. Поэтому значения x_i группируют по определенному принципу. Задают числовые интервалы, а множество $x^{(k)}$ представляют в виде I значений, где I – число интервалов. Получаются величины $G(i)$, $i = \overline{1, I}$, которые характеризуют число попаданий значений x в i – й интервал. Их графическое отображение является гистограммой (рис. 4.1).

Для совокупности полученных с помощью модели эмпирических данных принято вычислять ряд оценочных характеристик. Оценка среднего значения случайной величины вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{или} \quad \bar{x} = \sum_{j=1}^I v_j x_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^I G(j) x_j,$$

где v_j – частота попаданий в j – й интервал.

Оценка дисперсии случайной величины вычисляются следующим образом $D_x = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ или $D_x = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^I G(j) (x_j - \bar{x})^2$.

Оценка адекватности модели объекту может быть определена путем проверки гипотезы о тождественности закона распределения результатов моделирования $F_n(x)$ и реального (теоретического) закона $F_x(x)$. С этой целью можно использовать критерий Колмогорова.

Сначала строятся статистики D_n^+ и D_n^- , определяемые следующим образом

$$D_n^+ = \max_{v_x} [F_n(x) - F_x(x)]; \quad D_n^- = \max_{v_x} [F_x(x) - F_n(x)].$$

Значения D_n^+ и D_n^- выражают максимальные отклонения между значениями двух функций распределения.

Определяется значение

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-). \quad (4.2)$$

Распределение D_n не зависит от вида функций $F_x(x)$. При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} D_n < y\} = K(y),$$

где $P\{\cdot\}$ – суть вероятность; $K(y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \exp(-2i^2 y^2)$ – функция распределения Колмогорова.

Критерий Колмогорова применяют следующим образом. По таблице 4.1 задают уровень доверительной вероятности $(1 - \alpha)$ и определяют соответствующую величину u_α .

Вычисляют D_n (2.2) и сравнивают $\sqrt{n} \cdot D_n$ с u_α . Причем, если $\sqrt{n} \cdot D_n > u_\alpha$, то гипотезу о согласованности распределений следует отвергнуть.

Таблица 4.1. Критические значения u_α при уровне доверительной вероятности $(1 - \alpha)$.

$1 - \alpha$	0,999	0,99	0,95	0,9	0,8
u_α	2,0	1,628	1,358	1,224	1,073

Объем выборки при использовании критерия Колмогорова определяется из выражения

$$n = \max \left\{ n_{\min}, \left(\frac{y_{\alpha}}{\varepsilon} \right)^2 \right\},$$

где $n_{\min} \approx 100$ – число, начиная с которого $\sqrt{n} \cdot D_n$, имеет распределение близкое к распределению Колмогорова; ε – допустимая ошибка аппроксимации эмпирического распределения теоретическим расчетам.

5. Оптимизация параметров радиоустройств с помощью 6. математических моделей.

5.1. Общие сведения о проблеме оптимизации.

При проектировании радиоустройств и радиосистем решаются, как правило, две основные задачи – задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа (прямая): заданы характеристики устройства (алгоритм обработки) и процесса, действующего на входе; необходимо найти характеристики процесса на выходе и показатель качества функционирования устройства.

Задача синтеза (обратная): заданы характеристики процесса на входе и желаемые характеристики процесса на выходе; необходимо найти такое устройство (алгоритм обработки), которое преобразовало бы процесс с заданными характеристиками в процесс с желаемыми характеристиками.

Решение второй задачи связано с решением проблемы оптимальности. В качестве желаемых характеристик процесса на выходе выбираются такие, которые соответствуют наилучшему показателю качества устройства. В этом случае синтезируется оптимальное устройство (в смысле выбранного заранее критерия оптимальности). Например, можно синтезировать оптимальный измеритель частоты принимаемого сигнала при наличии флуктуационной помехи, который обеспечивает желаемое качество функционирования – минимум среднеквадратичной ошибки измерения частоты.

Решение задач анализа и синтеза аналитическим путем возможно только в ряде простых случаев и, как правило, при весьма сильных ограничениях. Математическое моделирование на ПК позволяет значительно расширить круг решаемых задач. Задачи анализа с помощью модели решаются сравнительно легко: показатель качества функционирования устройства определяется в результате проведения эксперимента с моделью. Решить задачу синтеза с помощью модели, реализованной на ПК, намного сложнее. Поэтому в данном разделе рассматриваются лишь общие вопросы синтеза оптимальных радиоустройств с помощью моделей.

Различают два основных вида синтеза – эвристический и математический.

Эвристический синтез – такой, при котором выбор оптимального устройства проводится с учетом использования опыта предыдущих разработок, путем проб и сравнения результатов анализа некоторых вариантов.

Математический синтез – такой, при котором оптимальное устройство находится чисто математическим путем (аналитическими методами или с помощью математического моделирования).

В свою очередь, математический синтез имеет три разновидности:

- дискретный синтез;
- синтез параметров;
- синтез структуры.

Дискретный синтез – такой, при котором задано несколько вариантов устройства и требуется выбрать наилучший вариант. Например, имеются устройства

$$П_1, П_2, П_3, \dots, П_N$$

с показателями качества функционирования соответственно

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N.$$

В результате выбирается вариант с наилучшими показателями качества.

Под синтезом параметров понимается выбор наилучших параметров при заданной структуре устройства. Такой синтез иногда называют оптимизацией параметров. Например, имеется устройство $П$ с показателем качества Q , причем

$$Q = Q(\vec{c}),$$

где $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ совокупность (или вектор) параметров, которые можно изменять в ограниченных пределах.

При синтезе выбирается такой вектор параметров $\vec{c} = \vec{c}_0$, при котором обеспечивается экстремум показателя качества Q , то есть

$$Q_0 = Q(\vec{c}_0) = \text{extr}.$$

Под синтезом структуры понимается выбор оптимального оператора устройства (алгоритма обработки), при котором обеспечивается экстремум показателя качества

$$Q = Q(D),$$

где D – алгоритм обработки (оператор системы). При этом $Q(D)$ является функционалом.

Математическое моделирование на ПК позволяет решать задачи дискретного синтеза и синтеза параметров. В качестве примера рассмотрим методы синтеза параметров радиоустройства с помощью моделей.

Имеется линейное звено с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{pT_1}{(1 + pT_2)(1 + pT_3)},$$

на вход которого поступает аддитивная смесь сигнала и помехи – нормальных стационарных, независимых процессов с заданными энергетическими спектрами $G_c(f)$ и $G_n(f)$ (рис. 5.1). Требуется найти оптимальные значения параметров T_1, T_2, T_3 , при которых обеспечивается минимум среднеквадратичной ошибки фильтрации сигнала.

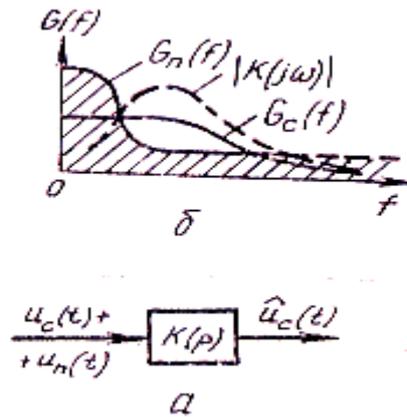


Рис. 5.1.

В данном случае показатель качества функционирования представляется соотношением

$$Q = M\{[\hat{u}_c(t) - u_c(t)]^2\} = Q(T_1, T_2, T_3),$$

где вектор $\vec{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$ определяет форму частотной характеристики фильтра $K(j\omega)$. При синтезе необходимо оценивать Q с помощью модели при $\vec{T} = \text{var}$ и найти $Q = \min$.

3.2. Методы синтеза параметров радиоустройств.

Показатель качества $Q = Q(\vec{c})$ как функцию параметров называют целевой функцией радиоустройства. Эту функцию можно получить в результате теоретического анализа, либо в результате натурального эксперимента или эксперимента с моделью. В последних двух случаях из-за ошибок эксперимента, как правило, получают оценки целевой функции $\hat{Q}(\vec{c})$. При этом $\hat{Q}(\vec{c})$ является случайной функцией параметров радиоустройства.

Задача синтеза параметров на языке математики является задачей нахождения экстремума функций многих переменных. В большинстве случаев аналитическим путем решить эту задачу не удастся. Поэтому применяют численные методы решения – методы поиска экстремума. При поиске осуществляется локальное исследование целевой функции $Q(\vec{c})$ для ряда значений вектора \vec{c} . По результатам этих исследований организуют направленный вектор значений \vec{c} и продвижение к точке экстремума целевой функции $Q(\vec{c})$.

При выборе метода поиска экстремума необходимо учитывать характер задачи, который может быть детерминированным (функция $Q(\vec{c})$ – не случайная) и стохастическим (функция $Q(\vec{c})$ – случайная). Приведем примеры методов поиска экстремума показателя качества.

Детерминированные задачи оптимизации.

Простейшими методами поиска экстремума целевой функции являются метод прямого перебора и графический метод.

Суть метода прямого перебора показана на рис. 5.2.

При поиске на сетке (рис. 5.2 б) узлы перебираются последовательно один за другим. Цифры на рисунке – это значения целевой функции в каждом узле.

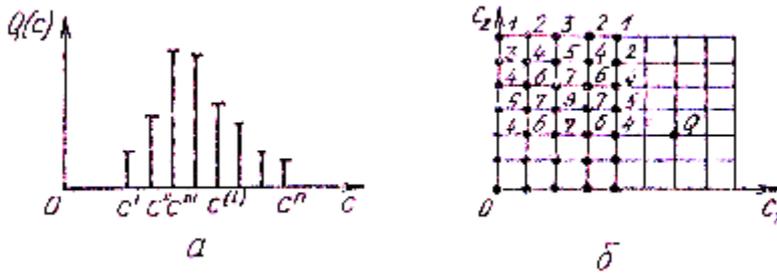


Рис. 5.2.

Недостаток метода прямого перебора в том, что требуется большое число экспериментов, и тем больше, чем выше размерность поиска (число параметров).

Возможна модификация поиска на сетке: предварительный опрос соседних узлов и переход на узел с наибольшим значением целевой функции Q . Выигрыш по объему вычислений тем больше, чем больше количество узлов (мельче сетка или выше размерность поиска).

Графический метод поиска экстремума сводится к построению зависимости $Q = Q(c)$ и определению $c = c_0$, при котором $Q = \text{extr}$. При этом трудности резко возрастают, если число параметров больше двух.

Поиск экстремума функции одной переменной можно осуществить с помощью процедуры *на основе чисел Фибоначчи*. Предполагают, что целевая функция $Q(c)$ на отрезке $[c_0, c_m]$ имеет единственный экстремум. Далее используются числа Фибоначчи F_N , приведенные в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

N	9	10	19	20	24	25	29	30
F_N	55	89	6765	10946	75025	121393	832040	1346269

Метод чисел Фибоначчи применим с произвольными, не обязательно дифференцируемым целевым функциям. При этом предъявляется только требование унимодальности, то есть единственности экстремума на исследуемом интервале $[c_0, c_m]$.

Числа Фибоначчи находятся в общем случае с помощью процедуры

$$F_N = F_{N-1} + F_{N-2}, \quad F_0 = F_1 = 1. \quad (5.1)$$

В итерационной процедуре (3.1) они используются для разбиения интервала аргумента целевой функции в процессе поиска точки c^* , в которой функция $Q(c^*)$ имеет экстремум. От концов интервалов величиной D_i (начальное значение $D_0 = c_m - c_0$) откладываются отрезки D_{i+1} (рис. 5.3).

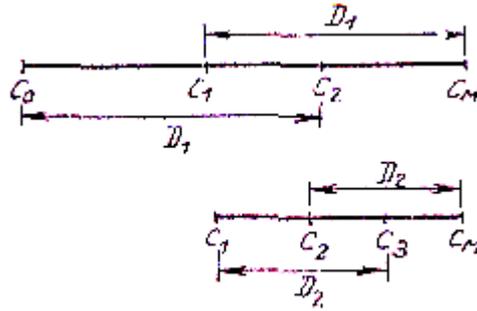


Рис. 5.3.

На первом шаге

$$D_1 = D_0 \left[\frac{F_{N-1}}{F_N} - \frac{(-1)^N \varepsilon}{F_N D_0} \right],$$

где N – выбранное число шагов; ε – заданное малое число (интервал различимости $Q(c)$). Далее сравниваются значения $Q(c_1)$ и $Q(c_2)$. Если $Q(c_1) > Q(c_2)$ (при поиске минимума), то дальше разбивается отрезок $[c_1, c_m]$. Точка c_2 сохраняется и используется для нахождения D_2 (рис. 5.3). После этого производится проверка значений $Q(x)$ в точках c_1, c_2 (рис. 5.3) и т. д.

Интервал, содержащий точку экстремума, сокращается и после N шагов

$$\text{равен } (c_m)_N - (c_0)_N = \frac{c_m - c_0}{F_N} + \frac{\varepsilon}{F_{N-1}}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ интервал уменьшается за N шагов в F_N раз (см. в качестве примера значения F_N в таблице 5.1).

Аппарат математического программирования дает более эффективные метода поиска. Он основан на разделе математики и не имеет ничего общего с составлением программ для ПК. Общая задача математического программирования формулируется следующим образом:

В области G , заданной ограничениями

$$q_i(\vec{c}) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \vec{c} \geq 0,$$

требуется найти такой вектор $\vec{c}_0 \in G$, для которого справедливо

$$Q(\vec{c}_0) = \text{extr}_{\vec{c} \in G} Q(\vec{c}), \quad \text{где } Q(\vec{c}) - \text{целевая функция.}$$

Если функции $Q(\vec{c})$ и $q_i(\vec{c})$ линейны, то соответствующий аппарат называется линейным программированием. Например,

$$Q(\vec{c}) = \sum_{j=1}^n a_j c_j, \quad q_i(\vec{c}) = \sum_{j=1}^n b_j c_j \leq 0.$$

Если $Q(\vec{c})$ и $q_i(\vec{c})$ нелинейные функции, то соответствующий аппарат называется нелинейным программированием. Аппарат нелинейного программирования хорошо разработан для квадратичных функций (выпуклое программирование). Методы линейного и нелинейного, выпуклого программирования позволяют получить глобальный экстремум (наибольший, например, из всех ло-

кальных) с учетом ограничений. Но при этом требуется знать виды функций $Q(\vec{c})$ и $q_1(\vec{c})$ (запись в виде формул), что возможно только тогда, когда $Q(\vec{c})$ получена аналитическим путем.

В тех случаях, когда в распоряжении исследователя имеются лишь отдельные значения $Q(\vec{c})$, полученные путем проведения эксперимента на модели или с оригиналом, применяется поиск экстремума, основанный на методе итераций. Такой метод поиска является более универсальным, чем методы линейного и нелинейного программирования, но не гарантируют получение глобального экстремума.

При рассмотрении основных видов итерационного поиска, ограничимся случаем, когда экстремум целевой функции является единственным и, для определенности, минимумом этой функции.

Метод координатного спуска (Гаусса-Зайделя) имеет наглядную геометрическую интерпретацию («спуск в яму»), показанную для произвольного алгоритма спуска (рис. 3.4).

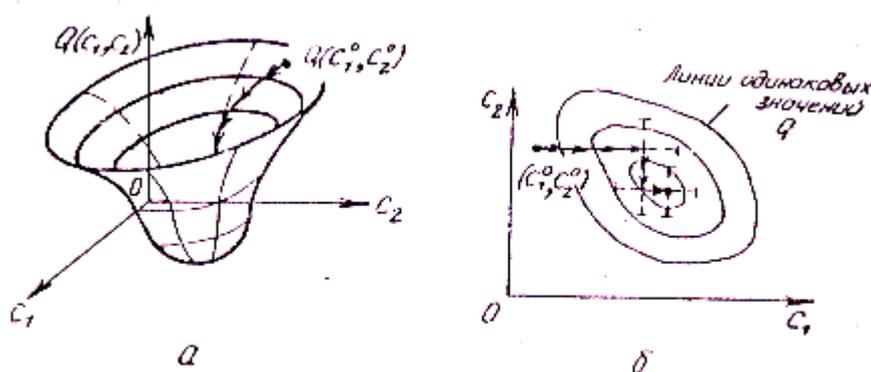


Рис. 5.4.

Процедура поиска по методу Гаусса-Зайделя заключается в следующем. Выбирается исходная точка (c_1^0, c_2^0) , вычисляется $Q^0 = Q(c_1^0, c_2^0)$. Затем дают приращение одной координате $c_1^1 = c_1^0 + \Delta c_1$ и вычисляют $Q^1 = Q(c_1^1, c_2^0)$. Если $Q^1 > Q^0$, то знак приращения изменяют на обратный. При $Q^1 < Q^0$ этой же координате дают новое приращение в том же направлении, то есть переходят в точку $c_1^2 = c_1^1 + \Delta c_1$, и т. д. до тех пор, пока приращения $\pm \Delta c_1$ не будут приводить к возрастанию Q . Полученная точка называется точкой перевала по координате c_1 . Из этой точки далее проводится аналогичный поиск точки перевала по координате c_2 . После получения точки перевала по последней координате цикл по координатного спуска повторяется.

Поиск минимума останавливается тогда, когда перемещение из некоторой точки по всем координатам в обе стороны приводят к увеличению целевой функции.

Метод Гаусса-Зайделя часто называют релаксационным методом (релаксация – это расслабление). При поиске поочередно «расслабляют» координаты (одну изменяют, другие «заморожены»). Достоинство данного метода состоит в наибольшей простоте процедуры поиска, а значит, и программы для ПК. Недостаток метода – медленная сходимость итерационной процедуры, особенно при

большом числе переменных. При этом велики затраты машинного времени. Кроме того, этот метод не работает при наличии ограничений.

Для повышения эффективности метода рекомендуется выбирать разные приращения по координатам и уменьшать шаг от цикла к циклу или внутри цикла.

Рассмотренный метод Гаусса-Зайделя, строго говоря, не является итерационным, хотя имеет много общего с методами этой группы. Строго итерационными методами поиска являются градиентные методы.

Известно, что одним из наиболее важных способов решения уравнений является метод последовательных приближений (или метод итераций).

Например, требуется найти корни уравнения

$$F(c) = 0, \quad (5.2)$$

где $F(c)$ – непрерывная функция одной переменной. Заменим (3.2) равносильным уравнением $c = c - \gamma \cdot f(c) = \varphi(c)$,

$$(5.3)$$

где γ – некоторый коэффициент пропорциональности; пусть $\gamma > 0$. Выберем грубо приближенное значение c_0 и подставим в правую часть уравнения (5.3).

Получим некоторую величину $c_1 = \varphi(c_0)$, причем $c_1 \neq c_0$, если c_0 не является корнем уравнения (5.3). Теперь подставим вместо c_0 значение c_1 и получим

$c_2 = \varphi(c_1)$. Повторяя эту процедуру подстановки, можно получить последова-

тельность величин $c_n = \varphi(c_{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (5.4)

Предположим, что эта последовательность сходящаяся, то есть существует предел

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Сходимость зависит от выбора коэффициента γ . Перейдя к пределу в равенстве (3.4) с учетом непрерывности функции $\varphi(c)$ получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n-1}) \quad \text{или} \quad \xi = \varphi(\xi).$$

Таким образом, предел ξ является корнем уравнения (5.3) и может быть вычислен методом итераций с любой степенью точности.

Возвращаясь к задаче поиска экстремума функций многих переменных, предположим, что целевая функция $Q(\vec{c})$ является непрерывной и позволяет найти частные производные

$$\frac{\partial Q(\vec{c})}{\partial c_v}, \quad \text{где } v = 1, 2, 3, \dots, N, \quad \vec{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}.$$

Функция $Q(\vec{c})$ достигает экстремума (максимума или минимума) при таких значениях $\vec{c} = \vec{c}_0$, для которых все N частных производных одновременно обращаются в нуль. Другими словами, при $\vec{c} = \vec{c}_0$ градиент функции

$$\nabla Q(\vec{c}) = \left\{ \frac{\partial Q(\vec{c})}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial Q(\vec{c})}{\partial c_N} \right\} = 0. \quad (5.5)$$

Условие (5.5) – это необходимое условие экстремума. Можно также записать достаточные условия экстремума в виде неравенств относительно определителей, содержащих частные производные второго порядка по всем координатам.

стей, то есть вместо $\partial Q_{n-1}/\partial c_v$ используют $\Delta Q_{n-1}/\Delta c_v$. Для этого перед каждым рабочим шагом делают пробные шаги малой величины $h_v = \Delta c_v$ по всем координатам и оценивают компоненты градиента целевой функции по формуле

$$\frac{\Delta Q_{n-1}}{\Delta c_v} = \frac{Q_{n-1}(c_1 \dots c_v + \Delta c_v \dots c_N) - Q_{n-1}(c_1 \dots c_v \dots c_N)}{\Delta c_v}.$$

Затем производится рабочий шаг, то есть координате $c_v[n-1]$ дается приращение $H_v = -\gamma(t) \cdot \frac{\nabla Q_{n-1}}{\Delta c_v}$.

При этом шаг в направлении антиградиента равен

$$\vec{H} = -\gamma[n] \cdot \nabla \tilde{Q}(\vec{c}[n-1]) = -\gamma[n] \cdot \text{qr}\tilde{\text{a}}dQ_{n-1}$$

где $\text{qr}\tilde{\text{a}}dQ_{n-1} = \left\{ \frac{\Delta Q_{n-1}}{\Delta C_1} \dots \frac{\Delta Q_{n-1}}{\Delta C_N} \right\}$ - оценка градиента целевой функции.

Рассмотрим конкретные виды градиентного поиска. Пусть $\gamma[n] = \gamma_0$. Тогда

длина рабочего шага равна $|\vec{H}| = \gamma_0 \cdot |\text{qr}\tilde{\text{a}}dQ_{n-1}| = \sqrt{\sum_{v=1}^N H_v^2}$,

то есть пропорциональна модулю градиента. По мере приближения к минимуму рабочие шаги уменьшаются, так как $\text{qr}\tilde{\text{a}}dQ \rightarrow 0$.

Следует отметить, что в данном случае имеем *градиент с переменным шагом* (рис. 5.5).

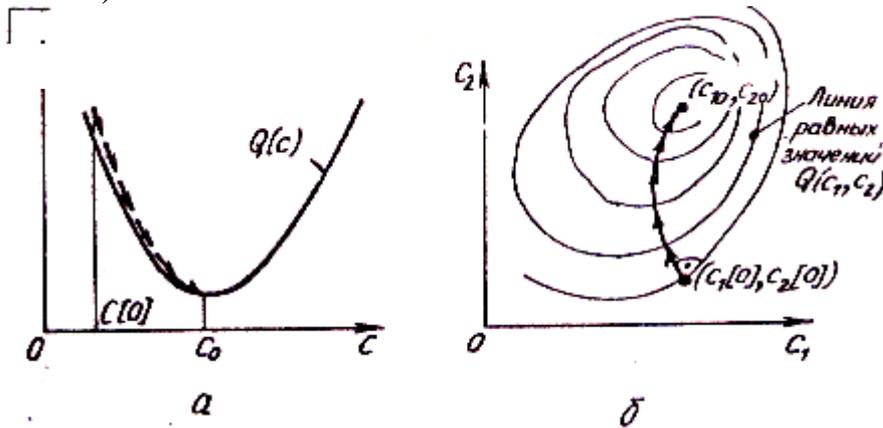


Рис. 5.5.

Метод с переменным шагом обеспечивает высокую точность определения минимума, но является чувствительным к «ловушкам» типа оврага и седла (рис. 5.6).

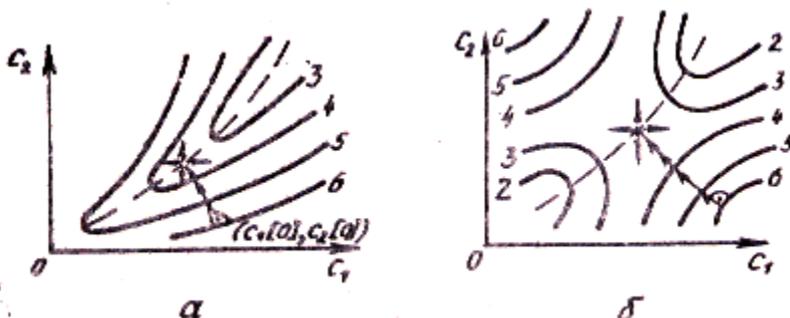


Рис. 5.6.

Шагая из «ловушки» по всем координатам в обе стороны фиксируется увеличение «Q». Следовательно, принимается решение, что достигается минимум. На самом деле к минимуму нужно еще идти по дну «оврага», либо по скатам «седла». Причем «седло» опасно для всех градиентных методов, так как в седловой точке градиент равен нулю.

Более простой способ для реализации на ПК *градиентный метод с постоянным шагом* $\gamma[n] = \frac{H_1}{|\Delta Q_{n-1} / \Delta c_v|_{\max}}$,

где $\frac{\Delta Q_{n-1}}{\Delta c_v}$ - наибольший по модулю компонент градиента.

Причем заданная точность поиска минимума может быть достигнута за счет «дробления» рабочего шага непосредственно вблизи минимума (рис. 5.7). Однако данный метод также чувствителен к «ловушкам».

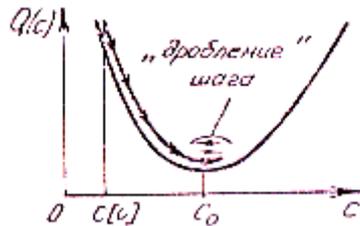


Рис. 5.7.

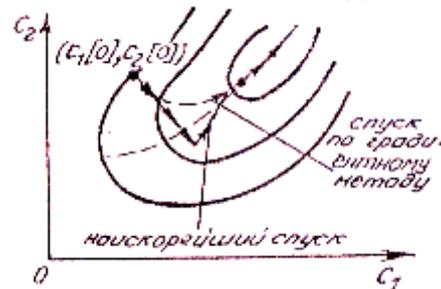


Рис. 5.8.

Третий вид градиентного поиска – это *метод координатного спуска* (рис. 5.8). В начальной точке вычисляют градиент. Затем в антиградиентном направлении шагают до тех пор, пока уменьшается целевая функция (Q_{n-1} и Q_n сравнивают на каждом шаге). В точке перевала снова оценивают градиент и т. д. Сходимость этого метода быстрее, т. к. пробные шаги и оценка градиента проводится редко.

В начальной точке вычисляют градиент. Затем в антиградиентном направлении шагают до тех пор, пока уменьшается целевая функция (Q_{n-1} и Q_n сравнивают на каждом шаге). В точке перевала снова оценивают градиент и т. д. Сходимость этого метода быстрее, так как пробные шаги и оценка градиента проводится редко.

При любом методе поиск останавливается, если выполняется условие

$$|Q(\vec{c}[n]) - Q(\vec{c}[n-1])| < \varepsilon,$$

где ε - допустимая ошибка определения минимума.

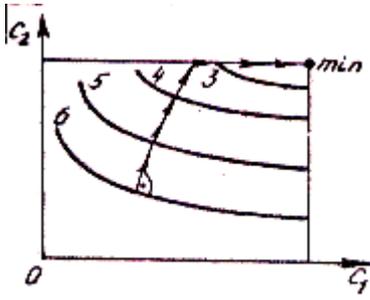


Рис.5.9.



Рис. 5.10.

При наличии ограничений на параметры можно использовать все градиентные методы, рассмотренные выше. Причем достигнув границы, поиск нужно вести вдоль границы в направлении уменьшения Q (рис. 5.9).

Метод случайного поиска. Данный метод поиска экстремума применяется чаще всего в многомерном случае. При этом методе делают пробные и рабочие шаги фиксированной длины в случайных направлениях (рис. 5.10), где шаг

$$\vec{H}[n] = \begin{cases} \gamma \cdot \vec{\xi}[n], & Q_n < Q_{n-1}; \\ 0, & -Q_n \geq Q_{n-1}; \end{cases}$$

$\vec{\xi}[n]$ - единичный, случайный вектор, принимающий с равной вероятностью все возможные направления.

Шаг $\vec{H}[n]$ проверяется на полезность. При $Q_n \geq Q_{n-1}$ шаг считается бесполезным и, как проба, отбрасывается. По сравнению с градиентными методами данный метод дает меньшую точность и применяется обычно на начальном этапе поиска. Метод сохраняет работоспособность при наличии ограничений.

Стохастические задачи оптимизации.

Пусть целевая функция $Q(\vec{c})$ находится в результате эксперимента и за счет наличия совокупности помех и ошибок эксперимента является случайной. Тогда ее можно записать в виде

$$Q(\vec{c}, \vec{\xi}), \text{ где } \vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\} - \text{вектор (совокупность) помех.}$$

При этом задача поиска экстремума решается в среднем, то есть требуется найти такой вектор параметров $\vec{C} = \vec{C}_0$, для которого

$$Q_{cp}(\vec{c}, \vec{\xi}) = \text{extr} \rightarrow \vec{c} \in G, \text{ где } G - \text{область определения вектора } \vec{c}.$$

Обычно закон распределения $p(\vec{\xi})$ неизвестен, и нельзя вычислить

$$Q_{cp}(\vec{c}, \vec{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\vec{c}, \vec{\xi}) \cdot p(\vec{\xi}) d\vec{\xi}.$$

Но когда это удастся, то стохастическая задача вырождается в детерминированную. В общем случае используют реализации $Q(\vec{c}, \vec{\xi})$ и градиентные методы поиска экстремума. Алгоритм поиска имеет вид (поиск минимума)

$$\vec{c}[n] = \vec{c}[n-1] - \gamma[n] \cdot \nabla \tilde{Q}_{\xi}(\vec{c}[n-1], \vec{\xi}[n]),$$

где $\nabla \tilde{Q}_\kappa$ - оценка градиента, полученная по данной реализации $Q(\bar{c}, \bar{\xi})$ при условии, что действует помеха $\bar{\xi}$. Компоненты градиента оцениваются с помощью пробных шагов $h[n]$ малой величины, как и раньше.

В отличие от детерминированного случая возникает проблема обеспечения сходимости алгоритмов, которая рассматривается в теории стохастической аппроксимации. Сходимость обеспечивается выбором $\gamma[n]$ и $h[n]$ так, чтобы пробные и рабочие шаги уменьшались по мере приближения к минимуму $Q_{\text{cp}}(\bar{c}, \bar{\xi})$. Чем сильнее помеха $\bar{\xi}$, тем меньше эти шаги.

Заметим, что алгоритмы стохастической аппроксимации являются адаптивными, так как используют текущую информацию с выхода модели. При изменении условий работы модели изменяется и текущая информация на ее выходе. Алгоритмы оптимизации меняют параметры модели так, чтобы она работала наилучшим образом в новых условиях. Здесь открывается возможность исследования на ПК адаптивных (самонастраивающихся) радиоустройств.

Литература

1. Гультаев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB. Учебный курс. Санкт-Петербург.: Питер. 2000. 430 с.
2. Дьяконов В. Mathcad 2000. Учебный курс. Санкт-Петербург.: Питер. 2000. 586 с.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. Учебник для ВУЗОВ. Санкт-Петербург.: Питер. 2003. 604 с.
4. Кузнецов А.А., Сенин А.И. Моделирование радиотехнических систем. Учебное пособие. 1 часть. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2000.
5. Кузнецов А.А., Сенин А.И. Моделирование радиотехнических систем. Учебное пособие. 2 часть. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2001.
6. Кузнецов А.А., Сенин А.И. Моделирование радиотехнических систем. Учебное пособие. 3 часть. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002.
7. Кузнецов А.А., Сенин А.И. Моделирование радиотехнических систем. Учебное пособие. 4 часть. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004.
8. Криницин В.В., Хресин И.Н. Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ. Часть 1. Математическое моделирование и оптимизация авиационных радиоустройств на ЭВМ. М.: МИИГА. 1991.
9. Борисов Ю.П., Цветнов В.В. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств. М.: Радио и связь. 1985. 176 с.
10. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1975, 767с.
11. Рыжков А.В., Попов В.Н., Синтезаторы частот в технике радиосвязи, М.: «Радио и связь», 1991, 263 с.
12. «Magnum Microwave RF and Microwave Components Catalog» фирмы Magnum. 1998. <http://www.magnummicrowave.com>.
13. Каталог «RF/IF Dtsigner's Guide» фирмы Mini-Circuits. 1997. <http://www.minicircuits.com>.
14. Шахтарин Б.И., Прохладин Г.Н., Иванов А.А и др. Синтезаторы частот. Учебное пособие. – М: Горячая линия – Телеком, 2007

МАТЮХИН Константин Николаевич, БИКТЕЕВА Екатерина Бясыровна

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ
ЭКСПЛУАТАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО РАДИООБОРУДОВАНИЯ

Учебное пособие

Подписано в печать 08.07.2019 г.

Формат 60x80/16 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79

Заказ 511/ Тираж 35 экз.

Московский государственный технический университет ГА

125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20

Отпечатано ООО «МИР»

394033, г. Воронеж, Ленинский пр-т 119А, лит. Я, оф. 215