

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

---

А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев

# МАТЕМАТИКА

**ПОСОБИЕ**

по выполнению лабораторных работ

*для студентов I курса  
направления 23.03.01  
очной формы обучения*

**Москва-2016**



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

---

**Кафедра высшей математики  
А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев**

# **МАТЕМАТИКА**

## **ПОСОБИЕ**

**по выполнению лабораторных работ**

*для студентов I курса  
направления 23.03.01  
очной формы обучения*

**Москва-2016**

ББК 51  
С17

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент О.Г. Илларионова

С17 Самохин А.В., Дементьев Ю.И.  
Математика. Пособие по выполнению лабораторных работ. - М.: МГТУ ГА, 2016. - 20 с.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» по учебному плану для студентов I курса направления 23.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 14.09.2016 г. и методического совета 13.10.2016 г.

## Лабораторная работа №1

### Линейная алгебра

В образце приведены все основные операции линейной алгебры и образец выполнения лабораторной работы.

Выполняйте индивидуальные задания из своего контрольного домашнего задания, пользуясь приведёнными здесь образцами.

> with(LinearAlgebra) : with(plots) :

Базовые операции с матрицами; вводим матрицы P, Q, R

> P := Matrix([[1, 2, 3], [3, 1, 2], [2, 3, 1]]);

Q := Matrix(3, 3, {(1, 1) = 0., (1, 2) = 1., (1, 3) = 1., (2, 1) = 0.,  
(2, 2) = 0., (2, 3) = 1., (3, 1) = 1., (3, 2) = 1., (3, 3) = 1.});

R := Matrix(3, 2, {(1, 1) = 1., (1, 2) = 1., (2, 1) = 2., (2, 2) = 1.,  
(3, 1) = 1., (3, 2) = 3.});

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q := \begin{bmatrix} 0. & 1. & 1. \\ 0. & 0. & 1. \\ 1. & 1. & 1. \end{bmatrix}$$

$$R := \begin{bmatrix} 1. & 1. \\ 2. & 1. \\ 1. & 3. \end{bmatrix}$$

> Determinant(P)

18

>  $\frac{1}{P}$ ; P. $\frac{1}{P}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{bmatrix}$$

4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> P<sup>2</sup> - P

$$\begin{bmatrix} 12 & 11 & 7 \\ 7 & 12 & 11 \\ 11 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

> Q.R

$$\begin{bmatrix} 3. & 4. \\ 1. & 3. \\ 4. & 5. \end{bmatrix}$$

> А вот так перемножать нельзя! Диагностируется ошибка

> R.Q

Error, (in LinearAlgebra:-Multiply) first matrix column dimension (2) <> second matrix row dimension (3)

> Характеристическое уравнение и его решение;

> Determinant(P - x); fsolve(%, x);

$$-x^3 + 3x^2 + 15x + 18$$

6.

Собственные числа и собственные вектора

> with(RealDomain)

> use RealDomain in Eigenvectors(Q) end use

$$\begin{bmatrix} 2.14789903570479 + 0. I \\ -0.573949517852394 + 0.368989407481804 I \\ -0.573949517852394 - 0.368989407481804 I \end{bmatrix}, [$$

$$[0.526062999881448 + 0. I, 0.158836098085991$$

$$+ 0.540780260472587 I, 0.158836098085991$$

$$- 0.540780260472587 I],$$

$$[0.358947411384288 + 0. I, -0.682327803828019 + 0. I,$$

$$-0.682327803828019 - 0. I],$$

$$[0.770982798781043 + 0. I, 0.391621714024374$$

$$- 0.251771732042862 I, 0.391621714024374$$

$$+ 0.251771732042862 I]]$$

> with(Student[LinearAlgebra])

Метод Гаусса; пошаговые операции со строками

> GaussianEliminationTutor(P)

$$> \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

> GaussianEliminationTutor(P, v)

$$> \mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Гауссов результат для  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

> LinearSolve(A, b)

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} + t_3 \\ \frac{8}{3} - 2t_3 \\ -t_3 \end{bmatrix}$$

> GaussianElimination( $\langle \mathbf{A} | \mathbf{b} \rangle$ )

6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> ReducedRowEchelonForm( $\langle A|b \rangle$ )

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Команда для нахождения ранга

> Rank(A)

2

Сохраните результаты работы в формате .mw, а также экспортируйте в формате .rtf для написания отчёта.



## Лабораторная работа №2 Математический анализ

В образце приведены все основные операции математического анализа и образец выполнения лабораторной работы.

Выполняйте индивидуальные задания из своего контрольного домашнего задания, пользуясь приведёнными здесь образцами.

restart; with(plots);

> Вычисление пределов

>  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

0

>  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

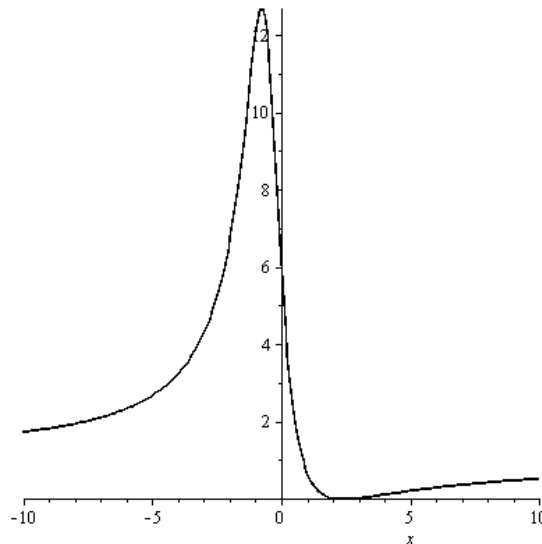
$\infty$

>  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x}$

0

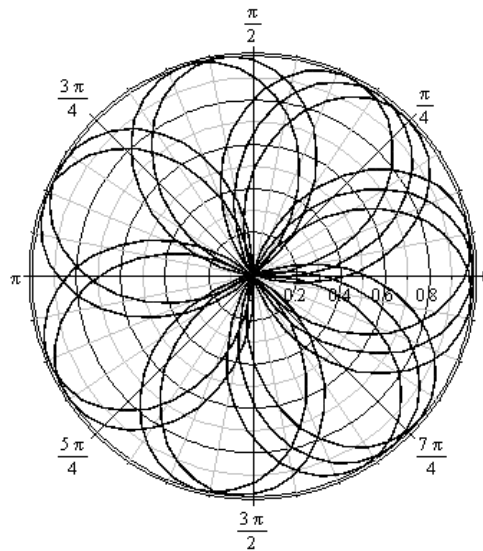
> Построение графиков в декартовой системе координат

>  $\text{plot}\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1}, x = -10..10\right)$



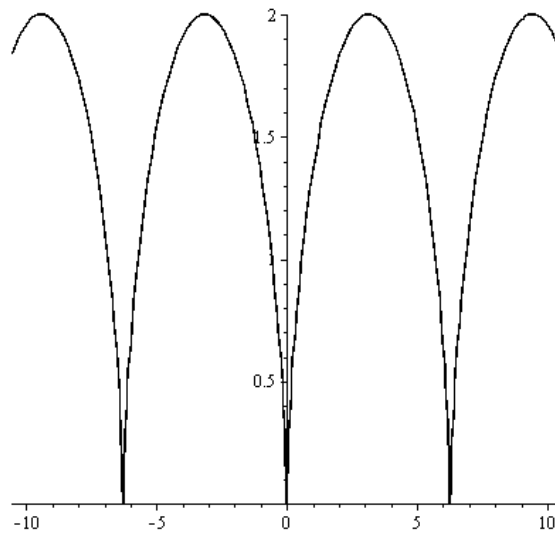
> Построение графиков в полярной системе координат

>  $\text{plot}([\sin(\sqrt{2} t), t, t = 0..12 \pi], \text{coords} = \text{polar}, \text{axiscoordinates} = \text{polar})$



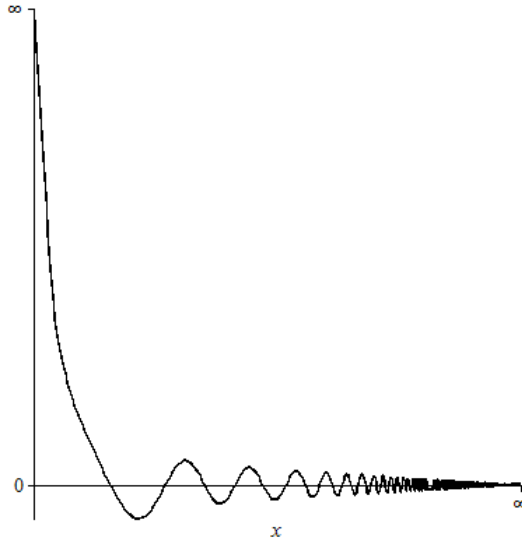
> Построение параметрических графиков

> `plot([t - sin(t), 1 - cos(t), t = -10 .. 10])`



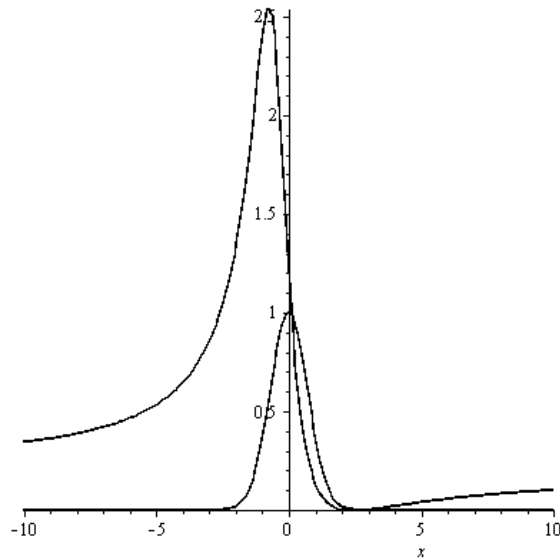
> График на бесконечном интервале

> `plot( $\frac{\cos(x^2)}{x}$ , x = 0 .. ∞)`



> Два графика в одних осях

> `plot`  $\left( \left[ \frac{x^2 - 5x + 6}{5(x^2 + x + 1)}, e^{-x^2} \right], x = -10 \dots 10 \right)$



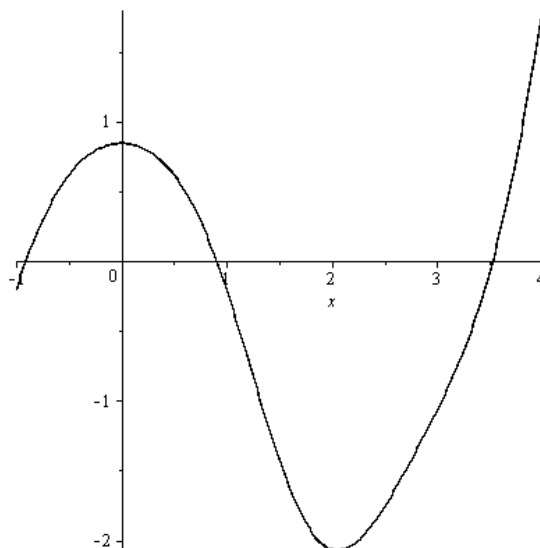
> Вычисление производных

>  $\frac{d}{dx} (x \sin(\cos(x)))$

$$\sin(\cos(x)) - x \cos(\cos(x)) \sin(x)$$

> График производной

> `plot`(%, x = -1 ..4)



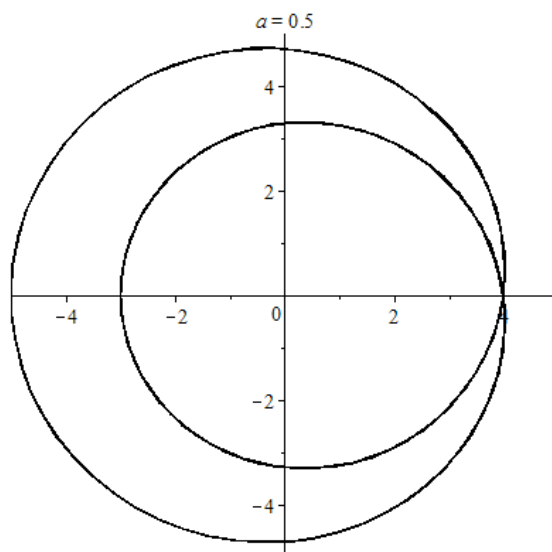
> Нули производной

> `fsolve('%%' = 0, x)`

`-0.9044882794`

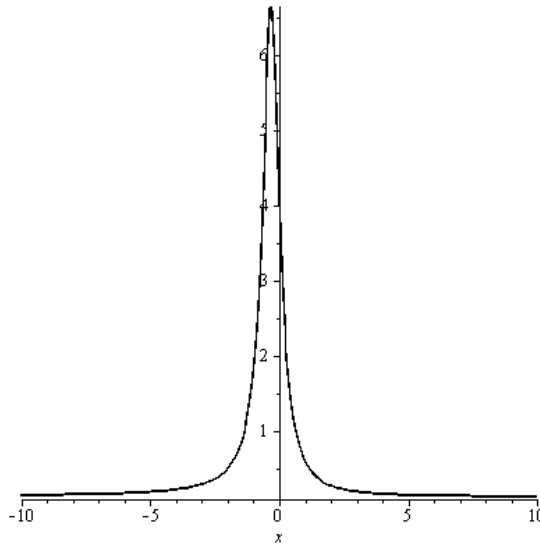
> Анимация графика в полярных координатах

> `animate(plot, [sin(t a) + 4, t = -20 ..20, coords = polar], a = 0.5  
..300)`



> График с исследованием

> `plot` $\left(\frac{1x^2 + 0x + 8}{8x^2 + 5x + 2}, x = -10 ..10\right)$



> Первая производная

$$\begin{aligned} > \frac{d}{dx} \left( \frac{1x^2 + 0x + 8}{8x^2 + 5x + 2} \right) \\ & \frac{2x}{8x^2 + 5x + 2} - \frac{(x^2 + 8)(16x + 5)}{(8x^2 + 5x + 2)^2} \end{aligned}$$

> Вторая производная

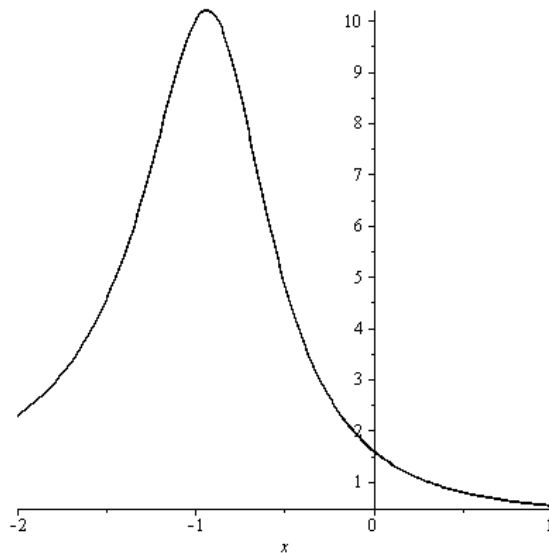
$$\begin{aligned} > \frac{d}{dx} \left( \frac{2x}{8x^2 + 5x + 2} - \frac{(x^2 + 8)(16x + 5)}{(8x^2 + 5x + 2)^2} \right) \\ & \frac{2}{8x^2 + 5x + 2} - \frac{4x(16x + 5)}{(8x^2 + 5x + 2)^2} + \frac{2(x^2 + 8)(16x + 5)^2}{(8x^2 + 5x + 2)^3} \\ & - \frac{16(x^2 + 8)}{(8x^2 + 5x + 2)^2} \end{aligned}$$

> Приближенное решение уравнения

$$\begin{aligned} > \text{fsolve} \left( \frac{2 \cdot 1}{8x^2 + 5x + 2} - \frac{4x(16x + 5)}{(8x^2 + 5x + 2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{2(x^2 + 8)(16x + 5)^2}{(8x^2 + 5x + 2)^3} - \frac{16(x^2 + 8)}{(8x^2 + 5x + 2)^2} = 0, x \right) \\ & -0.09244641227 \end{aligned}$$

> Еще пример

$$> \text{plot} \left( \frac{2x^2 + 8}{5x^2 + 9x + 5}, x = -2..1 \right)$$



> Производная

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2x^2 + 8}{5x^2 + 9x + 5} \right) = \frac{4x}{5x^2 + 9x + 5} - \frac{(2x^2 + 8)(10x + 9)}{(5x^2 + 9x + 5)^2}$$

> Точные нули производной

> solve(% = 0, x)

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{61}, \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{61}$$

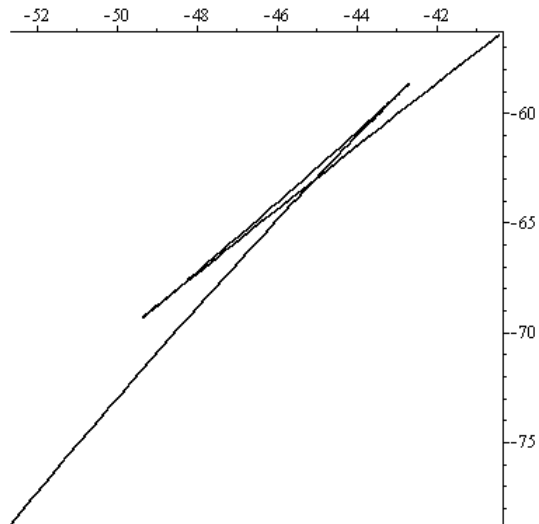
> Численное значение

> evalf(%)

$$4.270083225, -0.936749891$$

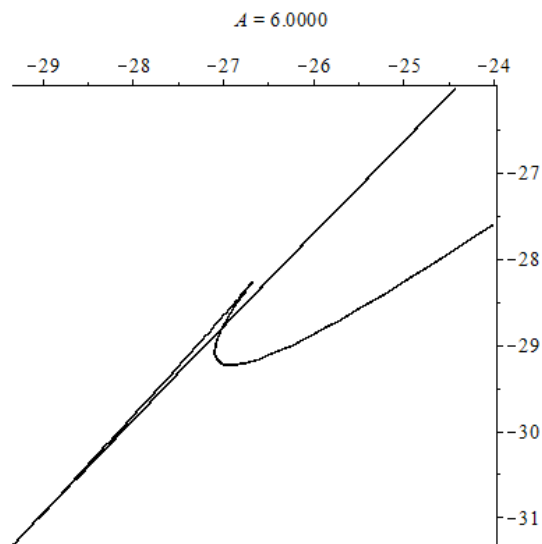
> Примеры заузленных параметрических кривых (надо подбирать диапазон вблизи экстремальных точек и охватывающие их все!)

> plot( [ [ ∫(t - 4) (t - 2) (t - 8) dt, ∫(t - 4) (t - 2) (t - 11) dt, t = 1 ..5.5 ] ] )



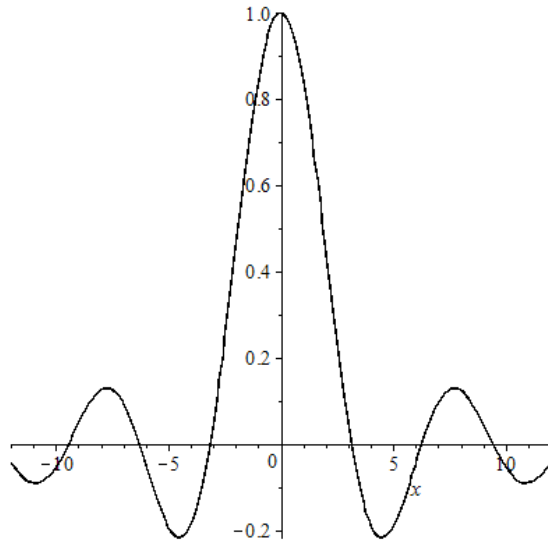
> Анимация прохождения особых точек

> `animate(plot, [[ [ [ [ (t - 4) (t - 2) (t - 5) dt, [ (t - 4) (t - 2) (t - 5.3) dt, t = 1 ..A ] ] ], A = 1 ..6, frames = 150)`

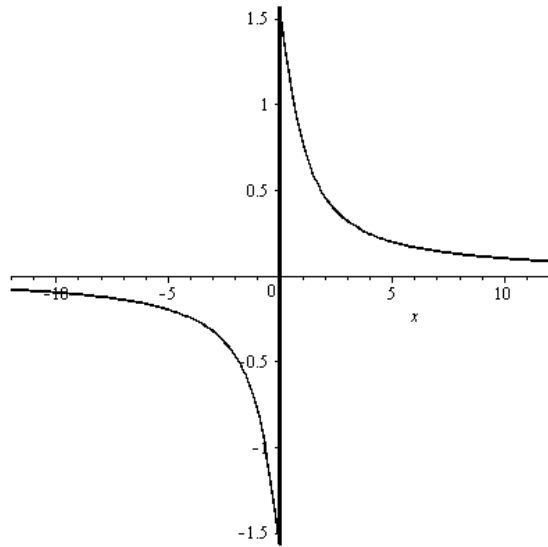


> Графики с разрывами

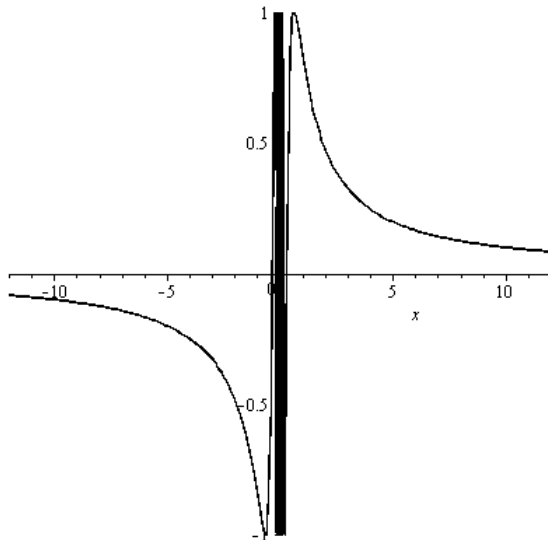
> `plot( sin(x)/x, x = -12 ..12 )`



> plot( $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ , x = -12 ..12)



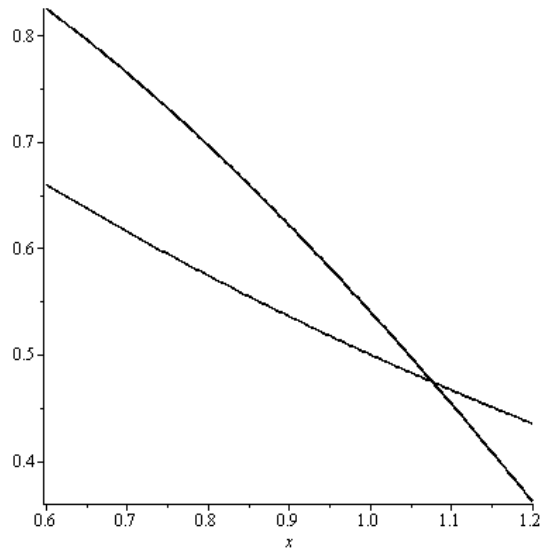
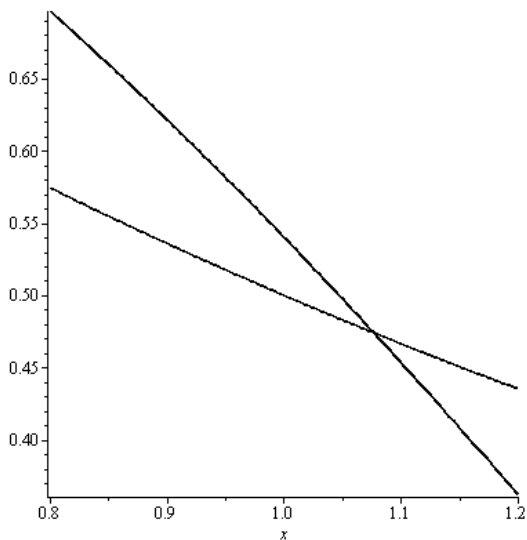
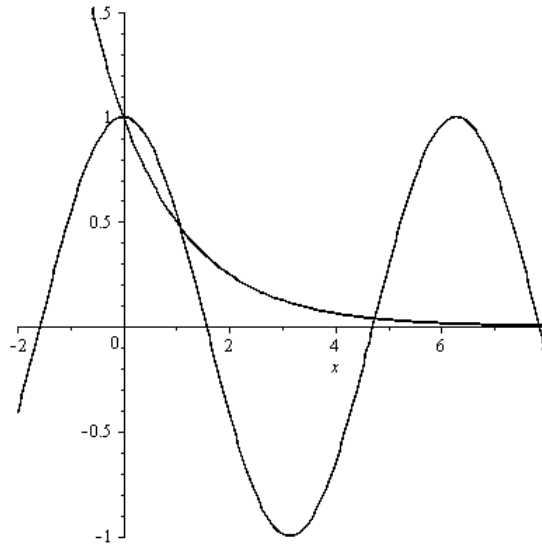
> plot( $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , x = -12 ..12)

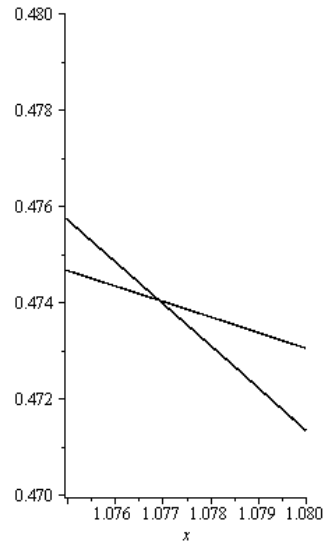
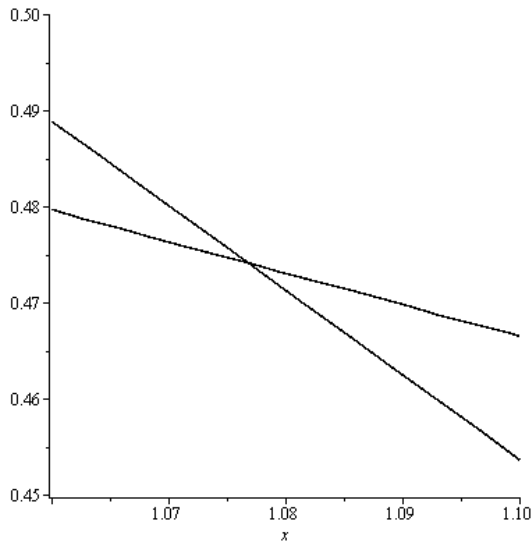




> Графическое решение уравнений (в последующих графиках уменьшаем диапазон вокруг первого положительного корня)

```
> plot([cos(x), 2-x], x = -2 ..8); plot([cos(x), 2-x], x = 0.8 ..1.2);
plot([cos(x), 2-x], x = 0.6 ..1.2); plot([cos(x), 2-x], x = 1.06 ..1.1, 0.45 ..0.5);
plot([cos(x), 2-x], x = -2 ..8); plot([cos(x), 2-x], x = 0.8 ..1.2);
plot([cos(x), 2-x], x = 0.6 ..1.2); plot([cos(x), 2-x], x = 1.06
..1.1, 0.45 ..0.5); plot([cos(x), 2-x], x = 1.075 ..1.08, 0.47
..0.48, scaling = constrained)
```





> Неопределенные интегралы

$$\begin{aligned}
 > \int \frac{x^4}{x^3 + 1} dx \\
 & \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} (2x - 1) \sqrt{3}\right) \\
 & \quad + \frac{1}{3} \ln(x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 > \int \sin(x)^2 \cos(x)^3 dx \\
 & -\frac{1}{5} \sin(x) \cos(x)^4 + \frac{1}{15} \cos(x)^2 \sin(x) + \frac{2}{15} \sin(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 > \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx \\
 & \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} (x-1) (\sqrt{x^2-1} + \ln(x + \sqrt{x^2-1}))}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 > \int e^x \sin(3x) dx \\
 & -\frac{3}{10} e^x \cos(3x) + \frac{1}{10} e^x \sin(3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 > \int x^3 \sin(2x) dx \\
 & -\frac{1}{2} x^3 \cos(2x) + \frac{3}{4} x^2 \sin(2x) - \frac{3}{8} \sin(2x) + \frac{3}{4} \cos(2x) x
 \end{aligned}$$

$$> \text{convert}\left(\frac{x^4}{x^3 + 1}, \text{parfrac}\right)$$

$$x + \frac{1}{3} \frac{-x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{3(x + 1)}$$

$$> \text{normal}\left(x + \frac{-x - 1}{3(x^2 - x + 1)} + \frac{1}{3(x + 1)}, \text{expanded}\right)$$

$$\frac{x^4}{x^3 + 1}$$

> Определенные интегралы

$$> \int_1^4 \frac{x^4}{x^3 + 1} dx$$

$$\frac{15}{2} + \frac{1}{18} \sqrt{3} \pi - \frac{1}{3} \ln(2) - \frac{1}{6} \ln(13)$$

$$- \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{7}{3} \sqrt{3}\right) + \frac{1}{3} \ln(5)$$

> evalf(%)

6.913383214

$$> \int_1^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx$$

$$\frac{1}{9} \sqrt{3} \pi + \frac{1}{3} \ln(2)$$

> evalf(%)

0.8356488485

$$> \int_{-1}^4 \frac{x^4}{x^3 + 1} dx$$

$\infty$

$$> \int_{-2}^4 \frac{x^4}{x^3 + 1} dx$$

undefined

> Дифференциальные уравнения

> with(DEtools);

Решение уравнения 1-го порядка

> dsolve({D(y)(x) = -2 y(x)}, y(x))

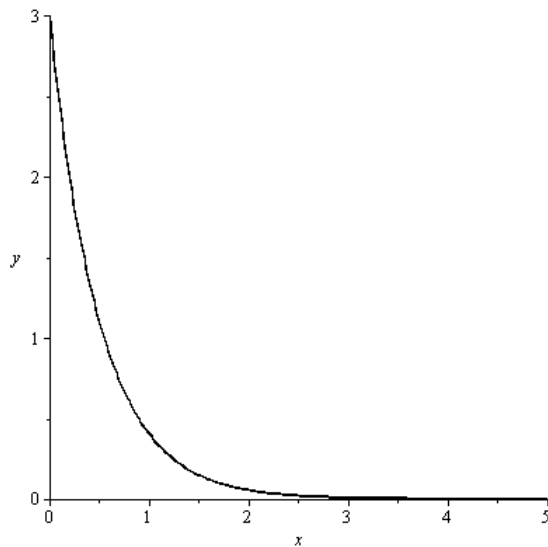
$$\{y(x) = \_C1 e^{-2x}\}$$

Численное решение уравнения 1-го порядка и график решения

```
> q := dsolve( {y(0) = 3, D(y)(x) = -2 y(x)}, y(x), type = numeric)
      q := proc(x_rkf45) ... end proc
```

```
> dsolve( {y(0) = 3, D(y)(x) = -2 y(x)}, y(x))
      y(x) = 3 e-2 x
```

```
> odeplot(q, [x, y(x)], 0..5)
```

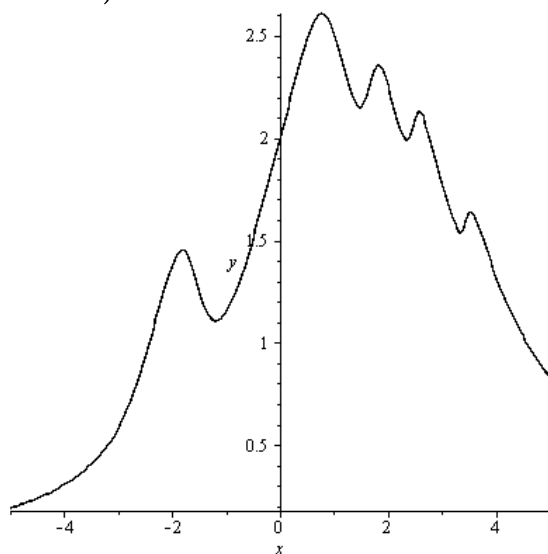


Решение уравнения 1-го порядка и фазовый портрет

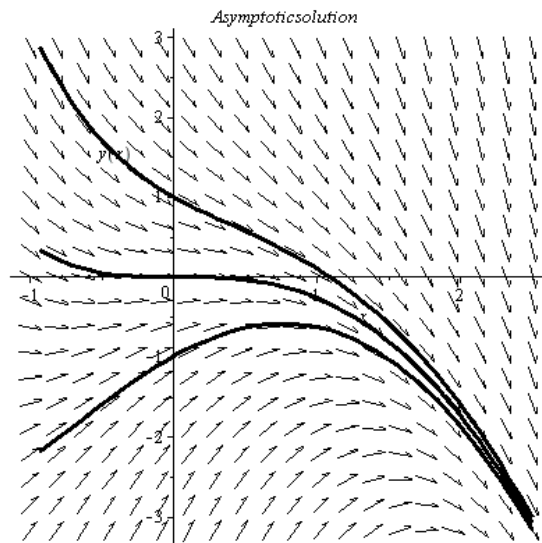
```
> p := dsolve( {y(0) = 2, D(y)(x) = cos(x^2 y(x))}, y(x), type
      = numeric)
```

```
      p := proc(x_rkf45) ... end proc
```

```
> odeplot(p, [x, y(x)], -5..5)
```



```
> phaseportrait(D(y)(x) = -y(x) - x^2, y(x), x = -1 ..2.5, [[y(0)
= 0], [y(0) = 1], [y(0) = -1]], title = 'Asymptotic solution',
linecolor = [gold, black, blue])
```



Решение уравнения 2-го порядка

```
> ode := x^2 \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) \right) + \sin(x) y(x) = 1
```

$$\text{ode} := x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + \sin(x) y(x) = 1$$

Решение в виде ряда

```
> dsolve( {ode, y(a) = Y_a, D(y)(a) = DY_a}, y(x), type = 'series')
```

```
> ode1 := \frac{d}{dx} y(x) + y^3 = \cos(x^2)
```

$$\text{ode1} := \frac{d}{dx} y(x) + y^3 = \cos(x^2)$$

```
> dsolve( {ode1, y(3) = 4}, y(x), type = 'series')
```

```
> evalf(%)
```

$$\begin{aligned} y(x) = & 4. - 64.91113026 (x - 3.) + 1556.630771 (x - 3.)^2 \\ & - 41754.58225 (x - 3.)^3 + 1.175691068 \cdot 10^6 (x - 3.)^4 \\ & - 3.404697525 \cdot 10^7 (x - 3.)^5 + O((x - 3.)^6) \end{aligned}$$

Сохраните результаты работы в формате .mw, а также экспортируйте в формате .rtf для написания отчёта.

---

Подписано в печать 10.11.2016 г.

Печать офсетная  
1,16 усл.печ.л.

Формат 60x84/16  
Заказ № 119

0,87 уч.-изд. л.  
Тираж 70 экз.

---

Московский государственный технический университет ГА  
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20  
Редакционно-издательские услуги ООО «Имидж-студия Арина»  
127051 Москва, М. Сухаревская пл., д. 2/4 стр.1