ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра прикладной математики
Т.В. Лоссиевская

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Функции нескольких переменных

ПОСОБИЕ
по выполнению практических занятий

для студентов I курса
направления 01.03.04
очной формы обучения

Москва-2015

ББК 517.2
Л 79

Рецензент д-р техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов

Лоссиевская Т.В.

Л 79 Математический анализ. Функции нескольких переменных: пособие по выполнению практических занятий. - М.: МГТУ ГА, 2015. - 68 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математический анализ» по учебному плану для студентов I курса направления 01.03.04 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 24.03.15 г. и методического совета 24.03.15 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Функции нескольких переменных и их свойства

В настоящем разделе дается справочный материал, касающийся дифференциальных свойств функций нескольких переменных (ФНП). Ради геометрической наглядности изложение ведется для функций двух переменных: *f*(*x*,*y*). В случае необходимости рассматриваются функции большего числа переменных.

1.1. Частные производные

Пусть функция *f*(*x*,*y*) определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 1.1. Полным приращением функции *f*(*x*,*y*) в точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy, называется разность $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ и обозначается Δf.

Таким образом,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{1.1}$$

<u>Замечание.</u> Точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, где определена функция *f*(*x*,*y*).

Определение 1.2. Частным приращением функции *f*(*x*,*y*) по переменной *x*, соответствующим приращению Δx, называется разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ и обозначается $\Delta_x f$.

Таким образом,

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \tag{1.2}$$

Аналогично определяется частное приращение функции *f*(*x*,*y*) по переменной *y*.

Определение 1.3. Пусть функция *f*(*x*,*y*) определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_{0,} y_0)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$, то он называется частной производной функции *f*(*x*,*y*) по переменной *x* в точке $M_0(x_{0,} y_0)$ и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_{0,} y_0)$ или $f'_x(x_0 y_0)$.

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Аналогично определяется частная производная функции *f*(*x*,*y*) по переменной *y*.

Из определения 1.3 следует, что частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ вычисляется при фиксированном *y*, т.е. она вычисляется так же, как производная функции $\varphi(x) \equiv f(x, y)$ одной переменной *x*, а *y* является параметром.

1.2. Дифференцируемость ФНП в точке

Определение 1.4. Функция $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_{0,} y_0)$, если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \tag{1.4}$$

где величины *A* и *B* не зависят от Δx и Δy.

Замечание. Всякая функция, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, имеет полное приращение, но не для всякой функции ее полное приращение представимо в виде (1.4), т.е. не всякая функция дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 1.1. Доказать, что функция $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ недифференцируема в точке (0,0).

Доказательство. Предположим противное: существуют величины *A* и *B*, независящие от Δx и Δy, такие, что имеет место равенство

$$\Delta f \equiv f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho), \text{ см. (1.4).}$$

Так как $f(0,0) = 0$, то отсюда получаем, что

$$\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho). \tag{1.5}$$

В (1.5) положим $\Delta y = \Delta x$. Тогда

$$(\Delta x)^{-\frac{1}{3}} = (A + B) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}. \tag{1.6}$$

В (1.6) переходим к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим
$\infty = (A + B) + 0,$ что невозможно.

Теорема 1.1 (необходимое условие дифференцируемости функции в точке). Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 1.2 (необходимое условие дифференцируемости функции в точке). Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке существуют обе частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и имеет место равенство

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\rho), \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{1.7}$$

Замечание. Существование обеих частных производных в точке не является достаточным условием дифференцируемости функции $f(x,y)$ в этой точке. Например, функция $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ недифференцируема в точке (0,0) (см. пример 1.1), но $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (доказать).

Теорема 1.3 (достаточное условие дифференцируемости функции в точке). Если обе частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывны в самой точке M_0, то функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Замечание. Непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в этой точке.

Пример 1.2. Доказать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

дифференцируема в точке (0,0), а ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ не являются непрерывными в этой точке.

Доказательство. 1. Так как

$\left|\Delta f\right| \equiv \left| f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)\right| \leq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \rho^2 = o(\rho)$, то функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (0,0).

2. Имеем $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$(x,y) \neq (0,0)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ не существует.

Следовательно, производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ не является непрерывной в точке (0,0).

1.3. Дифференциал

Определение 1.5. Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Дифференциалом функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (обозначается $df(x_0, y_0)$) называется линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если x и y независимые переменные, то положим по определению $\Delta x = x - x_0 = dx, \quad \Delta y = y - y_0 = dy.$ Тогда из (1.7) и определения 1.5 следует

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_o)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy, \tag{1.8}$$

или

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{1.8*}$$

1.4. Производная сложной функции

Теорема 1.4. Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $f(u,v)$ дифференцируема в точке $\tilde{M}(u_0, v_0)$, где $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Тогда сложная функция $f(u(x,y), v(x,y))$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и имеют место формулы

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.10}$$

Замечание 1. Теорема верна для любого количества переменных $x,y,z,\ldots$ и переменных $u,v,w,\ldots$, причем количество переменных $x,y,z,\ldots$ не обязательно совпадает с количеством переменных $u,v,w,\ldots$. Формулы для вычисления частных производных функции f естественным образом обобщаются на эти случаи.

Замечание 2.

а) Если $f = f(x,y)$, а $x = x(t)$, $y = y(t)$, то в результате имеем функцию одной переменной $f(x(t),y(t))$. Тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

В частности,

б) если $f = f(x,y)$, $y = y(x)$, то

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{1.11}$$

Производная $\dfrac{df}{dx}$, стоящая в левой части (1.11), называется полной производной функции $f(x,y)$ по переменной x. Отметим, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ – частная производная функции $f(x,y)$ по переменной x; вообще говоря, они не совпадают.

1.5. Инвариантность формы первого дифференциала

Инвариантность формы первого дифференциала заключается в том, что формула

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (1.8^*)$$

имеет место и тогда, когда x и y являются независимыми переменными, и тогда, когда x и y – некоторые функции; но в первом случае $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y,$ а во втором – dx и dy – дифференциалы соответствующих функций.

1.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть S – поверхность, заданная уравнением

$$F(x,y,z) = 0. \qquad (1.12)$$

Определение 1.6. Прямая называется касательной к поверхности S в точке $\tilde{M}_0(x_0, y_0, z_0),$ если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности S и проходящей через точку $\tilde{M}_0$.

Определение 1.7. Точка $\tilde{M}(x,y,z) \in S$ называется особой точкой поверхности S, если в этой точке $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ (см. (1.12)) или хотя бы одна из этих производных не существует.

Определение 1.8. Точка $\tilde{M}(x,y,z) \in S$ называется обыкновенной точкой поверхности S, если в точке $\tilde{M}$ существуют и непрерывны производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ и хотя бы одна из этих производных отлична от нуля.

Теорема 1.5. Все касательные прямые к поверхности в ее обыкновенной точке лежат в одной плоскости.

Определение 1.9. Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности S, проходящим через данную точку $\tilde{M}_0(x_0, y_0, z_0) \in S,$ называется касательной плоскостью к поверхности S в точке $\tilde{M}_0(x_0, y_0, z_0).$

Замечание. В особых точках поверхности может не существовать касательной плоскости. Например, вершина конуса является особой точкой и не имеет касательной плоскости.

Определение 1.10. Нормалью к поверхности в некоторой точке этой поверхности называется прямая, проходящая через указанную точку перпендикулярно касательной плоскости.

а) поверхность задана неявно: $F(x,y,z) = 0$ (см. (1.12)).

Точка поверхности $\tilde{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ $(F(x_0, y_0, z_0) = 0)$ не является особой, т.е. $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{M}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{M}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial F`}{\partial z}(\tilde{M}_0)\right)^2 > 0$. Нормальный вектор касательной плоскости в точке $\tilde{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид $\vec{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{M}_0), \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{M}_0), \frac{\partial F}{\partial z}(\tilde{M}_0)\right)$.

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{M}_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{M}_0)\,(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\tilde{M}_0)\,(z - z_0) = 0. \tag{1.13}$$

Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{M}_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{M}_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(\tilde{M}_0)}. \tag{1.14}$$

Напомним, что

$$F(x_{0,} y_0, z_0) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{M}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{M}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}(\tilde{M}_0)\right)^2 > 0.$$

б) Поверхность задана явно: $z = f(x, y), \quad (x, y) \in G \subset R^2$.

Нормальный вектор касательной плоскости в точке $\tilde{M}_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$ имеет вид: $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), -1\right)$. Следовательно,

уравнение касательной плоскости:

$$z - f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,(y - y_0), \tag{1.15}$$

канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - f(M_0)}{-1}. \tag{1.16}$$

1.7. Скалярное поле

Определение 1.11. Если каждой точке M области G ставится в соответствие число $U(M)$, то говорят, что в области G определено скалярное поле $U(M)$.

Область G (область определения скалярного поля) может быть на плоскости $(G \subseteq R^2)$, а может быть и в пространстве $(G \subseteq R^3)$. В первом случае скалярное поле называется плоским, во втором – пространственным.

Определение 1.12. Поверхностью уровня пространственного скалярного поля U(M) называется поверхность, на которой $U(M) = C$, C – константа.

Аналогично определяется линия уровня плоского скалярного поля.

Замечание. Понятия скалярного поля и функции двух (для плоского поля) и трех (для пространственного) переменных различны. Но как только введена система координат скалярное поле становится функцией соответствующих переменных.

1.8. Производная по направлению. Градиент

Определение 1.13. Пусть скалярное поле $U(M)$ определено в некоторой окрестности точки M_0, а из точки M_0 исходит луч l. Если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in l}} \frac{U(M) - U(M_0)}{|M\,M_0|} \equiv \frac{\partial U}{\partial l}(M_0), \tag{1.17}$$

то он называется производной скалярного поля $U(M)$ в точке M_0 в направлении l.

Пусть далее введена декартова прямоугольная система координат. В этом случае скалярное поле (пространственное) $U(M) \equiv U(x, y, z)$. Предполагается, что функция U(x,y,z) дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma,$$

или, короче,

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma, \tag{1.18}$$

где α, β, γ – углы, которые образует направление l с координатными осями.

Для плоского скалярного поля имеет место формула, аналогичная (1.18).

Определение 1.14. Градиентом скалярного поля называется вектор

$$\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \equiv \mathrm{grad}\,U. \tag{1.19}$$

Используя понятие градиента скалярного поля, формулу (1.18) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial l} = (\mathrm{grad}\,U, \vec{l}), \tag{1.20}$$

где $\vec{l}$ – единичный вектор в направлении l.

Инвариантное определение градиента

Определение 1.15. Градиентом скалярного поля называется вектор, направленный в сторону максимального возрастания поля, модуль которого равен производной поля в этом направлении.

Заметим, что градиент скалярного поля (если это ненулевой вектор) перпендикулярен поверхности (линии) уровня.

1.9. Производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, вообще говоря, являются функциями переменных x и y. Следовательно, можно поставить вопрос о существовании частных производных каждой из этих функций. Если они существуют, то употребляются следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx} \equiv f''_{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy} \equiv f''_{y^2}.$$

Производные f''_{x^2}, f''_{y^2} называются чистыми производными, а производные f''_{xy}, f''_{yx} – смешанными.

Аналогично можно рассматривать частные производные более высоких порядков (если они существуют).

<u>Замечание.</u> Производные $f''_{xy}(x,y)$ *и* $f''_{yx}(x,y)$, вообще говоря, могут быть неравны.

Пример 1.3. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Докажем, что $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Действительно, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ (доказать),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Тогда

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = 1,$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = -1.$$

Отсюда $f''_{yx}(0,0) \neq f''_{xy}(0,0)$.

Теорема 1.6. (о равенстве смешанных производных). Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в указанной окрестности производные f''_{xy} и f''_{yx}, непрерывные в точке M_0. Тогда

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

Эту теорему очевидным образом можно обобщить на любое количество переменных и на смешанные производные любого порядка.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что выполняются все условия теоремы о равенстве смешанных производных.

Определение 1.16. Дифференциалом *n*-го порядка функции $f(x,y)$ называется первый дифференциал от (*n* – 1)-го дифференциала этой функции:

$$d^n f = d(d^{n-1} f). \tag{1.21}$$

Определение *n*-го дифференциала индуктивно: первый дифференциал был определен ранее, второй определяется по формуле (1.21), далее, третий – по формуле (1.21) и т.д.

Если x и y – независимые переменные, то выражения для 2-го и 3-го дифференциалов следующие:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2, \tag{1.22}$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3. \tag{1.23}$$

Если формально ввести дифференциальный оператор $d = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}$,

то формулы (1.22) и (1.23) можно записать в виде

$$d^2 f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f, \tag{1.22*}$$

$$d^3 f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f. \tag{1.23*}$$

Обобщение формул (1.22*) и (1.23*) дает

$$d^n f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f. \qquad (1.24)$$

Оператор $\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^n$ раскрывается по формуле бинома Ньютона, причем $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-k} = \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}, \quad k = 0,1,\cdots,n,$ т.е.

$$d^n f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} (dx)^k (dy)^{n-k}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Замечание 1. Формула (1.24) очевидным образом обобщается на случай любого количества переменных.

Замечание 2. Для дифференциалов второго порядка и выше инвариантность формы не имеет места.

1.10. Формула Тейлора для ФНП

Теорема 1.7. Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до $(n + 1)$-го порядка включительно. Тогда в указанной окрестности для ее приращения $\Delta f \equiv f(x,y) - f(x_0, y_0)$ имеет место формула

$$\Delta f = \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + R_n(x,y), \qquad (1.25)$$

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x^*, y^*), \qquad (1.26)$$

где $M^*(x^*,y^*)$ – некоторая точка, лежащая на отрезке, соединяющем точки $M_0(x_0, y_0)$ *и* $M(x,y)$.

Остаток $R_n(x,y)$, представленный в виде (1.26), называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 1.8. Пусть выполняются условия теоремы 1.7. Тогда имеет место формула (1.25), где

$$R_n(x,y) = o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \qquad (1.27)$$

Остаток $R_n(x,y)$, представленный в виде (1.27), называется остаточным членом в форме Пеано.

1.11. Неявные функции

1°. Неявная функция одной переменной

Определение 1.17. Функция $y = y(x),\ x \in (a,b)$ называется неявной функцией, определяемой уравнением

$$F(x,y) = 0, \qquad (1.28)$$

если

$$F(x, y(x)) \equiv 0, \quad x \in (a,b). \qquad (1.29)$$

Замечание 1. Не всякую неявную функцию можно представить явно, т.е. в виде $y = y(x)$, где $y(x)$ – элементарная функция. Например, функции, заданные уравнениями $x + y = e^{xy}$ или $x^2y^3 = \ln(y^2+1)$, не выражаются через элементарные функции, т.е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y.

Пример 1.4. Уравнение

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad (1.30)$$

определяет две неявные функции

$$y_1(x) = +\sqrt{4-x^2}, \quad x \in [-2,2] \qquad (1.31)$$

и

$$y_2(x) = -\sqrt{4-x^2}, \quad x \in [-2,2] \qquad (1.32)$$

Чтобы выделить конкретную функцию ($y_1(x)$ или $y_2(x)$), необходимо указать значение y_0 для какого-либо $x_0 \in (-2,2)$: $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (-2,2)$. Например, условие $y(1) = +\sqrt{3}$ дает функцию $y_1(x)$, а условие $y(1) = -\sqrt{3}$ – функцию $y_2(x)$. Таким образом, чтобы получить функцию $y_1(x)$, функцию $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ (см. (1.28)) необходимо рассматривать в некоторой окрестности точки $M_1(1,\sqrt{3})$, а для получения функции $y_2(x)$ функцию $F(x,y)$ необходимо рассматривать в некоторой окрестности точки $M_2(1,-\sqrt{3})$. В таком случае говорят, что в некоторой окрестности точки $M_1(1,\sqrt{3})$ уравнение (1.30) определяет единственную неявную функцию (аналогично для точки $M_2(1,-\sqrt{3})$). Заметим, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_1) = 2\sqrt{3} \neq 0,\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_2) = -2\sqrt{3}) \neq 0.$

Рассмотрим уравнение (1.30) в некоторой окрестности точки $M_3(-2,0)$. Очевидно, что для <u>любой</u> достаточно малой окрестности точки M_3 каждому x согласно уравнению (1.30) соответствует два значения y, т.е. в этом случае уравнение (1.30) не определяет единственную неявную функцию $y = y(x)$ <u>ни на каком промежутке</u> (a,b), содержащем точку $x_0 = -2$. Заметим, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_3) = 0.$

Теорема 1.9. Пусть для функции $F(x,y)$, определенной в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_{0)}$, выполняются следующие условия:

а) в указанной окрестности существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$;

б) $F(x_0, y_0) = 0$;

в) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$

Тогда существует прямоугольник $K = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$, в котором уравнение $F(x,y) = 0$ определяет единственную неявную функцию $y = y(x)$, причем $y(x_0) = y_0$.

Функция y(x) непрерывно дифференцируема на интервале $|x - x_0| < a$ и

$$y'_x = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right|_{y=y(x)} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}. \tag{1.33}$$

Замечание 2. Условие в) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ является лишь достаточным (в совокупности с условиями а) и б)), но не необходимым для существования в некоторой окрестности точки M_0 единственной неявной функции $y = y(x)$, определяемой уравнением (1.28). Например,

$$F(x,y) \equiv x^5 - y^5 = 0, \quad M_0(0,0), \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -5y^4\Big|_{(0,0)} = 0;$$

но $y = x$ – единственная неявная функция, определяемая уравнением (1.34) в окрестности точки $M_0(0,0)$.

Замечание 3. Уравнение $F(x,y) = 0$ при некоторых условиях определяет неявную функцию $x = x(y)$.

Укажем правило отыскания производных неявной функции, не преобразовывая ее в явную, т.е. не представляя ее в виде $y = y(x)$ (что не всегда возможно, см. Замечание 1 этого пункта).

Имеем из (1.29)

$$F(x, y(x)) \equiv 0, \quad x \in (a,b). \tag{1.35}$$

Дифференцируя тождество (1.35) полным образом по переменной x, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'_x \equiv 0. \qquad (1.36)$$

Отсюда

$$y'_x = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))},$$

что совпадает с формулой (1.33).

Далее, дифференцируя тождество (1.36) полным образом по переменной x, получим уравнение для y''_{xx}. Действуя таким образом далее, мы можем получить любую производную $y^{(n)}(x), n \in N,$ при условии что функция $F(x,y)$ n раз дифференцируема.

Пример 1.5. Найти значения производных $y'(0), y''(0), y'''(0)$ неявной функции $y(x)$, определяемой уравнением

$$2x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 8y - 1 = 0 \qquad (1.37)$$

и удовлетворяющей условию $y(0) = 1$.

Решение. Дифференцируя (1.37) полным образом по переменной x, получим

$$4x - 6y - 6xy' + 18yy' + 4 - 8y' = 0. \qquad (1.38)$$

Полагая в равенстве (1.38) $x = 0, y = 1$, получим

$$-6 + 18y'(0) + 4 - 8y'(0) = 0, \text{ т.е. } y'(0) = \frac{1}{5}.$$

Чтобы получить $y''(0)$, продифференцируем (1.38) полным образом по переменной x:

$$4 - 6y' - 6y' - 6xy'' + 18(y')^2 + 18yy'' - 8y'' = 0, \text{или}$$

$$2 - 6y' - 3xy'' + 9(y')^2 + 9yy'' - 4y'' = 0. \qquad (1.39)$$

Полагая в (1.39) $x = 0, y(0) = 1,$ $y'(0) = \frac{1}{5},$ получим $y''(0) = -\frac{29}{125}$.

Для нахождения $y''(0)$ продифференцируем (1.39) полным образом по переменной x:

$$-6y'' - 3y'' - 3xy''' + 18y'y'' + 9y'y'' + 9yy''' - 4y''' = 0, \quad \text{или}$$

$$-9y'' - 3xy''' + 27y'y'' + 9yy''' - 4y''' = 0. \qquad (1.40)$$

Полагая в (1.40) $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0)=\frac{1}{5}$, $y''(0)=-\frac{29}{125}$, получим

$$y'''(0)=-\frac{522}{3125}.$$

Ответ: $y'(0)=\frac{1}{5}$, $y''(0)=-\frac{29}{125}$, $y'''(0)=-\frac{522}{3125}$.

2°. Неявная функция двух переменных

Уравнение

$$F(x,y,z)=0 \tag{1.41}$$

при некоторых условиях определяет функцию двух переменных $z=z(x,y)$. Сформулируем достаточное условие существования неявной функции, определяемой уравнением (1.41).

Теорема 1.10. Пусть функция $F(x,y,z)$ (см. (1.41)) , определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, удовлетворяет следующим условиям:

а) в указанной окрестности существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$;

б) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

в) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$

Тогда существует параллелепипед $K=\{(x,y,z):\ |x-x_0|\le a,\ \ |y-y_0|\le b,\ \ |z-z_0|\le c\}$,

в котором уравнение (1.41) определяет единственную неявную функцию

$$z=z(x,y),\quad \text{причем}\quad z(x_0,y_0)=z_0.$$

Неявная функция $z=z(x,y)$ непрерывно дифференцируема в прямоугольнике $|x-x_0|<a,\quad |y-y_0|<b,$ и

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}\right|_{z=z(x,y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}\right|_{z=z(x,y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}.$$

Замечание 4. Все Замечания, касающиеся неявной функции y(x), определяемой уравнением (1.28), очевидным образом обобщаются на случай неявной функции z =z(x,y),определяемой уравнением (1.41).

Пример 1.6. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0), \frac{\partial z}{\partial y}(0,0), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)$ неявной функции $z = z(x,y)$, определяемой уравнением

$$e^z + xy + z - 1 = 0, \tag{1.42}$$

если $z(0,0) = 0$.

Решение. Функция $F(x,y,z) \equiv e^z + xy + z - 1$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.10. Дифференцируя уравнение (1.42) по переменной x, при этом y – независимая переменная, а $z = z(x,y)$, получим

$$e^z \frac{\partial z}{\partial x} + y + \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{1.43}$$

Полагая в равенстве (1.43) $x = y = z(0,0) = 0$, получим $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0.$

Аналогично, используя равенство

$$e^z \frac{\partial z}{\partial y} + x + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{1.44}$$

и условия $x = y = z(0,0) = 0$,имеем $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0.$

Далее, из (1.43) и (1.44) дифференцированием получаем

$$e^z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + e^z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \tag{1.45}$$

$$e^z \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + e^z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \tag{1.46}$$

$$e^z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + e^z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \tag{1.47}$$

Полагая в (1.45) – (1.47) $x = y = z(0,0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0,$ получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{1}{2}.$

Ответ:

$$z(0,0)=\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=-\frac{1}{2}.$$

Аналогично определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

1.12. Экстремумы ФНП (безусловные)

Определение 1.18. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой локального минимума функции $f(x,y)$, если существует такая окрестность точки M_0, в которой выполняется неравенство

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0). \tag{1.48}$$

Аналогично определяется точка локального максимума функции. Точки минимума и максимума функции называются точками экстремума функции.

Замечание 1. В точках минимума $\Delta f\geq 0$ (см. (1.48)), а в точках максимума $\Delta f\leq 0$.

Определение 1.19. Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой строгого минимума функции $f(x,y)$, если существует такая проколотая окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$, в которой выполняется неравенство

$$f(x,y)> f(x_0,y_0). \tag{1.49}$$

Аналогично определяется точка строгого максимума функции $f(x,y)$. Далее, в точках строгого минимума $\Delta f>0\,((x,y)\neq(x_0,y_0))$, а в точках строгого максимума $\Delta f<0\,((x,y)\neq(x_0,y_0))$.

Теорема 1.11 (необходимое условие экстремума). Если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x,y)$ и существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$, то $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.\right)$

Следствие. Если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума дифференцируемой функции $f(x,y)$, то $df(x_0,y_0)=0.$

Определение 1.20. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0,$ то эта точка называется стационарной точкой функции $f(x,y)$.

Замечание 2. Всякая точка экстремума дифференцируемой функции является стационарной точкой (см. теорему 11), но не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пример 1.7. Пусть $f(x,y)=x^2y$. Покажем, что точка (0,0) – стационарная точка, но не является точкой экстремума этой функции. Действительно, функция $f(x,y)=x^2y$ всюду дифференцируема (доказать) и $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, т.е. точка (0,0) – стационарная. Далее,

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0),\\ >0, (x,y)\neq(0,0), y>0,\\ <0, (x,y)\neq(0,0), y<0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что ни в какой окрестности точки (0,0) $f(x,y)\geq f(0,0)$ или $f(x,y)\leq f(0,0)$. Значит, точка (0,0) не является точкой экстремума функции *f*(*x*,*y*).

Перейдем теперь к рассмотрению достаточных условий существования экстремума ФНП.

Пусть $f(x)\equiv f(x_1,x_2,\ldots,x_n), n\in N$. Подчеркнем, что здесь n (количество переменных) не обязательно равно двум. Если функция *f*(*x*) в некоторой окрестности точки $M_0(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0})$ имеет непрерывные производные второго порядка, то ее второй дифференциал имеет вид

$$d^2f(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(M_0)\,dx_i dx_j. \tag{1.50}$$

Отсюда следует, что второй дифференциал $d^2f(M_0)$ является квадратичной формой переменных $dx_i, i=1,2,\ldots,n.$

Для рассмотрения достаточных условий существования экстремума нам понадобятся некоторые сведения о квадратичных формах.

Определение 1.21. Квадратичная форма

$$F(\xi)\equiv F(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad i,j=1,2,\ldots,n, \tag{1.51}$$

называется:

а) положительно определенной, если $F(\xi)>0$ при $\forall(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\neq(0,0,\ldots,0)$;

б) отрицательно определенной, если $F(\xi)<0$ при $\forall(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\neq(0,0,\ldots,0)$;

в) неопределенной, если существуют $\xi'=(\xi_1',\xi_2',\ldots,\xi_n')$ и $\xi''=(\xi_1'',\xi_2'',\ldots,\xi_n'')$ такие, что $F(\xi')>0$ и $F(\xi'')<0$.

Теорема 1.12 (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы). Для того, чтобы квадратичная форма $F(\xi)$ (см. (1.51)) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Замечание 3. Квадратичная форма $F(\xi)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-F(\xi)$ положительно определена

Теорема 1.13 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$ имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots n,$ и, кроме того, $M_0 -$ стационарная точка. Тогда, если $d^2 f(M_0) -$ положительно определенная квадратичная форма, то точка $M_0 -$ точка строгого минимума функции $f(x)$, а если $d^2 f(M_0) -$ отрицательно определенная квадратичная форма, то $M_0 -$ точка строгого максимума функции $f(x)$, если же $d^2 f(M_0) -$ неопределенная квадратичная форма, то точка M_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Если $n = 2$,то формулировка достаточного условия существования экстремума функции упрощается.

Теорема 1.14 (достаточное условие существования экстремума, $n = 2$).

Пусть функция $f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, и, кроме того, $M_0 -$ стационарная точка. Обозначим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тогда, если $\Delta > 0,$ то $M_0 -$ точка строгого экстремума, причем при $A < 0$ – точка строгого максимума, при $A > 0$ – точка строгого минимума; если $\Delta < 0$, то точка M_0 не является точкой экстремума.

Замечание 4. Если $\Delta = 0$, то вопрос о существовании экстремума остается открытым. Например,

а) $f(x, y) = x^4 + y^4$. Очевидно, что точка (0,0) является точкой строгого минимума;

б) $f(x, y) = x^3 + y^3$. Точка (0,0) не является точкой экстремума, так как в любой окрестности этой точки существуют точки, где $f(x,y) > f(0,0)$ и точки, где $f(x,y) < f(0,0)$.

Для обеих функций (см. п.п. а) и б)) точка (0,0) стационарная и $\Delta = 0$.

1.13. Условный экстремум

Пусть в некоторой области $G \subset R^n$ определены функции

$$f(x) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_1(x) \equiv \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x) \equiv \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\ldots, \varphi_m(x) \equiv \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad m < n$$

Обозначим через $E \subset G$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned} \qquad (1.52)$$

Уравнения системы (1.52) называются условиями связей.

Определение 1.22. Точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in E$ называется точкой условного минимума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях связей (1.52), если найдется такая окрестность $U(M_0)$ точки $M_{0,}$ что для всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \cap U(M_0)$ выполняется неравенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}). \qquad (1.53)$$

Аналогично определяется точка условного максимума функции.

Определение 1.23. Точка $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ называется точкой строгого условного минимума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях связей (1.52), если найдется такая проколотая окрестность $\dot{U}(M_0)$ точки M_0, что для всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \cap \dot{U}(M_0)$ выполняется неравенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}). \qquad (1.54)$$

Аналогично определяется точка строгого условного максимума.

Геометрическая интерпретация.

Пусть $n = 2$, $f = f(x,y)$. Тогда условие связи может быть только одно ($m = 1$):

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (1.55)$$

Геометрически равенство (1.55) является уравнением некоторой кривой на плоскости. Точка $M_0(x_0, y_0)$ условного минимума должна принадлежать этой кривой, т.е.

$$\varphi(x_0, y_0) = 0. \qquad (1.56)$$

Тогда согласно Определению 1.22 неравенство (1.53) ($f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$) обязательно выполняется на части кривой (1.55), лежащей в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Что касается остальных точек указанной окрестности, то в них это неравенство может выполняться, а может и не выполняться.

Пример 1.8. Найти точки условного экстремума функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$.

Решение. Графиком функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ является параболоид вращения $z = x^2 + y^2$. Геометрически условие связи является плоскостью $x + y = 1$, параллельной оси OZ, пересекающейся с графиком функции по параболе. Из соображений симметрии ясно, что наинизшая точка этой параболы $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, а наивысшей точки нет. Следовательно, функция $f(x,y) = x^2 + y^2$ имеет условный минимум (условие связи $x + y = 1$) в точке $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, который равен $\frac{1}{2}$.

Это геометрическое решение задачи. Очень редко удается геометрически решить задачу отыскания условного экстремума. Поэтому рассмотрим наиболее распространенные методы решения таких задач.

А) <u>Прямой метод отыскания точек условного экстремума.</u>

Если из системы (1.52) удается явным образом выразить m переменных через остальные, то подставляя в функцию $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ вместо соответствующих переменных их выражения через остальные (n-m) переменных, получим функцию F(n-m) переменных. В этом случае задача отыскания условного экстремума функции f, зависящей от n переменных, сводится к задаче отыскания безусловного экстремума функции F, зависящей от (n-m) переменных.

Рассмотрим предыдущий пример:

Пример 1.9. Найти точки условного экстремума функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$.

Решение. Из условия связи имеем $y = 1 - x$. Тогда

$$f(x,1-x) = x^2 + (1-x)^2 \equiv F(x).$$

Очевидно, что функция $F(x)$ имеет безусловный минимум при $x = \frac{1}{2}$. Тогда функция $f(x,y) = x^2 + y^2$ имеет условный минимум ($x + y = 1$ – условие связи) в точке $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, который равен $\frac{1}{2}$. Этот результат совпадает с предыдущим (см. пример 1.8).

<u>Замечание 1.</u> Прямой метод редко удается применить, так как из условий связей (1.52) далеко не всегда удается получить явные выражения для каких-либо m переменных через остальные или эти выражения настолько громоздки,

что решение задачи отыскания безусловного экстремума функции F становится очень трудоемким.

Поэтому следующий метод:

Б) Решается задача:

Найти условный экстремум функции $f(x,y)$, если $\varphi(x, y) = 0$.

Решение: $\varphi(x, y) = 0$ – уравнение кривой на плоскости. Если удается параметризовать эту кривую ($x = x(t), y = y(t)$), то, подставляя эти выражения в функцию $f(x,y)$, получаем функцию одной переменной $F(t) \equiv f(x(t),y(t))$. Далее, задача сводится к исследованию функции $F(t)$ на безусловный экстремум.

Пример 1.10. Найти условный экстремум функции

$f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 7y^2$, если $x^2 + y^2 = 25$ (условие связи).

Решение. Из условия связи имеем $x = 5\cos t,\quad y = 5\sin t,\quad t \in [0, 2\pi)$.

Тогда $f(x, y) = f(5\cos t, 5\sin t) = 75\cos^2 t + 100\cos t\sin t + 175\sin^2 t \equiv F(t)$.

$$F(t) = 125 + 50\sqrt{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right),\quad t \in [0, 2\pi).$$

Очевидно, что функция $F(t)$ имеет минимум, когда $\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, и максимум, когда $\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Тогда при $t_1 = \frac{7\pi}{8}$ и при $t_2 = \frac{15\pi}{8}$ получаем точки минимума функции $F(t)$, а при $t_3 = \frac{3\pi}{8}$ и при $t_4 = \frac{11\pi}{8}$ – точки максимума функции $F(t)$. Отсюда получаем:

$\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ – точки условного минимума функции $f(x,y)$ и

$\left(\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ – точки условного максимума функции $f(x,y)$.

При этом $f_{\text{усл.min}} = 125 - 50\sqrt{2}$, $\quad f_{\text{усл.max}} = 125 + 50\sqrt{2}$.

Эти два метода – частные методы решения задачи отыскания условного экстремума. Общий метод:

В) Метод множителей Лагранжа.

Задача: исследовать на условный экстремум функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad (m < n). \end{aligned} \tag{1.52}$$

<u>Решение:</u>

1°. Строим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2°. Находим стационарные точки функции Лагранжа из условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{1.57}$$

т.е. решаем систему (1.57) относительно $x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad и \quad \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$

Пусть $\tilde{M}^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}, \lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \ldots, \lambda_m^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots p$ – решения системы (1.57). Тогда точки $M^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots, p$ являются точками, “подозрительными" на условный экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (условия связей (1.52)).

3°. Второй дифференциал функции Лагранжа в точках $\tilde{M}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, p$ имеет вид

$$d^2 L(\tilde{M}^{(j)}) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_l \partial x_q} (\tilde{M}^{(j)}) \, dx_l dx_q, \tag{1.58}$$

т.е. как будто функция Лагранжа не зависит от переменных $\lambda_k \ (k = 1, 2, \ldots, m)$.

Далее, если $d^2 L(\tilde{M}^{(j)})$ – положительно определенная квадратичная форма, то точка $M^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ является точкой строгого условного минимума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; если $d^2 L(\tilde{M}^{(j)})$ – отрицательно определенная квадратичная форма, то точка $M^{(j)}$ является точкой строгого условного максимума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. На этом решение задачи заканчивается.

Если же $d^2 L(\tilde{M}^{(j)})$ – неопределенная квадратичная форма, то идем дальше.

4•. Из условий связей получаем

$$d\varphi_k(M^{(j)})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}(M^{(j)})\,dx_i=0,\quad k=1,2,\ldots,m. \tag{1.59}$$

Это – линейная система относительно $dx_1, dx_2, \cdots dx_n$.

Пусть ранг матрицы системы (1.59) равен m. Не ограничивая общности будем считать, что базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы. Тогда дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ однозначно выражаются через дифференциалы $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$. Подставляя эти выражения в $d^2L(\tilde{M}^{(j)})$, получим квадратичную форму переменных $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$. Обозначим ее через $d^2\hat{L}(\tilde{M}^{(j)})$. Напомним, что мы рассматриваем случай неопределенной квадратичной формы $d^2L(\tilde{M}^{(j)})$. Далее, если $d^2\hat{L}(\tilde{M}^{(j)})$ – положительно определенная квадратичная форма, то точка $M^{(j)}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ является точкой строгого условного минимума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; если $d^2\hat{L}(\tilde{M}^{(j)})$ – отрицательно определенная квадратичная форма, то точка $M^{(j)}$ является точкой строгого условного максимума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; если $d^2\hat{L}(\tilde{M}^{(j)})$ – неопределенная квадратичная форма, то точка $M^{(j)}$ не является точкой условного экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Решим задачи примеров 1.8 и 1.9 методом Лагранжа.

Пример 1.11. Найти точки условного экстремума функции $f(x,y)=x^2+y^2$, если $x+y=1$.

Решение.

1°. Строим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1).$$

2°. Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-1=0.$$

Отсюда $x=y=\dfrac{1}{2}$, $\lambda=-1$, т.е. $\tilde{M}=\tilde{M}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1\right)$. Таким образом, точка $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ является точкой, «подозрительной» на условный экстремум.

3°. Второй дифференциал функции Лагранжа в точке $\tilde{M}$ имеет вид:

$$d^2L(\tilde{M})=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\tilde{M})(dx)^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(\tilde{M})\,dx\,dy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\tilde{M})(dy)^2=2(dx)^2+2(dy)^2>0,$$

если $(dx)^2+(dy)^2>0.$

Значит, точка $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ является точкой условного минимума функции $f(x,y)$, который равен $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$

Этот результат полностью совпадает с результатами, полученными другими методами (см. пример 1.8).

Пример 1.12. Используя метод Лагранжа, найти условный экстремум функции $f(x,y)=3x^2+4xy+7y^2, \textit{если } x^2+y^2=25$ (условие связи).

Решение.

1°. Строим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=3x^2+4xy+7y^2+\lambda(x^2+y^2-25)$$

2°. Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=6x+4y+2\lambda x=0, \tag{1.59}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=4x+14y+2\lambda y=0, \tag{1.60}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-25=0. \tag{1.61}$$

Из (1.59) и (1.60) следует

$$\frac{6x+4y}{4x+14y}=\frac{x}{y}. \tag{1.62}$$

Обозначим $\frac{x}{y}=t$. Тогда (1.62) можно записать в виде

$\frac{3t+2}{2t+7}=t,$ или $t^2+2t-1=0.$ Отсюда $t_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}.$ Тогда получаем две системы относительно x и y:

$$x^2+y^2=25,\quad \frac{x}{y}=-(1+\sqrt{2}), \tag{1.63}$$

$$x^2+y^2=25\,,\quad \frac{x}{y}=-1+\sqrt{2}\,. \tag{1.64}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\pm\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ y&=\mp\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\text{ – решения системы (1.63), при этом } \lambda=-5+2\sqrt{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\pm\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ y&=\pm\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\text{ – решения системы (1.64), при этом } \lambda=-5-2\sqrt{2}.$$

Таким образом, стационарные точки функции Лагранжа:

$$\tilde{M}^{(1)}\left(\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},-\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},-5+2\sqrt{2}\right),\quad \tilde{M}^{(2)}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},-5+2\sqrt{2}\right),$$
$$\tilde{M}^{(3)}\left(\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},-5-2\sqrt{2}\right),\quad \tilde{M}^{(4)}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},-\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},-5-2\sqrt{2}\right).$$

Точки, “подозрительные” на условный экстремум:

$$M^{(1)}\left(\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},-\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),\quad M^{(2)}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$
$$M^{(3)}\left(\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),\quad M^{(4)}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},-\frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

3°. Второй дифференциал функции Лагранжа в точках $\tilde{M}^{(j)}(j=1,2,3,4)$ имеет вид:

$$d^2L(\tilde{M}^{(j)})=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\tilde{M}^{(j)})(dx)^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(\tilde{M}^{(j)})\,dx\,dy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\tilde{M}^{(j)})(dy)^2=$$
$$=(6+2\lambda^{(j)})(dx)^2+8\,dx\,dy+(14+2\lambda^{(j)})\,(dy)^2=4\{(-1\pm\sqrt{2})(dx)^2+2\,dx\,dy+$$
$$(1\pm\sqrt{2})(dy)^2\}.$$

Таким образом,

$$d^2L(\tilde{M}^{(j)})=4(-1\pm\sqrt{2})[dx+(1\pm\sqrt{2})\,dy]^2. \tag{1.62}$$

Отметим, что в формуле (1.62) при j = 1,2 необходимо брать знак “+”, а при j = 3,4 – знак “–“.

Далее, из формулы (1.62) следует, что если $dx=-(1\pm\sqrt{2})\,dy,$ то

$d^2L(\tilde{M}^{(j)})=0,$ *т.е.* $d^2L(\tilde{M}^{(j)})$ не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной квадратичной формой.

Таким образом, для дальнейшего исследования с помощью условия связи необходимо установить зависимость между дифференциалами d*x* и d*y* в точках $\tilde{M}^{(j)}$.

4°. Из условия связи имеем 2*x* d*x*+2*y* d*y* = 0, т.е. при $y\neq 0$ $dy=-\dfrac{x}{y}dx.$

Отсюда в точках $\tilde{M}^{(j)}$

$$dy=(1\pm\sqrt{2})\,dx. \qquad (1.63)$$

Здесь при $j=1,2$ знак "+", а при $j=3,4$ – знак "–". Тогда

$$d^2L(\tilde{M}^{(j)})=4(-1\pm\sqrt{2})[dx+(1\pm\sqrt{2})^2dx]^2 \qquad (1.64)$$

для всех дифференциалов d*x* и d*y*, связанных соотношением (1.63).

Из (1.64) следует, что

$$d^2L(\tilde{M}^{(j)})>0 \quad \text{при} \quad j=1,2 \quad и \quad d^2L(\tilde{M}^{(j)})<0 \quad \text{при} \quad j=3,4,$$

т.е. точки $M^{(1)}$ *и* $M^{(2)}$ являются точками строгого условного минимума функции *f*(*x*,*y*), а точки $M^{(3)}$ *и* $M^{(4)}$ –точками строгого условного максимума.

Замечание 2. Этот результат совпадает с результатом, полученным при применении метода Б. Из рассмотренных способов решений этой задачи видно, что способ Б проще. Но нередко встречаются задачи, где способы А и Б не работают. Тогда остается применить способ В (метод множителей Лагранжа).

1.14. Задача отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, заданной в замкнутой ограниченной области

Пусть функция *f*(*x*,*y*) непрерывна в замкнутой ограниченной области $G\subseteq R^2$.Тогда согласно теореме Вейерштрасса функция *f*(*x*,*y*) в области *G* принимает максимальное и минимальное значения. Требуется найти эти значения.

Изложим алгоритм решения этой задачи.

1°. Находим стационарные точки $N_i(x_i,y_i),\ (i=1,2,\ldots,n)$ функции *f*(*x*,*y*), лежащие внутри области *G*. Вычисляем $f(x_i,y_i),\ i=1,2,\ldots,n.$

Из этих чисел выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\widehat{M}=\max_{1\le i\le n}f(x_i,y_i),\quad \widehat{m}=\min_{1\le i\le n}f(x_i,y_i).$$

2°. Найдем максимальное и минимальное значения функции *f*(*x*,*y*) на границе ∂G области *G*.

Пусть граница ∂G состоит из конечного числа гладких кусков ∂G_j $(j=1,2,\dots,k)$. Обозначим

$$M'_j=\max_{(x,y)\in\partial Gj} f(x,y),\quad m'_j=\min_{(x,y)\in\partial Gj} f(x,y),\quad j=1,2,\dots,k.$$

Так как переменные x и y на каждой части ∂G_j взаимосвязаны $(\varphi_j(x,y)=0)$, то отыскание величин M'_j *и* m'_j является задачей на отыскание условного экстремума функции $f(x,y)$, если $\varphi_j(x,y)=0$, $(x,y)\in\partial G_j$. Далее имеем

$$M'=\max_{(x,y)\in\partial G} f(x,y)=\max_{1\le j\le k} M'_j,\quad m'=\min_{(x,y)\in\partial G} f(x,y)=\min_{1\le j\le k} m'_j.$$

3°. **Ответ:**

$$M\equiv\max_{(x,y)\in G\cup\partial G} f(x,y)=\max\{\widehat{M},M'\},$$

$$m\equiv\min_{(x,y)\in G\cup\partial G} f(x,y)=\min\{\widehat{m},m'\}.$$

2. Решение типовых задач

Задача 1. Найти частные производные первого и второго порядков функции $u = \sin(2x + 5y + 3)$.

Решение.

Фиксируем переменную y. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\cos(2x+5y+3)$.

Фиксируем переменную x. Получим $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 5\cos(2x+5y+3)$.

Аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\sin(2x+5y+3),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -10\sin(2x+5y+3),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -25\sin(2x+5y+3).$$

Задача 2. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $u = x\sqrt{1+y^3}$.

Решение.

Имеют место следующие формулы:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{2.1}$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \tag{2.2}$$

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению производных первого и второго порядков заданной функции и подстановке их в формулы (2.1) и (2.2).

Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{1+y^3}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{3xy^2}{2\sqrt{1+y^3}}$. Отсюда (см. (2.1))

$$du = \sqrt{1+y^3}\,dx + \frac{3xy^2}{2\sqrt{1+y^3}}dy.$$

Далее, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{3y^2}{2\sqrt{1+y^3}}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{3xy(y^3+4)}{4(1+y^3)^{3/2}}$. Тогда (см. (2.2))

$$d^2u = \frac{3y^2}{(1+y^3)^{1/2}}dxdy + \frac{3xy(y^3+4)}{4(1+y^3)^{3/2}}dy^2.$$

Задача 3. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции $u = \varphi(\xi, \eta)$, если $\varphi(\xi, \eta)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\xi = x^2 + y^2, \quad \eta = x^2 - y^2$, а x и y – независимые переменные.

Решение. Задача сводится к нахождению производных

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и использованию формул (2.1) и (2.2). Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2y\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - 2y\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}. \tag{2.4}$$

Отсюда и из формулы (2.1) получим

$$du = 2x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)dx + 2y\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)dy.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) = 2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + 2x\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) = 2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) + 2x\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) = 2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + 2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6),(2.7) в (2.5), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 2x\left(2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\right) + 2\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + 2x\left(2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + 2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right) =$$

$$= 4x^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right) + 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right), \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}-2y\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)=2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)-2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)=$$

$$=2y\left(2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}+2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\right)-2y\left(2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}+2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right)=4xy\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right). \qquad (2.9)$$

Наконец,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2y\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}-2y\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)=\left[2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+2y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)\right]-$$

$$-\left[2\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}+2y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right], \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)=2y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)-2y\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)=2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}-2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}, \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)=2y\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)-2y\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)=2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}-2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.11) и (2.12) в (2.10), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+2y\left(2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}-2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\right)-2\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}-2y\left(2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}-2y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right)=$$

$$=4y^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right)+2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}-\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right). \qquad (2.13)$$

Равенства (2.2), (2.8), (2.9) и (2.13) дают

$$d^2u=\left[4x^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right)+2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right]dx^2+8xy\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\right)dx\,dy+$$

$$+\left[4y^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right)+2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}-\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)\right].$$

Задача 4. Найти первую и вторую производные функции $y(x)$, заданной неявно:

$$e^{x+y}+y-x=0. \qquad (2.14)$$

Решение. Чтобы найти y'_x, уравнение (2.14) дифференцируем полным образом по переменной x, т.е. в процессе дифференцирования уравнения (2.14) полагаем x независимой переменной, а $y = y(x)$ – функцией переменной x. Имеем

$$e^{x+y}(1+y')+y'-1=0. \qquad (2.15)$$

Отсюда

$$y'_x=\frac{1-e^{x+y}}{1+e^{x+y}}.$$

Чтобы найти y''_{xx} уравнение (2.15) продифференцируем полным образом по переменной x:

$$e^{x+y}(1+y')^2+e^{x+y}y''+y''=0.$$

Тогда

$$y''_{xx}=-\frac{e^{x+y}(1+y'_x)^2}{1+e^{x+y}}=-\frac{4e^{x+y}}{(1+e^{x+y})^3}.$$

Задача 5. Найти $y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0)$ для неявной функции $y(x)$, удовлетворяющей условию $y(x_0)=y_0$:

$$3x^2y^2-2x^4+y^4=1, \quad x_0=0, \quad y_0=-1. \qquad (2.16)$$

Решение. Уравнение (2.16) дифференцируем полным образом по переменной x (см. задачу 4):

$$6xy^2+6x^2yy'-8x^3+4y^3y'=0,$$

или

$$3xy^2+3x^2yy'-4x^3+2y^3y'=0. \qquad (2.17)$$

В равенство (2.17) подставляем $x = 0, y = -1$: $2y'(0)=0$. Отсюда

$$y'(0)=0.$$

Далее, уравнение (2.17) дифференцируем полным образом по переменной x:

$$3y^2+6xyy'+6xyy'+3x^2(y')^2+3x^2yy''-12x^2+6y^2(y')^2+2y^3y''=0,$$

или

$$3(y^2-4x^2)+12xyy'+3(x^2+2y^2)(y')^2+y(3x^2+2y^2)y''=0. \qquad (2.18)$$

В равенство (2.18) подставляем $x = 0, y = -1,$ $y'(0)=0.$ Тогда $y''(0)=\frac{3}{2}.$

Далее, действуя аналогично, получим : $y'''(0)=0$.

Задача 6. Найти частные производные первого и второго порядков функции z(x,y), заданной неявно:

$$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}-1. \qquad (2.19)$$

Решение. Из равенства (2.19) имеем:

$$x=z\ln z-z\ln y-z. \qquad (2.20)$$

Отметим, что в равенстве (2.20) x и y – независимые переменные, $z=z(x,y)$.

Чтобы найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ равенство (2.20) продифференцируем по переменной x:

$$1=\frac{\partial z}{\partial x}\ln z+z\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\ln y-\frac{\partial z}{\partial x},$$

или

$$1=\frac{\partial z}{\partial x}\ln z-\frac{\partial z}{\partial x}\ln y, \qquad (2.21)$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\ln z-\ln y}. \qquad (2.22)$$

Из равенств (2.19) и (2.22) следует

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}. \qquad (2.23)$$

Точно так же, дифференцируя равенство (2.20) по переменной y, получим

$$0=\frac{\partial z}{\partial y}\ln z-\frac{\partial z}{\partial y}\ln y-\frac{z}{y}. \qquad (2.24)$$

Тогда $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(\ln z-\ln y)}$,

или, с учетом равенства (2.19),

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}. \qquad (2.25)$$

Чтобы найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ равенство (2.21) продифференцируем по переменной x:

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ln z+\frac{1}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ln y.$$

Отсюда $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{z\,(\ln z - \ln y)}$,

или, с учетом равенств (2.19) и (2.23)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}. \tag{2.26}$$

Аналогично, дифференцируя равенство (2.21) по переменной y или равенство (2.24) по переменной x, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\ln z - \ln y},$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z^2 x}{y\,(x+z)^3}. \tag{2.27}$$

Точно так же из (2.24), (2.19) и (2.25) следует

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z^2}{y^2 (x+z)^3}. \tag{2.28}$$

Формулы (2.23), (2.25) – (2.28) дают ответ задачи.

Задача 7. Найти второй дифференциал в точке $M_0(\sqrt{\pi}, \dfrac{\sqrt{\pi}}{2})$ функции $z = z(x, y)$, заданной неявно, $z(M_0) = 1$:

$$2x - 4y + z = \sin xyz. \tag{2.29}$$

Решение. Имеем

$$d^2 z\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} (dy)^2. \tag{2.30}$$

Отсюда следует, что задача сводится к вычислению вторых частных производных в точке M_0 функции $z = z(x,y)$, заданной неявно.

Из равенства (2.29) получаем

$$2 + \frac{\partial z}{\partial x} = \cos xyz \cdot y\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right). \tag{2.31}$$

Полагая здесь $x=\sqrt{\pi}, \quad y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, z=1,$ получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} = -2. \qquad (2.32)$$

Аналогично из равенства (2.29) следует

$$-4+\frac{\partial z}{\partial y}=\cos xyz\cdot x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (2.33)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} = 4. \qquad (2.34)$$

Дифференцируя равенство (2.31) по переменной *x*, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\left[-\sin(xyz)\cdot y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\cos(xyz)\cdot\left(2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right].$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = -\frac{\pi}{4}(2\sqrt{\pi}-1)^2. \qquad (2.35)$$

Теперь, дифференцируя равенство (2.31) по переменной *y*, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\sin xyz\cdot x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\cos xyz\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+$$
$$+\cos xyz\cdot y\left(\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$$

и

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0} = -\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 4\right)\left(1-\sqrt{\pi}\cdot 2\right)=\frac{\pi}{2}(4\pi-1). \qquad (2.36)$$

Аналогично из равенства (2.33) (дифференцированием его по переменной *y*), получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\left[-x\sin xyz\cdot\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\cos xyz\cdot\left(2\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right]$$

и

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = -\pi(2\sqrt{\pi}+1)^2. \tag{2.37}$$

Подставляя (2.35) – (2.37) в формулу (2.30), получим

$$\left.d^2 z\right|_{M_0} = -\frac{\pi}{4}(2\sqrt{\pi}-1)^2 dx^2 + \pi(4\pi-1)\,dx\,dy - \pi(2\sqrt{\pi}+1)^2 dy^2.$$

Это ответ.

Задача 8.

а) Приняв y за новую независимую переменную, а x – за функцию от y, преобразовать уравнение

$$y'' - y' - (y')^3 x^3 = 0. \tag{2.38}$$

Решение.

По теореме о производной обратной функции имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{2.39}$$

Далее, используя теорему о производной сложной функции, получим

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x = \left(\frac{1}{x'_y}\right)'_y \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{(x'_y)^2} \cdot x''_{yy} \cdot \frac{1}{x'_y} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}. \tag{2.40}$$

Из равенств (2.38) – (2.40) следует

$$x''_{yy} + (x'_y)^2 + x^3 = 0.$$

Ответ: $x'' + (x')^2 + x^3 = 0$.

б) Вводя новые переменные, преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{3y}{(x-1)^2(x-2)^2}, \tag{2.41}$$

$$u = \frac{y}{x-2}, \quad t = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|, \quad u = u(t). \tag{2.42}$$

Решение.

Из первого равенства (2.42) следует

$$y'_x = u'_x(x-2) + u. \tag{2.43}$$

Далее из второго равенства (2.42) получаем

$$u'_x = u'_t t'_x = u'_t \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) = -\frac{u'_t}{(x-1)(x-2)}. \tag{2.44}$$

Равенство (2.43) дает нам

$$y''_{xx} = u''_{xx}(x-2) + 2u'_x. \tag{2.45}$$

Далее, $u''_{xx} = (u'_t)'_x \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) + u'_t \left(-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} \right) = \frac{u''_{tt} + (2x-3)u'_t}{(x-1)^2(x-2)^2}$. Отсюда и из равенств (2.44), (2.45) следует

$$y''_{xx} = \frac{u''_{tt} + (2x-3)u'_t}{(x-1)^2(x-2)} - \frac{2u'_t}{(x-1)(x-2)} = \frac{u''_{tt} - u'_t}{(x-1)^2(x-2)}. \tag{2.46}$$

Учитывая равенства (2.42) и (2.46), из уравнения (2.41) получим

$$u'' - u' = 3u. \tag{2.47}$$

Напомним, что в уравнении (2.47) дифференцирование производится по переменной *t*.

Задача 9.

а) Приняв *u* и *v* за новые независимые переменные, преобразовать следующее уравнение:

$$xy\, z_{xx} - (x^2 + y^2)\, z_{xy} + xy\, z_{yy} + y\, z_x + x\, z_y = 0, \tag{2.48}$$

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad v = xy. \tag{2.49}$$

Решение. Имеем

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = x\, z_u + y\, z_v, \tag{2.50}$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = y\, z_u + x\, z_v. \tag{2.51}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_u + x(z_u)_x + y(z_v)_x = z_u + [x(z_u)_u + y(z_u)_v] + y[x(z_v)_u + y(z_v)_v] = \\ &= x^2 z_{uu} + 2xy\, z_{uv} + y^2 z_{vv} + z_u, \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= x(z_u)_y + z_v + y(z_v)_y = x[y(z_u)_u + x(z_u)_v] + z_v + y[y(z_v)_u + x(z_v)_v] = \\ &= xy\, z_{uu} + (x^2 + y^2) z_{uv} + xy\, z_{vv} + z_v, \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} z_{yy} &= z_u + y(z_u)_y + x(z_v)_y = z_u + y[y(z_u)_u + x(z_u)_v] + x[y(z_v)_u + x(z_v)_v] = \\ &= y^2 z_{uu} + 2xy\, z_{uv} + x^2 z_{vv} + z_u. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Подставляя (2.50) – (2.54) в уравнение (2.48) и проводя необходимые преобразования, получим

$$[4x^2y^2-(x^2+y^2)^2]\,z_{uv}+4xy\,z_u=0.$$

Отсюда и из равенств (2.49) следует

$$(v^2-u^2)\,z_{uv}+v\,z_u=0.$$

Ответ: $(v^2-u^2)\,z_{uv}+v\,z_u=0.$

б) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w – за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$2z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}+4z_x+4z_y+z=0, \tag{2.55}$$

$$u=2y-x,\quad v=x,\quad z=we^{-x-y}. \tag{2.56}$$

Решение. Из равенств (2.56) имеем

$$z_x=(w_x-w)e^{-x-y},\quad z_y=(w_y-w)e^{-x-y}, \tag{2.57}$$

$$z_{xx}=(w_{xx}-2w_x+w)e^{-x-y},\quad z_{xy}=(w_{xy}-w_x-w_y+w)e^{-x-y},$$
$$z_{yy}=(w_{yy}-2w_y+w)e^{-x-y}. \tag{2.58}$$

Подставляя (2.57) и (2.58) в уравнение (2.55), после некоторых преобразований получим

$$2w_{xx}+2w_{xy}+w_{yy}-2w_x-2w=0. \tag{2.59}$$

Далее, равенства (2.56) нам дают

$$w_x=-w_u+w_v,\ w_{xx}=w_{uu}-2w_{uv}+w_{vv},\ w_{xy}=-2w_{uu}+2w_{uv},\ w_{yy}=4w_{uu}.$$

Отсюда и из уравнения (2.59) следует

$$w_{uu}+w_{vv}+w_u-w_v-w=0.$$

Ответ: $w_{uu}+w_{vv}+w_u-w_v-w=0.$

Задача 10.

а) Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}z}$ и $v=\dfrac{z}{x^3y^2}$ в точке $M_0\left(1,2,\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Решение. Имеем

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(-\frac{3}{x^2}, -\frac{4}{y^2}, \frac{1}{\sqrt{6}\, z^2}\right).$$

Отсюда $\operatorname{grad} u\big|_{M_0} = (-3, -1, \sqrt{6}).$ Далее $\operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(-\frac{3z}{x^4 y^2}, -\frac{2z}{x^3 y^3}, \frac{1}{x^3 y^2}\right).$ Отсюда

$\operatorname{grad} v\big|_{M_0} = \left(-\frac{3}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4}\right).$ Наконец,

$$\cos\varphi = \frac{(\operatorname{grad} u\big|_{M_0}, \operatorname{grad} v\big|_{M_0})}{\left|\operatorname{grad} u\big|_{M_0}\right| \cdot \left|\operatorname{grad} v\big|_{M_0}\right|} = \frac{\frac{4}{\sqrt{6}}}{4\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}} = 1,$$

здесь φ – искомый угол между градиентами скалярных полей u и v в точке M_0.

Отсюда $\varphi = 0$, т.е. в точке M_0 градиенты заданных скалярных полей сонаправлены.

Ответ: $\varphi = 0$.

б) Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x - y)$ в точке $M_0(1, 2, -1)$ по направлению вектора $\vec{l}\,(1, 2, -2)$.

Решение. Для решения поставленного вопроса используем формулу

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0} = \left(\operatorname{grad} u\big|_{M_0}, \vec{l}_0\right), \tag{2.60}$$

где $\vec{l}_0$ – орт вектора $\vec{l}$. Имеем

$$\operatorname{grad} u\big|_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}, \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0}\right) = \left(\frac{2}{1+(x-y)^2}\Big|_{M_0}, -\frac{2}{1+(x-y)^2}\Big|_{M_0}, 2z\Big|_{M_0}\right) = \\ = (1, -1, -2). \tag{2.61}$$

Далее,

$$\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{1}{3}(1, 2, -2). \tag{2.62}$$

Подставляя (2.61) и (2.62) в формулу (2.60), получим $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0} = 1.$

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}=1.$

Задача 11. Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1 \text{ в точке } M_0(2,0,0).$$

Решение. Так как координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению заданной поверхности, то точка M_0 действительно принадлежит этой поверхности. Далее, вектор

$$\vec{N}=\operatorname{grad}F\Big|_{M_0}\left(F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1\right)$$

является нормальным вектором касательной плоскости и одновременно направляющим вектором нормали к поверхности в точке M_0. Таким образом,

$$\vec{N}=\left(\frac{x}{2}\Big|_{M_0},\frac{2y}{9}\Big|_{M_0},\frac{z}{8}\Big|_{M_0}\right)=(1,0,0).$$

Значит, уравнение касательной плоскости $x=2$ и канонические уравнения нормали

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}.$$

Ответ: $x=2;\quad \frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}.$

Задача 12. Найти локальные экстремумы функции

$$u=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8.$$

Решение. Используя необходимое условие существования экстремума

ФНП, находим точки, «подозрительные» на экстремум. Их координаты являются решениями системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

т.е. в нашем случае

$$\begin{cases}6x-2\sqrt{y}-8=0,\\ -\dfrac{x}{\sqrt{y}}+1=0.\end{cases}\tag{2.63}$$

Система (2.63) имеет единственное решение (2,4). Таким образом, мы получили единственную точку $M_0(2,4)$, «подозрительную» на экстремум.

Теперь используем достаточное условие существования экстремума. Имеем

$$A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0}=6,\quad B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0}=-\frac{1}{\sqrt{y}}\Big|_{M_0}=-\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0}=\frac{1}{2y\sqrt{y}}\Big|_{M_0}=\frac{1}{8}.$$

Отсюда $\Delta = AC-B^2=\frac{1}{2}>0.$

Следовательно, точка $M_0(2,4)$ является точкой экстремума исследуемой функции, причем т.к. $A>0,$ M_0 − точка минимума и

$$u_{\min}=u(2,4)=0.$$

Ответ: $u_{\min}=u(2,4)=0.$

Задача 13. Найти локальные экстремумы функции двух переменных, заданной неявно ($z = z(x,y)$):

$$x^2+2y^2+3z^2+4yz-2x+4y-9=0. \tag{2.64}$$

Решение. Чтобы найти точки, «подозрительные» на экстремум, воспользуемся необходимым условием существования экстремума ФНП ($z'_x=z'_y=0$). Отметим, что в равенстве (2.64) x и y – независимые переменные, а $z=z(x,y)$.

Сначала равенство (2.64) продифференцируем по переменной x:

$$2x+6z\cdot z'_x+4y\,z'_x-2=0. \tag{2.65}$$

Отсюда, учитывая, что в “подозрительной” точке $z'_x=0,$ получим

$$2x-2=0,\ \text{т.е}\ .\, x=1. \tag{2.66}$$

Аналогично, дифференцируя равенство (2.64) по переменной y, имеем

$$4y+6z\cdot z'_y+4z+4y\,z'_y+4=0, \tag{2.67}$$

что с учетом того, что $z'_y=0$ дает нам

$$4y+4z+4=0. \tag{2.68}$$

Уравнения (2.64),(2.66) и (2.68) объединяем в систему:

$$\begin{cases} x=1,\\ y+z+1=0\\ \mathrm{x}^{\ 2}\ +2\mathrm{y}^2+3z^2+4yz-2x+4y-9=0. \end{cases} \tag{2.69}$$

Система (2.69) имеет два решения: $M_1(1,-7,6)$ и $M_2(1,1,-2)$ – это точки,”подозрительные” на экстремум.

Для дальнейшего исследования используем достаточное условие существования экстремума.

Применяя правило дифференцирования неявно заданной функции, из равенств (2.65) и (2.67) получим

$$z''_{xx}\Big|_{M_i} = -\frac{1}{3z+2y}\Big|_{M_i}, \quad z''_{xy}\Big|_{M_i} = 0, \quad z''_{yy}\Big|_{M_i} = -\frac{2}{3z+2y}\Big|_{M_i}.$$

Здесь мы учли, что $z'_x\Big|_{M_i} = z'_y\Big|_{M_i} = 0; \quad i = 1, 2.$ Отсюда

$$\Delta\Big|_{M_i} = z''_{xx}\Big|_{M_i} \cdot z''_{yy}\Big|_{M_i} - (z'')^2_{xy}\Big|_{M_i} = \frac{2}{(3z+2y)^2} > 0.$$

Следовательно, каждая точка $M_i \quad (i = 1, 2)$ является точкой строгого экстремума заданной неявной функции.

Далее, так как $z''_{xx}\Big|_{M_1} < 0,$ то точка $M_1(1, -7, 6)$ – точка строгого максимума: $z_{\max} = z(1, -7) = 6;$ так как $z''_{xx}\Big|_{M_2} > 0,$ то точка $M_2(1,1,-2)$ – точка строгого минимума: $z_{\min} = z(1,1) = -2.$

Ответ: $z_{\min} = z(1,1) = -2, \quad z_{\max} = z(1,-7) = 6.$

Задача 14. Найти точки условного экстремума заданной функции $u = u(x, y).$

а) $u(x, y) = xy,$ если

$$x + y = 1. \tag{2.70}$$

Решение. В данном случае условие связи (2.70) таково, что можно выразить переменную y через переменную x:

$$y = 1 - x. \tag{2.71}$$

Подставляя (2.71) в функцию $u(x, y),$ получим

$$u(x, 1-x) = x\,(1-x) \equiv v(x).$$

Таким образом, задача на условный экстремум функции $u(x, y)$ свелась к задаче на безусловный экстремум функции $v(x).$ Имеем

$$v'(x) = 1 - 2x = 0, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad v''(x) = v''(x_0) = -2 < 0.$$

Отсюда следует, что точка $x_0=\dfrac{1}{2}$ является точкой максимума функции $v(x)$: $v_{\max}=v\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}.$ Тогда точка $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ есть точка условного максимума функции $u(x,y)$: $u_{усл.\max}=u\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}.$

Ответ: $u_{усл.\max}=u\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}.$

б) $u(x,y)=xy,$ если

$$x^2+y^2=1. \tag{2.72}$$

Решение. Параметризуем условие связи (2.72):

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in[0,2\pi]. \tag{2.73}$$

Подставляя (2.73) в функцию $u(x,y)$, получим

$$u(\cos t,\sin t)=\cos t\,\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t\equiv v(t),\quad t\in[0,2\pi].$$

Таким образом, задача на условный экстремум функции $u(x,y)$ свелась к задаче на безусловный экстремум функции $v(t)$, определенной на ке$[0,2\pi]$.Так как $v(t)=\dfrac{1}{2}\sin 2t,$ то совершенно очевидно, что $v_{\min}=v\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=v\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2},\quad v_{\max}=v\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=v\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}.$

Тогда

$$u_{усл.\min}=u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=u\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2},$$

$$u_{усл.\max}=u\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ответ:

$u_{усл.\min}=u\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2},$

$u_{усл.\max}=u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=u\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}.$

в) $u(x,y)=xy,$ если

$$x^3+y^3-4xy=0. \qquad (2.73)$$

Решение. При условии связи (2.73) целесообразно применить метод множителей Лагранжа (см. пример 1.12, стр. 25). Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^3+y^3-4xy) \qquad (2.74)$$

Далее,

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+3\lambda x^2-4\lambda y=0, \qquad (2.75)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=x+3\lambda y^2-4\lambda x=0, \qquad (2.76)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3+y^3-4xy=0. \qquad (2.77)$$

Решениями системы (2.75) – (2.77) являются $\tilde{M}(0,0,\lambda),\ \lambda\in R$ и $M_0\left(2,2,-\frac{1}{2}\right)$.

Сначала докажем, что точка (0,0) не может быть точкой экстремума функции $u(x,y)$ при условии (2.73).

Имеем $u(0,0)=0.$ Далее в любой окрестности точки M(0,0) непрерывная кривая (2.73) имеет точки как в 1-й четверти, так и во 2-й и 4-й четвертях. Но в 1-й четверти на кривой (2.73) $u(x,y)>0,$ т.е. $u(x,y)>u(0,0);$ во 2-й и 4-й четвертях на кривой (2.73) $u(x,y)<0,$ т.е. $u(x,y)<u(0,0).$ Тогда, согласно определению точки условного экстремума, точка M(0,0) не является точкой условного экстремума функции $u(x,y).$

Теперь рассмотрим точку $M_0\left(2,2,-\frac{1}{2}\right)$. Имеем

$$d^2L\Big|_{M_0}=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\Big|_{M_0}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0}dx\,dy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\Big|_{M_0}dy^2=-6(dx^2-dx\,dy+dy^2)<0.$$

Очевидно, что квадратичная форма в скобках является положительно определенной. Следовательно, $d^2L\Big|_{M_0}<0$ и точка $M(2,2)$ есть точка условного максимума функции $u(x,y)=xy:\quad u_{усл.\max}=u(2,2)=4.$

Ответ: $u_{усл.\max}=u(2,2)=4.$

Задача 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ в области $G=\{(x,y)\in R^2:\quad x^2+y^2\le 25,\ x-y\le 5\}.$

Решение. Сначала на координатной плоскости изобразим область *G*, в которой исследуется заданная функция *f(x,y)*. Обозначим:

$\Gamma_1 = \{(x,y) \in R^2 : \rho = 5,\ 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\}$. Здесь (ρ, φ) – полярные координаты точки (x, y).

Напомним, что $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$ Далее, обозначим $\Gamma_2 = \{(x,y) \in R^2 :\ y = x - 5,\ 0 \le x \le 5\}$. Таким образом, $\partial G = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$; ∂G – граница области *G*.

1°. Ищем стационарные точки функции $f(x, y)$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2x - 12 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 2y + 16 = 0. \qquad (2.78)$$

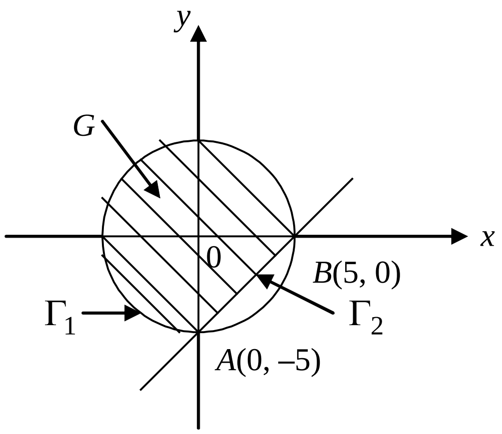

Рис. 2.1

Система уравнений (2.78) имеет единственное решение $M_0(6-8)$; но эта точка не принадлежит области *G*.

2°. Исследуем функцию $f(x, y)$ на границе ∂G.

Так как граница ∂G состоит из двух частей Γ_1 и Γ_2, по-разному выражающихся аналитически, то исследуем функцию $f(x, y)$ на каждой из этих частей отдельно. Предварительно вычислим значения функции $f(x, y)$ в точках стыка частей границы Γ_1 и Γ_2 (A(0,–5), B(5,0), см. рис. 2.1):

$$f(0,-5) = -55, \quad f(5,0) = -35. \qquad (2.79)$$

а) На части Γ_1 функция $f(x,y) \equiv f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 25 - 60\cos\varphi + 80\sin\varphi \equiv u(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$. На отрезке $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ найдем стационарные точки функции

$u(\varphi):\quad u'(\varphi)\equiv 60\sin\varphi+80\cos\varphi=0.$ Отсюда на отрезке $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ получаем единственную стационарную точку $\varphi_0=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}.$ Тогда

$$u(\varphi_0)=f(-3,4)=125. \tag{2.80}$$

б) На части Γ_2 функция $f(x,y)=f(x,x-5)=2x^2-6x-55\equiv v(x),\quad x\in[0,5].$
На отрезке $[0,5]$ найдем стационарные точки функции $v(x)$:
$v'(x)\equiv 4x-6=0.$ Отсюда стационарная точка $x_0\left(\dfrac{3}{2}\right)\in[0,5].$Тогда

$$v\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2},-\frac{7}{2}\right)=-\frac{119}{2}. \tag{2.81}$$

в) Из найденных значений (2.79) – (2.81) функции $f(x,y)$ получим

$$\min_{(x,y)\in\partial G} f(x,y)=-\frac{119}{2},\quad \max_{(x,y)\in\partial G} f(x,y)=125.$$

$3^\circ.$ Учитывая результаты п.п. 1° и $2^\circ,$ окончательно получим

$$\min_{(x,y)\in G\cup\partial G} f(x,y)=-\frac{119}{2},\quad \max_{(x,y)\in G\cup\partial G} f(x,y)=125.$$

Ответ: $\displaystyle\min_{(x,y)\in G\cup\partial G} f(x,y)=-\frac{119}{2},\quad \max_{(x,y)\in G\cup\partial G} f(x,y)=125.$

3. Задания

Задача 1. Найти частные производные первого и второго порядков от заданной функции.

1.1. $u=(1+\log_y x)^3$.

1.2. $u=xy+\dfrac{x}{y}$.

1.3. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

1.4. $u=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

1.5. $u=\ln(3+5x+7y)$.

1.6. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

1.7. $u=e^{-2x^2+5y^2}$.

1.8. $u=x^y+y^x$.

1.9. $u=\dfrac{\cos x^2}{y}$.

1.10. $u=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$.

1.11. $u=e^{x\,e^y}$.

1.12. $u=y^{\ln x}$.

1.13. $u=\ln(x+\ln y)$.

1.14. $u=x^{y^2}$.

1.15. $u=e^{xy^2}$.

1.16. $u=\arcsin xy$.

1.17. $u=xy\ln(x+y)$.

1.18. $u=x^{xy}$.

1.19. $u=\dfrac{1}{3x+7y}$.

1.20. $u=\sin\dfrac{x}{y}$.

1.21. $u=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$.

1.22.

$u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0,\quad u=x+y,\quad v=\dfrac{y}{x},\quad w=\dfrac{z}{x}$.

1.23. $u=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$.

1.24. $u=(1+xy)^y$.

1.25. $u=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$.

1.26. $u=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

1.27. $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.28. $u=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

1.29. $u=\operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$.

1.30. $u=(2x+y)^{2x+y}$.

Задача 2. Найти дифференциалы первого и второго порядков заданной функции.

2.1. $u=x^3y^2$.

2.2. $u=xy+yz+zx$.

2.3. $u=\cos(e^x y)$.

2.4. $u=x^y+y^x$.

2.5. $u=\ln xyz$.

2.6. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z}$.

2.7. $u=\arcsin xy$.

2.8. $u=x^3y-xy^3$.

2.9. $u=x^{2y}$.

2.10. $u=x\sqrt{1+y^2}$.

2.11. $u=\cos(x-y^2)$.

2.12. $u=\dfrac{x}{y}$.

2.13. $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

2.14. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

2.15. $u=e^{xy}$.

2.16. $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

2.17. $u=\dfrac{\sin xy}{y}$.

2.18. $u=x^4y+2x^2y^2+xy^3+x-y$.

2.19. $u=\ln(xy^2z^3)$.

2.20. $u=(2x^2y^2-x+1)^3$.

2.21. $u=(x+1)^{2y+1}$.

2.22. $u=\arccos xy$.

2.23. $u=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$.

2.24. $u=xy-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}$.

2.25. $u=z^{xy}$.

2.26. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

2.27. $u=e^{-x^3y}$.

2.28. $u=\sqrt[3]{4x^2+y^2}$.

2.29. $u=\dfrac{x+y^2}{x^2+y^2+1}$.

2.30. $u=\ln(x^3+\sin xy)$.

Задача 3. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции u, если φ - дважды непрерывно дифференцируемая функция и *x*, *y*, *z* – независимые переменные.

3.1. $u=\varphi(t),\quad t=x^2-y^2$.

3.2. $u=\varphi(\xi,\eta,\varsigma), \xi=xy,\ \eta=x-y,\ \varsigma=x+y$.

3.3. $u=\varphi(t),\quad t=xyz$.

3.4. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=xy,\ \eta=\dfrac{x}{y}$.

3.5. $u=\varphi(t),\quad t=xy+yz+zx$.

3.6. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=x^2+y^2,\ \eta=xy$.

3.7. $u=\varphi(t),\quad t=x^2+y^2+z^2$.

3.8. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=\dfrac{x}{y},\ \eta=\dfrac{y}{x}$.

3.9. $u=\varphi(t),\quad t=y\sin 3x-x\cos 5y.$

3.10. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=x+y,\ \eta=x^2+y^2.$

3.11. $u=\varphi(t),\quad t=xy+\dfrac{x}{y}.$

3.12. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=xy,\ \eta=yz.$

3.13. $u=\varphi(t),\quad t=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}.$

3.14. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=\dfrac{x^2}{y},\ \eta=\dfrac{y}{x^2}.$

3.15. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=x,\ \eta=\dfrac{x}{y}.$

3.16. $u=\varphi(t),\quad t=x+y.$

3.17. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=2x,\ \eta=-3y.$

3.18. $u=\varphi(t),\quad t=\sqrt{x^2+y^2}.$

3.19. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=x+y,\ \eta=x-y.$

3.20. $u=\varphi(t),\quad t=\dfrac{y}{x}.$

3.21. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=x+y,\ \eta=z.$

3.22. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=x+y+z,\ \eta=x^2+y^2+z^2.$

3.23. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=\dfrac{x}{y},\ \eta=\dfrac{y}{z}.$

3.24. $u=\varphi(\xi,\eta,\varsigma),\quad \xi=x,\ \eta=x^2,\ \varsigma=x^3.$

3.25. $u=\varphi(\xi,\eta,\varsigma),\quad \xi=2x,\ \eta=3y,\ \varsigma=4z.$

3.26. $u=\varphi(\xi,\eta,\varsigma),\quad \xi=x^2+y^2,\ \eta=x^2-y^2,\ \varsigma=2xy.$

3.27. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=x+y,\ \eta=z^2.$

3.28. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=xy,\ \eta=x^2+y^2.$

3.29. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=\operatorname{tg}(x+y),\ \eta=\cos xy.$

3.30. $u=\varphi(\xi,\eta),\quad \xi=\ln^2(x+e^y),\ \eta=x\arcsin y.$

Задача 4. Найти первую и вторую производные функции $y(x)$, заданной неявно.

4.1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

4.2. $y^x=x^y.$

4.3. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0.$

4.4. $\cos(x+y)+y=0.$

4.5. $y-\sin y=x.$

4.6. $x^2+y^2+\ln(x^2+y^2)=a^2.$

4.7. $\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}=a.$ 4.8. $(xy-\alpha)^2+(xy-\beta)^2=r^2.$

4.9. $x^3+2y^3-2xy\sqrt{3xy}+1=0.$ 4.10. $\ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}-\frac{y}{x}=a.$

4.11. $(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2).$ 4.12. $3\sin\frac{\sqrt{x}}{y}-2\cos\frac{\sqrt{x}}{y}+1=0.$

4.13. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0.$ 4.14. $x^2-x\cdot 2^{y+1}+4^y-x+2^y+2=0.$

4.15. $x+y-e^{x+y}=0.$ 4.16. $x^3+y^3-3axy=0.$

4.17. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0.$ 4.18. $x^2+2xy-y^2=a^2.$

4.19. $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$ 4.20. $x^3y-y^3x=a^4.$

4.21. $x^2y^2-x^4-y^4=-a^4.$ 4.22. $xe^y+ye^x-e^{xy}=0.$

4.23. $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0.$ 4.24. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$

4.25. $xy-\ln y=a.$ 4.26. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0.$

4.27. $x^2y=e^y.$ 4.28. $y\,e^x+e^y=0.$

4.29. $x^3+y^3+x+y=12.$ 4.30. $x^3+y^3-\frac{1}{5}x+4y=4{,}2.$

Задача 5. Найти $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$ для неявной функции $y(x)$, удовлетворяющей условию $y(x_0)=y_0.$

5.1. $x^2+xy+y^2=3,\quad x_0=y_0=1.$

5.2. $y\sin x+x^2+y^3=1,\quad x_0=0,\ y_0=1.$

5.3. $2y+\sin y-2x=0,\quad x_0=\frac{5\pi+1}{2},\ y_0=\frac{5\pi}{2}.$

5.4. $x^2-xy+2y^2+x-y=1,\quad x_0=0,\quad y_0=1.$

5.5. $xy+\ln xy=1,\quad x_0=2,\ y_0=\frac{1}{2}.$

5.6. $e^{x+y}+y-x=0,\quad x_0=\frac{1}{2},\ y_0=-\frac{1}{2}.$

5.7. $y=x+\operatorname{arctg}y,\quad x_0=\frac{4-\pi}{4},\ y_0=1.$

5.8. $x-y+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\frac{\pi}{4},\quad x_0=y_0=2.$

5.9. $x^2+y^2+5xy-2x+y+24=0,\quad x_0=2,\ y_0=-3.$

5.10. $x^4 - xy + y^4 = 21, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 5.$

5.11. $(x+y)^2(2x+y)^3 = 125, \quad x_0 = 4 \;\; y_0 = -3.$

5.12. $y = e^{-\frac{x}{y}}, \quad x_0 = 0, \, y_0 = 1.$

5.13. $x^2 + y^2 - 7x + y - 30 = 0, \quad x_0 = 7, \, y_0 = -6.$

5.14. $y = 1 + y^x, \quad x_0 = 0, \, y_0 = 2.$

5.15. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 6 = 0, \quad x_0 = 4, \, y_0 = 5.$

5.16. $\ln\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y^2 - 1}{x}, \, x_0 = y_0 = 1.$

5.17. $xy - \ln ch\, xy = 0, \quad x_0 = 1, \, y_0 = 0.$

5.18. $x = y - \alpha \sin y, \quad x_0 = y_0 = k\pi, \, k \in Z.$

5.19. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0, \quad x_0 = y_0 = 1.$

5.20. $x + y + 1 = e^{x-y}, \quad x_0 = y_0 = 0.$

5.21. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \quad x_0 = a, \, y_0 = b + R.$

5.22. $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y + y^3, \quad x_0 = y_0 = 1.$

5.23. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0, \quad x_0 = 6, \, y_0 = 2.$

5.24. $x^4 y + xy^4 - ax^2 y^2 = a^5, \quad x_0 = y_0 = a.$

5.25. $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = 1, \quad x_0 = {}^3\!/_5, \, y_0 = -{}^4\!/_5.$

5.26. $x^3 + y^3 - 3xy = -1, \quad x_0 = 2, \, y_0 = -3.$

5.27. $5(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2), \quad x_0 = 1, \, y_0 = -2.$

5.28. $5x^2 y^2 - x^4 - y^4 = 1, \quad x_0 = 2, \, y_0 = -1.$

5.29. $3\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{3} - y = \dfrac{3\pi}{4}, \quad x_0 = 3, \, y_0 = 0.$

5.30. $2xy - \ln y + 1 = 0, \quad x_0 = 0, \, y_0 = e.$

Задача 6. Найти частные производные первого и второго порядков функции $z(x,y)$, заданной неявно.

6.1. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0.$

6.2. $z^3 + 3xy = a^3.$

6.3. $e^3 - xyz = 0.$

6.4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

6.5. $x + y + x = e^z.$

6.6. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

6.7. $z = x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{z - x}$.

6.8. $x^2 + y^2 + x^2 = 2z$.

6.9. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$.

6.10. $z = \sqrt{x^2 - y^2}\,\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

6.11. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.

6.12. $z^3 - xyz + y^2 = 16$.

6.13. $\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} = z + x + y$.

6.14. $x + y + z = \ln xyz, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

6.15. $\ln(xy + yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$.

6.16. $x + y + z = \cos xyz$

6.17. $z^4 + zx^3 + zy^3 = a^4$.

6.18. $xyz = x^2 + y^2 + z^2$.

6.19. $\dfrac{z}{x^2 + y^2} = \ln(x + y + z)$.

6.20. $z(1 + x^2) = y(1 + z^4)$.

6.21. $x^2 - y^2 + 2z^2 - zy + y = 0$.

6.22. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

6.23. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

6.24. $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$.

6.25. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = a^2$.

6.26. $z^3 - 3xyz = 4$.

6.27. $z^4 - 2zx^3 + 4zy^3 = 48$.

6.28. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6xyz$.

6.29. $\ln(xy + xz) = x^2 - y^2 + 2z^2 - 3$.

6.30. $x + y + z = \operatorname{tg} xyz$

Задача 7. Найти второй дифференциал в точке $M_0(x_0, y_0)$, $z(M_0) = z_0$ функции z = z(x,y), заданной неявно.

7.1. $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0,\ M_0 = (2,1),\ z_0 = 2$.

7.2. $x = z\ln\frac{z}{y}, \quad M_0 = (0, 2), z_0 = 2.$

7.3. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9, \quad M_0 = (1, -2), z_0 = 1.$

7.4. $3xyz + x^2z^2 = 5(x + y), \quad M_0 = (1, -2), z_0 = 1.$

7.5. $x^2 + zx + z^2 + y = 34, \quad M_0 = (4, -3), z_0 = -7.$

7.6. $x^3 + y^3 - 3xyz - z^3 + 2 = 0, \quad M_0 = (2, -1), z_0 = 3.$

7.7. $2\ln xyz = x^2 + y^2 - z^2 - 4,\ x > 0,\ y > 0, z > 0;\ M_0 = (4, \frac{1}{2}),\ z_0 = \frac{1}{2}.$

7.8. $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz, \quad M_0 = (-1, -1), z_0 = 1.$

7.9. $xz^5 + y^3z - x^3 = 0, \quad M_0 = (1, 0), z_0 = 1.$

7.10. $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 72 = 0, \quad M_0 = (1, 1), z_0 = 4.$

7.11. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0, \quad M_0 = (-2, 0), z_0 = 1.$

7.12. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz - z - 8 = 0, \quad M_0 = (0, 2), z_0 = 1.$

7.13. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 10 = 0, \quad M_0 = (1, -1), z_0 = 3.$

7.14. $z^3 + 3xyz + 207 = 0, \quad M_0 = (5, 4), z_0 = -3.$

7.15. $e^z - xyz = 1 \quad M_0 = (-1, 7), z_0 = 0.$

7.16. $x + y + z = 2e^z, \quad M_0(2, -1), z_0 = 0.$

7.17. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{z - x} + x + 1, \quad M_0 = (-2, 0), z_0 = -1.$

7.18. $x^2 + y^2 + z^2 = 3z, \quad M_0 = (1, -1), z_0 = 1.$

7.19. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0, \quad M_0 = (-1, -1), \quad z_0 = 2.$

7.20. $z = 2\sqrt{x^2 - y^2}\ \operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad M_0 = (2, 1), z_0 = 0.$

7.21. $z^3 - xyz + y^2 = 3, \quad M_0 = (1, 2), z_0 = 1.$

7.22. $\operatorname{arctg}\frac{z}{x} = 2z + x + y, \quad M_0 = (1, -1), z_0 = 0.$

7.23. $\ln(xy + yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2, \quad M_0 = (0, 1), z_0 = 1.$

7.24. $x + y + z = \cos xyz, \quad M_0 = (0, 0)\ \ z_0 = 1.$

7.25. $z^4 + zx^3 + zy^3 = 1, \quad M_0 = (1, -1), z_0 = 1.$

7.26. $x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 8, \quad M_0 = (1, 2), z_0 = 3.$

7.27. $\frac{z}{x^2 + y^2} = \ln(x + y + z), \quad M_0 = (-1, 2), z_0 = 0.$

7.28. $z(1 + x^2) = y(1 + z^4), \quad M_0 = (13, 0), z_0 = 0.$

7.29. $x^2 - y^2 + 2z^2 - zy + y = 67$, $M_0 = (-7,4)$, $z_0 = 5$.

7.30. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 47$, $M_0 = (-4,2)$, $z_0 = 3$.

Задача 8. Приняв y за новую независимую переменную, а x за функцию от y, преобразовать следующие уравнения:

8.1. $y'y''' - 3(y'')^2 - (y')^5 y = 0$. 8.2. $y'' + (e^y - x)(y')^3 = 0$.

8.3. $(y')^2 y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15(y)^3 = 0$. 8.4. $y'' - x(y')^3 + e^y (y')^3 = 0$.

8.5. $y'' + (y')^3 y = 0$. 8.6. $(y''' + yy')(y')^2 - (y'')^2 (3y' + x^2 = 0$.

Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные уравнения:

8.7. $y^2 + (x^2 - xy)\, y' = 0$, $y = tx$, $y = y(t)$.

8.8. $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0$, $x = \dfrac{1}{t}$, $y = y(t)$.

8.9. $x^3 y'' + xyy' - y^2 = 0$, $x = e^t$, $y = u\, e^t, u = u(t)$.

8.10. $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$, $x = e^t$, $y = y(t)$.

8.11. $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)\, y' + y = 0$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = y(t)$.

8.12. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, u = \dfrac{1}{y^2}, u = u(x)$.

8.13. $y''' - x^3 y'' + xy' - y = 0$, $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{u}{t}$, $u = u(t)$.

8.14. $x^2 y'' - 4xy' + y = 0$, $x = e^t$, $y = y(t)$.

8.15. $y''' = \dfrac{6y}{x^3}$, $t = \ln|x|$, $y = y(t)$.

8.16. $y' = xy + x^2 y^3$, $u = \dfrac{1}{y^2}$, $u = u(x)$.

8.17. $xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$, $t = y$, $u = \ln\dfrac{y}{x}$, $u = u(t)$.

8.18. $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$, $t = \ln x$, $y = y(t)$.

8.19. $x^4 y'' - c^2 y = 0$, $y = \dfrac{u}{t}$, $x = \dfrac{1}{t}$, $u = u(t)$.

8.20. $\dfrac{x^2}{1 - \ln x} y' + y = 1, y = u + 1, \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln t}{t}, u = u(t)$.

8.21. $(1 - x^2)\, y'' - xy' + ay = 0$, $x = \sin t$, $y = y(t)$.

8.22. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, $x = u + t$, $y = u - t$, $u = u(t)$.

8.23. $xy'' + 2y' - xy = e^x$, $y = \dfrac{u}{x}, u = u(x)$.

8.24. $y'' + 2th2x \cdot y' + \dfrac{m^2 y}{ch^2 2x} = 0, \quad x = \dfrac{1}{2}\ln \mathrm{tg}\, 2t, \quad y = y(t).$

8.25. $(1+x^2)^2 y'' = -y, \quad x = tht, \quad y = \dfrac{u}{cht}, \quad u = u(t).$

8.26. $xy'' - y' + xy = 0, \quad t = \dfrac{x^2}{4}, \quad y = y(t).$

8.27. $(x - x^3)\, y'' + (1 - 3x^2)\, y' - xy = 0, \quad x = \sqrt{1-t^2}.$

8.28. $(1+x^2)^2 y'' = y, \quad x = \mathrm{tg}\, t, \quad y = \dfrac{u}{\cos t}, \quad u = u(t).$

8.29. $y'' = \dfrac{y}{(x-1)^2 (x-2)^2}, u = \dfrac{y}{x-2}, t = \ln\dfrac{x-1}{x-2}, u = u(t).$

8.30. $(1-x^2)^2 y'' - 2x(1-x^2)\, y' + \dfrac{2xy}{1-x} = 0, \quad x = tht, \quad y = y(t).$

Задача 9. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

9.1. $z_{xx} + z_{yy} + m^2 z = 0, \quad x = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv.$

9.2. $x^2 z_{xx} - 2x \sin y \cdot z_{xy} + \sin^2 y \cdot z_{yy} = 0, \quad u = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{2}, \quad v = x.$

9.3. $2z_{xx} + z_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0, \quad u = x + 2y + 2, \quad v = x - y - 1.$

9.4. $z_{xx} + 2xy^2 z_x + 2(y - y^3)\, z_y + x^2 y^2 z = 0, \quad x = uv, \quad y = \dfrac{1}{v}.$

9.5. $(1+x^2)\, z_{xx} + (1+y^2)\, z_{yy} + xz_x + yz_y = 0,$
$u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$

9.6. $z_{xx} - yz_{yy} = 0,\, y > 0, \quad x = \dfrac{1}{2}(u+v), \quad y = \dfrac{1}{16}(u-v)^2.$

9.7. $ax^2 z_{xx} + 2bxyz_{xy} + cy^2 z_{yy} = 0, \quad u = \ln x, \quad v = \ln y.$

9.8. $y^2 z_{xx} + 2yz_{xy} + z_{yy} = 0, \quad x = \dfrac{1}{2}(u + v^2), \quad y = v.$

9.9. $z_{xx} + z_{yy} = 0, \quad u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \dfrac{y}{x^2+y^2}.$

9.10. $xz_{xx} - 2\sqrt{xy}\, z_{xy} + yz_{yy} + \dfrac{1}{2} z_y = 0, \quad u = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad v = \sqrt{x}.$

9.11. $\mathrm{tg}^2 x \cdot z_{xx} - 2y\,\mathrm{tg}\, x \cdot z_{xy} + y^2 \cdot z_{yy} + \mathrm{tg}^3 x \cdot z_x = 0,$
$u = y \sin x, \quad v = y.$

9.12. $z_{xx}+z_{yy}+m^2z=0, \quad x=e^u\cos v, \quad y=e^u\sin v.$

9.13. $z_{xx}-yz_{yy}-\frac{1}{2}z_y=0,\ y>0, \quad u=x-2\sqrt{y}, \quad v=x+2\sqrt{y}.$

9.14. $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0,\ u=\frac{y}{x},\ v=y.$

9.15. $xy\cdot z_{xx}-(x^2+y^2)\cdot z_{xy}+xy\cdot z_{yy}+y\cdot z_x+x\cdot z_y=0,$
$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad v=xy.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

9.16. $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0, \quad u=x, \quad v=x-y, \quad w=x-y+z.$

9.17. $yz_{yy}+2z_y=\frac{2}{x}, \quad u=\frac{x}{y}, \quad v=x, \quad w=xz-y.$

9.18. $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0 \quad u=x+y, \quad v=x-y, \quad w=xy-z.$

9.19. $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0, \quad u=x+y, \quad v=\frac{y}{x}, \quad w=\frac{z}{x}.$

9.20. $z_{xx}-2z_{xy}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\cdot z_{yy}=0,\ u=x,\ v=x+y,\ w=x+y+z.$

9.21. $z_{xx}+z_{xy}+z_x=z, \quad u=\frac{1}{2}(x+y), \quad v=\frac{1}{2}(x-y), \quad w=ze^y.$

9.22. $x^2z_{xx}-2xy\,z_{xy}+y^2z_{yy}=0, \quad u=xy, \quad v=y, \quad w=z-y.$

9.23. $x\,z_{xx}+2x\,z_{xy}-x\,z_{yy}+z_x+z_y=4,$
$u=x+y, \quad v=x-y, \quad w=zx.$

9.24. $(1-x^2)\,z_{xx}+(1-y^2)\,z_{yy}-xz_x-yz_y=0, \quad x=\sin u, \quad y=\sin v, \quad z=e^w.$

9.25. $z_{xx}+z_{xy}+z_{yy}-z=1-xy,\ u=\frac{1}{2}-x,\ v=\frac{1}{2}-y \ \ w=xy-z.$

9.26. $(1-x^2)\cdot z_{xx}-z_{yy}-2x\cdot z_x-\frac{1}{4}z=0, \quad |x|<1,$
$u=\frac{1}{2}(y+\arccos x), \quad v=\frac{1}{2}(y-\arccos x), \quad w=z\sqrt[4]{1-x^2}.$

9.27. $(1-x)\cdot z_{xx}-z_{yy}-z_x=0, \quad u=\frac{1}{2}y+\sqrt{1-x},$
$v=\frac{1}{2}y-\sqrt{1-x}, \quad w=\sqrt{2}\cdot z\cdot\sqrt[4]{1-x}.$

9.28. $$(x^2-y^2)(z_{xx}+z_{yy})-2xz_x+2yz_y+3\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}z=0,$$
$$|x|>|y|,\quad u=x+y,\quad v=x-y,\quad w=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

9.29. $z_{yy}+2z_{xy}+z_{xx}=0,\ u=y+x,\ v=y-x,\ w=xy-z.$

9.30. $$z_y(1+z_y)\cdot z_{xx}-(1+z_x+z_y+2z_xz_y)\cdot z_{xy}+z_x(1+z_x)\cdot z_{yy}=0,$$
$$u=x+z,\quad v=y+z,\quad w=x+y+z.$$

Задача 10. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

10.1. $u=\dfrac{x^2}{yz^2},\quad v=\dfrac{x^3}{2}-6y^3+3\sqrt{6}\,z^3,\quad M_0\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

10.2. $u=xyz,\quad v=x^2+9y^2+6z^2,\quad M_0\left(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

10.3. $u=\dfrac{y}{xz^2},\quad v=6\sqrt{6}\,x^3-6\sqrt{6}\,y^3+2z^3,\quad M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

10.4. $u=\dfrac{yz}{x},\quad v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,z},\quad M_0\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

10.5. $u=\dfrac{x^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{8z^3}{\sqrt{3}},\quad v=\dfrac{x^2}{y^2z^3},\quad M_0\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

10.6. $u=-\dfrac{\sqrt{6}}{2x}+\dfrac{\sqrt{6}}{2y}-\dfrac{2}{3z},\quad v=\dfrac{x}{yz^2},\quad M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

10.7. $u=6\sqrt{6}\,x^3-6\sqrt{6}\,y^3+2z^3,\quad v=\dfrac{xz^2}{y},\quad M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},1\right).$

10.8. $u=3\sqrt{2}\,x^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y^2+3\sqrt{2}z^2,\quad v=\dfrac{z^2}{xy^2},\quad M_0\left(\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right).$

10.9. $u=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot x}-\dfrac{2\sqrt{2}}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2z},\quad v=\dfrac{y^2z^3}{x},\quad M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

10.10. $u=9\sqrt{2}x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}},\quad v=\dfrac{z^3}{xy^2},\quad M_0\left(\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right).$

10.11. $u=\dfrac{y}{xz^2},\ v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3,\quad M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

10.12. $u = 9\sqrt{2}\cdot x^3 - \dfrac{y^3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}, \quad v = \dfrac{xy^2}{z^3}, \quad M_0\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right).$

10.13. $u = \dfrac{\sqrt{6}}{2x} - \dfrac{\sqrt{6}}{2y} + \dfrac{2}{3z}, \quad v = \dfrac{yz^2}{x}, \quad M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

10.14. $u = \sqrt{2}\,x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}y^2 - 6\sqrt{2}\,z^2, \quad v = xy^2z, \quad M_0\left(1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

10.15. $u = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6}\,z}, \quad v = \dfrac{z}{x^3y^2}, \quad M_0\left(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

Найти производную скалярного поля u(x,y,z) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$.

10.16 . $u = x^2 - xy + y^2 + 2z, \quad M_0(1,2,3), \quad \vec{l}(1,1,1).$

10.17 . $u = xy^2z^3, \quad M_0(3,2,1), \quad \vec{l}(2,2,1).$

10.18. $u = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2, \quad M_0(3,3,1), \quad \vec{l}(2,2,1).$

10.19. $u = \ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} z, \quad M_0(0,1,1), \quad \vec{l}(2,-3,-2).$

10.20. $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad M_0(1,1,1), \quad \vec{l}(2,1,2).$

10.21. $u = -x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}, \quad M_0(1,1,-2), \quad \vec{l}(1,-1,-2).$

10.22. $u = \ln(x^2+y^2+z^2), \quad M_0(1,2,1), \quad \vec{l}(2,2,2)$

10.23. $u = 4\ln(3+x^2) - 8xyz, \quad M_0(1,1,1), \quad \vec{l}(1,-1,1).$

10.24. $u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6}, \quad M_0(6,-7,1), \quad \vec{l}(2,1,-2).$

10.25. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{9-z^2}, \quad M_0(1,1,0), \quad \vec{l}(-2,2,-1).$

10.26. $u = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}, \quad M_0(1,-3,4), \quad \vec{l}(0,1,-1).$

10.27. $u = xy - \dfrac{x}{z}, \quad M_0(-4,3,-1), \quad \vec{l}(5,1,-1).$

10.28. $u = x^2y - \sqrt{xy+z^2}, \quad M_0(1,5,-2), \quad \vec{l}(0,1,-1).$

10.29. $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z), \quad M_0(-2,1,-1), \quad \vec{l}(2,1,2).$

10.30. $u = y\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} z, \quad M_0(0,1,1), \quad \vec{l}(2,-3,-2).$

Задача 11. Найти касательную плоскость и нормаль к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

11.1. $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z - 9 = 0, \quad M_0(\sqrt{5},1,0).$

11.2. $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y, \quad M_0(1,1,1).$

11.3. $z = x^2 + y^2, \quad M_0(1,2,5).$

11.4. $xy^2 + z^3 = 12, \quad M_0(1,2,2)$

11.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 169, \quad M_0(3,4,12).$

11.6. $z = xy, \quad M_0(5,1,5).$

11.7. $x^2y^3 - xy^2 = z + \dfrac{3}{8}, \quad M_0\left(2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{8}\right).$

11.8. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad M_0\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right).$

11.9. $z = x + y^2, \quad M_0(0,1,1).$

11.10. $z = 1 + x^2 + y^2, \quad M_0(1,1,3).$

11.11. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2x, \quad M_0(2,0,0).$

11.12. $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4y + 3z = 0, \quad M_0(\sqrt{3},-1,0).$

11.13. $x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad M_0(2,2,3).$

11.14. $z = y + \ln\dfrac{x}{z}, \quad M_0(1,1,1).$

11.15. $x^8 + y^{13} + 5z = 7, \quad M_0(1,1,1).$

11.16. $x^3 + y^3 - 3xz = 3, \quad M_0(1,4,2).$

11.17. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8, \quad M_0(2,2,1).$

11.18. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad M_0(1,0,0).$

11.19. $z = x^3 + y^3, \quad M_0(1,-1,0).$

11.20. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1, \quad M_0(1,0,0).$

11.21. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0, \quad M_0(0,1,1)$

11.22. $z = \sin(xy), \quad M_0\left(1, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

11.23. $z = \sin x \cos y, \quad M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{2}\right).$

11.24. $xy + xz + yz = x^3 + y^3 + z^3, \quad M_0(1,1,1).$

11.25. $x^3 + y^3 + z^3 = -xyz, \quad M_0(1,-1,-1).$

11.26. $z = e^{x+y}, \quad M_0(1,-1,1).$

11.27. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1, \quad M_0\left(0, -\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}, 1\right).$

11.28. $x^2+2y^2+3z^2=21, \quad M_0(4,1,1)$.

11.29. $x^2+y^2+z^2=169, \quad M_0(0,13,0)$.

11.30. $2x^2-y^2+z^2-4z-10=0, M_0(\sqrt{5},1,0)$.

Задача 12. Найти локальные экстремумы функций.

12.1. $u=3x^2y+y^3-18x-30y$. 12.2. $u=xy^2(1-x-y)$.

12.3. $u=xy+\dfrac{1}{2(x+y)}$. 12.4. $u=x^3y^2(a-x-y)$.

12.5. $u=x^2+xy+y^2-3ax-3by$. 12.6. $u=x^4+y^4-(x+y)^2$.

12.7. $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}+y$. 12.8. $u=xy\ln(x^2+y^2)$.

12.9. $u=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}, a>0, b>0$. 12.10. $u=x^4+y^4-2(x-y)^2$.

12.11. $u=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$. 12.12. $u=e^{x+2y}(x^2-y^2)$.

12.13. $u=x^3+y^3-15xy$. 12.14. $u=x^2+3xy-8\ln|x|-6\ln|y|$.

12.15. $u=e^{2x}(x+y^2+2y)$. 12.16. $u=x^3-2y^3-3x+6y$.

12.17. $u=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$. 12.18. $u=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

12.19. $u=x^3-2x^2y^2+y^4$. 12.20. $u=(x-2y)e^{-(x^2+y^2)}$.

12.21. $u=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

12.22 $u=(a\cos x+b\cos y)^2+(a\sin x+b\sin y)^2$.

12.23. $u=x^2-2xy+2y^2+2x$. 12.24. $u=x^2-2xy^2+y^4-y^5$.

12.25. $u=x^4+y^4-36xy$. 12.26. $u=(x^2-2xy+2y^2)e^{x-y}$.

12.27. $u=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. 12.28. $u=(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y\ )}$.

12.29. $u=x+y+4\sin x\cdot\sin y$. 12.30. $u=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$.

Задача 13. Найти локальные экстремумы функции двух переменных, заданной неявно ($z=z(x,y)$).

13.1. $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$.

13.2. $(x^2+y^2+z^2)^2=25(x^2+y^2-z^2)$.

13.3. $x^4+y^4+z^4=98(x^2+y^2+z^2)$.

13.4. $z^3-xyz+y^2-16=0$.

13.5. $(x^2+y^2-z^2)^2=36(x^2+y^2+z^2)$.

13.6. $2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x-8y+3=0$.

13.7. $(x^2+y^2+z^2)^2=9(x^2+y^2-z^2)$.

13.8. $5z^2+4zy+y^2+3x^2-6x-2y+4=0$.

13.9. $x^4+y^4+z^4=2(x^2+y^2+z^2)$.

13.10. $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$.

13.11. $(x^2+y^2-z^2)^2=4(x^2+y^2+z^2)$.

13.12. $6(x^2+y^2+z^2)+4x-8y-8z+5=0$.

13.13. $x^4+y^4+z^4=18(x^2+y^2+z^2)$.

13.14. $z^3-xyz+y^2+4x^2-16=0$.

13.15. $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2-z^2$.

13.16. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

13.17. $(x^2+y^2-z^2)^2=9(x^2+y^2+z^2)$.

13.18. $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.

13.19. $(x^2+y^2+z^2)^2=49(x^2+y^2-z^2)$.

13.20. $5(x^2+y^2+z^2)-2xy-2xz-2yz-72=0$.

13.21. $x^4+y^4+z^4=8(x^2+y^2+z^2)$.

13.22. $x^3y-3xy^2+6x+y^2+7y+z^2-3z-14=0$

13.23. $(x^2+y^2+z^2)^2=16(x^2+y^2-z^2)$.

13.24. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

13.25. $(x^2+y^2-z^2)^2=x^2+y^2+z^2$.

13.26. $(x^2+y^2+z^2)^2=4(x^2+y^2-z^2)$.

13.27. $x^4+y^4+z^4=72(x^2+y^2+z^2)$.

13.28. $(x^2+y^2+z^2)^2=36(x^2+y^2-z^2)$.

13.29. $(x^2+y^2-z^2)^2=25(x^2+y^2+z^2)$.

13.30. $x^4+y^4+z^4=50(x^2+y^2+z^2)$.

Задача 14. Найти точки условного экстремума заданной функции.

14.1. $u=2x+y-z+1$, если $x^2+y^2+2z^2=22$.

14.2. $u=x+y$, если $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{25}$.

14.3. $u=xyz$, если $x+y+z=5$.

14.4. $u = x^2 + y^2$, если $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

14.5. $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

14.6. $u = x^2 + 12xy + 2y^2$, если $4x^2 + y^2 = 25$.

14.7. $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

14.8. $u = x - y$, если $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 0$, $|x| < \frac{\pi}{2}, |y| < \frac{\pi}{2}$.

14.9. $u = xyz$, если $xy + xz + yz = 25$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

14.10. $u = x + y + z$, если $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$.

14.11. $u = \cos^2 x + \cos^2 y$, если $x - y = \frac{\pi}{4}$.

14.12. $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, если $x - y + z = 1$.

14.13. $u = x^3 + y^2 - z^3 + 5$, если $x + y - z = 0$.

14.14. $u = x - 2y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

14.15. $u = x^2 y^3 z^4$, если $2x + 3y + 4z = 5$.

14.16. $u = xyz$, если $xy + xz + yz = 9, x > 0, y > 0, z > 0$.

14.17. $u = xyz$, если $xy + xz + yz = 8, x + y + z = 5$.

14.18. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + 2y + 3z = 0$.

14.19. $u = x^2 + y^2 + z^2$, если $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$.

14.20. $u = x - 2y + z$, если $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

14.21. $u = xy^2 z^3$, если $x + 2y + 3z = 6, x > 0, y > 0, z > 0$.

14.22. $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

14.23. $u = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$, если $x + z + y = \pi, x > 0, y > 0, z > 0$.

14.24. $u = xy + yz$, если $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2, x > 0, y > 0, z > 0$.

14.25. $u = \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16}$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

14.26. $u = x + y$, если $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{49}$.

14.27. $u = xy$, если $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

14.28. $u = x + y + z$, если $\frac{4}{x} + \frac{7}{y} + \frac{10}{z} = 1$.

14.29. $u = x^2 y^3 z^4$, если $2x + 3y + 4z = 21$.

14.30. $u = xyz$, если $xy + xz + yz = 36,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

Задача 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области.

15.1. $f = x^2 - xy + y^2 - 4x;\quad 0 \le x \le 6,\quad 0 \le y \le 4 - \dfrac{2}{3}x.$

15.2. $f = x^2 + 3y^2 + 2y;\quad |x| \le 1,\quad |y| \le 1.$

15.3. $f = xy - x^2y - \dfrac{1}{2}xy^2;\quad 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2.$

15.4. $f = x^2 + y^2 - 12x + 16y;\quad x^2 + y^2 \le 25.$

15.5. $f = x - 2y - 3;\quad x + y \le 1,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0.$

15.6. $f = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4;\quad 0 \le x \le 1;\quad 0 \le y \le 1.$

15.7. $f = x^2 - 2xy - 10;\quad y \le 1,\quad y \ge x^2 - 4.$

15.8. $f = xy + x + y;\quad 1 \le x \le 2,\quad 2 \le y \le 3.$

15.9. $f = xy;\quad x^2 + y^2 \le 1.$

15.10. $f = 1 - x^2 - y^2;\quad (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1.$

15.11. $f = x^3 + 3y^2 - 3xy;\quad 0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 1.$

15.12. $f = x^2 - xy + y^2;\quad |x| + |y| \le 1.$

15.13. $f = \dfrac{1}{2}xy - \dfrac{1}{6}x^2y - \dfrac{1}{8}xy^2;\quad \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} \le 1,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0.$

15.14. $f = x^2 + 2xy - y^2 - 4;\quad x \le 3,\quad y \ge 0,\quad y \le x + 1.$

15.15. $f = x^2 + 3y^2 + x - y;\quad x + y \ge 1,\quad x \le 1,\quad y \le 1.$

15.16. $f = \sin x + \sin y + \sin(x+y);\quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}.$

15.17. $f = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1;\quad x + y + 1 \le 0,\quad x \ge -3,\quad y \ge 0.$

15.18. $f = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6xy - 3y^2;\quad 0 \le y \le x \le 2.$

15.19. $f = \cos x \cos y \cos(x+y);\quad 0 \le x \le \pi,\quad 0 \le y \le \pi.$

15.20. $f = x^2y;\quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4.$

15.21. $f = \sin x + \sin y + \cos(x+y);\quad 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2},\quad 0 \le y \le \dfrac{3\pi}{2}.$

15.22. $f = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2;\quad 1 \le x \le 4,\quad -3 \le y \le 2.$

15.23. $f = (x - y^2)\sqrt[3]{(1-x)^2};\quad y^2 \le x \le 2.$

15.24. $f = x^3 + y^3 - 9xy + 27;\quad 0 \le x \le 6,\quad 0 \le y \le 6.$

15.25. $f = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;\quad x + y + 2 \ge 0,\quad x \le 0,\quad y \le 0.$

15.26. $f = x^2 + 4y + 9;\quad x^2 + y^2 \le 4.$

15.27. $f = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;\quad 0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 2.$

15.28. $f = 2\sin x + 2\sin y + \sin(x + y);\quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}.$

15.29. $f = 2x^2 + 2xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 2x;\quad x \ge 0,\quad 2x^2 \le y \le 2.$

15.30. $f = x + 2y + 1;\quad x \ge 0,\ y \le x + 3,\ x + y \le 9.$

Библиографический список

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Физматлит, 2005.

Бобкова Л.П., Дружининская И.М., Федорова В.И. Высшая математика. Учебное пособие. – М.: Издательство МИСиС, 1996, –4.2.

Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч, Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2001.

Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Дрофа, 2001. – 4.1.

Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2003.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: ОНИКС, Мир и Образование, 2006. – 4.1.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Физматлит, 2007.

Подписано в печать 27.04.2015 г.

Печать офсетная	Формат 60х84/16	3,69 уч.-изд. л.
3,95 усл.печ.л.	Заказ № 2001/	Тираж 70 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а