ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики
О.Г. Илларионова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ПОСОБИЕ
по выполнению практических работ
и контрольных домашних заданий

для студентов I курса
специальности 090302 (10.05.02)
очной формы обучения

Москва-2014

ББК 512
И44

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.С. Козлова

Илларионова О.Г.

И44 Алгебра и геометрия: пособие по выполнению практических работ и контрольных домашних заданий. - М.: МГТУ ГА, 2014. - 40 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Алгебра и геометрия» по учебному плану для студентов I курса специальности 090302 (10.05.02) очной формы обучения.

В пособии содержатся варианты контрольных домашних заданий, краткие теоретические сведения и примеры решения задач.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 16.09.2014 г. и методического совета 25.09.2014 г.

Содержание

Введение

В курсе «Математика. Алгебра и геометрия» студенты направлений 090302 и 10.05.02 очной формы обучения изучают темы «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Линейные операторы», «Комплексные числа» и «Алгебраические структуры» и должны выполнить самостоятельно два контрольных домашних задания (КДЗ) по одному в каждом семестре.

В данном пособии содержатся краткие теоретические сведения и разобраны примеры, необходимые для выполнения КДЗ; также для каждого КДЗ приведены условия 24 вариантов, где первая цифра – это номер задачи, цифры после точки – это номер варианта.

Общие рекомендации студенту по работе над курсом математики

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1) изучение материала по лекциям;

2) изучение материала по учебникам и учебным пособиям (см. список рекомендованной литературы);

3) выполнение контрольных домашних заданий (КДЗ).

Студент может обращаться к преподавателю для получения консультации.

Указания к выполнению КДЗ

1. Каждое контрольное домашнее задание должно выполняться в отдельной тонкой тетради в клетку, чернилами чёрного или синего цвета. Необходимо оставлять поля для замечаний преподавателя.
2. На титульном листе тетради должны быть чётко написаны фамилия студента, его инициалы, название дисциплины, номер выполняемого варианта. Как правило, номер варианта задаётся преподавателем.
3. Решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, обязательно записывая условие каждой задачи.
4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
5. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради сделать работу над ошибками (если они есть) и сдать тетрадь снова на проверку преподавателю.

1. Основные сведения из теории и примеры решения задач по темам КДЗ № 1

1.1. Матрицы и определители

Матрица размера $m \times n$ – это прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов.

Над матрицами можно производить следующие операции: умножение на число, сложение (вычитание), умножение матрицы на матрицу.

Произведением числа k на матрицу A называется матрица, элементы которой получены умножением элементов матрицы A на число k.

Суммой (разностью) матриц A и B одинаковой размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times p$ называется матрица размера $m \times p$, элемент которой, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Важное свойство: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы $4 \cdot A,\ A + B,\ A - B,\ A \cdot B,\ A \cdot C$.

Решение.

$$4 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 0 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+(-2) \\ 0+1 & 1+4 & -2+0 \\ -3+1 & 0+5 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-(-2) \\ 0-1 & 1-4 & -2-0 \\ -3-1 & 0-5 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5 & 1\cdot(-2)+2\cdot0+3\cdot1\\ 0\cdot2+1\cdot1+(-2)\cdot1 & 0\cdot3+1\cdot4+(-2)\cdot5 & 0\cdot(-2)+1\cdot0+(-2)\cdot1\\ -3\cdot2+0\cdot1+4\cdot1 & (-3)\cdot3+0\cdot4+4\cdot5 & (-3)\cdot(-2)+0\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+2+3 & 3+8+15 & -2+0+3\\ 0+1-2 & 0+4-10 & 0+0-2\\ -6+0+4 & -9+0+20 & 6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&26&1\\-1&-6&-2\\-2&11&10\end{pmatrix},$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot(-1)+3\cdot7\\0\cdot3+1\cdot(-1)+(-2)\cdot7\\-3\cdot3+0\cdot(-1)+4\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2+21\\0-1-14\\-9+0+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\-15\\19\end{pmatrix}.$$

Ответ указан по пунктам.

Определитель матрицы A – это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице A по определенному закону. Обозначается $det A$ или $|A|$. Универсальным методом вычисления определителя является разложение по строке или столбцу. Разлагать определитель нужно по той строке или столбцу, где больше всего нулей.

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&0&0&3\\1&1&2&0\\5&4&0&0\\-1&0&3&1\end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первой строке по формуле:

$$\Delta=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+a_{14}\cdot A_{14}$$

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix}1&2&0\\4&0&0\\0&3&1\end{vmatrix}+0+0-3\cdot\begin{vmatrix}1&1&2\\5&4&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=2\cdot(-8)+0+0-3\cdot5=-31.$$

Ответ: $\Delta=-31$.

Для любой невырожденной квадратной матрицы A , то есть для матрицы, определитель которой $|A| \neq 0,$ существует обратная матрица A^{-1}, которая находится по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A_{ij}\right)^T$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Пример 3. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$

Решение. Данное уравнение можно записать в виде $X \cdot A = B,$ где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Искомая матрицы X имеет размерность 2×2 и вычисляется по формуле $X = B \cdot A^{-1}.$ Для нахождения матрицы A^{-1} вычислим определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ и алгебраические дополнения элементов матрицы A: $A_{11} = 4,$ $A_{12} = -3,$ $A_{21} = -2,$ $A_{22} = 1.$

Получаем $A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$. Тогда $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

1.2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений

Пусть система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет отличный от нуля определитель матрицы коэффициентов (главный определитель), то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ можно вычислить, например, по правилу треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определители Δ_x, Δ_y, Δ_z можно вычислить аналогичным образом.

Пример 4. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$= -6 + 60 + 4 - 18 - 16 + 5 = 29.$$

Определитель $\Delta = 29 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение. Аналогичным образом вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 29, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -29, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 58.$$

Находим решение системы по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-29}{29} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2.$$

Ответ: $x = 1,\ y = -1,\ z = 2.$

1.3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Для решения системы уравнений (1) методом Гаусса, составляют расширенную матрицу коэффициентов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу коэффициентов системы уравнений приводят к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

Вместо знака $*$ будут какие-либо числа, получившиеся в результате элементарных преобразований матрицы.

Допустимые элементарные преобразования матрицы:

1) можно поменять любые две строки местами;

2) любую строку можно умножить (или разделить) на любое неравное нулю число;

3) к любой строке можно прибавить (или вычесть) любую строку, умноженную (или разделённую) на любое неравное нулю число.

По последней матрице составляют соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x+ \quad *\cdot y+ \quad *\cdot z= \quad * \\ \qquad\quad y+ \quad *\cdot z= \quad * \\ \qquad\qquad\qquad\quad z= \quad * \end{cases}$$

и последовательно находят неизвестные z, y, x.

Пример 5. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x+5y+2z=1 \\ x+3y+4z=6 \\ 3x+2y-z=-1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу коэффициентов.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Меняем местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

Умножаем вторую строку на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на 7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right).$$

Делим третью строку на 29.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

По последней матрице составляем соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 6 \\ \quad\quad y + 6z = 11 \\ \quad\quad\quad\quad z = 2. \end{cases}$$

Решая систему снизу вверх, находим, что $y = -1,\ x = 1$.

Ответ: $x = 1,\ y = -1,\ z = 2.$

1.4. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Это метод решения с помощью обратной матрицы. Перепишем систему уравнений в матричном виде: $A \cdot X = B,$ где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1}- матрица, обратная к матрице A. Обратная матрица существует для невырожденной квадратной матрицы, то есть для матрицы, определитель которой $|A| \neq 0$, и для матрицы третьего порядка находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Пример 6. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Найдем матрицу A^{-1}.

Определитель матрицы A уже вычислен (см. пример 4): $|A| = 29$.

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14$,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6$,

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

Получаем $A^{-1} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 9 & 14 \\ 13 & -8 & -6 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 9 & 14 \\ 13 & -8 & -6 \\ -7 & 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -11 + 54 - 14 \\ 13 - 48 + 6 \\ -7 + 66 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ -29 \\ 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

1.5. Векторная алгебра

Для точек A и B с координатами $A(A_x;A_y;A_z)$, $B(B_x;B_y;B_z)$ координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле

$$\overrightarrow{AB}=\left\{B_x-A_x;\, B_y-A_y;\, B_z-A_z\right\}.$$

Рассмотрим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с координатами $\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\}$, $\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$, $\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\}$.

Длина вектора $\vec{a}$ обозначается через $|\vec{a}|$ и вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, которое обозначается через $(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле

$$(\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это вектор, который обозначается через $[\vec{a},\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$ и вычисляется по формуле

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы, направленные по осям Ox, Oy, Oz соответственно.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – это число, которое обозначается через $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

С помощью скалярного, векторного и смешанного произведений векторов можно вычислять различные геометрические величины.

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, численно равна модулю векторного произведения этих векторов, а площадь треугольника равна половине площади параллелограмма.

Объем параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, численно равен модулю смешанного произведения этих векторов, а объем треугольной пирамиды (тетраэдра) равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда.

Пример 7. Даны координаты точек $A(3;-5;4)$, $B(2;-1;1)$, $C(-4;3;6)$. Найти:

1) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

2) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

4) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. 1) Сначала находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: из координат точки B вычитаем координаты точки A.

$$\overrightarrow{AB}=\{2-3;-1-(-5);1-4\}=\{-1;4;-3\}.$$

Теперь находим длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{1+16+9}=\sqrt{26}.$$

2) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC}=\{-4-3;3-(-5);6-4\}=\{-7;8;2\}.$$

Вычисляем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-1\cdot(-7)+4\cdot 8+(-3)\cdot 2=33.$$

3) Вычисляем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 4 & -3\\ -7 & 8 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot 4\cdot 2+\vec{j}\cdot(-3)\cdot(-7)+\vec{k}\cdot(-1)\cdot 8-\vec{k}\cdot 4\cdot(-7)-\vec{j}\cdot(-1)\cdot 2-\vec{i}\cdot(-3)\cdot 8=$$

$$=8\vec{i}+21\vec{j}-8\vec{k}+28\vec{k}+2\vec{j}+24\vec{i}=32\vec{i}+23\vec{j}+20\vec{k}=\{32;23;20\}.$$

4) Для нахождения косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ вычислим длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+8^2+2^2}=\sqrt{49+64+4}=\sqrt{117}.$$

Теперь находим требуемый косинус.

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{33}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{117}}=\frac{3\cdot 11}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 3\cdot\sqrt{13}}=\frac{11}{13\sqrt{2}}.$$

Ответ: 1) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{26}$, 2) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=33$, 3) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\{32;23;20\}$,

4) $\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{11}{13\sqrt{2}}$.

Пример 8. Найти длину вектора $\vec{p}+2\vec{q}$, если $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. Как известно, модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора $|\vec{p}+2\vec{q}|=\sqrt{\left(\vec{p}+2\vec{q}\right)^2}$.

Находим скалярный квадрат $\left(\vec{p}+2\vec{q}\right)^2=(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{a}+4\vec{b})^2=(3\vec{a}+3\vec{b})^2=$

$$=9(\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2)=9(1+2\cdot3\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+9)=63.$$

Следовательно, $|\vec{p}+2\vec{q}|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$

Ответ: $3\sqrt{7}$.

Пример 9. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\{2,1,-2\}$ и удовлетворяющий условию: скалярное произведение $(\vec{x},\vec{a})=27$.

Решение. В силу коллинеарности вектор $\vec{x}$ можно представить в виде $\vec{x}=\lambda\cdot\vec{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия $(\vec{x},\vec{a})=\lambda\cdot\vec{a}^2=\lambda(4+1+4)=9\lambda=27.$

Отсюда получаем $\lambda=3$ и $\vec{x}=3\vec{a}=\{6,3,-6\}$.

Ответ: $\vec{x}=\{6,3,-6\}$.

Пример 10. Вычислить косинус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Решение. Известно, что диагонали параллелограмма можно найти как сумму и разность сторон

$$\vec{d}_1=\vec{p}+\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}+0\vec{c},\qquad \vec{d}_2=\vec{p}-\vec{q}=\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}.$$

Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ представляют собой единичные взаимно перпендикулярные вектора, то их можно считать координатным базисом, тогда для нахождения требуемого угла воспользуемся формулой

$$\cos\angle(\vec{d}_1,\vec{d}_2)=\frac{(\vec{d}_1,\vec{d}_2)}{|\vec{d}_1|\cdot|\vec{d}_2|}=\frac{3\cdot1+(-2)\cdot4+0\cdot(-2)}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{1+16+4}}=\frac{-5}{\sqrt{13\cdot21}}=\frac{-5}{\sqrt{273}}.$$

Ответ: $\dfrac{-5}{\sqrt{273}}$.

Пример 11. Определить, лежат ли точки $A(1, 2, 3)$; $B(0, 5, 5)$; $C(3, -1, -1)$; $D(-2, 14, 9)$ в одной плоскости.

Решение. Рассмотрим три вектора $\overrightarrow{AB}=\{-1,3,2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,-3,-4\}$ и $\overrightarrow{AD}=\{-3,12,6\}$. Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}=18+36+48-18-36-48=0.$$

Смешанное произведение равно нулю, следовательно, векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ компланарны и точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Ответ: точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Задачи КДЗ № 1

Задача № 1. Даны матрицы $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$.

Вычислить: A+B, 2A, $2\mathrm{A}-\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$, $\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}^{\mathrm{T}}$.

1.1 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -14 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.3 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

1.8 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.10 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.11 $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -14 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.12 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.13 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.14 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.15 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.16 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.17 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.18 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.19 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.20 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.21 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.22 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.23 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.24 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача № 2. Вычислить определитель четвертого порядка.

2.1 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.2** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **2.3** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.4 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **2.5** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **2.6** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

2.7 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2.8** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.9** $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.10 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.11** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.12** $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.13 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **2.14** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.15** $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

2.16 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ **2.17** $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ **2.18** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2.19 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **2.20** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **2.21** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

2.22 $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ **2.23** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **2.24** $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

Задача № 3. Решить матричное уравнение.

3.1 $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ **3.2** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

3.3 $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ **3.4** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$

3.5 $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **3.6** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3.7 $X \cdot \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ **3.8** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.9 $X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3.10** $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.11 $X \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **3.12** $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3.13 $X\cdot\begin{pmatrix}8 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

3.14 $X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

3.15 $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

3.16 $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

3.17 $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 6\end{pmatrix}$

3.18 $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 8 & -5\end{pmatrix}$

3.19 $X\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

3.20 $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

3.21 $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

3.22 $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 4\\ -2 & 12\end{pmatrix}$

3.23 $X\cdot\begin{pmatrix}10 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

3.24 $X\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

Задача № 4. Решить систему линейных уравнений тремя методами: 1) методом Крамера, 2) методом Гаусса, 3) при помощи обратной матрицы.

4.1 $\begin{cases}x+2y+3z=1\\ 2x-3y+2z=9\\ 5x+8y-z=7\end{cases}$

4.2 $\begin{cases}3x+4y+2z=1\\ 2x-y-3z=5\\ x+5y+z=0\end{cases}$

4.3 $\begin{cases}2x+y-z=2\\ 3x+2y+2z=-2\\ x+y-2z=1\end{cases}$

4.4 $\begin{cases}x+3y-6z=12\\ 3x+2y+5z=-10\\ 2x+5y-3z=6\end{cases}$

4.5 $\begin{cases}x+2y+3z=5\\ 2x-y-z=1\\ x+3y+4z=6\end{cases}$

4.6 $\begin{cases}x+y-z=1\\ 8x+3y-6z=2\\ 4x+y-3z=3\end{cases}$

4.7 $\begin{cases}x+2y-z=2\\ 2x-3y+2z=2\\ 3x+y+z=8\end{cases}$

4.8 $\begin{cases}3x+4y+2z=8\\ 2x-y-3z=-4\\ x+5y+z=0\end{cases}$

4.9 $\begin{cases}x-2y+3z=4\\ 2x+3y-z=1\\ 6x+3y-4z=2\end{cases}$

4.10 $\begin{cases}2x+y+3z=11\\ 3x+2y+z=5\\ x+y+z=3\end{cases}$

4.11 $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$

4.12 $\begin{cases} x+2y-4z=-3 \\ 2x+y+2z=4 \\ 4x+2y-5z=-1 \end{cases}$

4.13 $\begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x+3y+2z=-2 \\ 5x-2y+2z=7 \end{cases}$

4.14 $\begin{cases} x-4y-2z=3 \\ 3x+2y-z=1 \\ x+7y+z=-7 \end{cases}$

4.15 $\begin{cases} 2x+4y-z=8 \\ x-3y+2z=-1 \\ 4x+3y-2z=6 \end{cases}$

4.16 $\begin{cases} x+y-2z=-2 \\ 3x+2y+z=5 \\ 7x+y+6z=8 \end{cases}$

4.17 $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 4x+y+4z=-2 \\ 5x+7y-z=21 \end{cases}$

4.18 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+3z=11 \\ 4x+3y+2z=8 \end{cases}$

4.19 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+2y+z=5 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$

4.20 $\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$

4.21 $\begin{cases} x+2y-4z=-1 \\ 2x+y+2z=5 \\ 4x+y-4z=1 \end{cases}$

4.22 $\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \\ 3x-5y-6z=-9 \end{cases}$

4.23 $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$

4.24 $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 3x+2y+z=10 \\ 4x+3y-2z=4 \end{cases}$

Задача № 5.

5.1 Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=90^0$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=90^0$ $\angle(\vec{b},\vec{c})=60^0$.
Найти $(3\vec{a}-2\vec{b};\vec{a}+3\vec{c})$.

5.2 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=2\vec{a}-5\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30^0$.

5.3 Найти действительное число λ, при котором векторы $\vec{a}=\{3\lambda,\ 1,\ 4\}$, $\vec{b}=\{3,\ 2\lambda,\ -6\}$ и $\vec{c}=\{3,\ 1,\ -2\}$ будут компланарны.

5.4 Дано: $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=6,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=90^0,\ \angle(\vec{a},\vec{c})=60^0,\ \angle(\vec{b},\vec{c})=60^0.$ Найти $(2\vec{a}-3\vec{b};\ \vec{b}+4\vec{c})$.

5.5 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, если $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=150^0.$

5.6 Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2,$ и векторы $\vec{a}+3\vec{b}$ и $7\vec{a}-5\vec{b}$ перпендикулярны.

5.7 Определить при каком α векторы $\vec{a}=\{\alpha,-3\alpha,1\}$ и $\vec{b}=\{1,2,-10\}$ будут взаимно перпендикулярны.

5.8 Найти действительное число α, при котором векторы $\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ будут коллинеарны, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

5.9 Найти действительное число λ, при котором векторы $\vec{a}=\{1,3,\ \lambda\}$, $\vec{b}=\{4,5,-1\}$ и $\vec{c}=\{2,-1,5\}$ будут компланарны.

5.10 Вычислить длину вектора $\vec{p}+2\vec{q},$ если $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b},\ \vec{q}=2\vec{a}-\vec{b},\ |\vec{a}|=3,$ $|\vec{b}|=1,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=120^0.$

5.11 При каких α и β вектор $\vec{c}=\{\alpha,3,\beta\}$ будет коллинеарен вектору $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, если $\vec{a}=\{3,-1,1\},\ \vec{b}=\{1,2,0\}$?

5.12 Вычислить $(2\vec{a}-5\vec{b})^2,$ если $|\vec{a}|=11,\ |\vec{b}|=2,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=135^0.$

5.13 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=\{3,-2,2\},\ \vec{b}=\{4,1,-1\}.$

5.14 Определить при каком α векторы $\vec{a}=\{1,3\alpha,\ 2\}$ и $\vec{b}=\{2,3\alpha,-3\}$ будут взаимно перпендикулярны.

5.15 Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{1,\alpha,1\}$ и $\vec{b}=\{2,1,0\}$, равна $\sqrt{6}.$

5.16 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{q}=2\vec{a}-4\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=30^0.$

5.17 При каком значении x точки $M(x,1,0);\ A(5,\ 2,\ 1);\ B(3,\ \text{-}1,\ 2)$ и $C(2,\ \text{-}2,\ 0)$ будут лежать в одной плоскости?

5.18 Найти длину вектора $\vec{p} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{b},\vec{c}) = 60^0$, $\angle(\vec{a},\vec{c}) = 90^0$.

5.19 Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 45^0$.

5.20 Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{3, 0, 1\}$ и $\vec{b} = \{\alpha, 2, 2\}$, равна $\sqrt{76}$.

5.21 Найти $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 10$, $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = 72$ и угол $\angle(\vec{a},\vec{b})$ – острый.

5.22 Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна 10. Вычислить $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

5.23 Найти $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = 15$ и угол $\angle(\vec{a},\vec{b})$ – тупой.

5.24 При каком значении y точки $M(2, y, 0)$; $A(3, -2, 1)$; $B(5, 1, -4)$ и $C(2, 0, -1)$ будут лежать в одной плоскости?

2. Основные сведения из теории и примеры решения задач по темам КДЗ № 2

2.1. Аналитическая геометрия

Канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B с координатами $A(A_x; A_y; A_z)$, $B(B_x; B_y; B_z)$, записываются в виде

$$\frac{x - A_x}{a_x} = \frac{y - A_y}{a_y} = \frac{z - A_z}{a_z},$$

где вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = \overrightarrow{AB}$ - направляющий вектор прямой AB.

Уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C, записывается в виде

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}z + \tilde{D} = 0,$$

где числа $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ — координаты вектора $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$, а число $\tilde{D}$ находится подстановкой координат точки A в уравнение плоскости. Вектор $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ является нормальным вектором плоскости; он направлен перпендикулярно плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_0;y_0;z_0)$, $B(x_1;y_1;z_1)$, $C(x_2;y_2;z_2)$, можно также записать в виде $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$.

Пример 1. Даны координаты точек $A(3;-5;4)$, $B(2;-1;1)$, $C(-4;3;6)$. Найти:

1) канонические уравнения прямой AB;

2) уравнение плоскости ABC.

Решение. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, который является направляющим вектором прямой AB.

$$\overrightarrow{AB}=\{2-3;-1-(-5);1-4\}=\{-1;4;-3\}.$$

Взяв в качестве точки, лежащей на прямой, точку $A(3;-5;4)$, записываем канонические уравнения прямой AB

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-4}{-3}.$$

2) Найдем нормальный вектор плоскости ABC как векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -3 \\ -7 & 8 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot 4\cdot 2+\vec{j}\cdot(-3)\cdot(-7)+\vec{k}\cdot(-1)\cdot 8-\vec{k}\cdot 4\cdot(-7)-\vec{j}\cdot(-1)\cdot 2-\vec{i}\cdot(-3)\cdot 8=$$

$$=8\vec{i}+21\vec{j}-8\vec{k}+28\vec{k}+2\vec{j}+24\vec{i}=32\vec{i}+23\vec{j}+20\vec{k}=\{32;23;20\}.$$

Уравнение плоскости запишется в виде $32x+23y+20z+\tilde{D}=0$. Плоскость проходит через точку A. Для нахождения числа $\tilde{D}$ подставим координаты точки A в найденное уравнение плоскости.

$$32\cdot 3+23\cdot(-5)+20\cdot 4+\tilde{D}=0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{D}=-61.$$

Окончательно получаем искомое уравнение: $32x+23y+20z-61=0$.

Ответ: 1) $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-4}{-3}$; 2) $32x+23y+20z-61=0$.

Пример 2. Найти длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D, если A(4, 5, 2), B(-1, 11,- 6), C(2, -1, 3) и D(1, 6, 3).

Решение. Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение плоскости ABC, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки.

Получаем $\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -1-4 & 11-5 & -6-2 \\ 2-4 & -1-5 & 3-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y-5)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-42(x-4)+21(y-5)+42(z-2)=0 \Rightarrow 2x-y-2z+1=0.$$

Находим теперь расстояние от точки D до плоскости ABC:

$$h=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 6-2\cdot 3+1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3.$$

Ответ: $h=3.$

2.2. Собственные значения и собственные вектора линейного оператора

Собственным вектором линейного оператора с матрицей A, соответствующим *собственному значению* λ, называется ненулевой вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условию:

$$A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}.$$

Если вектор $\vec{x}$ является собственным, то любой вектор $\alpha\cdot\vec{x}$ $(\alpha\neq 0)$, ему коллинеарный, тоже является собственным.

Собственные значения линейного оператора (или матрицы) находят из так называемого *характеристического уравнения:*

$$det(A-\lambda E)=0.$$

Соответствующий многочлен $det(A-\lambda E)$ называется *характеристическим многочленом.*

Для нахождения собственного вектора, соответствующего собственному значению λ, нужно решить систему линейных уравнений

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0.$$

Пример 3. Найти собственные значения и собственные вектора линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

Решение. Составим характеристический многочлен

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6.$$

Решив характеристическое уравнение $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0,$ найдем его корни

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3.$$

Для нахождения собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1=1,$ решим систему

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,$$

подставив $\lambda_1=1$ вместо $\lambda.$

Получим $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$ или $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 6x_1-5x_2+4x_3=0 \\ 4x_1-4x_2+4x_3=0. \end{cases}$

Эта система имеет бесконечно много решений вида $\begin{cases} x_1=c \\ x_2=2c \\ x_3=c \end{cases}$, где $c\in R.$

Поэтому собственный вектор $h_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot c,$ где $c\in R,\ c\neq 0.$

Аналогично для $\lambda_2=2$ получаем собственный вектор $h_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot c$

и для $\lambda_3=3$ собственный вектор $h_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot c,$ где $c\in R,\ c\neq 0.$

Ответ: $\lambda_1=1,\ h_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot c;\ \lambda_2=2,\ h_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot c;\ \lambda_3=3,\ h_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot c,$ где $c\in R,\ c\neq 0.$

2.3. Комплексные числа и действия над ними

Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа, i – так называемая мнимая единица, определяемая равенством

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1,$$

x называется действительной частью, y мнимой частью числа z. Их обозначают так:

$$x = Re\, z, \quad y = Im\, z.$$

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то получается действительное число $x + i0 = x$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части соответственно, то есть

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

Над комплексными числами можно производить различные арифметические и алгебраические действия, а также действие сопряжения, которое изменяет знак мнимой части.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$. Отметим, что $\overline{\overline{z}} = z$.

Сложение, вычитание, умножение и деление над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, определяются следующим образом.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Две последние формулы запоминать нет необходимости, так как умножение комплексных чисел производится по правилу умножения двучленов с учетом равенства $i^2 = -1$; а деление – путем домножения числителя и знаменателя на $\overline{z}_2$ и дальнейших преобразований.

Пример 4. Дано $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 4 + 5i$.

Вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, указать действительные и мнимые части чисел $z_1 - z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. Выполним действия:

$$z_1 + z_2 = (-2+4) + i(3+5) = 2 + 8i,$$

$$z_1 - z_2 = (-2-4) + i(3-5) = -6 - 2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-2+3i)(4+5i) = -8 + 12i - 10i - 15 = -23 + 2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{4+5i} = \frac{(-2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{7+22i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{22}{41}.$$

Укажем действительные и мнимые части:

$$Re(z_1 - z_2) = -6, \qquad Re\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{41}, \qquad Im(z_1 - z_2) = -2, \qquad Im\frac{z_1}{z_2} = \frac{22}{41}.$$

Пример 5. Доказать равенство $z + \overline{z} = 2Re\,z$.

Доказательство. Пусть $z = x + iy$, тогда $Re\,z = x$, $\overline{z} = x - iy$.
Поэтому

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2Re\,z.$$

Равенство доказано.

Комплексная плоскость

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, будем называть *комплексной плоскостью*.

Геометрически сложение и вычитание чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения и вычитания векторов. Отсюда следует, что модуль $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2, а уравнение $|z - z_0| = R$ задает окружность радиуса R с центром в точке z_0.

Пример 6. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:

1) $|Imz|<1,\ 0<Rez<1$; 2) $|z-1-2i|\le 2$; 3) $1<|z+2+i|<3$.

Ответ: 1) прямоугольник с вершинами в точках $i,\ 1+i,\ 1-i,\ -i$ (стороны не включаются);
2) круг радиусом 2 с центром в точке $z=1+2i$ (окружность включается);
3) кольцо между окружностями радиусов 1 и 3 с общим центром в точке $z=-2-i$ (окружности не включаются).

Тригонометрическая форма комплексного числа

Модулем комплексного числа $z=x+iy$ называется число, которое обозначается $|z|$ и вычисляется по формуле

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Модуль является действительным неотрицательным числом, то есть $|z|\ge 0$. Геометрически $|z|$ – это длина вектора $\overrightarrow{OM}$ на комплексной плоскости. Равенство $|z|=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$ одновременно.

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором z называется *аргументом* z и обозначается $Arg\,z$. Он определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\le\pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается $\arg z$. Имеет место равенство

$$Arg\,z=\arg z+2\pi k,\ k\in Z.$$

Для $z=0$ понятие аргумента не определено.
Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\varphi=\arg z=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если}\quad x>0,\\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{если}\quad x<0,\ y\ge 0,\\ arctg\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{если}\quad x<0,\ y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad x=0,\ y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если}\quad x=0,\ y<0.\end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Пример 7. Записать число $z=-8-i8\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.
Решение. Вычисляем модуль и аргумент числа z.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16.$

Так как $x=-8<0,\ y=-8\sqrt{3}<0,$ то угол $\varphi=arctg\dfrac{y}{x}-\pi=arctg\sqrt{3}-\pi=-\dfrac{2}{3}\pi.$

Следовательно, $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi)+i\sin(-\dfrac{2}{3}\pi)).$

Ответ: $z=16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi)+i\sin(-\dfrac{2}{3}\pi)).$

Комплексные числа, представленные в тригонометрической форме, удобно умножать, делить, возводить в степень и извлекать из них корни. Хотя умножение, деление, возведение во вторую или третью степень несложно сделать и для чисел в алгебраической форме, например,

$$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$$

или

$$(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=1-3i+3(-1)-i^2\cdot i=1-3i-3+i=-2-2i,$$

но вычислить в алгебраической форме, например, $(2+2\sqrt{3}i)^{30}$ крайне затруднительно.

Пусть даны два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z=z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)=$$
$$=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

то есть при умножении двух чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.
Аналогично получаем

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

то есть при делении двух чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Для чисел, представленных в тригонометрической форме, операции умножения и деления приобретают наглядный геометрический смысл — это растяжение (сжатие) векторов и их поворот вокруг начала координат на плоскости XOY.

Из правила умножения следует формула возведения в степень

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Эта формула называется *формулой Муавра*.

Операция извлечения корня степени n из комплексного числа определяется как обратная к операции возведения в степень, а именно, комплексное число z называется *корнем степени* n из числа w и обозначается $\sqrt[n]{w} = z$, если $z^n = w$. Корень n-ой степени из числа w $(w \neq 0)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n} \right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n} \right) \right),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

где через $\sqrt[n]{|w|}$ обозначено арифметическое значение корня.

Пример 8. Найти все значения $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа $-8 - i8\sqrt{3}$, найденной в примере 10, и вычислим

$$\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \right) \right)} =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4} \right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4} \right) \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Положим последовательно $k = 0, 1, 2, 3$. Будем иметь:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} \right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} \right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} \right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Ответ: указанные выше z_1, z_2, z_3, z_4.

Показательная форма комплексного числа

Определим $e^{i\varphi}$, где $i=\sqrt{-1},\ \varphi\in R$ следующей формулой

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* Тогда любое комплексное число z можно представить в так называемой *показательной форме*

$$z=r\cdot e^{i\varphi},$$

где r - модуль комплексного числа z, а φ - аргумент комплексного числа z.

При умножении и делении показательных функций действуют известные еще со школы правила:

$$e^a\cdot e^b=e^{a+b},\qquad \frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}.$$

Поэтому для комплексных чисел $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ умножение и деление выполняются следующим образом:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$ (в последнем случае $z_2\neq 0$).

Пример 9. Представить число $(1-i)^3$ в показательной форме.

Решение. Вычислим модуль и аргумент числа $z=1-i$:

$$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2};\quad \arg z=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

В показательной форме $z=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, следовательно, $z^3=2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

Ответ: $z^3=2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

2.4. Алгебраические структуры: группы, кольца и поля

Определения

Пусть дано произвольное множество X. *Бинарной операцией* на X называется отображение $*:X\times X\to X$ такое, что любой упорядоченной паре $(a,b)\in X\times X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $a*b\in X$. Иногда говорят, что множество X *замкнуто относительно операции* $*$, если ее применение не выводит за его пределы. В нашем определении это получается само собой, но термин полезный, и при решении задач пригодится.

Примерами бинарных операций являются операции сложения и умножения в числовых множествах, операции $\cap$ и $\cup$ в множестве подмножеств данного множества, и т.д.

Бинарная операция $*$ называется *ассоциативной*, если $(a*b)*c = a*(b*c)$ и *коммутативной*, если $a*b = b*a$ при всех a, b и c, принадлежащих X.

Элемент $e \in X$ называется *единичным* (нейтральным) относительно бинарной операции $*$, если $e*x = x*e = x$ при всех $x \in X$.
В ассоциативной алгебраической структуре существует не более одного единичного элемента.

Группой называется множество G с заданной на нем бинарной операцией $*$, которая:

1) ассоциативна,

2) имеет единичный элемент e,

3) для каждого $g \in G$ имеет обратный элемент g^{-1} такой, что $g*g^{-1} = g^{-1}*g = e.$

Группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), если операция $*$ коммутативна, то есть выполняется свойство

4) $a*b = b*a$.

Пример 10.
1. Множества чисел Z, Q, R относительно операции сложения "$+$" являются коммутативными группами. Единичным (нейтральным) элементом по сложению будет 0. Операция вычитания "$-$" – это просто прибавление обратного элемента.
2. Множество всех невырожденных квадратных матриц порядка n будет группой относительно умножения. Единичным элементом будет единичная матрица E.

Множество с двумя операциями "$+$" и "$\cdot$" называется *кольцом*, если по сложению оно является коммутативной группой, то есть выполняются свойства 1) – 4) (единичный элемент по сложению обозначается 0) и выполнены следующие свойства 5) — 7):

5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность по умножению,

6) существует единица по умножению (ее обозначают 1),

7) $(a+b) \cdot c = ac + bc$; $a \cdot (b+c) = ab + ac$ – умножение и сложение связывает свойство дистрибутивности.

Если операция умножения имеет еще и обратный элемент для всех элементов, кроме 0 (на ноль делить нельзя) и умножение коммутативно, то это кольцо будет *полем*. Повторим другими словами.

Полем называется алгебраическая структура, являющаяся коммутативной группой по сложению, ненулевые элементы которой образуют коммутативную группу по умножению. Причем умножение и сложение связаны законом дистрибутивности. То есть, поле – это коммутативное кольцо, в котором возможно деление на ненулевые элементы.

Из векторной алгебры известна еще одна алгебраическая структура – *векторное пространство* над множеством (полем) действительных чисел. Над произвольным полем K определение векторного пространства аналогичное. *Векторное пространство* над полем K – это множество V с двумя операциями: сложением элементов и умножением на элемент из поля K. Операции эти должны подчиняться обычным аксиомам ассоциативности, коммутативности и т.д.

Кольцо Z_m вычетов по модулю m

Два целых числа n и n_1 называются *сравнимыми по модулю* m $(m \in N)$, если при делении на m они дают одинаковые остатки. Число m называется модулем сравнения.

Пишут $n = n_1 (\mathrm{mod}\ m)$.

При фиксированном m множество Z можно представить в виде объединения классов чисел, сравнимых между собой по модулю m, которые называются *классами вычетов* по модулю m. Например, числа 2 и 7 сравнимы по модулю 5 и являются представителями одного класса вычетов по модулю 5. Обозначив остатки от деление на число m через $\overline{k}$, получим множество $Z_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{m-1}\}$, на котором можно определить операции "$+$" и "$\cdot$", и тогда Z_m превращается в *кольцо вычетов* по модулю m.

Кольцо вычетов Z_m является полем тогда и только тогда, когда m — простое число. Отсюда следует, что в случае простого m для любого элемента множества $Z_m \setminus \{0\}$ существует обратный элемент и любое линейное уравнение в поле Z_m имеет единственное решение.

Пример 11. Решить уравнение $\overline{3}x + \overline{7} = \overline{2}$ в Z_{11}.

Решение.

$$\overline{3}x = -\overline{5} (\mathrm{mod}\ 11).$$

Число –5 принадлежит классу вычетов, состоящему из чисел вида $\{-5 + 11k,\ где\ k \in Z\} = -\overline{5}$. Положив $k = 1$, получим $-5 = 6\ (\mathrm{mod}\ 11)$ и наше уравнение примет вид

$$\overline{3}x = \overline{6} (\mathrm{mod}\ 11).$$

Откуда получаем $x = \overline{2}.$

Ответ: $x = \overline{2}.$

Замечание. В примере 11 мы решаем уравнение в Z_m, где число m =11 является простым, следовательно, данное линейное уравнение имеет единственное решение. Если m не является простым числом, то линейное уравнение может иметь несколько решений или не иметь решений вообще.

Задачи КДЗ № 2

Задача № 1. Даны координаты точек A, B, C и D. Найти:

1) канонические уравнения прямой AB;

2) уравнение плоскости ABC;

3) уравнение высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D;

4) площадь треугольника ABC;

5) объем пирамиды ABCD;

6) длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D.

1.1 A(2,1,4), B(1,-2,7), C(-3,1,2), D(3,0,5).

1.2 A(3,2,-7), B(2,-1,0), C(4,1,-2), D(6,-4,-2).

1.3 A(4,0,-1), B(3,1,9), C(1,2,-3), D(2,-1,-3).

1.4 A(2,-5,4), B(1,-5,4), C(-3,1,1), D(-4,0,5).

1.5 A(5,1,-4), B(3,-1,0), C(2,1,-6), D(0,-4,3).

1.6 A(0,2,-1), B(3,1,9), C(1,2,-3), D(2,-1,-3).

1.7 A(6,-1,3), B(1,-2,0), C(-1,4,1), D(3,0,5).

1.8 A(3,1,-4), B(2,1,0), C(3,5,-2), D(2,4,-1).

1.9 A(1,1,-1), B(3,1,5), C(1,-2,0), D(3,-1,-2).

1.10 A(-2,-3,4), B(1,-1,4), C(3,2,1), D(-4,5,0).

1.11 A(2,2,-5), B(2,-4,1), C(4,2,-2), D(0,-4,1).

1.12 A(4,0,-1), B(3,4,5), C(1,2,-3), D(2,-1,-3).

1.13 A(2,-5,4), B(1,-5,2), C(-5,1,0), D(-3,2,4).

1.14 A(-1,2,-3), B(3,-4,0), C(4,1,-2), D(5,-2,1).

1.15 A(4,0,-1), B(3,2,9), C(1,1,-3), D(7,1,-3).

1.16 A(2,0,4), B(1,-5,4), C(-2,1,1), D(-2,2,5).

1.17 A(5,1,-6), B(2,0,-9), C(4,1,-2), D(6,-4,1).

1.18 A(1,0,-1), B(3,-1,2), C(1,8,-3), D(2,-1,-3).

1.19 A(2,-5,4), B(1,-3,7), C(-3,0,1), D(-1,1,5).

1.20 A(0,2,-5), B(2,-1,0), C(4,1,-2), D(3,-4,1).
1.21 A(7,0,-1), B(3,1,-5), C(1,1,-3), D(2,-1,-3).
1.22 A(0,-1,4), B(1,-1,5), C(-5,1,1), D(-2,0,9).
1.23 A(-1,2,-7), B(2,-1,6), C(2,1,-2), D(0,-4,1).
1.24 A(8,0,-3), B(-7,1,9), C(4,2,-3), D(1,-1,-3).

Задача № 2. Найти собственные значения и собственные вектора линейного оператора, заданного матрицей A.

2.1 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **2.2** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2.3** $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.4 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **2.5** $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ **2.6** $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2.7 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **2.8** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **2.9** $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2.10 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **2.11** $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **2.12** $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.13 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **2.14** $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **2.15** $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2.16 $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **2.17** $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **2.18** $A=\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2.19 $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ **2.20** $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **2.21** $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.22 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.23** $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **2.24** $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Задача № 3. Даны числа z_1 и z_2. Вычислить : а) z_1+z_2, б) z_1-z_2, в) $z_1\cdot z_2$, г) $\frac{z_1}{z_2}$. Изобразить на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$.

3.1	$z_1=2+3i,\quad z_2=3-5i$	**3.2**	$z_1=3{,}2+6i,\quad z_2=-0{,}2+2i$
3.3	$z_1=1{,}5-2i,\quad z_2=0{,}5+4i$	**3.4**	$z_1=6-7i,\quad z_2=8+3i$
3.5	$z_1=-4-5i,\quad z_2=5+6i$	**3.6**	$z_1=2{,}8+3{,}4i,\quad z_2=0{,}2-0{,}4i$
3.7	$z_1=2{,}4-3i,\quad z_2=3{,}1-i$	**3.8**	$z_1=2i-3,\quad z_2=4+i$
3.9	$z_1=-1{,}8+3i,\quad z_2=2{,}8+7i$	**3.10**	$z_1=3i-5,\quad z_2=2-0{,}5i$
3.11	$z_1=4-7i,\quad z_2=1+2i$	**3.12**	$z_1=-0{,}8-9i,\quad z_2=-0{,}2+7i$
3.13	$z_1=0{,}5-2i,\quad z_2=2{,}5+i$	**3.14**	$z_1=1{,}8-2i,\quad z_2=0{,}2+5i$
3.15	$z_1=1{,}7+2i,\quad z_2=0{,}3+3i$	**3.16**	$z_1=-1{,}6+3i,\quad z_2=0{,}6+2i$
3.17	$z_1=3+4i,\quad z_2=7-5i$	**3.18**	$z_1=5-i,\quad z_2=2+7i$
3.19	$z_1=1-2i,\quad z_2=0{,}6+i$	**3.20**	$z_1=6+3i,\quad z_2=4-i$
3.21	$z_1=5-8i,\quad z_2=2+7i$	**3.22**	$z_1=6-9i,\quad z_2=7+4i$
3.23	$z_1=5-2i,\quad z_2=8+3i$	**3.24**	$z_1=-2-7i,\quad z_2=3-4i$

Задача № 4. Данное число z представить в тригонометрической и показательной формах и вычислить а) z^6, б) $\sqrt[3]{z}$. В пункте б) изобразить полученные корни на комплексной плоскости.

4.1	$z=-10+10i$	**4.2**	$z=-8i$	**4.3**	$z=-5+5i$
4.4	$z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	**4.5**	$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{i}$	**4.6**	$z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
4.7	$z=1+i$	**4.8**	$z=-2+2\sqrt{3}i$	**4.9**	$z=1+i\sqrt{3}$
4.10	$z=-1+i\sqrt{3}$	**4.11**	$z=2\sqrt{3}+2i$	**4.12**	$z=7i^2+7i$
4.13	$z=-1-i$	**4.14**	$z=2-2i$	**4.15**	$z=\sqrt{3}+i$
4.16	$z=-2-2\sqrt{3}i$	**4.17**	$z=\sqrt{3}-i$	**4.18**	$z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
4.19	$z_1=\frac{-3+3i}{i}$	**4.20**	$z=-\sqrt{3}+i$	**4.21**	$z=-1-i\sqrt{3}$
4.22	$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	**4.23**	$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$	**4.24**	$z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$

Задача № 5. Решить уравнение относительно x в Z_m (возможен ответ: $\varnothing$).

5.1 $\bar{2}x+\bar{4}=\bar{5}$ в Z_7	**5.2** $\bar{3}x+\bar{6}=\bar{8}$ в Z_9	**5.3** $\bar{3}x+\bar{4}=\bar{3}$ в Z_8
5.4 $\bar{3}-\bar{4}x=\bar{2}$ в Z_5	**5.5** $\bar{4}x+\bar{5}=\bar{1}$ в Z_6	**5.6** $\bar{5}x+\bar{3}=\bar{2}$ в Z_7
5.7 $\bar{7}x-\bar{6}=\bar{9}$ в Z_{11}	**5.8** $\bar{8}x-\bar{2}=\bar{3}$ в Z_9	**5.9** $\bar{8}x+\bar{3}=\bar{6}$ в Z_{10}
5.10 $\overline{12}x+\bar{9}=\bar{1}$ в Z_{13}	**5.11** $\bar{3}x+\bar{4}=\bar{1}$ в Z_5	**5.12** $\bar{5}x-\bar{3}=\bar{4}$ в Z_6
5.13 $\bar{6}x-\bar{3}=\bar{7}$ в Z_8	**5.14** $\bar{4}x-\bar{2}=\bar{5}$ в Z_9	**5.15** $\overline{11}x+\bar{3}=\bar{1}$ в Z_{12}
5.16 $\overline{10}x+\bar{7}=\bar{3}$ в Z_{11}	**5.17** $\bar{2}x+\bar{3}=\bar{2}$ в Z_5	**5.18** $\bar{2}x+\bar{7}=\bar{5}$ в Z_8
5.19 $\bar{7}x+\bar{8}=\bar{3}$ в Z_{10}	**5.20** $\bar{8}x+\bar{7}=\bar{4}$ в Z_{13}	**5.21** $\bar{6}x-\bar{5}=\overline{10}$ в Z_{13}
5.22 $3-\bar{2}x=\bar{5}$ в Z_6	**5.23** $\bar{3}x+\bar{5}=\bar{4}$ в Z_7	**5.24** $\bar{9}x+\bar{4}=\bar{2}$ в Z_{11}

Рекомендуемая литература
Основная

1. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: «Высшая школа», 2007.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - СПб.: Лань, 2010.
3. Электронные учебные пособия на сайте кафедры высшей математики vm.mstuca.ru

Дополнительная

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. - М.: Айрис-пресс, 2007.
5. Туганбаев А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Задачи и упражнения. - ЭБС. iqlib.ru.

Подписано в печать 18.12.2014 г.
Печать офсетная Формат 60x84/16 2,07 уч.-изд. л.
2,33 усл.печ.л. Заказ № 1919/ Тираж 70 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а