ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

Кафедра высшей математики

Ю.И. Дементьев, В.В. Солодов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению практических работ

*для студентов II курса
направления 230100 (09.03.01)
очной формы обучения*

Москва-2015

ББК 518
Д30

Рецензент доц. В.А. Ухова

Дементьев Ю.И., Солодов В.В.

Д30 Вычислительная математика: пособие по выполнению практических работ. - М.: МГТУ ГА, 2015. - 16 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Вычислительная математика» по Учебному плану для студентов II курса направления 230100 (09.03.01) очной формы обучения.

Пособие охватывает разделы вычислительной математики, изучаемые студентами.

В пособии содержатся варианты контрольных домашних заданий и образцы их решения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 16.09.14 г. и методического совета 05.11.14 г.

Подписано в печать 28.12.2014 г.

Печать офсетная	Формат 60x84/16	0,84 уч.-изд. л.
0,93 усл.печ.л.	Заказ № 1931/	Тираж 80 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задание 1. Дано уравнение.

1. Графически отделить корни уравнения.

2. Перенести все члены уравнения в левую часть, привести их к общему знаменателю и методом деления отрезка пополам уточнить один из корней (любой) с точностью до $0,01$.

Задание 2. Дано уравнение.

1. Графическим методом отделить корни уравнения.

2. На полученном отрезке проверить выполнение условий применения метода хорд и касательных.

3. Вычислить корни уравнения с точностью до $0,0001$.

Задание 3. Дана система уравнений.

1. Начертить кривые, отвечающие каждому из уравнений, наметить начальное приближение к решению.

2. Методом простых итераций найти решение с точностью до $0,01$.

Задание 4. Дан интеграл.

1. Вычислить интеграл по формуле трапеций для $n = 10$.

2. Вычислить интеграл по формуле Симпсона (по формуле парабол) для $n = 10$.

Вариант 0.

1. $x^2 + 2x = \dfrac{x-1}{x+1}$.

2. $2\ln(x-1) - 7 + x = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x-0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Вариант 1.

1. $x^2 + 5x = \dfrac{x-1}{x+1}$.

2. $x^2 + e^x - 2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^1 \cos(x+x^3)\,dx$.

Вариант 2.

1. $x^2 - 6x = \dfrac{x+1}{x-1}$.

2. $3\ln(x+1) - 5 + x = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin(x^4 + 2x^3 + x^2)\,dx$.

Вариант 3.

1. $x^2 - 5 = \dfrac{x}{x+1}$.

2. $2\sin x - \frac{1}{3} + x = 0$.

3. $\begin{cases} \sin x = 2 - 2y; \\ \cos(y-1) + x = 0,7. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^1 e^{\sin x}\,dx$.

Вариант 4.

1. $x^2 - 6 = \dfrac{2-x}{x}$.

2. $2\cos x - \frac{1}{2} + x = 0$.

3. $\begin{cases} \cos x = 1,5 - y; \\ 2x - \sin(y - 0,5) = 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} \sin x \, dx$.

Вариант 5.

1. $2x^2 - 5x = \dfrac{x-1}{x+1}$.

2. $\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{3} = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x + 0,5) - y = 1; \\ \cos(y - 2) + x = 0. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 e^{\cos x} \, dx$.

Вариант 6.

1. $2x^2 - 3x = \dfrac{x+2}{1-x}$.

2. $2\sin(x-1) - 1 + x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(x + 0,5) + y = 0,8; \\ \sin y = 2x + 1,6. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cos x^3 \, dx$.

Вариант 7.

1. $5x - x^2 = \dfrac{x-2}{x+2}$.

2. $3\cos x + x - x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x - 1) = 1,3 - y; \\ x - \sin(y + 1) = 0,8. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 \, dx$.

Вариант 8.

1. $6x - x^2 = \dfrac{4-x}{x+1}$.

2. $3\log_2(x+3) - 5 + x = 0$.

3. $\begin{cases} 2y - \cos(x + 1) = 0; \\ x + \sin y = -0,4. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \sin(x + x^3) \, dx$.

Вариант 9.

1. $x^2 - 7x = \dfrac{x+3}{x}$.

2. $\log_3(x-3) - 4 + x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(x + 0,5) - y = 2; \\ \sin y = 1 + 2x. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} \cos x \, dx$.

Вариант 10.

1. $x^2 + 7x = \dfrac{x}{x+3}$.

2. $\sqrt[3]{x-2} - x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(x + 2) - y = 1,5; \\ x + \cos(y - 2) = 0,5. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_1^2 e^{-x^2} \sin 2x \, dx$.

Вариант 11.

1. $7x + x^2 = \dfrac{3+x}{3-x}$.

2. $5\log_4(x-3) - 2 + x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1,2; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\cos x)\,dx$.

Вариант 12.

1. $4x - x^2 = \dfrac{3+x}{3-x}$.

2. $2^x + x^2 - 10 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0,5; \\ y - \cos x = 3. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\ln x}{x+1}\,dx$.

Вариант 13.

1. $x^2 + 5x = \dfrac{x-2}{x+1}$.

2. $3^x - 2x^2 + 5 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin y = 2 - 2x; \\ \cos(x-1) + y = 0,7. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-x^2}\sqrt{x}\,dx$.

Вариант 14.

1. $x^2 - 6x = \dfrac{2-x}{x+1}$.

2. $2^x + 3x - 7 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos y = 1,5 - x; \\ 2y - \sin(x-0,5) = 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \cos x^3\,dx$.

Вариант 15.

1. $x^2 + 6x = \dfrac{x}{2x-3}$.

2. $3^x - 8 + 2x = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y+0,5) - x = 1; \\ \cos(x-2) + y = 0. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \cos x^2\,dx$.

Вариант 16.

1. $x^2 - 5x = \dfrac{3x}{3-x}$.

2. $2^x + 3 - 4x^2 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(y+0,5) + x = 0,8; \\ \sin x = 1,6 + 2y. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$.

Вариант 17.

1. $5x - x^2 = \dfrac{6x+2}{3x}$.

2. $3\sin x + x - 2 = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1,3; \\ y - \sin(x+1) = 0,8. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2\sin x)\,dx$.

Вариант 18.

1. $x^2 - 3x = \dfrac{4x+1}{x}$.

2. $3\cos(x-1) - x + 2 = 0$.

3. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ y + \sin x = -0,4. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2} x^2\,dx$.

Вариант 19.

1. $2x^2 = \dfrac{11-4x}{x}$.

2. $2x - 5 + e^x = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(y+0,5) - x = 2; \\ \sin x = 2y + 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} x\sin x^3\,dx$.

Вариант 20.

1. $x^2 = \dfrac{2x^2+4x+1}{x}$.

2. $3x - 2 + \lg(x+2) = 0$.

3. $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1,5; \\ y + \cos(x-2) = 0,5. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos(x+x^3)\,dx$.

Вариант 21.

1. $2x^2 + 4x = \dfrac{13}{x}$.

2. $\operatorname{tg} x + x^2 - 1 = 0,\ \ |x| < 2$.

3. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_1^{2} \sin x^3\,dx$.

Вариант 22.

1. $x = \dfrac{4-x^3}{x}$.

2. $\operatorname{arctg} x + x - 1 = 0$.

3. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5; \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

Вариант 23.

1. $2 - x^2 = \dfrac{x^2+1}{x}$.

2. $\operatorname{arctg} x - x^2 = 0,\ \ x > 0,1$.

3. $\begin{cases} \sin x = 1,6 - 2y; \\ \cos(y-1) + x = 1. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$.

Вариант 24.

1. $1 - x^2 = \dfrac{5}{x}$.

2. $\operatorname{arctg}(x+1) - x = 0$.

3. $\begin{cases} \cos x = 1,2 - y; \\ 2x - \sin(y-0,5) = 2. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin(2\cos x)\,dx$.

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Решение варианта 0

Задание 1. Дано уравнение $x^2 + 2x = \dfrac{x-1}{x+1}$.

1. Для графического отделения корней уравнения начертим графики функций $y = x^2 + 3x$ и $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

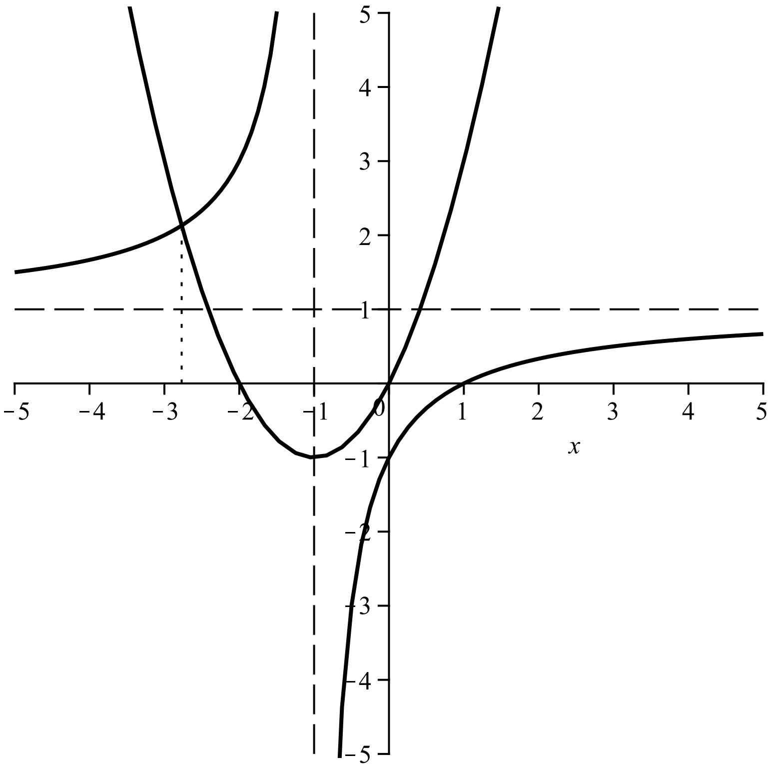

Рис. 1. Пересечение графиков функций $y = x^2 + 2x$ и $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Абсциссы точек пересечения построенных графиков отделяем отрезками так, чтобы каждый отрезок содержал только один корень. В нашем случае графики функций пересекаются только в одной точке. На рис. 1 отрезок $[-3; -2]$ отделяет этот один корень: $\xi \in [-3; -2]$.

2. В первом пункте мы отделили корень уравнения ξ. На отрезке $[-3; -2]$ расположен только один корень уравнения. Преобразуем исходное уравнение к виду:

$$(x^2 + 2x)(x+1) = x - 1 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0.$$

Обозначим

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

Методом деления отрезка пополам найдём корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-3; -2]$ с точностью до $0,01$. Левый конец отрезка $a_0 = -3$, правый конец отрезка $b_0 = -2$.

$$f(a_0) = f(-3) = -2 < 0,\ f(b_0) = f(-2) = 3 > 0\ \Rightarrow\ f(a_0)\cdot f(b_0) = -6 < 0.$$

В качестве нулевого приближения искомого корня возьмём середину отрезка $[-3; -2]$, то есть

$$\xi_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2,5.$$

Максимальная погрешность при этом равна половине длины отрезка $[-3; -2]$, то есть погрешность $\Delta = \frac{1}{2}$. Полученная погрешность превышает требуемую ($\frac{1}{2} > 0,01$), поэтому в качестве нового, более узкого отрезка $[a_1; b_1]$, отделяющего искомый корень, надо выбрать тот из отрезков $[a_0; \xi_0]$ и $[\xi_0; b_0]$, который содержит искомый корень. Нужный отрезок определяется из условия, чтобы на концах отрезка функция $f(x)$ имела разные знаки.

$$f(\xi_0) = f(-2,5) = 1,625 > 0\ \Rightarrow\ a_1 = -3,\ b_1 = -2,5.$$

В качестве первого приближения искомого корня возьмём середину отрезка $[a_1; b_1]$, то есть $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = -2,75$. Максимальная погрешность теперь равна половине длины отрезка $[a_1; b_1]$, то есть $\Delta = \frac{-2,5-(-3)}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$. Так как $\Delta = 0,25 > 0,01$, то процесс сужения отрезка продолжаем аналогично до тех пор, пока максимальная погрешность не станет меньше или равна заданной погрешности.

$$f(\xi_1) = f(-2,75) = 0,141 > 0\ \Rightarrow a_2 = -3,\ b_2 = -2,75,\ \xi_2 = -2,875.$$

На данном шаге погрешность $\Delta = 0,125 > 0,01$, поэтому процесс продолжаем.

$$f(\xi_2) = f(-2,875) \approx -0,842 < 0\ \Rightarrow a_3 = -2,875\ b_3 = -2,75,\ \xi_3 = -2,813.$$

Погрешность $\Delta = 0,063 > 0,01$, поэтому продолжаем.

$$f(\xi_3) = f(-2,813) \approx -0,333 < 0\ \Rightarrow a_4 = -2,813,\ b_4 = -2,75,\ \xi_4 = -2,781.$$

Погрешность $\Delta = 0,031 > 0,01$, поэтому продолжаем далее.

$$f(\xi_4) = f(-2,781) \approx -0,087 < 0\ \Rightarrow a_5 = -2,781,\ b_5 = -2,75,\ \xi_5 = -2,766.$$

Погрешность $\Delta = 0,016 > 0,01$, поэтому продолжаем вычисления.

$$f(\xi_5) = f(-2,766) \approx 0,024 > 0\ \Rightarrow a_6 = -2,781,\ b_6 = -2,766,\ \xi_6 = -2,774.$$

Погрешность $\Delta = 0,008 < 0,01$, поэтому нужная точность достигнута и в качестве решения с заданной точностью можем взять значение $\xi_6 = -2,774$.

Вычисления удобно организовать в виде таблицы.

$$f(a_0) = f(-3) = -2 < 0, \quad f(b_0) = f(-2) = 3 > 0.$$

i	a_i	b_i	$\xi_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$	$f(\xi_i)$	Δ
0	-3	-2	$-2,5$	$1,625$	$0,5$
1	-3	$-2,5$	$-2,75$	$0,141$	$0,25$
2	-3	$-2,75$	$-2,875$	$-0,842$	$0,125$
3	$-2,875$	$-2,75$	$-2,813$	$-0,333$	$0,063$
4	$-2,813$	$-2,75$	$-2,781$	$-0,087$	$0,031$
5	$-2,781$	$-2,754$	$-2,7664$	$0,024$	$0,016$
6	$-2,781$	$-2,766$	$-2,774$	$-0,035$	$0,008$

Задание 2. Дано уравнение $2\ln(x-1) - 7 + x = 0$.

1. Преобразуем уравнение к виду

$$\ln(x-1) = \frac{7-x}{2}.$$

Начертим графики левой и правой частей уравнения.

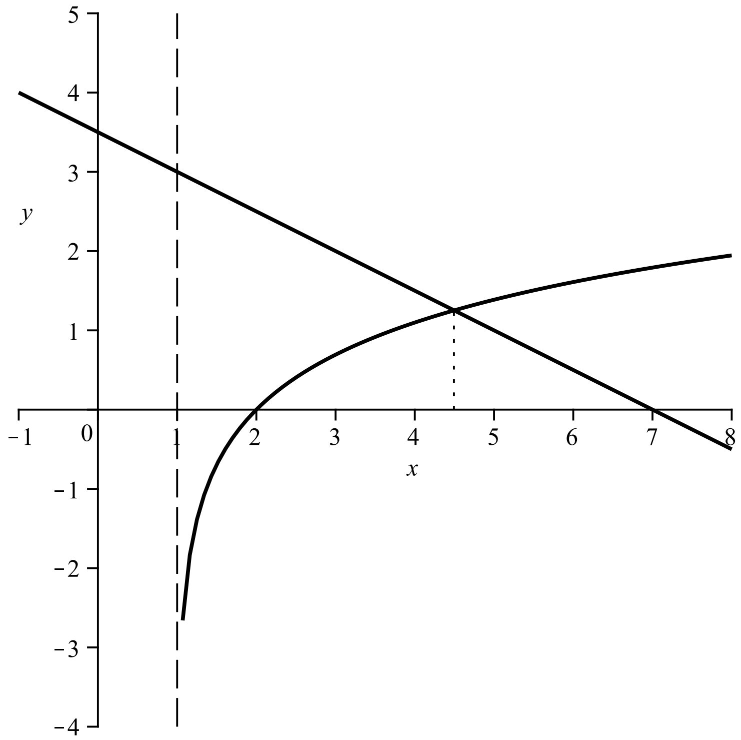

Рис. 2. Пересечение графиков функций $y = \ln(x-1)$ и $y = \dfrac{7-x}{2}$.

Одна функция возрастающая, другая — убывающая, значит, имеется единственный корень уравнения (см. рис. 1). Абсцисса точки пересечения построенных графиков отделяется отрезком $[4; 5]$. Получаем, что корень уравнения $\xi \in [4; 5]$.

2. Обозначим $f(x) = 2\ln(x-1) - 7 + x$.

Проверим выполнение условий метода хорд и касательных. Надо проверить 3 условия:

1) на концах отрезка $[4; 5]$ функция $f(x) = 2\ln(x-1) - 7 + x$ принимает значения разных знаков;

2) на рассматриваемом отрезке $[4;5]$ первая производная $f'(x)$ сохраняет знак;

3) на рассматриваемом отрезке $[4;5]$ вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак.

Обозначим $a_0 = 4$, $b_0 = 5$.

$$f(a_0) = f(4) \approx -0,803 < 0 \quad f(b_0) = f(5) \approx 0,773 > 0.$$

На концах отрезка $[4;5]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков.

$$f'(x) = (2\ln(x-1) - 7 + x)' = \frac{2}{x-1} + 1 > 0 \text{ при } x \in [4;5].$$

Перая производная положительна на рассматриваемом отрезке.

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2}{x-1} + 1\right)' = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0 \text{ при } x \in [4;5].$$

Вторая производная отрицательна на рассматриваемом отрезке.

3. Корень уравнения вычисляют по следующему алгоритму:

а) если $f(a_k) \cdot f''(x) > 0$, то

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}, \quad b_{k+1} = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k);$$

б) если $f(a_k) \cdot f''(x) < 0$, то

$$a_{k+1} = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(a_k), \quad b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)}{f'(b_k)}.$$

Значения a_{k+1} надо вычислять с недостатком, а значения b_{k+1} — с избытком во избежание „проскальзывания“ корня.

Результаты вычислений удобно оформлять в виде таблицы.

k	$[a_k; b_k]$	$f(a_k)$	$f(b_k)$	знак $f(a_k)f''(x)$	$f'(b_k)$, если $f(a_k)f''(x) < 0$; $f'(a_k)$, если $f(a_k)f''(x) > 0$	a_{k+1}	b_{k+1}	$\Delta_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1}$
0	$[4;5]$	$-0,80278$	$0,77259$	$+$	$1,66667$	$4,48166$	$4,50959$	$0,02793$
1	$[4,48166; 4,50959]$	$-0,02332$	$0,02059$	$+$	$1,57444$	$4,49647$	$4,49650$	$0,00003$

Так как уже получена возможная максимальная погрешность $\Delta = \frac{0,00003}{2} = 0,000015 < 0,0001$, то в качестве искомого корня можно взять любое из чисел отрезка $[4,49647; 4,49650]$. Требуется найти приближённое значение корня с четырьмя десятичными знаками, поэтому в качестве ответа можно взять число $4,4965$ или $4,4964$.

Задание 3. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$$

1. Выразим переменные x и y и запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} y = \sin(x - 0,6) - 1,6; \\ x = \frac{1}{3}\cos y + 0,3. \end{cases}$$

Построим графики полученных функций (см. рис. 3).

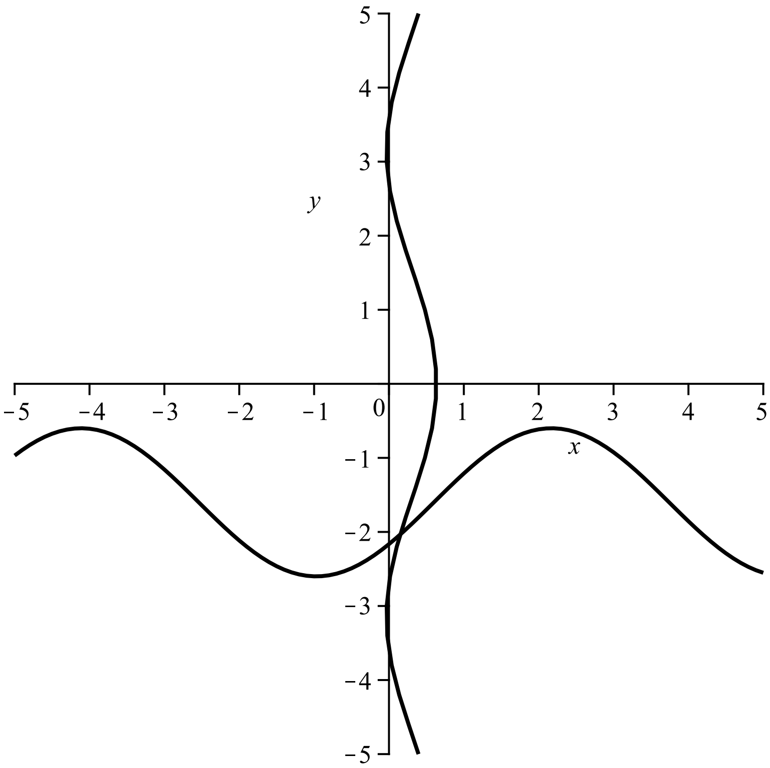

Рис. 3. Пересечение графиков $y = \sin(x - 0,6) - 1,6$ и $x = \frac{1}{3}\cos y + 0,3$.

Увеличив масштаб, определим начальное приближение (см. рис. 4).

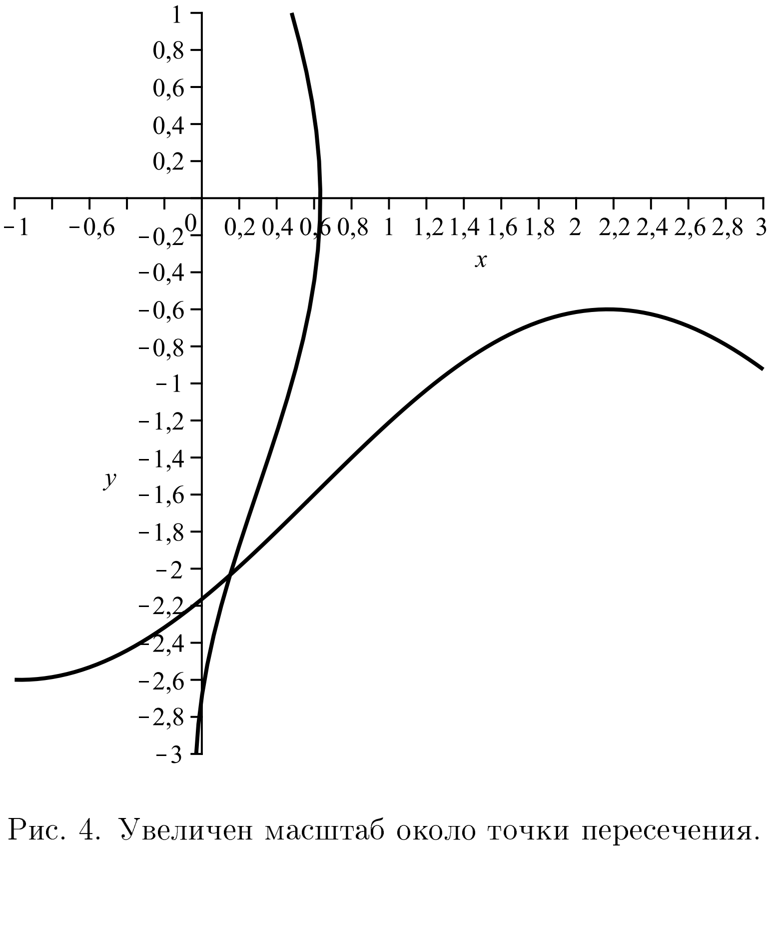

Рис. 4. Увеличен масштаб около точки пересечения.

По графику определяем, что система имеет одно решение, удовлетворяющее условиям

$$0 < x < 0,4, \quad -2,2 < y < -1,8.$$

В качестве начального приближения возьмём $x_0 = 0,2$, $y_0 = -2$.

2. Обозначим

$$\begin{cases} f(x) = \sin(x - 0,6) - 1,6; \\ g(y) = \frac{1}{3}\cos y + 0,3. \end{cases}$$

Учитывая, что $y = f(x)$ и $x = g(y)$, каждое следующее приближение будем искать по формулам

$$\begin{cases} x_{k+1} = g(y_k); \\ y_{k+1} = f(x_k). \end{cases}$$

Процесс останавливается, когда достигнута нужная точность $0,01$, то есть, когда выполнены условия

$$\Delta_{x_k} = |x_{k+1} - x_k| < 0,01 \quad \text{и} \quad \Delta_{y_k} = |y_{k+1} - y_k| < 0,01.$$

Решение удобно оформить в виде таблицы.

k	x_k	y_k	$x_{k+1} = g(y_k)$	$y_{k+1} = f(x_k)$	Δ_{x_k}	Δ_{y_k}
0	$0,2$	-2	$0,1613$	$-1,9894$	$0,0387$	$0,0106$
1	$0,1613$	$-1,9894$	$0,1645$	$-2,0248$	$0,0032$	$0,0354$
2	$0,1645$	$-2,0248$	$0,1538$	$-2,0219$	$0,0107$	$0,0029$
3	$0,1538$	$-2,0219$	$0,1547$	$-2,0315$	$0,0009$	$0,0096$

Так как нам требуется точность два знака после запятой, то получаем

$$x \approx 0,15, \quad y \approx -2,03.$$

Задание 4. Дан интеграл $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

1. Вычислим интеграл по формуле трапеций. Разбиваем отрезок интегрирования $[a; b]$ на n равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

По формуле трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ — длина каждого отрезка.

В нашем случае

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad n = 10, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad h = \frac{2-0}{10} = 0,2.$$

Так как $n = 10$, то формула принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \right.$$

$$\left. + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2}\right).$$

Вычисляем значения функции $f(x)$ в точках разбиения отрезка:

$$\begin{aligned}
&f(x_0) = f(0) = 0,\\
&f(x_1) = f(0,2) \approx 0,19231,\\
&f(x_2) = f(0,4) \approx 0,34483,\\
&f(x_3) = f(0,6) \approx 0,44118,\\
&f(x_4) = f(0,8) \approx 0,48780,\\
&f(x_5) = f(1) = 0,5,\\
&f(x_6) = f(1,2) \approx 0,49180,\\
&f(x_7) = f(1,4) \approx 0,47297,\\
&f(x_8) = f(1,6) \approx 0,44944,\\
&f(x_9) = f(1,8) \approx 0,42453,\\
&f(x_{10}) = f(2) = 0,4.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в формулу трапеций, окончательно получаем

$$\int\limits_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx \approx 0,2 \cdot \left(\frac{0}{2} + 0,19231 + 0,34483 + 0,44118 + 0,48780 + \right.$$

$$\left. + 0,5 + 0,49180 + 0,47297 + 0,44944 + 0,42453 + \frac{0,4}{2}\right) \approx 0,80097.$$

2. Вычислим интеграл по формуле Симпсона. Разбиваем отрезок интегрирования $[a; b]$ на n равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

По формуле Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \cdot \Big(\big(f(x_0) + f(x_n)\big) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\big) +$$

$$+ 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})\big)\Big),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ — длина каждого отрезка.

В нашем случае

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad n = 10, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad h = \frac{2-0}{10} = 0,2.$$

Так как $n = 10$, то формула принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3} \cdot \Big(\big(f(x_0) + f(x_{10})\big) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)\big) +$$

$$+ 2\big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)\big)\Big).$$

Значения функции $f(x)$ в точках разбиения отрезка $[0; 2]$ были вычислены в первом пункте. Подставляя эти значения в формулу Симпсона, окончательно получаем

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx \approx$$

$$\approx \frac{0,2}{3} \cdot \Big(\big(0 + 0,4\big) + 4\big(0,19231 + 0,44118 + 0,5 + 0,47297 + 0,42453\big) +$$

$$+ 2\big(0,34483 + 0,48780 + 0,49180 + 0,44944\big)\Big) =$$

$$= \frac{0,2}{3} \cdot \big(0,4 + 4 \cdot 2,03099 + 2 \cdot 1,77387\big) =$$

$$= \frac{0,2}{3} \cdot 12,0717 \approx 0,80478.$$

Рекомендуемая литература

1. Гмурман В. Е. Элементы приближённых вычислений. Издательство Высшая школа. 2005.

2. Поршнев С. В. Беленкова И. В. Численные методы на базе Mathcad. Издательство БХВ. Санкт-петербург. 2012.

3. Протасов И. Д. Лекции по вычислительной математике. Издательство Гелиос АРВ. Москва. 2004.

Содержание

Контрольное домашнее задание 2
Образец решения контрольного домашнего задания 7
Рекомендуемая литература 15