ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра физики

С.К. Камзолов, А.А. Куколева, С.М. Новиков

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению лабораторных работ:
М-12 «Изучение динамики твердого тела
на “установке Маятника Уилберфорса”»,
М-13 «Изучение динамики твердого тела
методом крутильных колебаний»

для студентов I курса
всех направлений и специальностей
всех форм обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2018

УДК 53(07)
ББК 53
К18

Рецензент:

Бутюгин М.А. – канд. техн. наук, доц.

Камзолов С.К.

К18 Физика [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ / С.К. Камзолов, А.А. Куколева, С.М. Новиков. – М.: ИД Академии Жуковского, 2018. – 20 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Физика» по учебному плану для студентов I курса всех направлений и специальностей всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 16.04.2018 г. и методического совета 18.04.2018 г.

УДК 53(07)
ББК 53

В авторской редакции

Подписано в печать 22.06.2018 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 1,25 Усл. печ. л. 1,16
Заказ № 330/0604-УМП10 Тираж 150 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

ВВЕДЕНИЕ
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ М-12 И М-13

1. Цель работ

Изучение законов динамики абсолютно твердого тела на примере колебаний крутильного маятника, опытное определение момента инерции твердого тела и крутильной жесткости пружины или проволоки.

2. Подготовка к работам

Изучите теоретический материал по лекциям или учебнику [1,2]: модель абсолютно твердого тела, уравнения динамики для поступательного и вращательного движения твердого тела, момент силы, момент инерции, упругие силы, гармонические колебания. Прочитайте также разделы 3 и 4 методического описания (для соответствующей лабораторной работы), ознакомьтесь с конструкцией лабораторного стенда, порядком проведения измерений и обработки их результатов. Подготовьте проект отчета по лабораторной работе, включающий рабочие формулы, схемы и подготовленные к заполнению таблицы. Потренируйтесь отвечать на вопросы для допуска к лабораторным работам на стр. 19 и из обучающего теста.

3. Краткая теория

Второй абстракцией (после модели материальной точки), с которой приходится иметь дело в механике, является модель **абсолютно твердого тела** (АТТ) – тела, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Всякое движение АТТ можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное. В частности, можно сложное движение АТТ рассматривать как поступательное движение его центра масс и вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс.

Центр масс АТТ движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу внешних сил (на основании **второго закона Ньютона**):

$$m\vec{a}_{\text{цм}} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{внешн}} . \qquad (1)$$

Динамика вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси (например, оси 0z, проходящей через его центр масс, рис. 1) описывается аналогичным по форме уравнением, которое называется **основным уравнением динамики вращательного движения АТТ**. В проекции на ось вращения оно имеет вид:

$$I_z\beta_z = \sum_i M_{i,z,\text{внешн}}, \quad (2)$$

где I_z – момент инерции АТТ относительно оси вращения 0z, β_z – угловое ускорение вращательного движения АТТ вокруг оси 0z, $M_{i,z,\text{внешн}}$ – моменты внешних сил относительно оси вращения. Момент силы относительно оси характеризует способность силы ускорять или замедлять вращательное движение тела вокруг этой оси. Модуль момента силы относительно оси 0z (рис. 1) вычисляется по формуле:

$$|M_z| = h \cdot F_\perp, \quad (3)$$

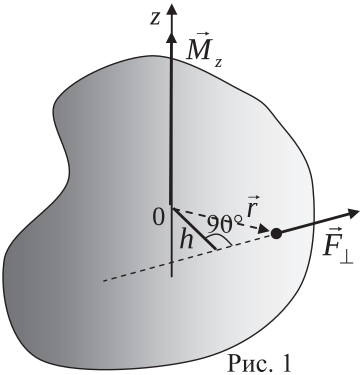


Рис. 1

где $F_\perp$ – составляющая силы, лежащая в плоскости, перпендикулярной выбранной оси, h – плечо силы относительно оси 0z (рис.1). Направление вектора $\vec{M}_z$ определяется векторным произведением $\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}_\perp$ или по правилу правого винта.

Сопоставив формулы вращательного и поступательного движений, приведенные в табл. 1, можно сделать вывод, что наблюдается соответствие между моментом инерции и массой тела. Поэтому можно сделать заключение, что момент инерции характеризует инертные свойства тела во вращательном движении.

Таблица 1

Характеристики движения твердого тела

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса (инерция) – m	Момент инерции – I
Сила – $\vec{F}$	Момент силы – $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Проекция импульса – $P_x = m\upsilon_x$	Проекция момента импульса* – $L_z = I_z\omega_z$
Уравнения динамики (проекции)	
$F_x = \dfrac{dP_x}{dt} = ma_x$	$M_z = \dfrac{dL_z}{dt} = I_z\beta_z$
Кинетическая энергия	
$T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$	$T = \dfrac{I_z\omega_z^2}{2}$

* ω_z - угловая скорость вращательного движения АТТ вокруг оси 0z.

Величина момента инерции твердого тела зависит от его массы и ее распределения относительно выбранной оси. В случае дискретного распределения массы расчет момента инерции сводится к суммированию, а при непрерывном распределении массы в объеме V к интегрированию по формулам:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \qquad \text{или} \qquad I_z = \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V\,, \tag{4}$$

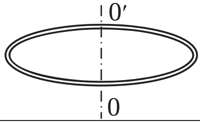
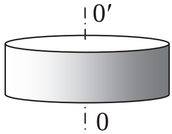
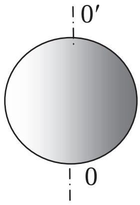
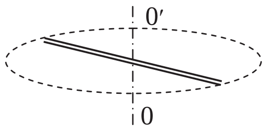
где ρ – плотность материала, R_i и R – расстояния от m_i или от элемента объема dV, имеющего массу $\rho \mathrm{d}V$, до выбранной оси, соответственно. Формулы (4) отражают свойство **аддитивности** момента инерции – момент инерции АТТ, состоящего из нескольких частей, равен сумме моментов инерции этих частей. Для расчета момента инерции тела I_z относительно произвольной оси z используют **теорему Штейнера**:

$$I_z = I_{0z} + m a_0^2, \tag{5}$$

где I_{0z} – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной заданной оси z, a_0 – расстояние между этими осями.

В табл. 2 приведены моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс.

Таблица 2

Описание тела	Момент инерции
Обруч, кольцо радиусом R 	mR^2
Однородный диск или цилиндр радиусом R 	$\frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар радиусом R 	$\frac{2}{5}mR^2$
Однородный стержень длиной L 	$\frac{1}{12}mL^2$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА М-12
ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА УСТАНОВКЕ «МАЯТНИК УИЛБЕРФОРСА»

4. Описание установки и методика проведения эксперимента

Маятник Уилберфорса (рис. 2а) состоит из металлического цилиндра 1, снабженного спицей 4 с перемещаемыми по ней гайками 5. Цилиндр соединен с пружиной 2, верхний конец которой закреплён на верхней платформе стойки 3. Пружина обладает продольной (k) и крутильной (G) жесткостью, поэтому маятник может совершать как продольные, так и крутильные колебания.

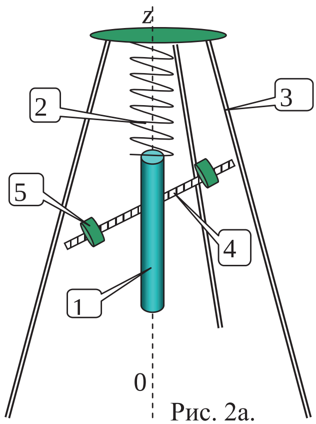


Рис. 2а.

Выберем систему координат, в которой ось 0z совпадает с вертикальной осью пружины и цилиндра. Если отклонить маятник в вертикальном направлении на малую величину z от положения равновесия без поворота вокруг оси 0z, то на него начнет действовать возвращающая к равновесию сила (закон Гука):

$$F_z = -kz\,.$$

В этом случае уравнение динамики поступательного движения маятника (см. формулу (1)) примет вид:

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -kz\,, \tag{6а}$$

где m – полная масса маятника, k – жесткость пружины. Его можно привести к следующему уравнению гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \omega_{пр}^2 z = 0\,, \tag{7а}$$

где $\omega_{пр} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – циклическая частота продольных колебаний.

Если повернуть маятник вокруг своей оси на некоторый малый угол φ от положения равновесия без отклонения в вертикальном направлении, то на него начнет действовать возвращающий к равновесию момент силы M_z относительно этой оси:

$$M_z = -G\varphi\,,$$

где коэффициент пропорциональности G называется **крутильной жесткостью** пружины. В этом случае уравнение динамики вращательного движения маятника (см. формулу (2)) примет вид:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -G\varphi.$$

Его можно привести к следующему уравнению гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_{кр}^2\varphi = 0, \tag{8а}$$

где $\omega_{кр} = \sqrt{\dfrac{G}{I}}$ – циклическая частота крутильных колебаний, I - момент инерции маятника (включая спицу с гайками).

Периоды колебаний связаны с циклической частотой формулой $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Тогда формулы для периодов продольных и крутильных колебаний маятника соответственно принимают вид:

$$T_{пр} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{9а}$$

$$T_{кр} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{G}}. \tag{10а}$$

Формула (9а) позволяет по экспериментальным значениям периода продольных колебаний (при известной массе маятника) рассчитать продольную жесткость пружины:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_{пр}^2}. \tag{11а}$$

Величину $T_{кр}$ можно регулировать, изменяя момент инерции маятника I путем перемещения гаек 5 вдоль спицы 4 (при этом период $T_{пр}$ не изменяется, так как масса маятника m и жесткость пружины k остаются постоянными). В этом случае момент инерции маятника удобно записать в виде

$$I = I_0 + 2m_з l^2, \tag{12а}$$

где I_0 – момент инерции цилиндра со спицей без учета гаек, l – расстояние от оси цилиндра до центра гайки (предполагается, что гайки являются материальными точками с массой $m_з$ и смещаются всегда симметрично относительно оси цилиндра).

Если экспериментально измерить несколько значений периода крутильных колебаний маятника при различных значениях момента инерции (меняя l), то можно рассчитать значения G и I_0. Для их определения предварительно преобразуем формулу (10а) с учетом (12а) к более удобному для дальнейших расчетов виду с целью получения линейной зависимости $T_{кр}^2$ от l^2:

$$T_{кр}^2 = \frac{8\pi^2 m_з}{G} l^2 + \frac{4\pi^2}{G} I_0. \tag{13а}$$

Это уравнение аналогично математической записи уравнения прямой линии $y = ax + b$, где $y = T_{\text{кр}}^2$, $x = l^2$. Его можно использовать для определения крутильной жесткости пружины и момента инерции цилиндра со спицей I_0. Для этого по результатам эксперимента строится график зависимости $T_{\text{кр}}^2$ от l^2. Пример такого графика приведен на рис. 3а. Угловой коэффициент полученной прямой a связан с крутильной жесткостью пружины G соотношением (см. формулу (13а)):

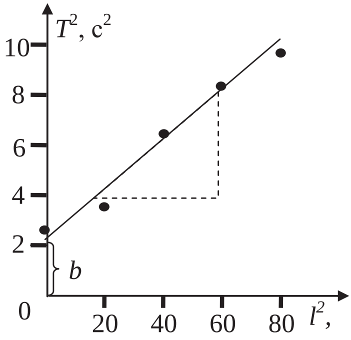


Рис. 3а

$$a = \frac{\mathrm{d}(T_к^2)}{\mathrm{d}\left(l^2\right)} = \frac{8\pi^2 m_з}{G}.$$

Рассчитав его по полученному графику как отношение катетов вспомогательного прямоугольного треугольника (с учетом масштаба и размерностей; подробные пояснения приведены на стенде в лаборатории) можно получить крутильную жесткость пружины по формуле:

$$G = \frac{8\pi^2 m_з}{a}. \qquad (14а)$$

Координата b точки пересечения прямой с осью ординат (осью T^2) связана с моментом инерции цилиндра со спицей (без гаек) I_0 и величиной G соотношением (см. формулу (13а)):

$$b = \frac{4\pi^2}{G} I_0.$$

Измерив ее по графику, можно рассчитать момент инерции цилиндра со спицей:

$$I_0 = \frac{bG}{4\pi^2}. \qquad (15а)$$

Такая процедура требует от экспериментатора определенных навыков, и ее результат существенно зависит от субъективных факторов. Одним из аналитических методов, позволяющих существенно повысить точность расчетов и оценить ошибку измерения, является **метод наименьших квадратов (МНК)**. Соответствующие расчётные формулы представлены на стенде в лаборатории кафедры физики. При проведении расчётов можно использовать готовые программы, размещенные на рабочем столе лабораторного компьютера в папке «Обработка результатов ЛР».

5. Порядок выполнения работы

5.1. Измерение периода продольных колебаний маятника

5.1.1. Запишите над табл. 3а значения m_1 (масса цилиндра), m_2 (масса спицы), m_3 (масса одной гайки), которые приведены на верхней платформе стойки. Прокручивая гайки, установите их симметрично на спице на минимальном удалении от оси цилиндра $l_{\min}$. Отклонив цилиндр в вертикальном направлении, без поворота вокруг его оси, на малое расстояние (3 ÷ 5 см), приведите систему в состояние продольных (вертикальных) колебаний. Измерьте по секундомеру (удобно по секундомеру смартфона) полное время 10 периодов колебаний $t_{\text{пр}1}$. Запишите полученное значение периода колебаний $T_{\text{пр}1} = t_{\text{пр}1}/10$ в табл. 3а.

5.1.2. Повторите измерения по п. 5.1.1. еще 5 раз с записью результатов $T_{\text{пр}2}\div T_{\text{пр}6}$ в табл. 3а.

5.2. Измерение периода крутильных колебаний маятника

5.2.1. Запишите положение гаек на спице $l_1 = l_{\min}$ в табл. 4а (рекомендуется выбирать целочисленные значения для l_1 в см). При определении величины l_1 необходимо учитывать размер гаек (h = 1 см) и отсчет вести от середины гайки. Повернув цилиндр на небольшой угол (45° ÷ 90°) вокруг его оси, без смещения в вертикальном и горизонтальном направлениях, приведите систему в состояние крутильных колебаний. Измерьте по секундомеру полное время 10 периодов колебаний $t_{\text{кр},1}$. Запишите значения l_1 (м) и периода крутильных колебаний $T_{\text{кр}1} = t_{\text{кр}1}/10$ в табл. 4а.

5.2.2. Проведите аналогичные измерения для других симметричных положений гаек l_i на спице, всякий раз смещая их на 2 см от оси цилиндра. Запишите полученные значения l_i (м) и $T_{\text{кр},i}$ в табл. 4а.

Примечание: при возникновении биений измерения следует проводить, не обращая внимания на медленные изменения амплитуд продольных и крутильных колебании.

6. Обработка результатов измерений и оформление отчёта

6.1. Определение продольной жесткости пружины

6.1.1. Рассчитайте полную массу маятника (включая спицу с гайками) по формуле $m = m_1 + m_2 + 2m_3$. Запишите полученное значение над табл. 3а.

6.1.2. По данным табл. 3а рассчитайте среднее значение периода продольных колебаний $\bar{T}_{\text{пр}} = \dfrac{1}{n}\sum_i T_{\text{пр},i}$, где n = 6 – число измерений. Запишите результат без округления в соответствующую ячейку табл. 3а.

6.1.3. Рассчитайте продольную жесткость пружины по формуле (11а):

Замечание: последующие расчеты по п.п. 6.1.4-6.1.5 можно существенно упростить, если (по согласованию с преподавателем) использовать возможности работы с таблицами в Microsoft Excel. Для этого необходимо войти в директорию «Обработка результатов ЛР», расположенную на рабочем столе лабораторного компьютера, и открыть файл «Расчет стандартной ошибки.xls». Затем ввести в ячейки таблицы полученные в эксперименте величины $x_i = T_{\text{пр},i}$. Запишите результат компьютерного расчета в лабораторный журнал.

6.1.4. Рассчитайте величины отклонения от среднего $T_{\text{пр},i} - \bar{T}_{\text{пр}}$ и их квадраты $(T_{\text{пр},i} - \bar{T}_{\text{пр}})^2$. Запишите результаты без округления в соответствующие столбцы табл. 3а.

6.1.5. Рассчитайте среднеквадратичную погрешность измерения периода продольных колебаний по формуле

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{6}(T_{\text{пр},i} - \bar{T}_{\text{пр}})^2} \ .$$

6.1.6. Рассчитайте погрешность измерения периода продольных колебаний $\Delta T_{\text{пр}} = t_{P,n} \cdot \sigma_{\bar{T}}$, где коэффициент Стьюдента $t_{P,n}$ определите при значении надежности P = 0,8 (80%) . Запишите полученное значение с точностью не более двух значащих цифр в табл. 3а.

6.1.7. Рассчитайте погрешность определения продольной жесткости пружины по формуле

$$\Delta k = k \cdot \delta k = k\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T_{\text{пр}}}{\bar{T}_{\text{пр}}}\right)^2} \ ,$$

где примите $\Delta m = \sqrt{(\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2 + 4(\Delta m_3)^2} \approx \Delta m_1$ (погрешности измерения масс приведены на верхней платформе стойки). Запишите полученные результаты в табл. 5а в стандартной форме $k \pm \Delta k$.

6.2. Определение крутильной жесткости пружины и момента инерции маятника

6.2.1. Рассчитайте и запишите без округления в соответствующие ячейки табл. 4а значения $x_i = l_i^2$ и $y_i = T_{\text{кр},i}^2$.

6.2.2. Нанесите значения экспериментальных точек на координатную плоскость $T_{\text{кр}}^2$ от l^2. Постройте график зависимости $T_{\text{кр}}^2\left(l^2\right)$, проведя прямую линию вида $y = ax + b$ так, чтобы экспериментальные точки были от нее на минимальных расстояниях по разные стороны. Произведите измерения величин момента инерции цилиндра со спицей и крутильной жесткости пружины графическим методом (см. пояснения к рис. 3а и формулы (14а) и (15а)). Запишите в табл. 5а полученные результаты как $a_{\text{гр}}$, $b_{\text{гр}}$, $I_{0\text{гр}}$ и $G_{\text{гр}}$.

Замечание: последующие расчеты п.п.6.2.3-6.2.5 можно также существенно упростить, если (по согласованию с преподавателем) использовать возможности работы с таблицами в Microsoft Excel. Для этого необходимо открыть папку «Обработка результатов ЛР», расположенную на рабочем столе лабораторного компьютера, и открыть файл «Расчет y=ax+b МНК.xls». Затем руководствоваться приведенными в файле пояснениями. В этом случае последние три столбца в табл. 4а не заполняются.

6.2.3. Рассчитайте значения x_i^2, y_i^2, $x_i y_i$ и запишите результаты без округления в оставшиеся столбцы табл. 4а.

6.2.4. Произведите суммирование величин в каждом из пяти последних столбцов табл. 4а ($\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i y_i^2$ и $\sum_i x_i y_i$) и запишите результаты в последней строке.

6.2.5. Рассчитайте значения a, b, σ_a и σ_b методом наименьших квадратов по формулам, представленным на стенде в лаборатории кафедры физики.

6.2.6. Рассчитайте погрешности Δa и Δb, приняв надежность измерений P = 0,8 (80%) (по аналогии с п. 6.1.5). Результаты запишите в табл. 5а в стандартной форме $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$. При записи результатов необходимо округлить величину ошибки до одной–двух значащих цифр. Последние цифры значений величин a и b должны быть того же разряда, что и в их погрешности.

6.2.7. Рассчитайте по формулам (14а) и (15а) значения G и I_0.

6.2.8. Рассчитайте относительные погрешности измерения G и I_0 по формулам

$$\delta G = \frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_3}{m_3}\right)^2}, \qquad \delta I_0 = \frac{\Delta I_0}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2}$$

и соответствующие погрешности $\Delta G = G \cdot \delta G$ и $\Delta I_0 = I_0 \cdot \delta I_0$. Считайте, что Δm_3 = 0,001 кг. Запишите полученные результаты в табл. 5а в стандартной форме $G \pm \Delta G$ и $I_0 \pm \Delta I_0$.

6.2.9. По полученным результатам эксперимента запишите выводы.

Таблица 3а

m_1 = ….± . . . кг, m_2 = 0,102 ± 0,001 кг, m_3 = 0,053 ± 0,001 кг, m = …± … кг

i	$T_{\text{пр},i}$, с	$T_{\text{пр},i} - \bar{T}_{\text{пр}}$, с	$(T_{\text{пр},i} - \bar{T}_{\text{пр}})^2$, с^2
1			
2			
3			
4			
5			
6			
	$\sum T_{\text{пр},i} = \ldots$		$\sum\left(T_{\text{пр},i} - \bar{T}_{\text{пр}}\right)^2 = \ldots$
	$\bar{T}_{\text{пр}} = \ldots$		$\Delta T_{\text{пр}} = t_{P,n}\ \sigma_{\bar{T}} = \ldots$

Таблица 4а

i	l_i, м	$T_{\text{кр},i}$, с	$x_i = l_i^2$, м^2	$y_i = T_{\text{кр},i}^2$, с^2	x_i^2, м^4	y_i^2, с^4	$x_i y_i$, м^2·с^2
1							
2							
3							
4							
5							
6							
Суммы			$\Sigma x_i =$	$\Sigma y_i =$	$\sum_i x_i^2 =$	$\sum_i y_i^2 =$	$\sum_i x_i y_i =$

Таблица 5а

Продольные колебания		
Продольная жесткость пружины	k = . . . ± . . . Н/м	
Крутильные колебания		
	Графический метод	Метод наименьших квадратов
Коэффициент наклона a	$a_{\text{гр}}$ = . . . (с/м)^2	a = . . . ± . . . (с/м)^2
y-пересечение b	$b_{\text{гр}}$ = . . . с^2	b = . . . ± . . . с^2
Крутильная жесткость пружины	$G_{\text{гр}}$ = . . . Н·м	G = . . . ± . . . Н·м
Момент инерции цилиндра со спицей	$I_{0\text{гр}}$ = ... кг·м^2	I_0 = ... ± . . кг·м^2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА М-13
ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

4. Описание установки и методика проведения эксперимента

Устройство лабораторной установки показано на рис. 2б. На основании 1, оснащенном четырьмя ножками с регулируемой высотой, расположена колонка 2. На колонке при помощи прижимных винтов закреплены кронштейны 3 и 4. Кронштейны имеют зажимы 5 и 6, служащие для закрепления и натягивания стальной проволоки, на которой подвешена рамка 7. На вертикальных направляющих рамки 7 размещаются симметрично пары грузов 8 и 9 в виде дисков с известными массой и геометрическими размерами. Исследуемое твердое тело 10 закрепляется в рамке при помощи подвижной балки 11, которая перемещается по направляющим между неподвижными балками. Подвижная балка фиксируется гайками на зажимных втулках 12.

Стальная проволока обладает крутильной жесткостью G. Поэтому рамка с грузами может совершать крутильные колебания вокруг оси проволоки.

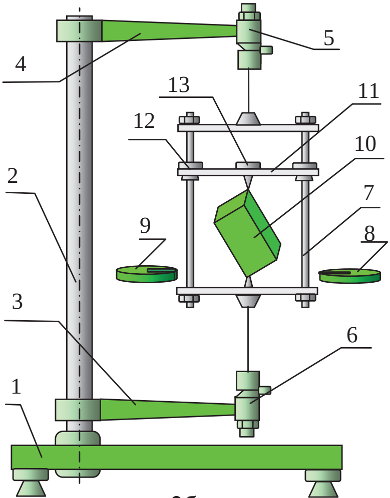


Рис. 2б

Если повернуть рамку вокруг этой оси на некоторый малый угол φ от положения равновесия, то на нее начнет действовать возвращающий момент силы относительно этой оси

$$M = -G\varphi$$

где коэффициент пропорциональности G называется крутильной жесткостью проволоки. В этом случае уравнение динамики вращательного движения (см. (2))

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -G\varphi$$

можно привести к следующему уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{G}{I}}$ – циклическая частота крутильных колебаний, I – момент инерции рамки (включая грузы или исследуемое тело) относительно оси вращения. Соответственно период крутильных колебаний равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{G}}. \qquad (6б)$$

Момент инерции I удобно записать в виде $I = I_0 + I_{\text{гр}}$, где I_0 и $I_{\text{гр}}$ – моменты инерции рамки и грузов (8 и 9) соответственно. Если вместо грузов в рамке закрепляется исследуемое тело, то $I = I_0 + I_{\text{Т}}$, где $I_{\text{Т}}$ – момент инерции исследуемого тела относительно оси вращения рамки. Формула (6б) позволяет по экспериментальным значениям периода крутильных колебаний рассчитать момент инерции исследуемого тела. Предварительно необходимо определить момент инерции самой рамки I_0 и крутильную жесткость проволоки G. Для этого достаточно провести измерения периода крутильных колебаний системы при нескольких значениях $I_{\text{гр}}$, которые можно рассчитать по формуле

$$I_{\text{гр}} = \nu I_{1\text{гр}} \tag{7б}$$

где ν – четное количество дисковых грузов одинакового радиуса r и массы m, $I_{1\text{гр}} = (I_{0\text{гр}} + m a_0^{\,2})$, $I_{0\text{гр}} = \dfrac{1}{2} m r^2$ – момент инерции одного груза относительно оси, проходящей через его центр масс и параллельной оси вращения рамки, a_0 – расстояние между этими осями (см. теорему Штейнера (5)). Тогда формула (6б) приобретает следующий вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + \nu I_{1\text{гр}}}{G}}\,. \tag{8б}$$

Измеряя T при двух значениях момента инерции $I_{\text{гр}}$ можно составить систему из двух уравнений и, решив ее, рассчитать значения двух неизвестных величин I_0 и G. Чтобы уменьшить ошибку в экспериментальных значениях проводят несколько измерений T_i при различных значениях $I_{\text{гр}}$. Так как в эксперименте изменяется количество грузов ν и измеряется соответствующий период колебаний, то формулу (8б) удобно представить в виде **линейной** зависимости T^2 от ν:

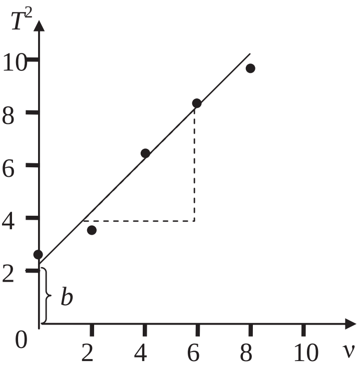


Рис. 3б

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I_{1\text{гр}}}{G}\nu + \frac{4\pi^2}{G} I_0\,. \tag{9б}$$

Это уравнение аналогично математической записи уравнения прямой линии $y = ax + b$, где $y = T^2$, $x = \nu$. Его можно использовать для определения крутильной жесткости проволоки и момента инерции рамки без грузов I_0. Для этого по результатам эксперимента строится график зависимости T^2 от ν. Пример такого графика приведен на рис. 3б. Угловой коэффициент полученной прямой связан с крутильной жесткостью проволоки G соотношением:

$$a = \frac{4\pi^2 I_{1\text{гр}}}{G}\,.$$

Рассчитав его по полученному графику как отношение катетов вспомогательного прямоугольного треугольника (с учетом масштаба и размерностей; подробные пояснения приведены на стенде в лаборатории) можно получить крутильную жесткость проволоки по формуле

$$G = \frac{4\pi^2 I_{1\text{гр}}}{a}. \tag{10б}$$

Измерив по графику величину b, можно рассчитать момент инерции рамки без грузов по формуле:

$$I_0 = \frac{bG}{4\pi^2}. \tag{11б}$$

Такая процедура требует от экспериментатора определенных навыков, и ее результат существенно зависит от субъективных факторов. Одним из аналитических методов, позволяющих существенно повысить точность расчетов и оценить ошибку измерения, является **метод наименьших квадратов (МНК)**. Соответствующие расчётные формулы представлены на стенде в лаборатории кафедры физики. При проведении расчётов можно использовать готовые программы, размещенные на рабочем столе лабораторного компьютера в папке «Обработка результатов ЛР».

5. Порядок выполнения работы

5.1. Определение крутильной жесткости проволоки и момента инерции рамки

5.1.1. Получите у лаборанта дополнительные грузы в виде дисков и груз с неизвестным моментом инерции. Запишите над табл. 3б значения радиуса дисковых грузов r = 0,025 м, массы одного груза m = 0,15 кг и расстояние между осями a_0 = 0,055 м.

5.1.2. Повернув рамку без грузов на угол 30° ÷ 45° вокруг оси проволоки, приведите систему в состояние крутильных колебаний. Измерьте по секундомеру (удобно по секундомеру смартфона) полное время 10 периодов колебаний t_1. Рассчитайте и запишите полученное при отсутствии на рамке грузов ($\nu_1 = 0$) значение периода колебаний $T_1 = t_1/10$ в табл. 3б.

5.1.3. Поместите на направляющие рамки симметрично пару грузов ($\nu_2 = 2$). Измерьте время 10 колебаний, рассчитайте период колебаний T_2 и запишите полученное значение в табл. 3б.

5.1.4. Проведите аналогичные измерения периодов колебаний системы при других количествах симметрично расположенных дополнительных грузов ($\nu_3 = 4$, $\nu_4 = 6$, $\nu_5 = 8$, $\nu_6 = 10$). Запишите результаты в табл. 3б.

5.2. Определение момента инерции твердого тела I_T относительно закрепленной оси

5.2.1. Снимите с направляющих все дополнительные грузы и закрепите исследуемое твердое тело 10 в рамке. Для этого отверните зажимные втулки 12 и передвиньте подвижную балку 11 до фиксации твердого тела (рис. 2б). Закрутите зажимные втулки для фиксации балки 11. Закрепите окончательно твердое тело винтом 13 (для исключения его проворачивания во время колебаний). Ориентацию тела согласуйте с преподавателем (предпочтительно с наибольшим моментом инерции). Измерьте по секундомеру полное время $N = 10$ периодов колебаний t_1. Запишите полученное значение периода колебаний $T_1 = t_1/10$ в табл. 4б. Повторите измерения еще 5 раз с записью результатов $T_2 \div T_6$ в табл. 4б.

6. Обработка результатов измерений и оформление отчёта

6.1. Определение крутильной жесткости проволоки и момента инерции рамки

6.1.1. Рассчитайте момент инерции одного дискового груза относительно оси вращения системы $I_{1гр} = I_{0гр} + ma_0^2 = \frac{1}{2}mr^2 + ma_0^2$.

6.1.2. Рассчитайте и запишите с разумным округлением в соответствующие ячейки табл. 3б значения $y_i = T_i^2$.

6.1.3. Выбрав удобный масштаб, нанесите значения экспериментальных точек на координатную плоскость T^2 от ν. Постройте график зависимости $T^2(\nu)$, проведя прямую линию вида $y = ax + b$ так, чтобы экспериментальные точки были от нее по разные стороны на минимальных расстояниях. Произведите измерения величин момента инерции рамки без грузов и крутильной жесткости проволоки графическим методом (см. пояснения к рис. 3б и формулы (10б) и (11б)). Запишите в табл. 5б полученные результаты как $a_{гр}$, $b_{гр}$, $I_{0гр}$ и $G_{гр}$.

Замечание: последующие расчеты п.п.6.1.4-6.1.6 можно существенно упростить, если (по согласованию с преподавателем) использовать возможности работы с таблицами в Microsoft Excel. Для этого необходимо открыть папку «Обработка результатов ЛР», расположенную на рабочем столе лабораторного компьютера, и открыть файл «Расчет y = ax + b МНК.xls». Затем руководствоваться приведенными в файле пояснениями. В этом случае последние три столбца в табл. 3б не заполняются.

6.1.4. Рассчитайте x_i^2, y_i^2, $x_i y_i$ и запишите результаты без округления в оставшиеся столбцы табл. 3б.

6.1.5. Произведите суммирование величин в каждом из четырех последних столбцов табл. 3б ($\sum_i y_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i y_i^2$ и $\sum_i x_i y_i$) и запишите результаты в последней строке.

6.1.6. Рассчитайте значения a, b, σ_a и σ_b методом наименьших квадратов по формулам, представленным на стенде в лаборатории кафедры физики.

6.1.7. Рассчитайте погрешности Δa и Δb (коэффициент Стьюдента $t_{P,n}$ определите при значении надежности $P = 0{,}8$ (80%)). Результаты запишите в табл. 5б в стандартной форме $a \pm \Delta a$, $b \pm \Delta b$. При записи результатов необходимо округлить величину ошибки до одной – двух значащих цифр. Последние цифры значений величин a и b должны быть того же разряда, что и в их погрешности.

6.1.8. Рассчитайте по формулам (10б) и (11б) значения G и I_0.

6.1.9. Рассчитайте относительные погрешности измерения G и I_0 по формулам

$$\delta_G = \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta a}{a}, \qquad \delta_{I_0} = \frac{\Delta I_0}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2}$$

и соответствующие погрешности $\Delta G = \delta_G G$ и $\Delta I_0 = \delta_{I_0} I_0$. Запишите полученные результаты в табл. 5б в стандартной форме $G \pm \Delta G$ и $I_0 \pm \Delta I_0$.

Замечание: ошибками в значениях величин m, r и a_0 можно пренебречь.

6.2. Определение момента инерции твердого тела относительно закрепленной оси

6.2.1. По данным табл. 4 рассчитайте среднее значение периода колебаний $\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_i T_i$, где n = 6 – число измерений. Запишите результат без округления в соответствующую ячейку табл. 4б.

6.2.2. Рассчитайте момент инерции твердого тела I_T относительно выбранной оси с помощью формулы (6б) с учетом равенства $I_T = I - I_0$

$$I_T = \frac{\bar{T}^2 G}{4\pi^2} - I_0.$$

Замечание: последующие расчеты по п.п. 6.2.3-6.2.4 можно существенно упростить, если (по согласованию с преподавателем) использовать возможности работы с таблицами в Microsoft Excel. Для этого необходимо войти в директорию «Обработка результатов ЛР», расположенную на рабочем столе лабораторного компьютера, и открыть файл «Расчет стандартной ошибки.xls». Затем ввести в ячейки таблицы полученные в эксперименте величины $x_i = T_1 \div T_6$. Запишите результат компьютерного расчета в лабораторный журнал.

6.2.3. Рассчитайте $T_i - \bar{T}$, $(T_i - \bar{T})^2$ и запишите результаты без округления в соответствующие столбцы табл. 4б.

6.2.4. Рассчитайте среднеквадратичную погрешность измерения периода колебаний по формуле

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{6}(T_i - \bar{T})^2}.$$

Рассчитайте погрешность измерения периода колебаний $\Delta T = t_{P,n}\ \sigma_{\bar{T}}$, где коэффициент Стьюдента $t_{P,n}$ определите при значении надежности P = 0,8 (80%). Запишите полученное значение с точностью не более двух значащих цифр в табл. 4б.

6.2.5. Рассчитайте погрешность косвенного измерения момента инерции твердого тела по формуле

$$\Delta I_T = \sqrt{\left(\frac{\bar{T}\cdot G}{2\pi^2}\right)^2 \Delta T^2 + \left(\frac{\bar{T}^2}{4\pi^2}\right)^2 \Delta G^2 + \Delta I_0^2}\ .$$

Запишите полученный результат в табл. 5б в стандартной форме $I_T \pm \Delta I_T$

6.2.6. По полученным результатам эксперимента сделайте выводы.

Таблица 3б

Радиус дисковых грузов r = 0,025 м, масса одного груза m = 0,15 кг, расстояние между осями a_0 = 0,055 м.

i	$x_i = \nu_i$	T_i, с	$y_i = T^2_{кр,i}$, с^2	x_i^2	y_i^2, с^4	$x_i y_i$, с^2
1	0					
2	2					
3	4					
4	6					
5	8					
6	10					
Суммы	Σx_i = 30		Σy_i =	$\sum_i x_i^2 =$	$\sum_i y_i^2 =$	$\sum_i x_i y_i =$

Таблица 4б

n	T_i, с	$T_i - \bar{T}$, с	$(T_i - \bar{T})^2$, с^2
1			
2			
3			
4			
5			
6			
	$\sum T_i = \ldots$		$\sum \left(T_i - \bar{T}\right)^2 = \ldots$
	$\bar{T} = \ldots$		$\Delta T = t_{P,n}\sigma_{\bar{T}} = \ \ldots$ с

Таблица 5б

Графический метод	
Коэффициент наклона	$a_{гр}$ = . . . (с/м)^2
у-пересечение	$b_{гр}$ = . . . с^2
Крутильная жесткость проволоки	$G_{гр}$ = . . . н·м
Момент инерции рамки	$I_{0гр}$ = ... кг·м^2
Метод наименьших квадратов	
Коэффициент наклона	a = . . . ± . . . (с/м)^2
у-пересечение	b = . . . ± . . . с^2
Крутильная жесткость проволоки	G = . . . ± . . . н·м
Момент инерции рамки	I_0 = ... ± . . кг·м^2
Момент инерции твердого тела	I_T = . . . ± . . . кг·м^2

ВОПРОСЫ ДЛЯ ДОПУСКА К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

I. Какие силы называются упругими?

2. Дайте определения момента силы и момента инерции тела.

3. Поясните роль момента инерции во вращательном движении.

4. Запишите формулу момента импульса твердого тела относительно оси.

5. Запишите уравнение динамики вращательного движения твердого тела в общем случае и применительно к лабораторной установке.

6. 0т каких параметров системы зависит период крутильных колебаний в данной лабораторной работе? Каким образом можно регулировать период крутильных колебаний в лабораторной установке?

7. Объясните, каким образом экспериментально определяется крутильная жесткость? В чем заключается физический смысл этого параметра?

ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высшая школа (или другие издательства), 2012 – 2017 г.г.

2. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 1. М.: Наука (или другие издательства), 2012 – 2017 г.г.

Содержание