

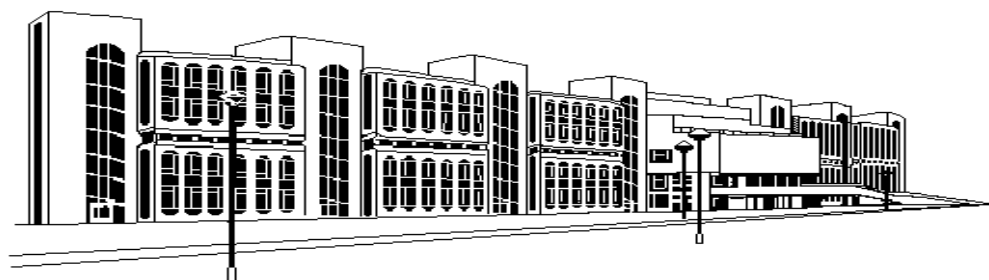


ISSN 2079-0619

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

# **НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК МГТУ ГА**

№ 207



**Москва  
2014**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

---

# **НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК МГТУ ГА**

**№ 207 (09)**

Издается с 1998 г.

**Москва  
2014**

*Научный Вестник МГТУ ГА решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ включен в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук*

### **Главная редакция**

**Главный редактор -** заслуженный юрист РФ, д-р юрид. наук, д-р техн. наук, проф. Б.П. Елисеев (МГТУ ГА)

**Зам. главного редактора -** д-р техн. наук, проф. В.В. Воробьев (МГТУ ГА)

**Ответственный секретарь главной редакции -** д-р техн. наук, доц. О.Г. Феоктистова (МГТУ ГА)

**Члены главной редакции -** почетный работник науки и техники, д-р филос. наук, проф. О.Д. Гаранина (МГТУ ГА);  
заслуженный деятель науки и техники РФ,  
д-р физ.-мат. наук, проф. А.И. Козлов (МГТУ ГА);  
заслуженный деятель науки РФ,  
д-р техн. наук, проф. В.Г. Ципенко (МГТУ ГА);  
д-р техн. наук, проф. В.Т. Калугин (МГТУ им. Н.Э. Баумана);  
заслуженный деятель науки РФ,  
д-р физ.-мат. наук, проф. Д.С. Лукин (МФТИ);  
заслуженный работник транспорта РФ,  
д-р техн. наук, проф. В.С. Шапкин (ГосНИИ ГА);  
заместитель декана факультета Национальной школы гражданской авиации (ЕНАС) Бруно Ламискарге (Тулуза, Франция);  
директор Межведомственного Центра промышленных исследований в авионавтике Франко Персиани (Болонский университет, Италия);  
профессор кафедры аэрокосмической техники Университета Севильи Дамиан Ривас (Испания)

### **Редакционная коллегия выпуска**

**Ответственный редактор выпуска -** д-р техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов (МГТУ ГА)

**Ответственный секретарь выпуска -** канд. физ.-мат. наук, доц. П.В. Филонов (МГТУ ГА)

**Члены редакционной коллегии -**  
- д-р техн. наук, проф. А.А. Егорова (МГТУ ГА);  
- д-р техн. наук, проф. Л.Е. Рудельсон (МГТУ ГА);  
- д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Пантелеев (МАИ);  
- д-р техн. наук, проф. В.В. Соломенцев (НПЦ «Промтехазро»)

E-mail: v.kuznetsov@mstuca.aero

тел. +7(499) 458-84-16

*Плата за публикацию в Научном Вестнике МГТУ ГА с аспирантов не взимается*

---

---

**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК  
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

---

---

№ 207

2014

**СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Касимов Ю.Ф., Керимов А.К.</b> Метод когорт и его применение в страховой статистике....	5
<b>Пантелеев А.В., Пановский В.Н.</b> Обобщенный инверсный интервальный метод глобальной условной оптимизации.....	17
<b>Пантелеев А.В., Письменная В.А.</b> Решение задачи о переводе спутника между орбитами с помощью гибридного меметического алгоритма.....	25
<b>Буряк Ю.И., Ивенин И.Б., Скрынников А.А.</b> Оптимальная коррекция сроков выполнения работ по проекту при возникновении отклонения от сетевого графика.....	33
<b>Зурабьян Н.И.</b> Подход к поиску направлений оптимизации характеристик авиационных систем на основе методологии анализа среды функционирования.....	40
<b>Бояркин С.В., Кузнецов В.Л., Лоссиевская Т.В.</b> Моделирование векторной диаграммы направленности параболической зеркальной антенны.....	46
<b>Рыбаков К.А.</b> Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа.....	54
<b>Казбеков Б.В., Максимов Н.А., Шаронов А.В.</b> Метод сопоставления изображений с эталонами как метод идентификации подвижных наземных объектов.....	61
<b>Максимов Н.А., Шаронов А.В.</b> Анализ формы изображений и распознавание объектов на основе скелетно-контурного представления.....	67
<b>Филонов П.В., Филонова А.А.</b> Марковская модель эволюции квантовой системы состояний в терминах макрохарактеристик.....	76
<b>Зырянов Ю.Т., Дмитриев В.М.</b> Оценка эффективности комплексов светосигнального оборудования аэродромов на основе моделирования процесса посадки в условиях ограниченной видимости.....	82
<b>Горбачёв О.А., Иванов В.Б., Холмогоров А.А.</b> дифференциально-временная коррекция ошибок позиционирования для спутниковых радионавигационных систем.....	90
<b>Глаговский К.А., Лавина В.В., Рудельсон Л.Е.</b> Использование плановых данных для повышения качества радиолокационного сопровождения воздушных судов.....	95
<b>Duyunova A.A.</b> Affine connection adjoined to web $W(I, N, I)$ .....	100
<b>Ерзакова Н.А.</b> О сильно уплотняющих на бесконечности операторах.....	110

<b>Ерзакова Н.А.</b> Мера некомпактности $\beta$ в пространствах Лоренца.....	118
<b>Фонарёв А.А.</b> О некоторых приближениях к замкнутому множеству нетривиальных решений уравнений Гинзбурга – Ландау.....	126
<b>Лукацкий А.М.</b> О задаче продолжения диффеоморфизмов тора и ее приложениях.....	133
<b>Кузнецов В.Л., Горяченкова Е.С.</b> Об оценках статистики ошибок пилотирования и вероятности сбоя спутниковой навигационной системы.....	138

УДК 519.6

## МЕТОД КОГОРТ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В СТРАХОВОЙ СТАТИСТИКЕ

Ю.Ф. КАСИМОВ, А.К. КЕРИМОВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Кузнецовым В.Л.

Статья заказана редакцией Научного Вестника

В работе рассмотрен так называемый когортный метод учета агрегированных данных страховых портфелей. В страховой статистике систематизация и обработка совокупных данных по выписанным полисам, премиям и страховым платежам часто производится с грубыми ошибками, поскольку точно не задаются критерии отнесения выписанных полисов и связанных с ними платежей к анализируемой статистической совокупности. Кроме того, часто четко не указывается схема расчета агрегированных статистических характеристик, связанных с этими полисами. В работе дано детальное и строгое изложение как метода формирования различных когорт данных для заданного периода оценивания агрегированных характеристик, так и методов расчета интересующих страховых показателей (абсолютных и относительных) для этих когорт. Знание этих методов необходимо для корректной оценки страховых премий и резервов.

**Ключевые слова:** когорты полисов, премий и убытков, способы учета, полный и частичный методы.

### Введение

В финансовом менеджменте страховых как, впрочем, и не страховых компаний используется большое число различных *количественных* показателей их деятельности. К ним можно отнести широко известные показатели ликвидности, рентабельности и т.п. Большинство из этих показателей формируется на основе данных финансовой отчетности: баланса, отчета о прибылях и убытках (финансового результата страховой компании) и др. Кроме показателей общего характера, которые используются и в финансовом менеджменте не страховых организаций, страховые компании используют в оценке и анализе своей деятельности ряд специфических показателей. К ним относятся так называемые *агрегированные показатели страховых портфелей*. Иногда их коротко называют *мерами риска*, имея в виду риск, связанный с договорами страхования заключенными страховой компанией. Выбор адекватной меры риска очень сложная, но важная задача. Так в гражданской авиации используется весьма большое число разнообразных мер риска в зависимости от типа страхуемого риска [1; 2]. Корректный метод оценки риска при этом существенно влияет как на размер назначаемой премии, так и на оценку необходимых страховых резервов. В этой работе мы рассмотрим общий подход к описанию и оценке параметров риска, который может применяться не только в гражданской авиации, но и в других областях рискованного страхования.

Термин когортный метод заимствован из демографии, где он широко применяется для выделения различных групп лиц (когорт), объединённых одним и тем же демографическим событием, произошедшим в указанный период времени [3; 4].

Мы рассмотрим в основном традиционные меры риска, наиболее часто используемые на практике [5]. Ряд из них входит в качестве компонент в формулы для премий, тарифных ставок, резервов и т.д. [6; 7]. Приводимые меры (характеристики) риска являются *агрегированными интервальными* показателями, т.к. они относятся не к отдельному риску (полису), а к некоторой их совокупности, например к страховому портфелю компании за данный *период времени*.

## 1. Количественные показатели портфеля рисков за данный период (за год)

*Абсолютные показатели:*  $N$  - число полисов;  $n$  - число страховых случаев (исков);  $\mathcal{S}$  - общая страховая сумма всех застрахованных объектов;  $\mathcal{L}$  - общая сумма страхового ущерба;  $\mathcal{E}$  - общая сумма страховых выплат;  $\mathcal{P}$  - общая сумма премий.

*Относительные показатели:*  $f = n/N$  - частота исков на полис;  $l = \mathcal{L}/n$  - средняя величина иска (на страховой случай);  $\tau = \mathcal{L}/\mathcal{S}$  - убыточность страховой суммы (unit claim rate);  $s = \mathcal{A}/N$  - средний объем риска на полис;  $\rho = \mathcal{P}/\mathcal{S}$  - норма взносов (unit premium rate);  $\nu = \mathcal{L}/\mathcal{P}$  - норма убыточности (убыточность премий – claim ratio).

Важно отметить, что все перечисленные выше характеристики относятся к выбранному промежутку времени, т.е. являются, по существу, *интервальными* характеристиками портфеля рисков. Для правильного вычисления этих характеристик нужно указать *точные правила* подсчета всех элементов этих характеристик, так нужно уметь решать вопрос о том, относится ли данный полис, застрахованный объект, выплата страхового возмещения и т.д. к указанному периоду или нет, и, кроме того, необходимо точно указать, как *количественно* определяется каждая из этих характеристик при положительном решении вопроса о ее отнесенности к заданному периоду, т.е. будет ли страховая сумма по *годовому* полису, выписанному в *конце* рассматриваемого года, учитываться полностью или частично.

Это далеко непростые вопросы, как может показаться на первый взгляд. От принятого решения зависят получающиеся значения проведенных выше характеристик и, следовательно, полученные оценки риска и, в частности, основанные на этих оценках тарифы. Для того чтобы уметь правильно решать подобные задачи, необходимо более тщательно разобраться в том, что представляют собой те или иные временные и финансовые характеристики страховых контрактов, в частности, в способах *временной привязки* базовых характеристик (премия, страховая сумма, страховая выплата) и методах *количественного* учета этих характеристик. Этой теме посвящен следующий параграф.

## 2. Мгновенные и интервальные величины

Пожалуй, одним из важнейших обстоятельств, которое часто упускают из вида, является то, что финансовые характеристики страховых и вообще финансовых операций всегда имеют определенную *временную привязку*. Они относятся либо к *моментам времени*, например, курс ценной бумаги, либо к *временным промежуткам*, например, дивиденды или проценты. В соответствии с этим все величины в финансовом анализе (да и вообще в экономике) можно разделить на *два класса*.

*Первый класс* составляют величины, относящиеся к *моментам времени*. Они являются *функциями* времени, т.е. изменяются с течением времени. Их называют *мгновенными* (или *переменными*) *состояниями*. Эти величины представляют мгновенное значение различных финансовых характеристик, таких как стоимость, цена, курс. Все *балансовые* показатели относятся к величинам этого вида.

*Второй класс* составляют величины (переменные), которые *естественным образом* связаны с *промежутками, периодами времени*. Их называют *интервальными* или *распределенными* величинами. Так годовой доход, прибыль, процентная ставка - примеры величин этого класса. Большое семейство величин этого класса составляют характеристики, показывающие *изменение величин состояния* (т.е. величин первого класса) *за определенный промежуток времени*. Так *приращение* стоимости активов или резервов какого-либо фонда *за год* является также примером этого типа величин.

Между величинами указанных классов не всегда удается провести четкую грань. Рассмотрим, например, дивиденды, выплачиваемые по обыкновенным акциям. Конкретно очередная выплата дивидендов осуществляется в определенный *момент времени*. Для отдельного акционера это может быть момент перечисления дивидендов на его счет в банке или брокерской

конторе. Поэтому *на первый взгляд* эта сумма относится к моменту времени. Однако экономический смысл дивидендов как доли прибыли, полученной предприятием за определенный промежуток времени, например, за год, ясно указывает на то, что эта величина является функцией именно *промежутка*, а не *момента* времени. Так бессмысленно говорить о том, какова величина дивидендов на данную конкретную дату: сегодня, завтра, через месяц. Однако можно говорить о величине дивидендов за год, два, три и т.д. С другой стороны, не имеет смысла говорить о цене акции за год, два года и т.п. Можно говорить об *изменении цены* или *средней* цене за эти промежутки, но это уже характеристики *интервалов*, а не моментов времени.

Из отмеченного выше различия между величинами состояния и потока следует различный способ их математического представления. Величина первого типа есть функция *времени*, и обычно этот факт записывают в виде  $C_t$  или  $C(t)$ , где  $C(t)$  (или  $C_t$ ) - значение в момент времени  $t$  некоторой величины  $C$ , например стоимости актива.

Величины второго класса являются функциями промежутка, и поэтому для их определения необходимо задавать промежуток времени. Это можно сделать либо используя стандартное обозначение для промежутков времени  $J$ , например  $[t_1, t_2]$  или  $(t_1, t_2)$ . Интервальную величину  $C$ , относящуюся к промежутку  $J$ , будем обозначать через  $C(J)$ ,  $C_J$  или  $C(t_1, t_2)$ .

На практике интервальные события обычно преобразуют в мгновенные (например, выплата дивидендов за год осуществляется в конце года). Такое преобразование называют *актуализацией*. Чаще всего применяются два приема актуализации: сумма, относящаяся к некоторому периоду, приписывается к его концу (*финализация*) или к его началу (*авансирование*). Например, страховая премия – *интервальная* величина, выплачиваемая в начале страхового периода.

Как уже отмечалось, все приведенные выше характеристики риска являются интервальными характеристиками. Они получены суммированием (агрегированием) индивидуальных характеристик риска по всем полисам, относящимся к некоторому (оценочному) периоду.

### 3. Способы количественного учета интервальных показателей

Существенной чертой интервальных величин является их *распределенность*, иными словами, для интервальной величины  $C$ , относящейся к некоторому промежутку  $J$ , можно найти значение этой величины для любой *части*  $K$  исходного промежутка. Это значение называют *релевантным* значением, соответствующим заданной части промежутка. Конкретные способы определения релевантного значения разнообразны и зависят от типа рассматриваемых величин, специфики задачи и т.д. Однако одним из наиболее распространенных методов является так называемый *пропорциональный* метод (*pro rata*). В этом случае релевантное значение является долей исходного значения интервальной величины, определяемой отношением длин исходного промежутка и его части. Более точно это правило можно сформулировать следующим образом.

Допустим, что нам необходимо найти релевантное значение интервальной величины  $C(J)$  для оценочного периода  $I=[t_0, t_1]$  (рис. 1). Пусть  $T = |J|$  - длина промежутка  $J = [t_2, t_3]$ , к которому относится интервальная величина  $C$  (например премия по полису), а  $L$  - длина общей части  $J \cap I = [t_2, t_1]$ , промежутка  $J$  и оценочного периода  $I$

$$L = |J \cap I|.$$

Тогда релевантная относительно оценочного периода величина  $C$  будет  $C(I) = (L/T) \cdot C(J)$ . Так, например, для премии по годовому полису, равной 600 руб., ее релевантная часть, приходящаяся на первый квартал страхового года, будет равна  
(4/12) · 600 = 150 (руб.).

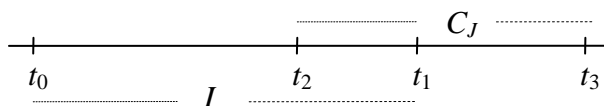


Рис. 1



#### 4. Финансово-временные характеристики страхового контракта (полиса)

Каждый страховой полис характеризуется рядом временных и финансовых параметров. Часть этих параметров устанавливается в момент заключения контракта, другие связаны с конкретными условиями реализации контракта. К важнейшим *временным* параметрам относятся:

- 1) момент заключения контракта ( $t_0$ );
- 2) момент окончания срока действия полиса ( $t_1$ );
- 3) срок (продолжительность, период) действия контракта ( $T$ );
- 4) момент(ы)  $\tau_1$  страховых событий, связанных со страхуемым полисом;
- 5) момент(ы)  $\tau_2$  заявления о страховых событиях, т.е. моменты предъявления исков;
- 6) момент(ы)  $\tau_3$  урегулирования (оплаты) страховых претензий.

Заметим, что, вообще говоря, с данным полисом может быть связано несколько страховых случаев. Первые три временные характеристики являются *фиксированными*, они относятся к реквизитам полиса и устанавливаются в момент его заключения. Остальные характеристики являются *случайными* величинами и зависят от конкретных условий, сложившихся в период действия контракта.

К важнейшим *финансовым* характеристикам относятся:

- 7) объем страховой ответственности (объем застрахованного риска) ( $W$ ), например страховая сумма  $S$ ;
- 8) стоимость страхового контракта (размер премии)  $B$ , включающей рисковую премию  $P$  и нагрузку  $E$ ;
- 9) размер (истинного, фактического) ущерба  $X$ , связанного со страховым событием;
- 10) размер иска  $L$  (оцененного ущерба) по страховому случаю;
- 11) размер страхового возмещения  $C$  по данному страховому событию.

Объем  $W = m \times T \times S$  застрахованного риска задаёт «степень подверженности риску» (*exposure*) по данному полису и включает в качестве составных компонент следующие величины:

- 12)  $m$  - число однородных застрахованных объектов;
- 13)  $T$  - срок страхования;
- 14)  $S$  - страховая сумма.

Для типичных полисов рискового (например, имущественного) страхования:  $m=1$  объект,  $T=1$  год, поэтому объем страхового риска по полису численно равен страховой сумме  $W = S$ , однако в отличие от страховой суммы объем риска - интервальная величина, относящаяся ко всему периоду действия полиса.

Среди финансовых величин объем страхового риска  $W$  (или  $S$ ) и премия  $B$  устанавливаются в момент подписания контракта, т.е. являются авансированными интервальными величинами относительно периода действия контракта. Размеры истинного  $X$  и оцененного ущерба  $L$ , а также страхового возмещения  $C$  являются, напротив, мгновенными величинами, относящимися к моментам  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  соответственно. Тройку  $\{(\tau_1, X); (\tau_2, L); (\tau_3, C)\}$  часто называют *триплетом* страхового случая.

Следует различать эти величины. Страховое возмещение не может быть больше, чем величина ущерба, а оцененный ущерб  $L$  есть некоторая *приближенная оценка* истинного ущерба  $X$

$$C \leq L \approx X.$$

Связь между ними устанавливается принятыми для данного класса риска *правилами (схемами) страхового покрытия*.

#### 5. Схемы покрытия страховых убытков

Ниже мы опишем наиболее типичные схемы покрытия, используемые на практике. Пусть  $L$  - реальные убытки при возникновении страхового случая, а  $C$  - соответствующее страховое возмещение. На практике используются различные схемы определения страхового покрытия. Мы укажем лишь основные (базовые) схемы [8].

1. *Схема полного возмещения (схема действительной стоимости).*  $C = Y$ .

В этом случае страховое возмещение совпадает с величиной реального ущерба.

2. *Схема пропорционального возмещения.* Пусть застрахованный объект имеет страховую стоимость  $V$ , и он застрахован на сумму  $S$ . Тогда убыток величины  $L$  компенсируется в размере

$$C = a \cdot L, \text{ где } a = S/V.$$

Таким образом, убыток компенсируется в пропорции, равной доле страховой суммы в полной страховой стоимости объекта.

3. *Схема I-го риска.* По этой схеме фиксируется верхний предел страховой ответственности  $M$ , и все убытки, не превосходящие  $M$ , возмещаются полностью, а превосходящие  $M$ , лишь на эту максимальную сумму:

$$C = L, \text{ если } L \leq M \text{ и } C = M, \text{ если } L > M.$$

4. *Франшизы.* В этих схемах фиксируется нижний предел ущерба  $d$ , начиная с которого риск подлежит компенсации. В случае *безусловной франшизы* схема покрытия описывается правилом:

$$C = 0, \text{ если } L \leq d \text{ и } C = L - d, \text{ если } L > d.$$

Ущерб, не превышающий порога  $d$ , не возмещается, а превосходящий этот порог, возмещается лишь на сумму превышения ущерба над  $d$ .

Для *условной франшизы*:

$$C = 0, \text{ если } L \leq d \text{ и } C = L, \text{ если } L > d.$$

Ущерб, не превосходящий  $d$ , не возмещается, а превосходящий возмещается полностью.

На практике, кроме этих базовых схем, используются и другие более сложные схемы, например, комбинированные.

Общая схема описывается функциональным соотношением

$$C = \Phi(L),$$

где  $C$  - страховое возмещение;  $L$  - реальный убыток;  $\Phi$  - определяющее правило, согласно которому вычисляется страховое возмещение.

Статистические данные для  $L$  порождают соответствующую статистику для  $C$ . Ниже мы не будем различать эти величины, считая, если не оговорено противное,  $L = C$ , однако надо помнить, что на практике эти величины могут различаться, причем существенно, и это различие необходимо учитывать, например, при определении тарифных ставок, вычисляемых на основе статистических данных.

Страховой контракт может быть наглядно изображен своей временной диаграммой, указывающей временную привязку финансовых параметров контракта.

Различные типы временных диаграмм для контрактов представлены на рис. 2 - 4.

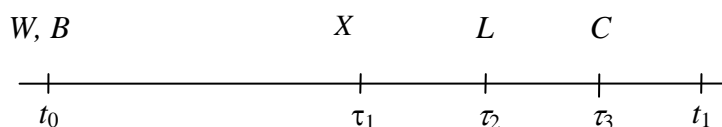


Рис. 2

В этом случае (рис. 2) все три момента (весь триплет) укладываются в период действия контракта. Временная «сжатость» триплета страхового характерна для относительно «несложных» видов массового страхования (например, в автостраховании), когда риск поддается быстрой оценке и возможности быстрого урегулирования.

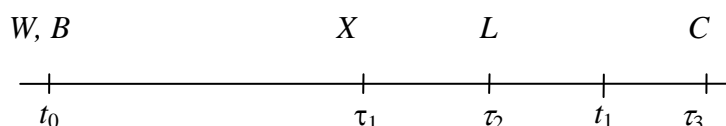


Рис. 3

Для схемы на рис. 3 страховое событие и его регистрация относятся к периоду действия контракта, а урегулирование иска осуществляется после окончания срока действия полиса. В этом случае страховой размер страховой выплаты к концу периода страхования еще неизвестен, но может быть оценен. Такая оценка осуществляется в рамках оценки *резервов заявленных, но неурегулированных убытков*.

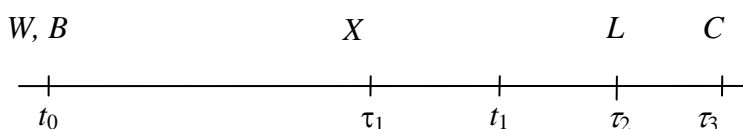


Рис. 4

Наконец, для схемы на рис. 4 к периоду действия контракта относится только наступление страхового события, а предъявление иска и оплата страхового возмещения осуществляются после окончания срока действия. В этом случае к концу периода страхования эти величины, как и сам факт наступления страхового случая, неизвестны. При оценке агрегированных показателей эти величины либо не учитываются вовсе, либо их учет осуществляется в рамках оценки *резерва произошедших, но не заявленных убытков*.

Таким образом, моменты наступления страхового события, его регистрация и оплата связанного с этим событием страхового возмещения необязательно сосредоточены вблизи друг друга в пределах срока действия контракта, а могут быть удалены и притом значительно друг от друга.

## 6. Принципы расчета агрегированных характеристик

Упомянутая удаленность (отделенность) важнейших временных характеристик создает трудности при *статистическом агрегировании* данных или формировании *временных когорт* исков, полисов и т.д., *относящихся к некоторому временному промежутку* - периоду анализа или оценки<sup>1</sup>. Так при расчете некоторой суммарной или средней характеристики портфеля полисов (например суммарного возмещения), относящегося к данному временному промежутку, необходимо *точно указать правило (критерий релевантности)*, в соответствии с которым используемая характеристика портфеля относится (или нет) к указанному промежутку.

При нахождении агрегированных, в частности средних характеристик портфеля, рисков необходимо не только указывать *способ образования* соответствующих временных когорт, но и принцип *количественного* учета характеристик пула, относящихся к данной когорте. На практике чаще всего используют два метода: *полный*, при котором *все отнесенные к заданному периоду характеристики* (число полисов, страховые суммы, премии, выплаты и др.) учитываются *полностью*, т.е. по их исходным значениям, и *частичный* метод (называемый также *учетным* или бухгалтерским), при котором учитывается только *релевантное относительно данного периода*

<sup>1</sup> Напомним, что когортой в демографии называют группу лиц, связанных одним и тем же демографическим событием, произошедшим в данном периоде. Так можно рассматривать когорту лиц, родившихся в данном году, лиц, вступивших в первый брак в данном году, и т.п.

значение учитываемой характеристики. Так, если некоторый полис был по выбранному критерию отнесен к заданному периоду времени, то при полном методе учета все финансовые и другие показатели (страховые суммы, премии, выплаты, число полисов, застрахованных объектов и др.) учитываются полностью. В частности, в сумму страховых выплат войдут *все* выплаты по этому полису независимо от того, действительно ли страховые события, связанные с этими выплатами, произошли в течение данного периода и независимо от того, когда были сделаны сами эти выплаты. Напротив, при использовании частичного (учетного метода) из мгновенных характеристик, таких как страховые события и соответствующие им выплаты, будут учтены только события, произошедшие в данном периоде. При этом интервальные характеристики будут учтены лишь по их релевантной для данного периода части, например, для премии будет учитываться ее заработанная в данном периоде часть, для числа полисов соответствующее число полис-годов и т.д.

Рассмотрев общие принципы, связанные с временной привязкой финансовых - экономических характеристик и с методами их учета, перейдем к более детальному изложению этих принципов и анализу конкретных следствий из них по отношению к страховым контрактам (полисам).

## 7. Критерии формирования полисных когорт

На практике используются три критерия соотнесения (способа образования временных когорт). Период, относительно которого осуществляется отбор полисов, называется *когортным периодом* [11-13].

*Год полиса (police year)*. В этом случае к выбранному году (или любому другому когортному периоду  $I$ ) относятся все полисы, выписанные в этом году (периоде). Таким образом, контракты и их характеристики группируются в соответствии с моментом выписки полиса ( $t_0$ ). Сам критерий можно описать правилом:  $t_0 \in I$ , т.е. момент выписки полиса принадлежит когортному периоду  $I$ .

*Год события (accident year)*. В этом случае контракты и их характеристики группируются в соответствии с моментом наступления страховых событий ( $\tau_1$ ). Таким образом, полис будет включен в когорту данного года (когортного периода  $J$ ), если хотя бы один страховой случай по полису произошел в этом году (периоде  $J$ ). Формально этот критерий можно записать в виде  $\tau_1^j \in I$  для некоторого  $j$ . Здесь  $\tau_1^1, \tau_1^2, \dots, \tau_1^i, \dots$  - последовательность страховых случаев по данному полису.

*Календарный год (calendar year)*. В этом случае формируемая когорта содержит все полисы, период действия которых имеет общую часть с заданным годом (оценочным периодом), независимо от того, были ли эти полисы выписаны в данном календарном году, происходили ли в этом году связанные с ними страховые события и т.д. Формально критерий формирования когорты календарного года можно записать в виде:  $J \cap I \neq \emptyset$ . Здесь  $J$  - период действия полиса, а  $I$  - оценочный (когортный) период.

*Год заявления (reporting year)*. В этом случае контракты группируются по моменту заявления, регистрации страхового события ( $\tau_2$ ), независимо от года его происхождения.

Критерий можно описать правилом:  $\tau_2^j \in I$ , для некоторого  $j$ . Здесь  $\tau_2^1, \tau_2^2, \dots, \tau_2^i, \dots$  - последовательность моментов предъявления исков по данному полису.

Теоретически можно строить и другие когорты. Мы ограничимся лишь тремя наиболее часто используемыми когортами: по году полиса, году события и календарному году.

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим следующий пример. Пусть распределение трех полисов (1), (2), (3) и их финансовых характеристик имеет вид, представленный на рис. 5. На рисунке все полисы изображены горизонтальными отрезками одинаковой длины, соответствующей их продолжительности, равной 1 году. Слева от полисов задан объем страхового риска

(страховая сумма), а крестиками – страховые случаи, размер ущерба по которым представлен числом над крестиком. Временная (горизонтальная) ось разбита двумя вертикальными пунктирными линиями на три последовательных года  $Z-1$ ,  $Z$  и  $Z+1$ .

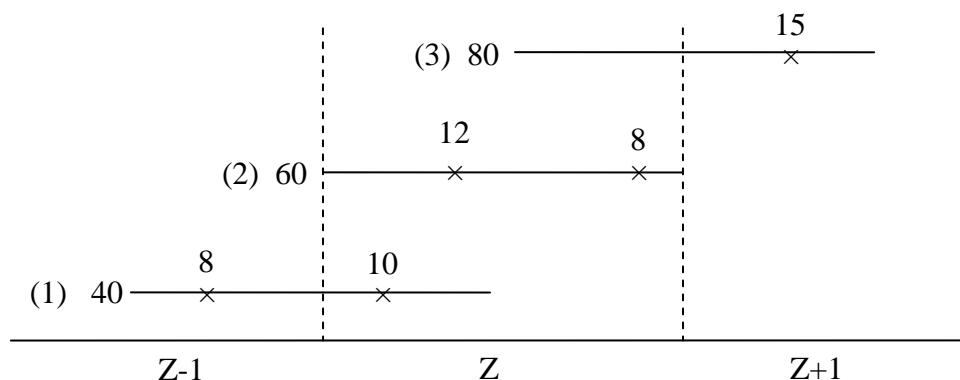


Рис. 5

Если взять за оценочный период год  $Z$ , то в соответствии с тремя критериями формирования когорт можно выделить три когорты для года  $Z$ .

*Когорта года полиса:*  $\{(2), (3)\}$ , т.к. только второй и третий полис выписаны в году  $Z$ .

*Когорта года события:*  $\{(1), (2)\}$ , т.к. в году  $Z$  произошли события, связанные только с первым и вторым полисами.

*Когорта календарного года:*  $\{(1), (2), (3)\}$ , т.к. период действия всех трех полисов имеет непустое пересечение с оценочным годом  $Z$ .

## 8. Принципы учета количественных характеристик полисов

Сформировав когорту полисов, необходимо указать *метод учета* временных и финансовых характеристик полисов при расчете агрегированных характеристик. На практике чаще всего используются два метода: *полный* и *частичный*.

В полном методе агрегированная характеристика данного оценочного периода получается суммированием всех соответствующих характеристик по всем полисам, входящим в когорту данного периода. При этом соответствующая (мгновенная или интервальная) характеристика учитывается *полностью*. Например, при расчете суммарного убытка  $\mathcal{L}$  в оценочном году  $Z$  будут учитываться и, значит, суммироваться убытки по *всем страховым случаям*, связанным с полисами, входящими в когорту, независимо от того, когда *реально наступило* страховое событие, и был оплачен связанный с ним иск. Аналогично при расчете суммарного объема страхового риска  $\mathcal{M}$  (страховой суммы  $\mathcal{S}$ ) страховые объемы (страховые суммы) всех полисов, входящих в когорту, будут учитываться *полностью*.

Формально расчет некоторой *агрегированной* характеристики  $\mathcal{R}$  по полному методу для оценочного периода  $Z$  можно описать формулой

$$\mathcal{R}(Z; \mathcal{H}) = \sum \{ R_k \mid \pi_k \in \mathcal{H} \},$$

где  $\mathcal{H} = \{ \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N \}$  - заданная когорта полисов;  $R_k$  - соответствующая характеристика полиса  $\pi_k$ .

В частичном методе учитываются только соответствующие *релевантные* характеристики полисов. Релевантность мгновенной величины означает принадлежность соответствующего этой величине момента времени оценочному периоду. Так убыток по полису, входящему в когорту, будет учтен в оценочном периоде, только если страховой случай произошел в оценочном

периоде. Интервальная величина учитывается только в своей *релевантной части*, относящейся к оценочному периоду. Формально это правило можно записать в виде

$$\tilde{\mathcal{R}}_k(Z; \mathcal{H}) = \sum \{ \tilde{R}_k(Z) \mid \pi_k \in \mathcal{H} \}.$$

Здесь знак «тильда» означает релевантную характеристику полиса относительно данного оценочного периода.

Подведем итог. *Расчет любой агрегированной характеристики для заданного периода осуществляется в два этапа. На первом этапе в соответствии с заданным критерием формируется соответствующая когорта полисов. Затем по выбранному методу учета рассчитывается соответствующая агрегированная характеристика.*

Три критерия и два метода учета дают шесть способов расчета абсолютных и теоретически 36 способов относительных агрегированных характеристик из приведенного в начале статьи списка, если допускать различные способы вычисления числителя и знаменателя относительной характеристики. На практике обычно придерживаются правила согласования, требующего тождественность способов вычисления числителя и знаменателя относительной характеристики.

Проиллюстрируем сказанное для данных предыдущего примера (рис. 5).

Так для когорты *полис года* полный метод дает следующие значения для периода  $Z$ :  
*суммарный объем страхового риска (общая страховая сумма)*

$$\mathcal{S}(Z) = S_2 + S_3 = 60 + 80 = 140;$$

*общая сумма страхового ущерба*

$$\mathcal{L}(Z) = L_2 + L_3 = 15 + 12 = 27;$$

*убыточность страховой суммы*

$$\tau = \mathcal{L} / \mathcal{S} = 27/140 = 0,1929.$$

С другой стороны, частичный метод для этой когорты дает:  
*суммарный объем страхового риска (общая страховая сумма)*

$$\tilde{\mathcal{S}}(Z) = \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 = 60 + (1/2) \cdot 80 = 100.$$

При вычислении общей страховой суммы по частичному методу предполагалось, что первый и третий полисы выписаны в точности в середине  $Z-1$  и  $Z$ -го годов соответственно;

*общая сумма страхового ущерба*

$$\tilde{\mathcal{L}}(Z) = \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 = 15;$$

*убыточность страховой суммы*

$$\tilde{\tau} = \tilde{\mathcal{L}}(Z) / \tilde{\mathcal{S}}(Z) = 15/100 = 0,1500.$$

Для когорты *календарного года* полный метод дает:

*суммарный объем страхового риска (общая страховая сумма)*

$$\mathcal{S}(Z) = S_1 + S_2 + S_3 = 40 + 60 + 80 = 180;$$

*общая сумма страхового ущерба*

$$\mathcal{L}(Z) = L_1^1 + L_1^2 + L_2 + L_3 = 8 + 10 + 15 + 12 = 45,$$

где  $L_1^1$  и  $L_1^2$  - убытки по первому и второму страховому случаю для первого полиса;

*убыточность страховой суммы*

$$\tau = \mathcal{L} / \mathcal{S} = 45/180 = 0,2500.$$

С другой стороны, частичный метод для этой когорты дает:  
*суммарный объем страхового риска* (общая страховая сумма)

$$\tilde{\mathcal{F}}(Z) = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 = (1/2) \cdot 40 + 60 + (1/2) \cdot 80 = 120;$$

*общая сумма страхового ущерба*

$$\tilde{\mathcal{L}}(Z) = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 + \tilde{L}_3 = L_1^2 + L_2 = 10 + 15 = 25;$$

*убыточность страховой суммы*

$$\tilde{\tau} = \tilde{\mathcal{L}}(Z) / \tilde{\mathcal{F}}(Z) = 25/120 = 0,2083.$$

## 9. Проблема определенности данных при вычислении агрегированных характеристик

Выше при определении и примерах расчета агрегированных характеристик страхового портфеля мы неявно предполагали, что все индивидуальные характеристики полисов, входящих в когорту, известны. Вообще говоря, на практике это далеко не так. Предположим, что мы вычисляем убыточность страховой суммы для текущего календарного года, причем это вычисление осуществляется в конце этого года. Если мы используем полный метод для (любой) когорты текущего года, то согласно этому методу при определении суммарного убытка мы должны учитывать *все* страховые случаи по полисам когорты. В это число формально входят и будущие страховые случаи, которые пока не произошли. Использование частичного метода отчасти снимает эту проблему, однако мы не можем быть уверены, что к концу текущего года нам известно о всех страховых случаях, произошедших в этом году. Таким образом, приходится делать оценку суммарного убытка по всем таким случаям. Эта оценка представляет собой не что иное, как резерв произошедших, но незаявленных убытков текущего года. Заметим, что здесь речь идет об интервальной характеристике – резерве убытков текущего года. Обозначим его  $\overline{RL}(Z)$ . В страховании обычно рассчитывают резерв убытков для заданного момента времени (на заданную дату). Такой резерв обозначим через  $RL(t)$ . Интервальный резерв текущего года равен, естественно, изменению (приращению) мгновенного резерва, т.е. он равен разности мгновенных резервов на конец и начало периода. Для  $Z = (t_1, t_2)$  имеем

$$\overline{RL}(Z) = \overline{RL}(t_1, t_2) = RL(t_2) - RL(t_1).$$

Таким образом, строго говоря, значение агрегированных характеристик зависит еще от одного временного параметра – *момента  $t$  вычисления характеристик*. Для того чтобы можно было определить когорту для оценочного периода  $Z$ , необходимо выполнение условия:  $t_1 < t_2 \leq t$ . Как было сказано выше, это условие обеспечивает принципиальную возможность расчета агрегированных характеристик по частичному методу. Однако для применения полного метода необходимо, чтобы момент расчета (оценки) был «более отдален» от конца периода оценки. В случае годовых (по сроку) полисов необходимо выполнение неравенства  $t - t_2 \geq 1$ . Тогда к моменту оценки все полисы когорты периода  $Z$  будут завершены (т.е. окончится их срок действия). Это означает, что все индивидуальные характеристики полисов когорты становятся реализованными (хотя возможно и неизвестными) для оценщика. Проблема неопределенности (точнее неизвестности) как и в случае частичного метода решается использованием различных оценок (например оценок резерва убытков). Чем более отдаленным является момент оценивания относительно периода оценивания, тем более определенной становится задача расчета характеристик. Для большинства рисков имеется некоторый предельный «период развития», по истечении которого все характеристики полисов когорты становятся известными *полностью*.

**Проблема дублирования.** До сих пор речь шла о расчете агрегированных характеристик для отдельного периода. На практике обычно требуемые характеристики вычисляются пери-

дически, например ежемесячно, ежеквартально или ежегодно. В этом случае оценочные периоды образуют последовательность смежных промежутков. Поскольку полисы распределены произвольным образом относительно оценочных периодов, то вполне возможно включение одного полиса в смежные когорты, и при полном методе учета его характеристики будут «продублированы». Среди всех критериев формирования когорт лишь критерий полис года исключает дублирование полисов в принципе, т.к. когорты последовательных периодов в этом случае не пересекаются. Для критерия «год-события» полис будет учтен в двух последовательных когортах, только если с ним связаны два или более страховых случая, относящиеся к двум различным оценочным периодам. Наконец для календарных когорт (в случае годовых полисов) практически все полисы будут принадлежать двум последовательным когортам. Исключением являются полисы, «точно вписанные» в оценочный период (как полис 2 на рис. 5). Дублирование полисов не представляет проблемы, если используется частичный метод учета, поскольку в этом методе все характеристики «разлагаются» на «релевантные части», которые учитываются в смежных когортах. Если исключить схемы расчета, приводящие к дублированию характеристик, то из 6 способов останется 4: полный и частичный методы для полисных когорт и частичные методы для когорт-события и календарных когорт.

**Проблема многозначности.** Сказанное выше приводит к необходимости мириться с тем, что нет естественных (или, как говорят математики, канонических) способов однозначного вычисления агрегированных характеристик страховых портфелей. При этом ясно, что абсолютные характеристики когорт, вычисленные по полному методу, всегда превышают эти же характеристики, вычисленные по частичному методу, и чем больше размер когорты (число полисов), тем больше расхождение между этими значениями. Большинство относительных характеристик (но не все!) устойчивы как относительно выбора когорт, так и метода учета. Так вычисление убыточности страховой суммы (использующейся, как известно, в оценке тарифа) для больших однородных (по риску) когорт полным и частичным методами дает близкие значения, каждое из которых может служить оценкой этой характеристики. Существенное расхождение значений в этом случае указывает обычно либо на *неоднородность* страхового портфеля, либо на небольшой объем когорт, что приводит к *статистической вырожденности* данных [12-14].

**Заключительные замечания.** Описанные в работе методы вычисления агрегированных характеристик, безусловно, хорошо известны и широко используются актуариями в странах с развитой актуарной наукой и практикой. Однако автору не встречалось *явное* и *систематическое* изложение этого круга вопросов ни в зарубежной, ни тем более в отечественной литературе. Устранить этот пробел и призвана настоящая работа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Burrows R.A.P.** Aviation Insurance, Study Course P60. The Chartered.
2. Insurance Institute, Distance Learning Division, Sevenoaks, Kent, UK. 1990.
3. **Margo R.D.** Aviation Insurance, 3rd Edition. Butterworths (UK) Ltd., London, UK. 2000.
4. **Hartmann M.** Demographic Methods for the Statistical Office. 2009.
5. **Graziella C.** Demography Analysis and Synthesis. Academic Press. 2006.
6. Общее страхование: материалы Лондонского института актуариев. - ЛИА, 2004.
7. **Фридланд Ж.** Базовые методы оценки неоплаченных претензий. – KPMG, 2009.
8. **Вернер Дж.** Базовые методы оценки страховых тарифов. - CASACT, 2010.
9. **Блейд Д.** Страхование: принципы и практика. - М.: Финансы и Статистика, 1998.
10. **Бауэр Дж. и др.** Актуарная математика. - М.: Янус, 2002.
11. **Томас Мак.** Математика рискованного страхования. - М.: Олимп-Бизнес, 2005.
12. **Klugman S.A., Panjer H.** Loss Models-From Data to Decisions. Wiley. 2010.
13. **Lawless J.F.** Statistical Models and Methods for Lifetime Data. Wiley. 2003.
14. **Hardle W.** Statistical Tools For Finance and Insurance. Springer. 2003.
15. **Corazza M.** Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. Springer. 2010.
16. **Katrien A.** Statistical Tools For Non-Life Insurance. University Leuven.



## COGORT METHOD AND OTS APPLICATIONS TO INSURANCE STATISTICS

**Kasimov Yu.F., Kerimov A.K.**

The paper considers the so-called cohort method of accounting aggregates insurance portfolios. In insurance statistics systematization and processing of aggregate data on the issued policies, premiums and insurance payments are often made with gross errors, because ones don't set the criteria written policies and related payments to the analyzed statistical universe. Besides, it is often not clearly specify the scheme of calculation of aggregate statistical associated with these policies. The study gives a detailed and rigorous presentation as a method of formation of different cohorts data for a specified period of assessment the aggregated characteristics and methods of calculation of interest to insurance of indicators (absolute and relative) for these cohorts. The knowledge of these methods is necessary for a correct assessment of insurance premiums and reserves.

**Key words:** cohort policies, premiums and losses, accounting methods, complete and partial methods.

### Сведения об авторах

**Касимов Юрий Федорович**, 1946 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1970), доцент кафедры прикладной математики Финансового университета при правительстве РФ, автор более 26 научных работ, область научных интересов - финансовая и актуарная математика, теория инвестиций, математическая информатика.

**Керимов Александр Керимович**, 1947 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1971), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Финансового университета при правительстве РФ, автор более 54 научных работ, область научных интересов – оптимальное управление, обратные задачи математической физики, финансовая и актуарная математика.

УДК 573.874

## ОБОБЩЕННЫЙ ИНВЕРСНЫЙ ИНТЕРВАЛЬНЫЙ МЕТОД ГЛОБАЛЬНОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ<sup>1</sup>

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, В.Н. ПАНОВСКИЙ

Разработано алгоритмическое и программное обеспечение инверсного интервального метода глобальной условной оптимизации, приведены решения модельных примеров, доказательства теорем о сходимости методов. Разработана обобщенная модульная схема, имеющая два заменяемых модуля проверки и сжатия. Предложенный модульный подход позволяет пользователям реализовывать собственные варианты модулей алгоритма без потери сходимости метода в зависимости от особенностей решаемой задачи.

**Ключевые слова:** интервальный анализ, глобальный условный экстремум, инверсный интервальный метод, сходимость, программное обеспечение.

### Введение

В современной математике достаточно большое внимание уделяется решению задач глобальной оптимизации [1-3]. Эти задачи возникают в ходе проектирования конструкций самолетов, вертолетов, космических аппаратов, когда возникает необходимость оптимизации характерных параметров (вес, дальность полета, аэродинамические характеристики). Существующие численные методы используют разнообразные подходы, но их использование связано с большими вычислительными нагрузками, излишними требованиями к постановке задачи, трудностями в достижении сходимости метода.

В качестве базового аппарата, составляющего основу работы алгоритмов, используется интервальный анализ [4-6]. Существующие интервальные методы оптимизации можно разделить на методы безусловной оптимизации (алгоритмы Мура-Скелбоу, Ичиды-Фуджи, Дюсселя, интервальный алгоритм «имитации отжига», метод случайного интервального дробления и др. [7-9]) и условной оптимизации (методы Хансена, Мура и др. [10; 11]).

Предлагаемый интервальный метод глобальной условной оптимизации в процессе поиска использует операцию инвертор [4] и имеет модульную структуру. В частных случаях задания модулей он совпадает с методом дихотомии прямого образа, методом отсечки и стохастической отсечки виртуальных значений [12; 13], которые относятся к группе методов дробления графика [9].

### 1. Используемые понятия и обозначения

Основной идеей интервального анализа является окружение вещественных чисел интервалами, а вещественных векторов – интервальными векторами или параллелотопами [4]. Для обозначения интервала используются строчные латинские буквы, заключенные в квадратные скобки ( $[a], [b], [c], \dots$ ), или привычное представление ( $[a_l, a_u], [b_l, b_u], [c_l, c_u], \dots$ ), где указываются нижняя и верхняя границы. Для задания параллелотопа применяется то же обозначение с полужирным начертанием букв ( $[a], [b], [c], \dots$ ) или как прямое произведение интервалов ( $[1; 3] \times [2; 3] \times \dots \times [10; 11]$ ).

Для произвольного интервала  $[x]$  определены: нижняя граница (обозначается как  $lb([x])$  или  $\underline{[x]}$ ) -  $\underline{[x]} = lb([x]) = \sup \{ \xi \in \mathfrak{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall \zeta \in [x], \xi \leq \zeta \}$ ; верхняя граница (обозначается как  $ub([x])$  или  $\overline{[x]}$ ) -  $\overline{[x]} = ub([x]) = \inf \{ \xi \in \mathfrak{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall \zeta \in [x], \zeta \leq \xi \}$ ; ширина (обозначается как

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

$\omega([x])$ , определена только для непустого интервала -  $\omega([x]) = \overline{[x]} - \underline{[x]}$ ; средняя точка (обозначается как  $mid([x])$ , определена только для ограниченного и непустого интервала) -

$$mid([x]) = \frac{\underline{[x]} + \overline{[x]}}{2}.$$

Те же параметры определены и для параллелотопов. Нижняя и верхняя границы и средняя точка становятся векторами, ширина же рассчитывается как максимум из ширин всех образующих параллелотоп компонент.

Интервальной оболочкой множества  $X \subset \mathfrak{R}^n$  называется параллелотоп с наименьшей шириной, который содержит  $X$ . Если множество берется в квадратные скобки, это значит, что рассматривается интервальная оболочка этого множества.

Пусть  $\circ$  - некоторая бинарная операция, тогда  $[x] \circ [y] = [\{\xi_1 \circ \xi_2 \mid \xi_1 \in [x], \xi_2 \in [y]\}]$ ; пусть  $f$  - некоторый унарный оператор, тогда  $f([x]) = [\{f(\xi) \mid \xi \in [x]\}]$ . Описанная бинарная операция позволяет определить арифметические операции над интервалами [4].

Множество интервалов обозначается как  $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$ , интервальных векторов - как  $\mathfrak{I}\mathfrak{R}^n$ . Пусть имеется некоторая функция  $f$ , действующая из  $\mathfrak{R}^n$  в  $\mathfrak{R}$ . Функция  $[f](\cdot)$  называется интервальной функцией включения для  $f$ , действующей из  $\mathfrak{I}\mathfrak{R}^n$  в  $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$ , если  $f([\mathbf{x}]) = \{f(\xi) \mid \xi \in [\mathbf{x}]\} \subset [f]([\mathbf{x}]), \forall [\mathbf{x}] \in \mathfrak{I}\mathfrak{R}^n$ . Функция включения позволяет получить априорную оценку множества значений функции, даже если оно не является выпуклым или связным (если вместо переменных используются интервалы и соответствующие арифметические операции, то полученная оценка называется оценкой прямого образа функции).

Инвертор  $INV(f, [s], [l], \varepsilon)$  - функция, которая по заданному интервалу  $[l]$ , функции  $f$  и параметру точности  $\varepsilon$  находит в области поиска  $[s]$  множество параллелотопов  $P \in \mathfrak{P}$  такое, что  $\forall [\mathbf{x}] \in P$  справедливо:  $[\mathbf{x}] \subseteq [s], \omega([\mathbf{x}]) \geq \varepsilon, [f]([\mathbf{x}]) \subseteq [l]$  или  $[\mathbf{x}] \subseteq [s], \omega([\mathbf{x}]) < \varepsilon, [f]([\mathbf{x}]) \cap [l] \neq \emptyset$ .

## 2. Алгоритм SIVIA

В качестве реализации инвертора можно использовать алгоритм SIVIA [4].

Шаг 1. Задать функцию  $f$ , область поиска  $[s]$ , интервал  $[l]$  и параметр точности  $\varepsilon$ . Создать пустое множество параллелотопов  $P$  и множество  $X = \{[s]\}$ .

Шаг 2. Для каждого параллелотопа  $[\mathbf{x}] \in X$  найти  $[f]([\mathbf{x}])$ . Проверить выполнение следующих условий (сам параллелотоп  $[\mathbf{x}]$  после проверки условий удаляется из  $X$ ):

- если  $[f]([\mathbf{x}]) \cap [l] = \emptyset$ , то параллелотоп  $[\mathbf{x}]$  не добавляется в множество  $P$ ;
- если  $[f]([\mathbf{x}]) \subseteq [l]$  или  $[f]([\mathbf{x}]) \cap [l] \neq \emptyset, \omega([\mathbf{x}]) < \varepsilon$ , добавить параллелотоп  $[\mathbf{x}]$  в множество  $P$ ;
- в противном случае задать параллелотопы

$$[\mathbf{x}]' = [x_1]_i \times \dots \times [mid([x_k]_i); \overline{[x_k]_i}] \times \dots \times [x_n]_i \quad \text{и} \quad [\mathbf{x}]'' = [x_1]_i \times \dots \times [\underline{[x_k]_i}; mid([x_k]_i)] \times \dots \times [x_n]_i,$$

где  $k$  - номер компоненты параллелотопа  $[\mathbf{x}]_i$  с наибольшей шириной, и добавить их в множество  $X$ .

Шаг 3. Если  $X \neq \emptyset$ , то перейти к шагу 2, в противном случае – к шагу 4.

Шаг 4. Вернуть  $P$ .

### 3. Постановка задачи

Пусть имеются некоторый параллелотоп  $[s]$  и заданная функция  $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ . Задача интервальной  $\varepsilon$ -оптимизации формулируется следующим образом: найти параллелотоп  $[p]^*$ , такой что

$$[p]^* \subseteq [s], \omega([p]^*) \leq \varepsilon, \exists [x] \subseteq [s], \omega([x]) \geq \varepsilon: \overline{[f]([x])} \subseteq \underline{[f]([p]^*)}. \quad (1)$$

### 4. Стратегия поиска решения

Предлагаемый подход называется обобщенным инверсным интервальным методом, поскольку содержит взаимозаменяемые модули и в процессе поиска использует инвертор (рис. 1).

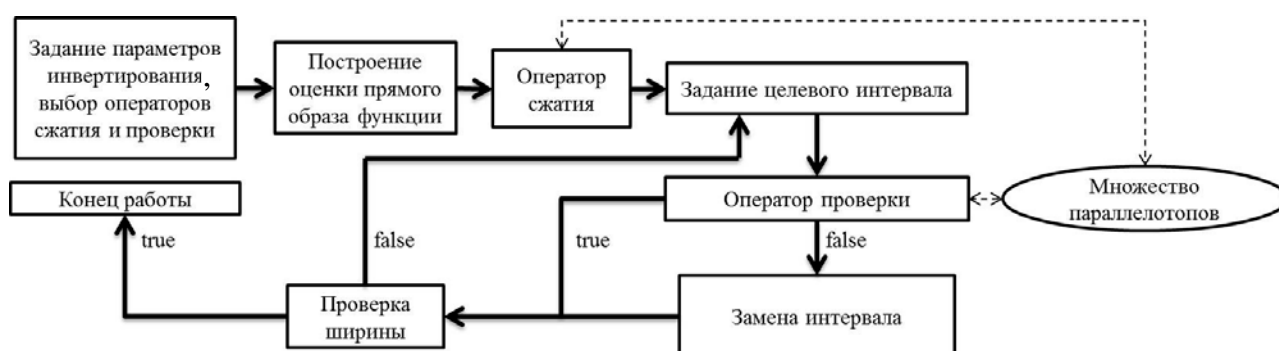


Рис. 1. Схема обобщенного детерминированного интервального метода

В качестве заменяемых модулей выступают операторы проверки и операторы сжатия:

- операторы проверки (результатом работы является статус проверки: удачный свидетельствует о том, что в множестве параллелотопов  $X$  есть параллелотоп  $[p]$ , для которого выполнено  $\omega([p]) \geq \varepsilon, [f]([p]) \subseteq [l]$  или  $\omega([p]) < \varepsilon, [f]([p]) \cap [l] \neq \emptyset$ ):

- Original Invertor operator (OI – operator) – базовая проверка, используемая в методе дихотомии прямого образа;

- Original Invertor with Renewal operator (OIR – operator) – в дополнение к базовой проверке, после каждой успешной операции, множество параллелотопов заменяется на множество, выработанное инвертором;

- First True with Renewal operator (FTR – operator) – проверка до первого подходящего элемента, множество заменяется на множество, выработанное инвертором;

- операторы сжатия (результатом работы является сжатие оценки прямого образа функции на области поиска):

- Search Area Split operator (SAS – operator) – сжатие на основе разбиения области поиска;

- Random Point Sample operator (RPS – operator) – сжатие на основе значений функций в случайно сгенерированных интервальных векторах нулевой ширины.

### 5. Алгоритм

Шаг 1. Задать  $[s]$  – область поиска;  $\varepsilon$  – параметр точности, отвечающий за размер параллелотопа во множестве  $P$ , которое будет вырабатываться инвертором;  $\zeta$  – параметр точности

для остановки алгоритма. Выбрать оператор сжатия с параметром  $w$  или  $A$  и оператор проверки с параметром  $w$ . Задать множество  $X = \{[s]\}$ .

*Шаг 2.* С помощью функции включения  $[f]$  найти оценку прямого образа  $[Y]$  функции  $f$  на области поиска  $[s]$ .

*Шаг 3.* Заменить полученную оценку  $[Y]$  интервалом  $[\tilde{Y}]$ , полученным с помощью выбранного оператора сжатия с параметром  $w$  или  $A$ .

*Шаг 4.* Дихотомически разделить интервал  $[Y] = [y_l; y_u]$  на два интервала  $[Y_l] = \left[ y_l; \frac{y_l + y_u}{2} \right]$  и  $[Y_u] = \left[ \frac{y_l + y_u}{2}; y_u \right]$ .

*Шаг 5.* Проверить интервал  $[Y_l]$  выбранным оператором проверки.

*Шаг 6.* Если проверка завершилась удачно, перейти к шагу 7, если нет – к шагу 8.

*Шаг 7.* Если  $\omega([Y_l]) < \zeta$ , тогда найти  $P = INV(f, [s], [Y_l], \varepsilon)$  и перейти к шагу 9. В противном случае положить интервал  $[Y]$ , равным  $[Y_l]$ , и перейти к шагу 4.

*Шаг 8.* Положить интервал  $[Y]$ , равным  $[Y_u]$ . Если  $\omega([Y]) < \zeta$ , то найти  $P = INV(f, [s], [Y], \varepsilon)$  и перейти к шагу 9. В противном случае перейти к шагу 4.

*Шаг 9. Выбор параллелопада.*

*Шаг 9.1.* Положить  $i = 1$ , множество  $P_\varepsilon = P$ .

*Шаг 9.2.* Если  $\omega([p]_i) \leq \varepsilon$ , где  $[p]_i \in P_\varepsilon$ , то перейти к шагу 9.4. Иначе перейти к шагу 9.3.

*Шаг 9.3.* Добавить в множество  $P_\varepsilon$  параллелопады  $[p_1]_i \times \dots \times [mid([p_k]_i); \overline{p_k}]_i \times \dots \times [p_n]_i$  и  $[p_1]_i \times \dots \times [p_k]_i \times [mid([p_k]_i); \overline{p_k}]_i \times \dots \times [p_n]_i$ , где  $k$  – номер компоненты параллелопада  $[p]_i$  с наибольшей шириной, удалить  $[p]_i$  из множества  $P_\varepsilon$ .

*Шаг 9.4.* Увеличить  $i$  на единицу. Если  $i \leq |P_\varepsilon|$ , где  $|\cdot|$  – мощность множества, перейти к шагу 9.2. Иначе перейти к шагу 9.5.

*Шаг 9.5.* Для каждого  $[p]_i \in P_\varepsilon$  найти  $[f]([p]_i)$  и выбрать  $[p]^* = \arg \min_{[p] \in P_\varepsilon} [f]([p]_i)$ .

## 6. Алгоритмы операторов проверки

На вход всех операторов проверки подается множество параллелопадов  $X$ , проверяемый интервал  $[l]$  и параметр ширины  $w$ .

*Алгоритм OI - оператора:*

*Шаг 1.* Для каждого параллелопада из множества  $X$  применить инвертор для интервала  $[l]$  с параметром  $\varepsilon = w$ , т.е. будет выработано множество множеств параллелопадов  $\{P_i\}_{i=1}^{|X|}$ .

*Шаг 2.* Если  $\exists P_i \neq \emptyset$ , то проверка выполнена удачно. В противном случае – неудачно.

*Алгоритм OIR - оператора:*

*Шаг 1.* Для каждого параллелопада  $[x]_i$  из множества  $X$  применить инвертор для интервала  $[l]$  с параметром  $\varepsilon = w$ . Таким образом, будет выработано множество множеств параллелопадов  $\{P_i\}_{i=1}^{|X|}$ .

*Шаг 2.* Задать множество  $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^{|\mathbf{X}|} P_i$ .

*Шаг 3.* Если  $\tilde{X} = \emptyset$ , то проверка выполнена неудачно. В противном случае проверка завершена удачно, заменить  $X$  на  $\tilde{X}$ .

*Алгоритм FTR - оператора:*

*Шаг 1.* Положить  $i = 1$ . Задать множество  $\tilde{X} = X$ .

*Шаг 2.* Проверить выполнение следующих условий (сам параллелотоп  $[\mathbf{x}]_i$  после проверки удаляется из множества  $X$ ):

- если  $[f]([\mathbf{x}]_i) \cap [l] = \emptyset$ , то продолжить работу;

- если  $[f]([\mathbf{x}]_i) \subseteq [l]$  или  $[f]([\mathbf{x}]_i) \cap [l] \neq \emptyset$ ,  $\omega([\mathbf{x}]_i) < \varepsilon$ , то проверка завершена удачно;

- в случае невыполнения условий 1 и 2 задать параллелотопы  $[\mathbf{x}]' = [x_1]_i \times \dots \times [mid([x_k]_i); \overline{[x_k]_i}] \times \dots \times [x_n]_i$  и  $[\mathbf{x}]'' = [x_1]_i \times \dots \times [\underline{[x_k]_i}; mid([x_k]_i)] \times \dots \times [x_n]_i$ , где  $k$  – номер компоненты параллелотопа  $[\mathbf{x}]_i$  с наибольшей шириной и добавить их в множество  $X$ .

*Шаг 3.* Если  $i < |\mathbf{X}|$ , то увеличить  $i$  на единицу и перейти к шагу 2, если  $i = |\mathbf{X}|$  – перейти к шагу 4.

*Шаг 4.* Заменить  $X$  на  $\tilde{X}$ , генерировать сообщение о том, что проверка завершена неудачно.

## 7. Алгоритмы операторов сжатия

На вход всех операторов сжатия подается параллелотоп  $[\mathbf{s}]$ .

*Алгоритм SAS - оператора* (для работы необходим параметр ширины  $w$ ):

*Шаг 1.* Задать  $[\tilde{Y}] = \emptyset$ .

*Шаг 2.* Для каждой из компонент вектора  $[s_i]$  найти наименьшее целое число  $n_i$ , такое что  $\frac{\omega([s_i])}{n_i} \leq w$ .

*Шаг 3.* Каждый из интервалов  $[s_i]$  представить в виде объединения непересекающихся интервалов  $\bigcup_{j=1}^{n_i} [s_i^j]$ . Таким образом, создается разбиение изначального параллелотопа  $[\mathbf{s}] = \bigcup_{k=1}^N [\mathbf{s}]_k$ ,

где  $N = \prod_{i=1}^n n_i$ .

*Шаг 4.* Найти  $[\tilde{Y}] = \bigcup_{k=1}^N [f]([\mathbf{s}]_k)$  – результирующий сжатый интервал.

*Алгоритм RPS - оператора* (для работы необходимо число точек  $A$ ):

*Шаг 1.* Создать  $A$  случайных точек  $\xi_i \in [s_i], i = 1, \dots, A$ .

*Шаг 2.* Найти  $[\tilde{Y}] = \left[ [f]([\mathbf{s}]), \min_i f(\xi_i) \right]$  – результирующий сжатый интервал.

## 8. Оценка качества решения

Сформированные теоремы и доказательства основываются на конфигурации обобщенного инверсного метода с оператором проверки ОI при отсутствии оператора сжатия. При соответствующей замене модулей в алгоритме теоремы и доказательства аналогичны.

**Теорема 1.** Обобщенный инверсный метод позволяет найти решение задачи интервальной  $\varepsilon$ -минимизации.

**Доказательство.** Вследствие того, что на шаге выбора (шаг 9) параллелотоп выбирается из множества  $P_\varepsilon$ , его ширина никогда не превысит выбранного значения  $\varepsilon$  (из-за способа построения множества  $P_\varepsilon$ ). На каждом цикле алгоритм изначально с помощью инвертора вырабатывает множество параллелотопов  $P$ , в котором для любого параллелотопа  $[p] \in P$  выполнено  $[p] \subseteq [s]$ ,  $\omega([p]) \geq \varepsilon$  и  $[f]([p]) \subseteq [\gamma_l]$  или  $[p] \subseteq [s]$ ,  $\omega([p]) < \varepsilon$  и  $[f]([p]) \cap [\gamma_l] \neq \emptyset$ , поэтому переход к анализу  $[\gamma_u]$  свидетельствует о том, что множество  $P$  пусто, т.е.  $\forall [x] \subseteq [s]$ ,  $\omega([x]) < \varepsilon$  выполнено  $[f]([x]) \subset [\gamma_u]$ . Таким образом, в ходе каждого цикла алгоритма однозначно определяется интервал  $[y]$ , такой что  $\nexists [x] \subseteq [s]$ , для которого выполнено  $\overline{[f]([x])} < [y]$ . Это исключает возможность существования такого параллелотопа  $[x] \subseteq [s]$ ,  $\omega([x]) \geq \varepsilon$ , для которого  $\overline{[f]([x])} < [f]([p]^*)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $x^* = \arg \min_{x \in [s]} f(x)$ ,  $[p]^*$  решение задачи интервальной  $\varepsilon$ -минимизации обобщенным инверсным методом, тогда  $f(x^*) \in [f]([p]^*)$ .

**Доказательство.** Необходимо показать, что для параллелотопа  $[p]^*$  одновременно выполняются два неравенства:  $f(x^*) \geq \underline{[f]([p]^*)}$  и  $f(x^*) \leq \overline{[f]([p]^*)}$ . Докажем выполнение первого неравенства. Пусть  $f(x^*) < \underline{[f]([p]^*)}$ , тогда  $\exists [\tilde{p}]$  решение интервальной задачи интервальной  $\varepsilon$ -минимизации, такое что  $f(x^*) \in [f]([\tilde{p}])$ . Тогда получаем:  $\underline{[f]([\tilde{p}])} < \underline{[f]([p]^*)}$ , что невозможно, так как  $[p]^*$  также является решением интервальной задачи интервальной  $\varepsilon$ -минимизации и при этом  $[p]^* = \arg \min_{[p]_i \in P_\varepsilon} \underline{[f]([p]_i)}$ . Таким образом, первое неравенство выполнено.

Докажем выполнение второго неравенства. Пусть  $f(x^*) > \overline{[f]([p]^*)}$ , тогда  $[f]([p]^*) = \emptyset$ , что невозможно, так как  $[p]^* \neq \emptyset$ . Таким образом, второе неравенство выполнено. Так как оба неравенства выполнены, теорема доказана.

**Следствие из теоремы 2.** В параллелотопе  $[p]^*$  есть точка  $\tilde{x}$ , такая что  $f(\tilde{x}) - f(x^*) \leq \omega([f]([p]^*))$ .

### 9. Программное обеспечение. Решение тестовых примеров

На основе изложенного алгоритма написана программа поиска условного глобального минимума обобщенным инверсным методом. Среда разработки – Microsoft Visual Studio, язык программирования – C#.

Алгоритм протестирован при минимизации следующих функций:

1. First function of De Jong:  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , область поиска  $[-500; 500] \times [-500; 500]$ .
2. Rastrigin's function:  $f(x, y) = 20 + (x^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x)) + (y^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot y))$ , область поиска  $[-5.12; 5.12] \times [-5.12; 5.12]$ .
3. Schwefel's function:  $f(x, y) = -x \cdot \sin(\sqrt{|x|}) - y \cdot \sin(\sqrt{|y|})$ , область поиска  $[-500; 500] \times [-500; 500]$ .
4. Easom's function:  $f(x, y) = -\cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \exp(-(x - \pi)^2 - (y - \pi)^2)$ , область поиска  $[-100; 100] \times [-100; 100]$ .
5. Ackley's function:  $f(x, y) = -20 \cdot \exp\left(-0.2 \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}\right) - \exp\left(\frac{\cos(2 \cdot \pi \cdot x) + \cos(2 \cdot \pi \cdot y)}{2}\right) + 20 + e$ , область поиска  $[-32.768; 32.768] \times [-32.768; 32.768]$ .
6. Beal's function:  $f(x, y) = (1.5 - x \cdot (1 - y))^2 + (2.25 - x \cdot (1 - y^2))^2 + (2.625 - x \cdot (1 - y^3))^2$ , область поиска  $[-4.5; 4.5] \times [-4.5; 4.5]$ .
7. Rosenbrock's function:  $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100 \cdot (y - x^2)^2$ , область поиска  $[-5; 10] \times [-5; 10]$ .

**Таблица 1**

#### Результаты работы

Функция/время работы	Найденный параллелотоп	Значение функции на параллелотопе	Точное решение	Минимальное значение
1/0,121 с	$[0; 0.01] \times [0; 0.01]$	$[0; 0.0002]$	$(0, 0)^T$	0
2/0,203 с	$[0; 0.01] \times [0; 0.01]$	$[0; 0.03967]$	$(0, 0)^T$	0
3/27,702 с	$[420.967; 420.974] \times [420.967; 420.974]$	$[-837.9797; -837.9518]$	$(420.9687, 420.9687)^T$	-837.9658
4/0,022 с	$[3.137; 3.143] \times [3.137; 3.143]$	$[-1; -0.9999]$	$(\pi, \pi)^T$	-1
5/0,112 с	$[-0.008; 0] \times [-0.008; 0]$	$[0; 0.0354]$	$(0, 0)^T$	0
6/0,991 с	$[2.953; 2.961] \times [0.483; 0.492]$	$[0; 0.0019]$	$(3, 0.5)^T$	0
7/0,814 с	$[0.998; 1.005] \times [0.991; 0.998]$	$[0; 0.0362]$	$(1, 1)^T$	0



Параметры алгоритма:  $\varepsilon = \zeta = 0.01$ , оператор проверки – ОI с параметром  $w = 0.01$ , оператор сжатия – SAS с параметром  $w = 50$ .

### Заключение

Полученные результаты (табл. 1) свидетельствуют об эффективности разработанного алгоритма и иллюстрируют приведенные теоремы. Модульная структура обобщенного инверсного алгоритма позволяет проводить его тонкую и гибкую настройку в соответствии с имеющимися вычислительными ресурсами и особенностями задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации: практический курс. - М.: Логос, 2011.
2. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А. Методы глобальной оптимизации // Метаэвристические стратегии и алгоритмы. - М.: Вузовская книга, 2013.
3. Пантелеев А.В. Применение эволюционных методов глобальной оптимизации в задачах оптимального управления детерминированными системами. - М.: МАИ, 2013.
4. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied interval analysis. - London: Springer-Verlag, 2001.
5. Moore R.E. Interval analysis. - Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1966.
6. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. - Новосибирск: XYZ, 2010.
7. Ratschek H., Rokne J. New computer methods for global optimization. - Chichester: Horwood, 1988.
8. Shary S.P. Randomized algorithms in interval global optimization // Numerical Analysis and Applications, V. 1, 2008. - P. 376-389.
9. Shary S.P. A surprising approach in interval global optimization // Reliable Computing, 2001. - P. 497-505.
10. Hansen E. Global optimization using interval analysis. - New York: Marcel Dekker, 2004.
11. Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. - Philadelphia: SIAM, 1979.
12. Пановский В.Н. Применение аппарата интервального анализа для поиска глобального экстремума функций // Труды МАИ. - 2012. - № 51. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=28948>.
13. Пановский В.Н. Интервальные алгоритмы нахождения оптимального программного управления детерминированными системами // Молодежь и будущее авиации и космонавтики: конкурс научно-технических работ и проектов (Москва, 30 октября 2012 г.). - М., 2012. - С. 155.

### GENERALIZED INVERSE INTERVAL METHOD OF GLOBAL CONSTRAINED OPTIMIZATION

Panteleyev A.V., Panovskiy V.N.

The algorithmic and program software of inverse interval method for global constrained optimization are considered. The solution of model examples and the proof of the theorems of the algorithm's convergence are presented. The generalized scheme of developed algorithms has been created. This scheme has two replaceable modules of compression and check. This module approach allows the users to implement their own versions of the algorithm without loss of the method convergence. This will help to tune the method according to the characteristics of the current problem.

**Key words:** interval analysis, global constrained optimization, convergence, inverse interval method, software.

### Сведения об авторах

**Пантелеев Андрей Владимирович**, 1955 г.р., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана (1978), профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики МАИ (Национального исследовательского университета), автор более 170 научных работ, область научных интересов – методы синтеза оптимальных нелинейных систем управления, методы оптимизации.

**Пановский Валентин Николаевич**, 1992 г.р., окончил МАИ (2013), аспирант МАИ, автор 9 научных работ, область научных интересов – методы оптимизации, численные методы, эвристические алгоритмы.

УДК 517.977.58

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕВОДЕ СПУТНИКА МЕЖДУ ОРБИТАМИ С ПОМОЩЬЮ ГИБРИДНОГО МЕМЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА<sup>1</sup>

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, В.А. ПИСЬМЕННАЯ

В работе предложен гибридный меметический алгоритм (МА) для решения задачи поиска оптимального программного управления нелинейными непрерывными детерминированными системами, основанный на концепции мема, которым является одно из перспективных решений, полученных в ходе реализации процедуры поиска экстремума. На основе предложенного алгоритма сформирован комплекс программ на языке C#. Приведено решение задачи о переводе спутника с одной орбиты на другую.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, глобальный экстремум, нелинейные непрерывные детерминированные системы, меметический алгоритм, перевод спутника.

### Введение

Термин «меметические алгоритмы» (МА) широко используется в качестве обозначения взаимодействия эволюционного или другого подхода, основанного на понятии популяции, и индивидуального обучения особей либо другой локальной процедуры улучшения решения для задач поиска глобального оптимума.

Теория «универсального дарвинизма», разработанная в [1], полагает, что понятие эволюции применимо не только к биологическим системам, но и к любой сложной системе, которой присущи принципы наследования, изменения и селекции, т.е. все принципы развития. Таким образом, наука меметика представляет собой аналог генетики в развитии культуры. Термин «мем» был введён Р. Докинзом как «единица передачи культурной информации, распространяемая от одной особи к другой посредством имитации, научения и др.» [2].

Термин «меметический алгоритм» был впервые предложен в [3], где он рассматривался как гибрид генетического алгоритма и процедуры индивидуального обучения для уточнения решения задачи. На этапе индивидуального обучения решение (особь или её генотип) заменяется новым (обученным) решением в случае, если новое решение имеет большую приспособленность, независимо от остальной части популяции. Таким образом, происходит так называемое культурное развитие особи, которое затем передаётся её потомкам в течение последующих поколений [4].

К первому поколению МА относятся алгоритмы-гибриды эволюционного подхода, используемого для глобального поиска, и культурной эволюционной составляющей.

Второе поколение МА использует принципы меметической трансмиссии и селекции в своих реализациях. В таких МА меметический материал кодируется как часть генотипа. Далее декодированный мем каждой особи используется для локального уточнения решения. Меметический материал передаётся с помощью простого механизма наследования от родителей к потомкам.

В качестве третьего поколения МА выделяют самогенерирующиеся МА. В отличие от второго поколения МА, в которых предполагается, что используемые мемы известны изначально, третье поколение МА использует локальный поиск, основанный на некоторых правилах, для пополнения множества кандидатов в решение в рамках эволюционной системы, тем самым учитывая регулярно повторяющиеся структуры и черты данной области задач.

В разработанном алгоритме культурная эволюционная составляющая реализуется в ходе решения подзадачи оптимизации любым из двух методов: с помощью метода муравьиных колоний [5; 10] или методом имитации отжига [6; 10]. В ходе культурной эволюции информация о мемах используется для генерации более совершенной в терминах решаемой задачи особи. В качестве процедур улучшения решения используются метод покоординатного поиска и переконфигурации пути (path-relinking).

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12–08–00892–а).

## 1. Постановка задачи

Поведение модели объекта управления описывается дифференциальным уравнением  $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$ , где  $x$  – вектор состояния системы,  $x \in R^n$ ;  $u$  – вектор управления,  $u = (u_1, \dots, u_q)^T \in U \subseteq R^q$ ;  $U$  – множество допустимых значений управления, представляющее собой прямое произведение отрезков  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ ;  $t$  – непрерывное время,  $t \in T = [t_0, t_N]$ , начальный  $t_0$  и конечный  $t_N$  моменты времени заданы;  $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$  – непрерывно-дифференцируемая вектор-функция.

Начальное состояние системы задано:  $x(t_0) = x_0$ . Ограничения на конечное состояние:  $x_j(t_N) = x_{j,N}$ , где  $j = 1, \dots, l$ ;  $0 \leq l \leq n$ . Предполагается, что при управлении используется информация только о непрерывном времени  $t$ , т.е. применяется так называемое программное управление.

Множество допустимых процессов  $D(t_0, x_0)$  – это множество пар  $d = (x(t), u(t))$ , включающих траекторию  $x(t)$  и кусочно-непрерывное управление  $u(t)$ ,  $u(t) \in U$ , удовлетворяющих дифференциальному уравнению, начальному условию, а также ограничениям на конечное состояние.

На множестве допустимых процессов определен функционал качества управления  $I(d) = \int_{t_0}^{t_N} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_N))$ , где  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  – заданные непрерывные функции.

Требуется найти такую пару  $d^* = (x^*(t), u^*(t)) \in D(t_0, x_0)$ , что  $I(d^*) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d)$ .

## 2. Стратегия поиска решений

Для решения задачи поиска оптимального управления непрерывной системой предлагается осуществить переход к задаче поиска оптимального управления дискретной детерминированной системой, а затем построить решение исходной задачи путем интерполяции значений в узлах сетки. Предлагается искать приближенное решение задачи (управление) в виде кусочно-постоянных вектор-функций.

Выберем  $N$  точек из отрезка  $[t_0, t_N]$ , в которых будем искать оптимальное дискретное управление. Пусть  $t_0 = 0$ , тогда  $h = \frac{t_N - t_0}{N}$  – величина шага. В результате получим равномерную сетку  $\{0, h, 2h, \dots, Nh\}$ . Управлению  $u(t)$  будет соответствовать дискретное управление  $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ , где  $u(\hat{t}) = u(\hat{t}h)$ ,  $\hat{t} = 0, 1, \dots, N-1$ . Дифференциальные уравнения модели объекта управления приближенно заменяются разностными с помощью численных методов [7].

Перейдем от функционала Больца к функционалу Майера. Для этого введем дополнительную компоненту вектора состояния следующим образом:  $\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = f^0(t, x(t), u(t))$ . Начальное условие для этой компоненты имеет вид  $x_{n+1}(t_0) = 0$ . Таким образом, получаем расширенный вектор состояния  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in R^{n+1}$ .

Кроме этого, сведем задачу с ограничениями на конечное состояние к задаче со свободным правым концом, используя штрафные функции.

Функционал качества управления исследуемой системой примет вид:  

$$\tilde{I}(u(0), u(1), \dots, u(N-1)) = x_{n+1}(t_N) + F(x(t_N)) + \sum_{j=1}^l R_j [x_j(t_N) - x_{j,N}]^2,$$
 где  $R_1, \dots, R_l$  – параметры штрафа,  $t_N = Nh$ . Данный функционал будет являться целевой функцией в рассматриваемой задаче. Выбору подлежит вектор  $u = (u(0), u(1), \dots, u(N-1))^T$ , который соответствует дискретному управлению  $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ .

Для оптимизации критерия будем использовать меметический алгоритм, который применим к решению задачи оптимизации целевой функции  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенной на множестве допустимых решений  $D = \{x | x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbf{R}^n$ , и позволяет найти ее условный глобальный минимум на заданном множестве, т.е. такую точку  $x^* \in D$ , что  $f(x^*) = \min_{x \in D} f(x)$ .

Для удобства изложения заменим вектор (содержащий всю информацию об управлении)  $u = (u(0), u(1), \dots, u(N-1))^T = (u_1(0), \dots, u_q(0); u_1(1), \dots, u_q(1); \dots; u_1(N-1), \dots, u_q(N-1))^T$  на вектор  $\tilde{u} = (\tilde{u}_{1,1}, \dots, \tilde{u}_{1,q}, \tilde{u}_{2,1}, \dots, \tilde{u}_{2,q}, \dots, \tilde{u}_{N,1}, \dots, \tilde{u}_{N,q})^T = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{Nq})^T$  (заметим, что здесь  $\tilde{u}_{i,j} = u_j(i-1) \in [a_j; b_j]$ ). Обозначим через  $\tilde{U}$  множество допустимых векторов  $\tilde{u}$ , координаты которых удовлетворяют приведенным ограничениям. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом: требуется найти такой вектор  $\tilde{u}^*$ , что  $\tilde{I}(\tilde{u}^*) = \min_{\tilde{u} \in \tilde{U}} \tilde{I}(\tilde{u})$ .

Рассматриваемая целевая функция  $\tilde{I}(\tilde{u})$  эквивалентна природному понятию приспособленности живого организма. Чем меньше значение целевой функции, тем более приспособлен организм. Каждый допустимый вектор  $\tilde{u} = (\tilde{u}_{1,1}, \dots, \tilde{u}_{1,q}, \tilde{u}_{2,1}, \dots, \tilde{u}_{2,q}, \dots, \tilde{u}_{N,1}, \dots, \tilde{u}_{N,q})^T = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{Nq})^T \in \tilde{U}$  является возможным решением поставленной оптимизационной задачи и называется особью. Генерируемое на каждой итерации алгоритма конечное множество решений (особей) называется популяцией.

Стратегия поиска решения предлагаемым меметическим алгоритмом включает процедуры создания начальной популяции, формирования множества  $Pool$ , содержащего «хорошие» решения; реализацию локального поиска, механизм обновления множества  $Pool$ , процедуру path-relinking [8] для улучшения имеющихся решений путем выделения взаимосвязей между элементами множества  $Pool$ , а также процедуру покоординатного уточняющего поиска.

### 3. Алгоритм

**Шаг 1. Задание параметров.** Задать максимальное число итераций  $M_{\max}$ ; размер популяции  $\mathbf{m}$ ; параметр  $\sigma$  – некоторый порог расстояния между решениями;  $\mathbf{K}$  – характерное количество элементов множества  $Pool$ ;  $P$  – количество направляющих решений процедуры path-relinking;  $IM$  – количество повторений в уточняющем поиске;  $q$  – количество удаляемых решений из множества  $Pool$  на каждой итерации; область определения  $S$  коэффициентов  $c_1, \dots, c_k$ ; параметры метода муравьиных колоний или имитации отжига в зависимости от сделанного выбора. Положить  $k = 0$  – количество элементов в множестве  $Pool$ ;  $M = 0$  – номер итерации.

**Шаг 2. Формирование множества  $Pool$ .**

**Шаг 2.1.** Случайным образом сформировать популяцию  $\mathbf{I}_M$ . Для этого с помощью равномерного распределения  $\mathbf{m}$  раз сгенерировать последовательность из  $N \cdot q$  случайных значений  $\{P_{ij}^{M,p}\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $j = 1, \dots, q$ ;  $p = 1, 2, \dots, m$  на отрезке  $[0, 1]$ . Используя линейное преобразова-

ние, каждое значение отображается на соответствующий ему промежуток множества допустимых значений управления  $[a_j, b_j]$ :  $P_{ij}^p = [b_j - a_j]P_{ij}^{M \cdot p} + a_j$ . Составляя векторы из элементов последовательности  $\{P_{ij}^p\}$ ,  $i=1, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, q$  при фиксированном значении  $p$ , получаем  $m$  начальных векторов  $\tilde{u}^p = (\tilde{u}_1^p, \tilde{u}_2^p, \dots, \tilde{u}_{Nq}^p)^T$ ,  $\tilde{u}_i^p = P_{ij}^p$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $j=1, \dots, q$ . Таким образом может быть сформирована начальная популяция  $Y_M = \{\tilde{u}^p, p=1, 2, \dots, m \mid \tilde{u}^p = (\tilde{u}_1^p, \tilde{u}_2^p, \dots, \tilde{u}_{Nq}^p)^T \in \tilde{U}\}$ .

**Шаг 2.2.** Вычислить значение функции приспособленности для каждой особи  $\tilde{u}^p \in Y_M$ :  $\tilde{I}_p = \tilde{I}(\tilde{u}^p)$ ,  $p=1, \dots, m$ . В соответствии со значениями функции приспособленности  $\tilde{I}_p$  упорядочить решения  $\tilde{u}^p$  от лучшего (обеспечивающего наименьшее значение  $\tilde{I}_p$ ) к худшему (обеспечивающему наибольшее значение  $\tilde{I}_p$ ).

**Шаг 2.3.** Лучшее решение  $\tilde{u}^{best}$  поместить в множество  $Pool$ . Положить  $\tilde{u}_{pool}^{k+1} = \tilde{u}^{best}$ . Если  $M = 0$ , то перейти к шагу 2.4. Иначе перейти к шагу 3.

**Шаг 2.4.** Решение  $\tilde{u}^j$ , следующее за  $\tilde{u}^{best}$  в упорядоченном списке и удовлетворяющее условию  $d(\tilde{u}^{best}, \tilde{u}^j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nq} (\tilde{u}_i^{best} - \tilde{u}_i^j)^2} > \sigma$ , поместить в множество  $Pool$ . Положить  $\tilde{u}_{pool}^{k+2} = \tilde{u}^j$ . Положить  $k = k + 2$ . Если такого решения нет, то перейти к шагу 2.1.

**Шаг 3.** Решение задачи локального поиска.

**Шаг 3.1.** Решить задачу  $\tilde{I}(\tilde{u}^{new}) \rightarrow \min_{c_1, c_2, \dots, c_k}$ , где  $\tilde{u}^{new} = c_1 \tilde{u}_{pool}^1 + c_2 \tilde{u}_{pool}^2 + \dots + c_k \tilde{u}_{pool}^k$ ;  $\tilde{u}^{new} \in \tilde{U}$ ;  $c_1, \dots, c_k \in C$ ;  $\tilde{u}_{pool}^1, \tilde{u}_{pool}^2, \dots, \tilde{u}_{pool}^k \in Pool$ ,  $C_1, \dots, C_k \in C$ . Для решения этой задачи применить метод муравьиных колоний или метод имитации отжига.

**Шаг 3.2.** Поместить  $\tilde{u}^{new}$  в множество  $Pool$ . Положить  $\tilde{u}_{pool}^{k+1} = \tilde{u}^{new}$ ,  $k = k + 1$ .

**Шаг 3.3.** Если  $k < K$ , то перейти к шагу 3.1. Если  $k = K$ , перейти к шагу 4.

**Шаг 4.** Процедура перекомпоновки пути (path-relinking).

**Шаг 4.1.** Упорядочить решения, находящиеся в множестве  $Pool$  в соответствии со значениями функции приспособленности  $\tilde{I}(\tilde{u}_{pool}^j)$ ,  $j=1, \dots, K$ , от лучшего к худшему.

**Шаг 4.2.** Генерация подмножеств. Создать  $T = \sum_{j=1}^{K-2} j$  подмножеств типа  $\{\tilde{u}_{pool}^i, \tilde{u}_{pool}^j, \tilde{u}_{pool}^{j+1}\}$ , где  $i=1, \dots, K-2$ ,  $j > i$ .

**Шаг 4.3.** Для каждого из созданных на шаге 4.2 подмножеств  $\{\tilde{u}_{pool}^i, \tilde{u}_{pool}^j, \tilde{u}_{pool}^{j+1}\}$  выполнить:

**Шаг 4.3.1.** Сгенерировать  $P$  решений  $\{u_{pr}^1, \dots, u_{pr}^P\}$ , где

$$u_{pr}^j = \tilde{u}_{pool}^i + \frac{j}{1+P} (\tilde{u}_{pool}^j - \tilde{u}_{pool}^i), \quad j=1, \dots, P.$$

**Шаг 4.3.2.** Из решений  $\{u_{pr}^1, \dots, u_{pr}^P\}$  выбрать решение  $u_{pr}^*$ , которое соответствует наименьшему значению среди  $\tilde{I}(u_{pr}^j)$ ,  $j=1, \dots, P$ .

**Шаг 4.3.3.** Сгенерировать  $P$  решений  $\{\tilde{u}_{pr}^1, \dots, \tilde{u}_{pr}^P\}$ , где

$$\tilde{u}_{pr}^j = u_{pr}^* + \frac{j}{1+P} (\tilde{u}_{pool}^{j+1} - u_{pr}^*), \quad j=1, \dots, P.$$

**Шаг 4.3.4.** Из решений  $\{\tilde{u}_{pr}^1, \dots, \tilde{u}_{pr}^P\}$  выбрать решение  $\tilde{u}_{pr}^*$ , которое соответствует наименьшему значению из  $\tilde{I}(\tilde{u}_{pr}^j), j = 1, \dots, P$ .

**Шаг 4.3.5.** Добавить решение  $\tilde{u}_{pr}^*$  в множество  $Pool$ , положить  $k = k + 1$ .

**Шаг 5.** Процедура интенсивно-уточняющего поиска по координатам. Для каждого решения  $\tilde{u}^j = (\tilde{u}_1^j, \dots, \tilde{u}_i^j, \dots, \tilde{u}_{Nq}^j)^T$  из множества  $Pool$  выполнить следующие шаги.

**Шаг 5.1.** Задать номер цикла  $w = 1$  и величину смещения  $\Delta = (IM + 1) \cdot \sigma$ .

**Шаг 5.2.** Задать номер исследуемой координаты  $y = 1$ .

**Шаг 5.3.** Найти решения  $\tilde{u}_-^j = (\tilde{u}_1^j, \dots, \tilde{u}_y^j - \Delta, \dots, \tilde{u}_{Nq}^j)^T$  и  $\tilde{u}_+^j = (\tilde{u}_1^j, \dots, \tilde{u}_y^j + \Delta, \dots, \tilde{u}_{Nq}^j)^T$ .

**Шаг 5.4.** Если  $\tilde{I}(\tilde{u}_-^j) < \tilde{I}(\tilde{u}^j)$ , то заменить  $\tilde{u}^j$  на  $\tilde{u}_-^j$  и перейти к шагу 5.3; если  $\tilde{I}(\tilde{u}_-^j) \geq \tilde{I}(\tilde{u}^j)$ , то перейти к шагу 5.5.

**Шаг 5.5.** Если  $\tilde{I}(\tilde{u}_+^j) < \tilde{I}(\tilde{u}^j)$ , то заменить  $\tilde{u}^j$  на  $\tilde{u}_+^j$  и перейти к шагу 5.3; если  $\tilde{I}(\tilde{u}_+^j) \geq \tilde{I}(\tilde{u}^j)$ , то перейти к шагу 5.6.

**Шаг 5.6.** Увеличить  $y$  на единицу. Если  $y > Nq$ , то увеличить  $w$  на единицу и перейти к шагу 5.7. В противном случае перейти к шагу 5.3.

**Шаг 5.7.** Если  $w > IM$ , то перейти к шагу 6. В противном случае положить  $\Delta = \Delta - \sigma$  и перейти к шагу 5.2.

**Шаг 6.** Обновление множества  $Pool$ .

**Шаг 6.1.** Упорядочить решения, находящиеся в множестве  $Pool$ , в соответствии со значениями функции приспособленности  $\tilde{I}(\tilde{u}_{pool}^j), j = 1, \dots, k$  от лучшего к худшему. Наилучшее решение записать на лист памяти.

**Шаг 6.2.** Положить  $M = M + 1$ . Если  $M < M_{\max}$ , то перейти к шагу 6.3. Иначе выбрать наилучшее решение из листа памяти и закончить выполнение алгоритма.

**Шаг 6.3.** Удалить  $Q + T$  наихудших решений из  $Pool$ , положить  $k = k - Q - T$ .

**Шаг 6.4.** Удалить из множества  $Pool$  худшее из двух решений  $\tilde{u}_{pool}^{j_1}, \tilde{u}_{pool}^{j_2}$ , находящихся слишком близко друг к другу, т.е. не удовлетворяющих условию:

$$d(\tilde{u}_{pool}^{j_1}, \tilde{u}_{pool}^{j_2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nq} (\tilde{u}_{pooli}^{j_1} - \tilde{u}_{pooli}^{j_2})^2} > \sigma, \forall \tilde{u}_{pool}^{j_1}, \tilde{u}_{pool}^{j_2}, \text{ каждый раз полагая } k = k - 1. \text{ Перейти к шагу 2.}$$

#### 4. Программное обеспечение

На основе предложенного алгоритма разработан комплекс программ для поиска оптимального управления непрерывными детерминированными системами. Среда разработки – Microsoft Visual Studio, язык программирования – C#. С помощью программного обеспечения пользователь может вводить параметры постановки задачи, а также задавать параметры меметического алгоритма и метода решения задачи локального поиска. В программе имеется возможность выбора метода решения задачи локального поиска: муравьиных колоний (непрерывный вариант) либо имитации отжига (рис. 1).

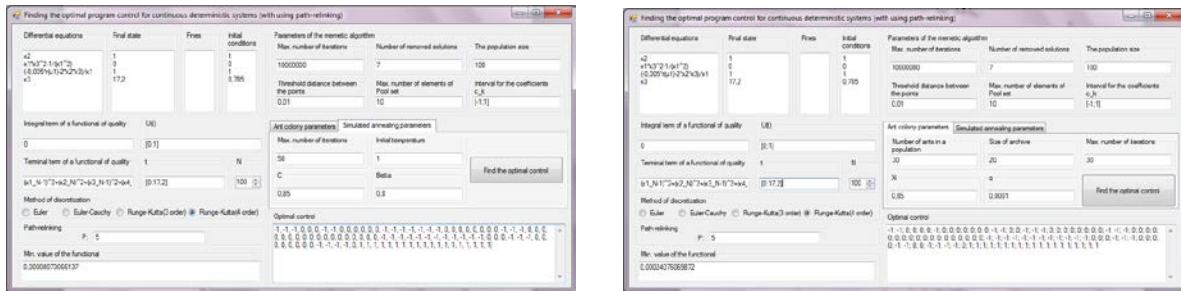


Рис. 1. Главное окно комплекса программ

## 5. Решение задачи о переводе спутника между орбитами

Пусть движение спутника описывается системой дифференциальных уравнений [9]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_1 \cdot x_3^2 - \frac{1}{x_1^2}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{-u - 2 \cdot x_2 \cdot x_3}{x_1}, & \dot{x}_4 &= x_3, \end{aligned}$$

где  $x_1 = r$  – радиус-вектор от притягивающего центра;  $x_2 = \dot{r}$  – скорость изменения радиус-вектора;  $x_3 = \dot{\varphi}$  – скорость изменения угла поворота радиус-вектора;  $x_4 = \varphi$  – угол поворота радиус-вектора.

Начальное состояние системы -  $x(0) = (1; 0; 1; 0,785)^T$ , конечное состояние -  $x(17,2) = (1; 0; 1; 17,2)^T = x^*$ ,  $t_N = 17,2$ . Требуется перевести спутник из заданного начального состояния в заданное конечное при помощи выбора управления, удовлетворяющего ограничению  $\forall t \ u(t) \in \{-0,005; 0; 0,005\}$ , описывающему трехпозиционное реле.

Функционал качества управления терминальный  $I = \sum_{k=1}^4 (x_k(t_N) - x_k^*)^2 \rightarrow \min$ .

Для обеспечения возможности применения гибридного меметического алгоритма преобразуем систему дифференциальных уравнений к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_3^2 - \frac{1}{x_1^2}, \\ \dot{x}_3 = \frac{-0,005 \cdot r(u) - 2 \cdot x_2 \cdot x_3}{x_1}, \\ \dot{x}_4 = x_3, \end{cases}$$

где  $r(u)$  – релейная функция, определяемая следующим образом

$$r(u) = \begin{cases} -1, & 0 \leq u < \frac{1}{3}, \\ 0, & \frac{1}{3} \leq u < \frac{2}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

В полученной задаче ограничение на управление выглядит следующим образом:  $\forall t: u(t) \in [0;1]$ . Управление и траектории системы, найденные в [9], изображены на рис. 2; величина функционала составляет 0,00024.

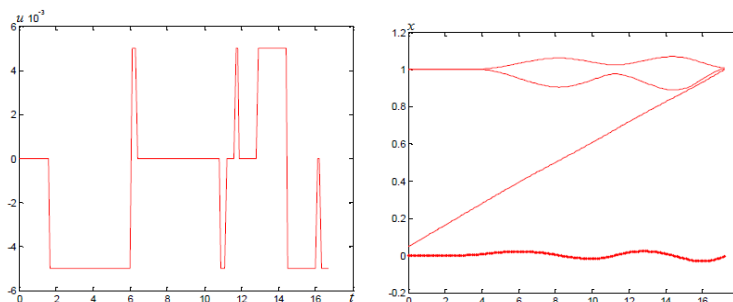


Рис. 2. Результаты решения задачи, полученные в [9]

Решение, полученное меметическим алгоритмом, представлено на рис. 3. Для нахождения решения использовались следующие параметры меметического алгоритма: максимальное число итераций  $M_{\max} = 10^7$ ; размер популяции  $m$ ; порог расстояния между точками  $\sigma$ ; максимальное количество элементов множества **Pool K**; количество удаляемых решений из множества **Pool Q**; область определения коэффициентов  $c_1, \dots, c_k$   $C = [-1;1]$ ,  $IM = 10$ ,  $P = 5$ .

Параметры метода имитации отжига: максимальное количество итераций  $N = 50$ , начальная температура  $T_0 = 1$ ; параметр закона распределения Больцмана  $C = 0,85$ ; параметр уменьшения температуры  $\beta = 0,8$ .

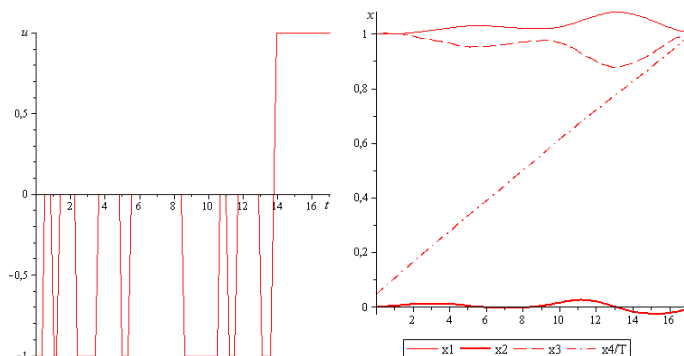


Рис. 3. Результаты решения задачи, полученные гибридным меметическим алгоритмом

Метод дискретизации – метод Эйлера, количество шагов дискретизации - 100, величина функционала  $I = 0,000081$ , значения координат в конечный момент:  $x(17,2) = (1,005; -0,005; 1,002; 17,206)^T$ .

### Заключение

В работе предложен гибридный меметический алгоритм для решения задачи поиска оптимального программного управления нелинейными непрерывными детерминированными системами. Реализован комплекс программ, позволяющий применять разработанный алгоритм для различных систем. Точность решения может быть скорректирована путем подбора параметров метода. Работа алгоритма продемонстрирована на задаче перевода спутника с одной орбиты на другую. Сравнение результатов работы меметического алгоритма с результатами, полученными с помощью других методов, иллюстрирует эффективность применения разработанного метода.



## ЛИТЕРАТУРА

1. **Dawkins R.** Universal Darwinism in D.S. Bendall (ed.), Evolution: From Molecules to Men, Cambridge University Press, Cambridge, 1983. - P. 403-425.
2. **Dawkins R.** The Selfish Gene. - Oxford University Press, 1976.
3. **Moscato P.** On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms // Caltech Concurrent Computation Program (report 826), 1989.
4. **Neri F., Cotta C., Moscato P.** Handbook of Memetic Algorithms // Studies in Computational Intelligence, V. 379, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
5. **Dorigo M., Socha K.** Ant colony optimization for continuous domains // European Journal of Operational Research. V. 185, 2008. - P. 1155-1173.
6. **Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P.** Optimization by simulated annealing. Science. V. 220, 1983. - P. 671-680.
7. **Кирпеев В.И., Пантелеев А.В.** Численные методы в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 2008.
8. **Duarte A., Marti R., Gortazar F.** Path relinking for large scale global optimization. Soft Comput. 15(11), 2001. - P. 2257-2273.
9. **Охорзин В.А., Рыжиков И.С.** Решение терминальной задачи управления в виде многоуровневого реле // Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте 2012: материалы междунар. науч.-практич. конф. - Вып. 2. - 2012. - Т. 2. - С. 89-93.
10. **Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А.** Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. - М.: Вузовская книга, 2013.

**SOLUTION OF THE SATELLITE TRANSFER PROBLEM  
WITH HYBRID MEMETIC ALGORITHM****Panteleyev A.V., Pismennaya V.A.**

This paper presents a hybrid memetic algorithm (MA) to solve the problem of finding the optimal program control of nonlinear continuous deterministic systems based on the concept of the meme, which is one of the promising solutions obtained in the course of implementing the procedure for searching the extremes. On the basis of the proposed algorithm the software complex is formed in C#. The solution of satellite transfer problem is presented.

**Key words:** optimal control, global extremes, nonlinear continuous deterministic systems, memetic algorithm, satellite transfer problem.

**Сведения об авторах**

**Пантелеев Андрей Владимирович**, 1955 г.р., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана (1978), профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики МАИ (Национального исследовательского университета), автор более 170 научных работ, область научных интересов – методы синтеза оптимальных нелинейных систем управления, методы оптимизации.

**Письменная Виктория Александровна**, окончила МАИ (2013), аспирантка МАИ, область научных интересов – методы оптимизации, численные методы, эвристические алгоритмы.

УДК 519.1

## ОПТИМАЛЬНАЯ КОРРЕКЦИЯ СРОКОВ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ ПО ПРОЕКТУ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Ю.И. БУРЯК, И.Б. ИВЕНИН, А.А. СКРЫННИКОВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Кузнецовым В.Л.

Предложен алгоритм поиска оптимальной коррекции плана работ в случае возникновения отставания от графика. Требованием является выполнение работ в заданный срок при минимальных дополнительно привлекаемых ресурсах для ускорения работ. Решение основано на использовании аппарата динамического программирования с учётом присущих задаче особенностей при вычислении целевой функции. Предложенный подход проиллюстрирован численным примером.

**Ключевые слова:** сетевое планирование, оптимизация плана работ, динамическое программирование.

### Введение

Рассмотрим произвольный план выполнения совокупности взаимосвязанных работ, заданный в виде сетевой модели. Сетевая модель представляет собой ориентированный граф, изображающий все необходимые для достижения цели проекта операции в технологической взаимосвязи.

В ходе выполнения работ может произойти отставание при выполнении какой-то работы. Для того чтобы завершающее событие (окончание работ проекта) состоялось вовремя, необходимо провести коррекцию плана выполнения последующих работ, за счёт привлечения дополнительных ресурсов ускорить выполнение некоторых работ проекта. При этом последовательность работ не изменяется.

Ускорение работы связано с увеличением стоимости этой работы. Для каждой работы существуют различные варианты форсирования работы, имеющие свою стоимость. Задача заключается в выборе оптимального варианта корректировки плана работ, т.е. из всех возможностей по ускорению работ необходимо выбрать такой вариант, который бы минимизировал дополнительно привлекаемые средства [2].

### 1. Описание проблемной ситуации

Пусть задана сетевая модель [3; 4] и её аналитические характеристики (в том числе частные резервы работ), а также задано значение  $\Delta t_{i-j}$  - время отставания при выполнении работы  $(i-j)$ . Известны стоимости  $C(\Delta \tau_{i-j})$  сокращения отставания в сроках выполнения работы  $(i-j)$  на величину  $\Delta \tau_{i-j}$ .

Пусть существует множество путей (рис. 1), соединяющих событие  $j$  работы  $(i-j)$  и завершающее событие сетевой модели, причём некоторые из этих путей имеют общие работы. Будем считать, что все пути, соединяющие событие  $j$  работы  $(i-j)$  и завершающее событие проекта, упорядочены, и присвоим каждому пути свой номер  $l$ ,  $l=1...N$  ( $N$  – количество таких путей).

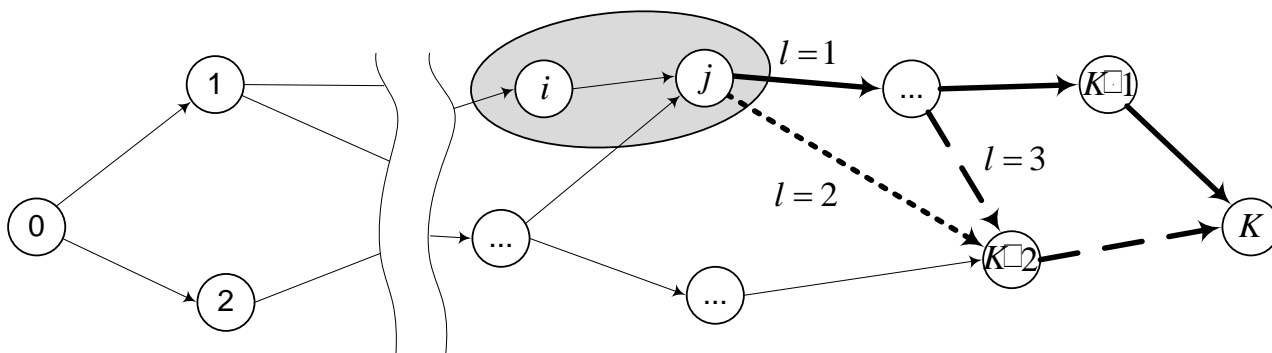


Рис. 1. Исходная сетевая модель

Каждый из рассматриваемых путей сетевой модели, начиная с события  $j$ , имеет некоторый резерв времени –  $R_l$

$$R_l = \sum_{\xi, \eta \in M_l} r_{\xi-\eta},$$

где  $r_{\xi-\eta}$  – частный резерв работы ( $\xi-\eta$ );  $M_l$  – множество событий (вершин графа), лежащих на пути с номером  $l$ . Следует отметить, что для критического пути резерв равен нулю, а для остальных путей резерв времени – положительное число. Тогда для гарантированного выполнения всех работ в назначенный срок на пути с номером  $l$  необходимо ускорить работу (сократить полученный дефицит времени) на время

$$\Delta T_l = \begin{cases} (\Delta t_{i-j} - R_l), & \text{если } (\Delta t_{i-j} - R_l) \geq 0, \\ 0, & \text{если } (\Delta t_{i-j} - R_l) < 0. \end{cases}$$

## 2. Постановка задачи

Приведем описанную выше проблемную ситуацию к многошаговому управляемому процессу. Для этого исходный граф преобразуем таким образом, что число работ от события  $j$  работы ( $i-j$ ) до завершающего события по каждому из путей  $l=1\dots N$  было бы одинаково.

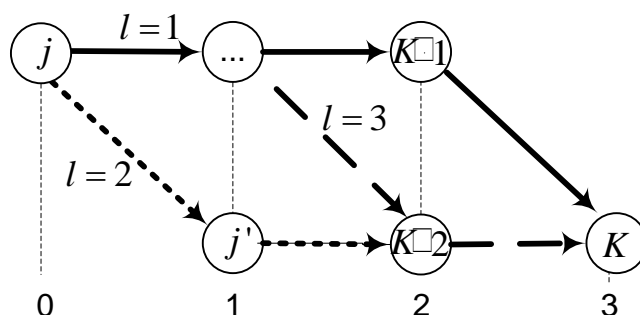


Рис. 2. Порожденный многошаговый процесс

Такое преобразование может быть осуществлено следующим образом (рис. 2). На пути от события  $j$  до завершающего события сетевой модели необходимо найти ближайшее к событию  $j$  сложное событие (т.е. такое событие, в которое входят две работы или более) и перечислить все возможные пути, соединяющие эти события. Затем следует определить мощность каждого полученного пути (т.е. число дуг пути). Если мощности рассматриваемых путей не равны меж-

ду собой, то определяется множество путей, мощности которых меньше максимальной, и на этих путях производится операция расщепления вершин (вводится фиктивная работа) до тех пор, пока мощности всех путей не сравняются. Расщеплению подвергается вершина, предшествующая сложному событию. После этого находится очередное сложное событие, и операция повторяется до последнего сложного события сетевого графа.

Процедура расщепления вершины  $v$  заключается в следующем [1]. Окружение вершины разбивается произвольным образом на две части  $M_1$  и  $M_2$ . Вершина  $v$  удаляется вместе с инцидентными ей дугами, затем добавляются новые вершины  $u$  и  $w$ , также добавляется дуга  $uw$ . Вершина  $u$  соединяется дугами с каждой вершиной из множества  $M_1$ , а вершина  $w$  – с каждой вершиной из множества  $M_2$ . Вес дуги  $uw$  (стоимость введенной фиктивной работы) принимается равным нулю.

Таким образом, мощность каждого из путей, соединяющих событие  $j$  работы ( $i-j$ ) и завершающее событие, будет определять число шагов в многошаговом многомерном управляемом процессе коррекции сетевого графика.

Особенностью полученной сетевой модели является наличие общих участков из одной или более дуг у различных путей, соединяющих событие  $j$  и завершающее событие, что должно быть учтено при решении задачи. Эта особенность определяет основное отличие рассматриваемой задачи от классических многошаговых задач оптимального управления.

В качестве критериального функционала для коррекции сетевого графика предлагается использовать суммарные затраты на ускорение работ, вычисляемые с учетом общих работ на различных путях.

В качестве фазовой координаты процесса на  $k$ -м шаге выберем вектор

$$\bar{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^N),$$

компоненты  $x_k^l$  которого определяют компенсированный к  $k$ -му шагу дефицит времени на траектории с номером  $l$ .

В качестве управления на  $k$ -м шаге будем рассматривать вектор

$$\bar{u}_k = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^N),$$

компоненты которого определяют компенсируемое время на  $k$ -м шаге процесса.

Обозначим через  $\{\bar{x}\} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$  и  $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$  соответственно траекторию приведенного процесса и управления на этой траектории.

Для определения общих участков работ на различных траекториях обозначим через  $v_k^l$  номер вершины приведенного графа, соответствующей  $k$ -му шагу траектории с номером  $l$ .

Обозначим  $\Omega_k$  – множество общих участков траекторий на  $k$ -м шаге с началом в вершине  $v_k^{общ}$  и концом в вершине  $v_{k+1}^{общ}$

$$\Omega_k = \left\{ l; v_k^l = v_k^{общ} \text{ и } v_{k+1}^l = v_{k+1}^{общ} \right\},$$

где  $L_k$  – мощность этого множества;  $l_0$  – номер одного из элементов этого множества.

Пусть  $n$  – число шагов процесса от состояния  $j$  до конечного (для каждого пути – одинаковое), а  $N$  – число возможных путей, соединяющих состояния  $j$  и конечное состояние. Тогда критериальный функционал можно записать в следующем виде

$$J(\{\bar{x}\}, \{\bar{u}\}) = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{l \notin \Omega_k} C_k^l(u_k^l) + C_k^{l_0}(u_k^{l_0}) \right\},$$

где  $C_k^l(u_k^l)$  – стоимость реализации управления  $u_k^l$ .

Введем функцию  $f_k(\bar{u}_k) = \sum_{l \notin \Omega_k} C_k^l(u_k^l) + C_k^{l_0}(u_k^{l_0})$  – стоимость реализации вектора управления  $\bar{u}_k$  на  $k$ -м шаге. С учетом введенной функции критериальный функционал может быть переписан в виде

$$J(\{\bar{x}\}, \{\bar{u}\}) = \sum_{k=1}^n f_k(\bar{u}_k). \quad (1)$$

Изменение состояния многомерного процесса под действием управления  $\bar{u}_k$  определяется уравнением связи

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} + \bar{u}_k. \quad (2)$$

С учетом введенных обозначений задачу оптимальной коррекции сроков выполнения работ можно сформулировать как задачу дискретного оптимального управления: требуется определить оптимальное управление  $\{u^*\}$  из множества допустимых управлений  $U_{\text{доп}} = \bigcap_k U_{\text{доп}}^k$  и соответствующую ему оптимальную траекторию  $\{x^*\}$ , доставляющие минимум критериальному функционалу  $J(\{\bar{x}\}, \{\bar{u}\})$

$$(\{u^*\}, \{x^*\}) = \arg \min_{\{u^*\} \in U_{\text{доп}}} \sum_{k=1}^n f_k(\bar{u}_k), \quad (3)$$

при выполнении уравнений связи (2) и краевых условиях:

$$\bar{x}_0 = (0, \dots, 0)^T; \quad (4)$$

$$\bar{x}_n = (\Delta T_1, \dots, \Delta T_N)^T. \quad (5)$$

### 3. Алгоритм решения задачи

Задачу (1) – (5) с сепарабельным критериальным функционалом можно сформулировать и решить как задачу дискретного динамического программирования [4; 5].

Основное функциональное уравнение Р. Беллмана для этой задачи можно записать в виде

$$Q_k^*(\bar{x}_{k-1}) = \min_{u_k \in U_{\text{доп}}^k} \left\{ f_k(\bar{u}_k) + Q_{k+1}^*(\bar{x}_{k-1} + \bar{u}_k) \right\} = \min_{u_k \in U_{\text{доп}}^k} \left\{ \sum_{l \notin \Omega_k} C_k^l(u_k^l) + C_k^{l_0}(u_k^{l_0}) + Q_{k+1}^*(\bar{x}_{k-1} + \bar{u}_k) \right\}; \quad (6)$$

$$\bar{u}_k^*(\bar{x}_{k-1}) = \arg \min_{u_k \in U_{\text{доп}}^k} \left\{ \sum_{l \notin \Omega_k} C_k^l(u_k^l) + C_k^{l_0}(u_k^{l_0}) + Q_{k+1}^*(\bar{x}_{k-1} + \bar{u}_k) \right\}, \quad (7)$$

где  $Q_k^*(\bar{x}_{k-1})$  – функция Беллмана;  $\bar{u}_k^*(\bar{x}_{k-1})$  – условно оптимальное управление на  $k$ -м шаге.

Алгоритм решения задачи, реализующий уравнение (6), строится стандартно в два этапа [4; 5].

### 4. Пример решения задачи

Рассмотрим в качестве примера сетевую модель, приведённую на рис. 3.

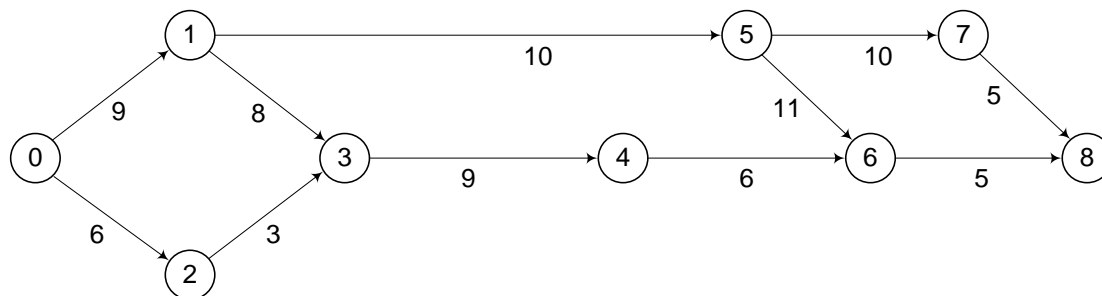


Рис. 3. Расчетная сетевая модель

Пусть работа 0-1 выполнена с опозданием на  $\Delta t_{1-2}$ . Анализ сетевой модели показывает, что работа 0-1 лежит на критическом пути.

Множество путей, соединяющих событие 1 и конечное событие 8, включает три пути: 1-3-4-6-8; 1-5-6-8; 1-5-7-8, при этом путь 1-3-4-6-8 – критический. Путь 1-5-6-8 имеет общий резерв 2 дня, а путь 1-5-7-8 – 3 дня. Поэтому:

- если  $\Delta t_{1-2} \leq 2$ , то корректировке подлежит только путь 1-3-4-6-8 на  $\Delta t_{1-2}$  дней;
- если  $\Delta t_{1-2} = 3$ , то корректировке подлежит путь 1-3-4-6-8 на 3 дня, а путь 1-5-6-8 на 1 день;
- если  $\Delta t_{1-2} > 3$ , то корректировке подлежит путь 1-3-4-6-8 на  $\Delta t_{1-2}$ , путь 1-5-6-8 на  $(\Delta t_{1-2} - 2)$  дней, путь 1-5-7-8 на  $(\Delta t_{1-2} - 3)$  дней.

Разобьём сетевой граф на этапы, проведя процедуру расщепления вершины 5 (рис. 3). Полученный сетевой граф приведён на рис. 4.

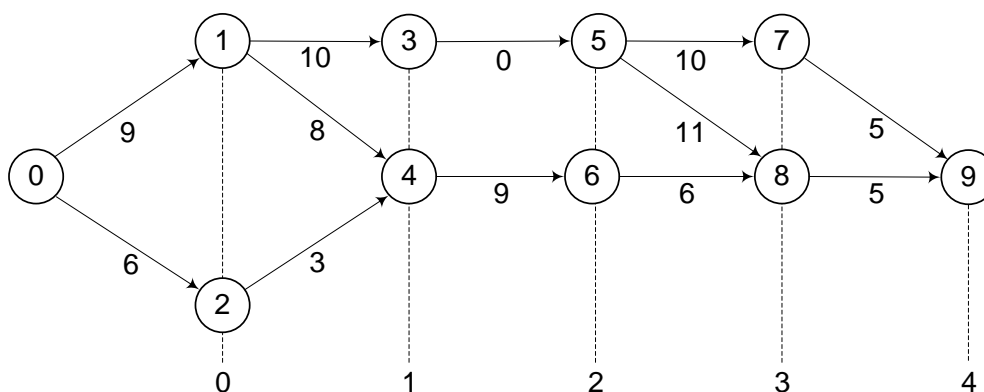


Рис. 4. Приведенный граф

Перечень путей, соединяющих вершину 1 работы 0-1 и конечное событие 9, приведён в табл. 1. Возможности по ускорению работ приведены в табл. 2.

Таблица 1

Номер пути	События					Длина пути	Резерв
	1	4	6	8	9		
1	1	4	6	8	9	28	0
2	1	3	5	8	9	26	2
3	1	3	5	7	9	25	3
шаг	0	1	2	3	4		

Таблица 2

Вершины		$C(u_k)$		
$V_k$	$V_{k+1}$	$u_k=0$	$u_k=1$	$u_k=2$
1	3	0	5	10
1	4	0	7	–
3	5	0	–	–
4	6	0	6	12
5	8	0	5	–
6	8	0	6	13
5	7	0	7	–
7	9	0	5	14
8	9	0	8	11

Пусть  $\Delta t_{1-2} = 4$ , т.е. корректировать необходимо все три пути.

Схема проведения расчётов приведена на рис. 5. Здесь вершины графа соответствуют вектору фазовых координат. На графе приведены только те вершины, которые лежат на достижимых путях из состояния  $(4,2,1)$  на 4 этапе в состояние  $(0,0,0)$  на нулевом этапе. Число над вершиной соответствует текущему значению целевой функции. Путь, соответствующий оптимальному решению, выделен курсивом.

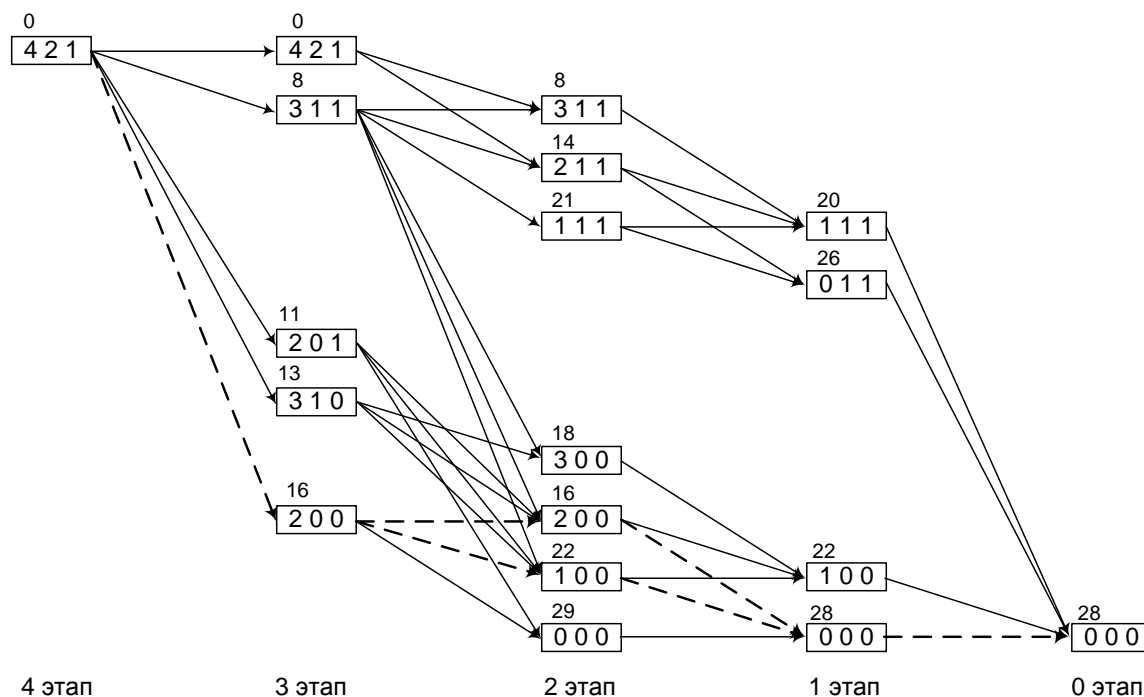


Рис. 5. Схема расчетов

Анализ полученного решения (траектория  $000 - 000 - 100 - 200 - 421$ ) показывает, что на первом этапе корректировать план нет необходимости; на втором этапе необходимо ускорить на 1 день работу, лежащую на первой траектории (работу 4-6), на третьем этапе – опять ускорить на 1 день работу, лежащую на первой траектории (работу 6-8), на четвёртом этапе – ускорить на 2 дня работу 8-9 (первая и вторая траектории) и на 1 день работу 7-9 (третья траектория). Суммарные затраты на реализацию такого плана составят 28 единиц.

## Заключение

В работе показана возможность использования аппарата динамического программирования для решения задачи коррекции сетевого графика выполнения работ при наличии отклонений. Выделены особенности задачи, связанные с наличием общих участков из одной или более дуг у различных путей сетевого графика, соединяющих исходное и завершающее события. Приведено основное функциональное уравнение динамического программирования для решения поставленной задачи. Рассмотрен пример решения задачи поиска оптимальной коррекции плана, затрагивающего несколько путей сетевого графика, подтверждающий работоспособность предлагаемого алгоритма.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. Лекции по теории графов. - М.: Наука, 1990.
2. Буряк Ю.И., Скрынников А.А. Оптимальное распределение ресурсов в задаче оперативного управления состоянием авиационной техники: материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления. В печати.
3. Новицкий Н.И. Сетевое планирование и управление производством. - М.: Новое знание, 2004.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. – Минск: БГУ, 1975.
5. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. - М.: Наука, 1974.

## DEADLINES OPTIMAL CORRECTION OF PROJECT EXECUTION FOR ANY DEVIATIONS FROM NETWORK SCHEDULE

Buryak Yu.I., Ivenin I.B., Skrynnikov A.A.

An algorithm of optimal correction of the work plan in the event of a deviation from the network schedule is proposed. Requirement within to perform activities in a given period of time with minimal additional resources involved to accelerate the work. The correction algorithm is based on using dynamic programming method taking into account the problem inherent feature when calculating the target function.

**Key words:** optimal correction of work schedule, network schedule, dynamic programming.

## Сведения об авторах

**Буряк Юрий Иванович**, 1953 г.р., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана (1976), кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник подразделения ФГУП ГосНИИАС, автор более 90 научных работ, область научных интересов – методы автоматизации сбора и обработки информации.

**Ивенин Игорь Борисович**, 1955 г.р., окончил МАИ (1978), кандидат технических наук, начальник лаборатории ФГУП ГосНИИАС, автор более 80 научных работ, область научных интересов – математические методы системного анализа, исследования операций и обоснования решений.

**Скрынников Андрей Александрович**, 1962 г.р., окончил Даугавпилское ВВАИУ им. Я. Фабрициуса (1984), кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент МГТУ ГА, автор более 80 научных работ, область научных интересов – вероятностные методы оценки эффективности авиационных комплексов.



УДК 629.73.001.63

## ПОДХОД К ПОИСКУ НАПРАВЛЕНИЙ ОПТИМИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК АВИАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИЗА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

Н.И. ЗУРАБЬЯН

Статья представлена доктором технических наук Самойловым В.П.

Статья посвящена подходу к поиску направлений оптимизации авиационных систем в результате комплексной сравнительной оценки исследуемой системы. Лежащая в основе подхода методология анализа среды функционирования (АСФ) базируется на методах математического программирования, теории производственных функций и принципе оптимальности Парето.

**Ключевые слова:** авиационные системы, анализ среды функционирования, эффективность авиационных систем.

### Введение

Создание и внедрение перспективных авиационных систем требуют все более совершенного аппарата для поиска направлений оптимизации большого количества параметров, характеризующих их облик. При этом для получения объективных результатов необходим учет множества факторов.

Существующие методики поиска направлений повышения эффективности авиационных систем базируются на известных методах решения задач с векторным критерием, использующих скалярную свертку, общим недостатком большинства из которых является значительная роль субъективной составляющей, проявляющейся в выделении приоритетного показателя, введении коэффициентов важности, являющихся результатом экспертных оценок и т.п.

Кроме того, направление по повышению эффективности зачастую определяется без учета достижений конкурентов в аналогичной области. Проведенные в этом направлении предварительные исследования проиллюстрировали всю важность учета этих факторов и их существенное влияние на итоговый результат [1].

В связи с этим актуальной становится задача выработки подхода к поиску направлений оптимизации характеристик авиационных систем, позволяющего определить эти направления с учетом сравнительной оценки рассматриваемых систем с существующими аналогами.

### 1. Постановка задачи

Задача, для решения которой предлагается описанный ниже подход, формируется следующим образом: рассматривается  $n$  авиационных систем, каждая из которых описывается набором из  $p$  характеристик

$$S_i = (s_{i1}, \dots, s_{ij}, \dots, s_{ip}), i = 1 \dots n,$$

где  $s_{ij}$  –  $j$ -я характеристика  $i$ -й системы.

Требуется определить вектор приращений характеристик системы с индексом  $i'$

$$\Delta S_{i'} = (\Delta s_{i'1}, \dots, \Delta s_{i'p}),$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-08-31013.

такой, чтобы система  $S_i^* = S_i + \Delta S_i$  получилась более эффективной, чем система  $S_i$ , с учетом производственных возможностей.

При такой постановке задачи возникают две основных проблемы.

1. Проблема поиска адекватного метода сравнения векторов  $S_i$  и  $S_i^*$ , позволяющего сделать однозначное предпочтение в пользу одного из них.

2. Проблема определения ограничений, связанных с возможностями производства, через информацию о системах-аналогах.

Для их решения предлагается использовать аппарат методологии анализа среды функционирования (АСФ).

## 2. Основы методологии АСФ

Начало созданию методологии АСФ положили в конце XX в. американские специалисты А. Чарнес и В. Купер. Методология базируется на методах математического программирования, теории производственных функций, производственной модели Леонтьева и принципе оптимальности Парето. Несмотря на тот факт, что эта методология активно применяется для анализа деятельности сложных систем, таких как банки, нефтяные компании и т.п., в России она пока мало известна. Тем не менее в последние годы она активно внедряется для анализа сложных систем [2; 3; 4].

Подробное описание методологии АСФ приводится в источнике [4]. Ниже приводится описание подхода АСФ с акцентом на его пригодность АСФ для решения озвученных выше проблем.

В моделях АСФ сложная система рассматривается как совокупность входных и выходных параметров. Входами, как правило, являются выраженные в том или ином виде затраты, а в качестве выходов могут выступать как характеристики самой системы, так и результат ее функционирования в зависимости от типа задачи, для решения которой применяется подход АСФ. Для авиационных систем в качестве входов могут выступать финансовые или временные затраты на их создание, а выходами могут являться показатели, характеризующие их экономическую, транспортную, боевую эффективность и т.п.

То есть применительно к поставленной выше задаче необходимо рассмотреть  $n$  систем, каждая из которых характеризуется парой векторов  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , где  $\bar{X}$  – вектор входных параметров, а  $\bar{Y}$  – вектор выходных параметров.

Векторы  $\bar{X}, \bar{Y}$  для  $i$ -й системы имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= (x_{i1}, \dots, x_{im}); \\ \bar{Y}_i &= (y_{i1}, \dots, y_{il}),\end{aligned}$$

где  $x_{i1}, \dots, x_{im}$  – затраты для  $i$ -й системы;  $y_{i1}, \dots, y_{il}$  – выходные показатели для  $i$ -й системы, причем показатели выбираются таким образом, чтобы их значения удовлетворяли условиям:

$$\begin{aligned}x_{ij} &> 0, \\ y_{ik} &> 0.\end{aligned}$$

Свертка векторного критерия осуществляется по принципу коэффициента полезного действия, активно используемого в физике, экономического коэффициента рентабельности и т.п. Поскольку число входов и выходов в общем случае превышает единицу, в таких случаях используют отношение взвешенных сумм выходных показателей к взвешенным суммарным затратам.

Пусть требуется оценить систему с индексом  $i'$ , характеризующуюся показателями  $((x_{i'1}, \dots, x_{i'm}), (y_{i'1}, \dots, y_{i'l}))$ .

Тогда значение обобщенного показателя эффективности для нее будет иметь вид

$$k = \frac{\mu_1 y_{i1} + \dots + \mu_l y_{il}}{\omega_1 x_{i1} + \dots + \omega_m x_{im}}, \quad (1)$$

где  $\mu_j, \omega_i$  – ненормированные оценки важности входов и выходов ( $j=1..l, i=1..m$ ).

На практике важность того или иного показателя часто определяется экспертным путем. В этом случае оценки будут в итоге отражать определенную долю субъективности экспертов. Создатели методологии АСФ предлагают поступить иначе.

Согласно одной из концепций, широко применяющейся в экономике, система оценок важности рассматривается как система управляющих воздействий, обеспечивающих наибольшее приближение обобщенного показателя эффективности  $k$  к желаемому результату при известных значениях входов и выходов  $(x_{i1}, \dots, x_{im}), (y_{i1}, \dots, y_{il})$  [5]. Поскольку предполагается, что рассматриваемые варианты авиационных систем, каждой из которых соответствует определенный набор входных и выходных параметров, уже существуют в том или ином виде, такой подход в определении оценок частных показателей эффективности отражает предпочтения оперирующей стороны, руководствуясь которыми, выбор был остановлен на рассматриваемой системе.

Таким образом, оценки  $\mu_j, \omega_i$  максимизируют функционал (1), а известные значения частных показателей эффективности  $(x_{i1}, \dots, x_{im}), (y_{i1}, \dots, y_{il})$  выступают в роли коэффициентов.

Ограничения на производственные возможности задаются исходя из утверждения, что ни для одного из объектов значение обобщенного показателя эффективности не может быть больше заданной нормы. Поскольку оценки  $\mu_j, \omega_i$  не нормированы, норма может быть принята равной единице.

Кроме того, оценки принимаются всегда строго положительными.

Тогда оценки входов и выходов могут быть определены при решении следующей оптимизационной задачи

$$h^*(\mu^*, \omega^*) = \max_{\mu, \omega} \frac{\sum_{j=1}^l \mu_j y_{ij}}{\sum_{i=1}^m \omega_i x_{ii}} \quad (2)$$

при ограничениях:

$$\frac{\sum_{j=1}^l \mu_j y_{kj}}{\sum_{i=1}^m \omega_i x_{ki}} \leq 1, k = 1..n; \quad (3)$$

$$\mu_j \geq \varepsilon, j = 1..l; \quad (4)$$

$$\omega_i \geq \varepsilon, i = 1..m, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  – бесконечно малая величина, введенная во избежание возникновения особых точек в нелинейной задаче.

Переход от задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования осуществляется путем введения новой переменной такой, что ее произведение на знаменатель дроби в выражении (2) тождественно равно единице.

В результате получаем задачу вида

$$h^*(u^*, v^*) = \max_{u, v} \sum_{j=1}^l v_j y_{ij}$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m u_i x_{ii} &= 1; \\ -\sum_{i=1}^m u_i x_{ki} + \sum_{j=1}^l v_j y_{kj} &\leq 0, k=1, \dots, n; \\ u_j &\geq \varepsilon, j=1 \dots l; \\ v_i &\geq \varepsilon, i=1 \dots m. \end{aligned}$$

Затем к полученной задаче применяется соотношение двойственности.

Двойственная задача с переменными  $\theta, \lambda, S^-, S^+$  будет иметь вид

$$(\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*}) = \arg \min_{\theta, \lambda, S^-, S^+} (\theta - \varepsilon (\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{j=1}^l s_j^+)) \quad (6)$$

при ограничениях:

$$\sum_{k=1}^n x_{ki} \lambda_k + s_i^- = \theta x_{ii}, i=1 \dots m; \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^n y_{kj} \lambda_k - s_j^+ = y_{ij}, j=1 \dots l; \quad (8)$$

$$\lambda_k \geq 0, k=1 \dots n; \quad (9)$$

$$s_i^- \geq 0, i=1 \dots m; \quad (10)$$

$$s_j^+ \geq 0, j=1 \dots l. \quad (11)$$

Задача (6)-(11) получила название входной модели CCR по первым буквам фамилий ее создателей: Charnes, Cooper, Rhodes.

Смысл оптимальных значений  $\theta^*, \lambda^*, S^{-*}, S^{+*}$  состоит в следующем.

Коэффициенты  $\lambda_k^* \geq 0, k=1 \dots n$  определяют границы множества производственных возможностей, которое для модели CCR имеет вид

$$\{(\bar{X}, \bar{Y}) \mid x_i \geq \sum_{k=1}^n x_{ki} \lambda_k, i=1 \dots m, y_j \leq \sum_{k=1}^n y_{kj} \lambda_k, j=1 \dots l\},$$

где  $x_{ki}$  –  $i$ -й входной параметр  $k$ -й из рассматриваемых систем;  $y_{kj}$  –  $j$ -й выходной параметр  $k$ -й из рассматриваемых систем. В более сложных моделях АСФ путем введения дополнительных ограничений на эти коэффициенты множество производственных возможностей корректируется. Принадлежность к границе множества точки, определяемой парой векторов  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , является необходимым условием эффективности рассматриваемой системы.

Оптимальное значение  $\theta^*$  показывает степень близости рассматриваемой системы к границе множества производственных возможностей. По его значению можно судить о том, во сколько раз необходимо сократить затраты, чтобы система легла на границу множества производственных возможностей.

В случае выходных моделей, в основе которых лежит стремление минимизировать обобщенный показатель, вычисляющийся по формуле, обратной соотношению (1), имеет место аналогичная величина, показывающая, во сколько раз необходимо увеличить выходы.

Векторы  $S^{-*}, S^{+*}$  показывают, насколько необходимо сместить систему, полученную посредством умножения вектора затрат рассматриваемой системы на  $\theta^*$ , чтобы она стала эффективной.

Таким образом, с помощью применения аппарата АСФ для сравнительной оценки авиационных систем для каждой из рассматриваемых систем определяется набор параметров, позволяющий сделать вывод, является ли рассматриваемая система эффективной, и если нет, то они определяют характер преобразования векторов входных и выходных параметров, переводящий систему в разряд эффективных.

Таким образом, применительно к изложенной выше постановке задачи, вектор, характеризующий систему  $i'$ , будет иметь вид

$$S_{i'} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, y_{i_1}, \dots, y_{i_l}), m + l = p.$$

Вектор приращений характеристик системы, переводящей ее в разряд эффективных, в случае реализации входной модели АСФ будет иметь вид

$$\Delta S_{i'} = ((\theta^* - 1)x_{i_1} - s_1^-, \dots, (\theta^* - 1)x_{i_m} - s_m^-, y_{i_1} + s_1^+, \dots, y_{i_l} + s_l^+),$$

где  $m + l = p$ .

Помимо этого, для каждой из рассматриваемых систем может быть определена зона устойчивости при изменении входных и выходных параметров, в пределах которой она не изменяет своего статуса, эффект масштаба и некоторые другие показатели.

### 3. Структура методики сравнительной оценки авиационных систем с использованием аппарата АСФ

Для создания методики сравнительной оценки авиационных систем с использованием аппарата АСФ необходим алгоритм агрегирования внешних данных о системе в исходные данные для проведения расчетов. В его основе должны лежать формально-логические принципы классификации, а также взаимосвязь между техническими характеристиками системы, затратами оперирующей стороны и результатами функционирования системы. Для получения этой взаимосвязи необходимо задействовать модели функционирования авиационных систем на всех этапах жизненного цикла.

В качестве моделей, описывающих функционирование авиационных систем, могут быть использованы разработанные ранее.

Также для создания методики необходим алгоритм выбора конкретной модели АСФ в зависимости от специфики рассматриваемой системы и цели исследований с учетом назначения конкретной авиационной системы и данных о ней.

Структурная схема методики представлена на рис. 1.

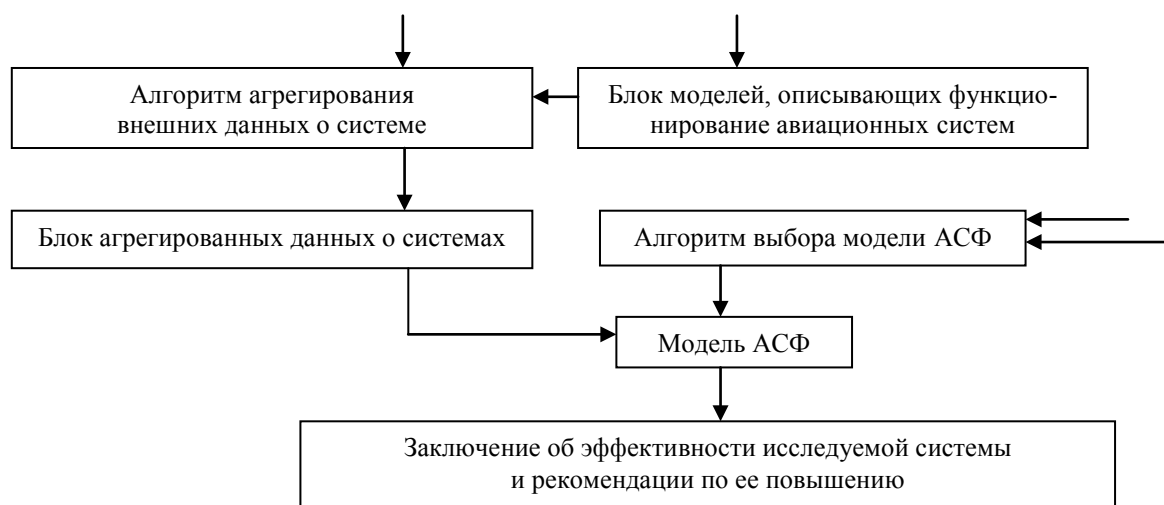


Рис. 1. Структурная схема методики

## Заклучение

Подход, лежащий в основе методологии АСФ, имеет ряд преимуществ перед традиционными методами решения многокритериальных задач.

1. Известные способы сведения векторного критерия к скалярному имеют ярко выраженную субъективную составляющую, проявляющуюся в выделении приоритетного показателя, введении коэффициентов важности, являющихся результатом экспертных оценок и т.п. Методология АСФ базируется на отношении суммарного «входа» к суммарному «выходу» по принципу коэффициента рентабельности, коэффициента полезного действия и т.п.; кроме того, создатели методологии предлагают подход, позволяющий избежать экспертного способа задания коэффициентов важности, определив их аналитически.

2. Рассчитываемые в моделях АСФ показатели носят наглядный экономический смысл, фактически иллюстрируя, каким образом необходимо сократить затраты или увеличить производительность, чтобы исследуемая система стала эффективной.

3. Аппарат АСФ позволяет определить границы множества производственных возможностей, не прибегая к моделированию производственных процессов.

Реализация предложенного подхода к сравнительной оценке авиационных систем позволит усовершенствовать и дополнить существующий научно-методический аппарат оптимизации их характеристик.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жеребин А.М., Зурабян Н.И. Модель боевых действий для оценки эффективности перспективного авиационного вооружения // Вестник МАИ. - 2009. - Т. 16. - № 4. - С. 8 – 13.

2. Шутенко Т.Н. Анализ среды функционирования логистической системы // Вестник Одесского Национального Морского Университета. - 2011. - № 32. - С. 195 – 203.

3. Щербак А.Д. Применение методологии анализа среды функционирования для оценки эффективности управления набором стратегических бизнес-единиц промышленных корпораций // Вестник Удмуртского Университета. - 2012. - Вып. 2. - С. 76 – 81.

4. Кривоножко В.Е., Лычев А.В. Анализ деятельности сложных социально-экономических систем. - М.: Макс-Пресс, 2010.

5. Царев В.В. Внутрифирменное планирование. - СПб: Издательский Дом Питер, 2002.

## APPROACH TO THE FORMATION OF METHODS FOR ESTIMATING THE EFFICIENCY OF AVIATION SYSTEMS BASED ON DATA ENVELOPMENT ANALYSIS METHODOLOGY

Zurabyan N.I.

The article is devoted to finding the approach directions of optimization of aircraft systems as a result of a comprehensive comparative evaluation of the system studied. The underlying of approach data envelopment analysis methodology (DEA) based on the methods of mathematical programming, theory of production functions and Pareto optimality principle is dealt with.

**Key words:** aircraft systems, data envelopment analysis, efficiency of aviation systems.

## Сведения об авторе

**Зурабян Николай Иванович**, 1983 г.р., окончил МАИ (2006), кандидат технических наук, старший научный сотрудник ФГУП ГосНИИАС, автор 15 научных работ, область научных интересов – оценка эффективности сложных технических систем, исследование операций.

УДК 621.396

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКТОРНОЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

С.В. БОЯРКИН, В.Л. КУЗНЕЦОВ, Т.В. ЛОССИЕВСКАЯ

В работе развивается новый подход к вычислению векторной диаграммы направленности параболической зеркальной антенны, основанный на представлении рефлектора как неплоского торца цилиндрического волновода и расчета его отражательных характеристик методом инвариантного погружения. В результате удается получить выражение для распределения векторного поля в апертуре антенны в многомодовом режиме возбуждения. Развиваемый подход можно интерпретировать как принципиально новый шаг в развитии апертурной теории антенн.

**Ключевые слова:** параболическая зеркальная антенна, апертурная теория, метод инвариантного погружения, векторная диаграмма направленности.

### Введение

В работах [1; 2] был предложен новый подход, позволивший вычислить матричный коэффициент отражения рефлектора параболической антенны. Он основан на представлении рефлектора как неплоского торца круглого волновода с радиусом, равным радиусу апертуры, т.е. как некоторой секции нерегулярного волновода. Для описания коэффициента отражения такой структуры было предложено использовать метод инвариантного погружения [3-5], хорошо зарекомендовавший себя при анализе излучения волн рупорными антеннами [6-8]. Сами рупоры при этом рассматривались как участки нерегулярного волновода – волновода, чьи поперечные геометрические размеры изменяются вдоль его оси. В каждом сечении нерегулярного волновода (в рассматриваемом случае – рефлектора) поле может быть представлено в виде суперпозиции собственных мод однородного волновода соответствующего сечения. В процессе распространения электромагнитного поля внутри нерегулярного волновода эти моды активно взаимодействуют между собой, формируя при этом отраженное поле. В результате коэффициент отражения рефлектора представим в виде бесконечной комплексной матрицы  $\hat{R} = \|R_{nm}\|$ , где  $n, m \in N$ , а  $R_{nm}$  – отношение комплексной амплитуды  $n$ -й отраженной моды к амплитуде  $m$ -й падающей моды.

Задание способа вычисления матричного коэффициента отражения рефлектора  $\hat{R}$  решает главную составляющую общей задачи нахождения векторной диаграммы направленности параболической зеркальной антенны. Для завершения всей схемы решения необходимо дополнительно задать поле, облучающее рефлектор, и связать излучаемые поля в апертуре антенны и в свободном пространстве. Этим вопросам посвящена настоящая статья.

### 1. Постановка задачи и основные приближения модели

Рассмотрим осесимметричную параболическую зеркальную антенну с фокусным расстоянием  $f$ , излучающую монохроматическое поле длиной волны  $\lambda$ . Матричный коэффициент отражения рефлектора антенны –  $\hat{R} = \|_{\alpha\beta} R_{nm}\|$  известен [1; 2]. Необходимо вычислить векторную диаграмму направленности антенны –  $\vec{F}(\theta, \varphi)$ .

При построении решения будем полагать, что диаметр раскрыва рефлектора  $D \gg \lambda$ . Облучатель антенны, как это часто полагается, будем учитывать лишь на этапе формирования поля, падающего на рефлектор. Эффектами, связанными с частичным затенением облучающим модулем апертуры антенны и соответствующими искажениями диаграммы направленности, будем пренебрегать.

## 2. Модель облучающего модуля и порождаемого им поля

Достаточно часто облучатель описывают некоторой конструкцией с заданной диаграммой направленности, т.е. вводят некоторую феноменологическую модель, не предполагающую электродинамического расчета взаимодействия поля с краями рефлектора. Таким подходом можно воспользоваться, например, в случае, когда диаметр раскрыва антенны значительно больше длины волны излучения, т.е. когда переизлучением краев апертуры антенны можно пренебречь. В этом случае поле, порождаемое облучателем в раскрыве антенны –  $\vec{E}^{inc}(\vec{\rho})$ , можно представить в виде разложения по модам круглого волновода, радиуса, равного радиусу раскрыва антенны, записав

$$\vec{E}^{inc}(\vec{\rho}) = \sum_n \left\{ a_n \cdot e \vec{\Phi}_n(\rho, \varphi; a) + b_n \cdot h \vec{\Phi}_n(\rho, \varphi; a) \right\}. \quad (1)$$

Здесь

$$a_n = \int_S (\vec{E}^{inc}(\vec{\rho}), e \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}; a)) d\vec{\rho}; \quad b_n = \int_S (\vec{E}^{inc}(\vec{\rho}), h \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}; a)) d\vec{\rho}, \quad (2)$$

а  $e \vec{\Phi}_n(\rho, \varphi; a)$  и  $h \vec{\Phi}_n(\rho, \varphi; a)$  – проекции полей  $n$ -й моды ТЕ- и ТН- типа соответственно, определяемые соотношениями [9]:

$$e \vec{\Phi}_n(\rho, \varphi; a) = -\frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{\chi_n^2 - 1}} \left\{ \frac{J_1(\chi_n \cdot \frac{\rho}{a})}{\rho \cdot J_1(\chi_n)} \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\rho - \frac{\chi_n \cdot J_1'(\chi_n \cdot \frac{\rho}{a})}{a \cdot J_1(\chi_n)} \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \right\}; \quad (3)$$

$$h \vec{\Phi}_n(\rho, \varphi; a) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{J_1'(\mu_n \cdot \frac{\rho}{a})}{a \cdot J_2(\mu_n)} \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\rho - \frac{J_1(\mu_n \cdot \frac{\rho}{a})}{\mu_n \cdot \rho \cdot J_2(\mu_n)} \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \right\}, \quad (4)$$

где  $\vec{e}_\rho$  и  $\vec{e}_\varphi$  – орты полярной системы координат.

Два вектор - столбца, составленных из коэффициентов (2) –  ${}_e G = \{a_1, a_2, \dots\}^T$  и  ${}_h G = \{b_1, b_2, \dots\}^T$ , определяют поле, создаваемое облучателем в апертуре рефлектора и записанное в ортонормированном базисе мод (3), (4). Если  ${}_e G$  и  ${}_h G$  известны, то, зная матричный коэффициент отражения рефлектора [1; 2], можно вычислить и  $\vec{E}^{rad}(\vec{\rho})$  – поле излучения антенны в ее апертуре

$$\vec{E}^{rad}(\vec{\rho}) = \sum_n \left\{ \sum_m ({}_{ee} R_{nm}) \cdot ({}_e G_m) \cdot e \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}; a) + \sum_m ({}_{he} R_{nm}) \cdot ({}_e G_m) \cdot h \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}; a) + \sum_m ({}_{hh} R_{nm}) \cdot ({}_h G_m) \cdot h \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}; a) \right\}. \quad (5)$$

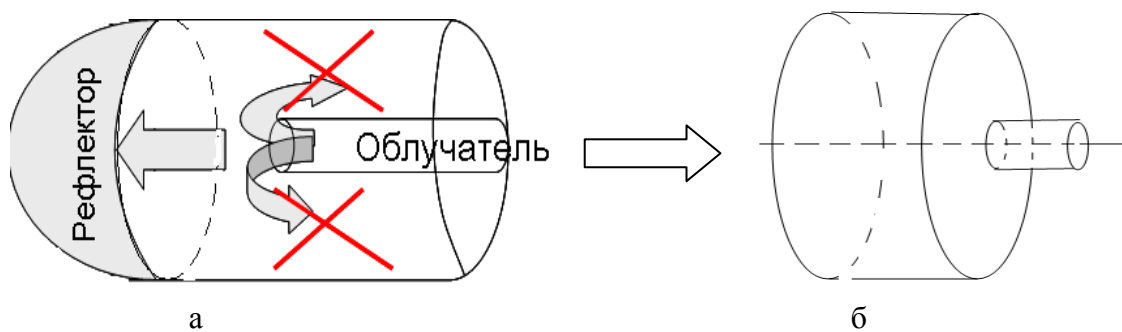
Первые две суммы в фигурных скобках в (5) описывают поля, порожденные волнами ТЕ - типа, падающими на рефлектор. При отражении от рефлектора они порождают также волны ТН - типа. Последняя сумма описывает трансформацию волн ТН - типа.

К сожалению, рассматриваемый подход встречает «технические» затруднения, связанные с вычислением интегралов (2), которые в общем случае могут быть рассчитаны только численными методами. Поэтому в этой работе будет использована другая, более простая модель облучателя, позволяющая свести результаты расчетов к решению системы линейных алгебраических уравнений.



Рассмотрим антенну с углом раскрытия, равным  $\pi/2$ . В этом случае облучатель оказывается расположенным в апертуре антенны. Если при этом применить искусственный прием с виртуальной (очень короткой) цилиндрической секцией, наращиваемой на рефлектор, то при расчете поля облучателя можно полагать, что он находится внутри цилиндрического волновода радиуса  $D/2$  – радиуса апертуры антенны. Теперь облучатель можно смоделировать концом круглого волновода малого диаметра, ось которого совпадает с осью симметрии рефлектора. Геометрия такой системы изображена на рис. 1а.

Поле в большом волноводе при этом делится на две части, основная его энергия направлена на рефлектор антенны, однако частично поле может затекать за облучатель в направлении свободного пространства. Этой частью излучения, формируемого облучателем, будем пренебрегать. Последнее допущение позволяет смоделировать систему как фланцевое сочленение двух соосных волноводов (рис. 1б). Описание поведения поля в такой системе можно достаточно просто осуществить, используя метод проекционного сшивания [9; 10].



**Рис. 1.** Моделирование излучения облучателя:

- а - первый шаг моделирования – излучение среза коаксиального волновода;  
б - второй шаг моделирования – переход к фланцевому сочленению волноводов

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда облучатель возбуждается волной ТЕ - типа. В этом случае на рефлектор со стороны облучателя падают волны ТЕ- и ТМ- типов. Условия гладкости поля (непрерывности как самого поля, так и его пространственной производной) в плоскости сочленения двух волноводов после достаточно громоздких, но идейно простых выкладок метода проекционного сшивания, приводят к следующей системе алгебраических уравнений для матричных коэффициентов прохождения -  $\hat{t}^+$  и отражения -  $\hat{r}^-$ :

$$\begin{aligned} {}_{ee} \hat{t}^+ &= {}_{ee} Q^T \cdot {}_{he} \hat{r}^- + {}_{ee} Q^T; & {}_{he} \hat{t}^+ &= {}_{he} Q^T \cdot {}_{ee} \hat{r}^- + {}_{hh} Q^T \cdot {}_{he} \hat{r}^- + {}_{he} Q^T; \\ {}_{he} \hat{r}^- &= -\hat{G}_1 \cdot {}_{hh} \hat{\xi}_a^- \cdot \hat{Q} \cdot {}_{hh} \hat{\xi}_b^+ \cdot [{}_{he} \hat{Q}^T \cdot {}_{ee} \hat{r}^- + {}_{he} \hat{Q}^T]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} {}_{ee} \hat{r}^- &= \hat{G}_2 \cdot [{}_{ee} \hat{I} \cdot {}_{ee} \hat{\xi}_a^- \cdot \hat{Q} \cdot {}_{ee} \hat{\xi}_b^+ \cdot \hat{Q}^T + {}_{ee} \hat{\xi}_a^- \cdot \hat{Q} \cdot {}_{hh} \hat{\xi}_b^+ \cdot \hat{Q}^T \cdot \hat{G}_1 \cdot {}_{hh} \hat{\xi}_a^- \cdot \hat{Q} \cdot {}_{hh} \hat{\xi}_b^+ \cdot \hat{Q}^T - \\ &- {}_{ee} \hat{\xi}_a^- \cdot \hat{Q} \cdot {}_{hh} \hat{\xi}_b^+ \cdot \hat{Q}^T], \end{aligned}$$

где

$${}_{\alpha\beta} Q_{nm}^{(a,b)} = \iint_{\Sigma} (\alpha \bar{\Phi}_n^a(\vec{\rho}), \beta \bar{\Phi}_m^b(\vec{\rho})) d\vec{\rho};$$

$$\xi_a^- = \text{diag}\{1/\kappa_1^a, 1/\kappa_2^a, 1/\kappa_2^a, \dots\}; \quad \xi_b^+ = \text{diag}\{\kappa_1^b, \kappa_2^b, \kappa_3^b, \dots\},$$

а

$$\hat{G}_1 = [{}_{hh} \hat{I} + {}_{hh} \xi_a^- \cdot \hat{Q} \cdot {}_{hh} \xi_b^+ \cdot \hat{Q}^T]^{-1}$$

$$\text{и} \quad \hat{G}_2 = \left[ \hat{I} + {}_{ee} \xi_a^- \cdot \left( {}_{ee} \hat{Q} \cdot {}_{ee} \xi_b^+ \cdot {}_{ee} \hat{Q}^T + {}_{eh} \hat{Q} \cdot {}_{hh} \xi_b^+ \cdot {}_{he} \hat{Q}^T \right) - \right. \\ \left. - {}_{ee} \xi_a^- \cdot {}_{eh} \hat{Q} \cdot {}_{hh} \xi_b^+ \cdot {}_{hh} \hat{Q}^T \cdot \hat{G}_1 \cdot {}_{hh} \xi_a^- \cdot {}_{hh} \hat{Q} \cdot {}_{hh} \xi_b^+ \cdot {}_{he} \hat{Q}^T \right]^{-1}.$$

Здесь необходимо сделать некоторые пояснения относительно размерности матриц в приведенных соотношениях. Если размерность матрицы  $\hat{R} = \left\| {}_{\alpha\beta} R_{nm} \right\|$ , описывающей коэффициент отражения рефлектора,  $- 2N \times 2N$ , где  $N$  - число мод, учитываемых при расчете рефлектора, а удвоение (индексы  $\alpha$  и  $\beta$ ) связано с учетом двух типов волн (ТЕ и ТН), то размерности матриц  ${}_{ee} \hat{t}^+$ ,  ${}_{he} \hat{t}^+$  и  ${}_{ee} \hat{r}^-$ ,  ${}_{he} \hat{r}^-$  будут  $N \times n$  и  $n \times n$ , соответственно. Здесь  $n$  – число учитываемых мод в подводящем волноводе рефлектора. Поскольку диаметр волновода облучателя  $- d \gg D$ , а описывать поля в большом и малом волноводах надо с одинаковой степенью детализации, то должно приближенно выполняться соотношение  $- N/n \cong D/d$ . Выбирая  $n$  так, чтобы поле в волноводе облучателя (вблизи среза) содержало, кроме одной распространяющейся, еще 2 неоднородные моды, то число мод, описывающих отражение рефлектора, будет  $N \cong 3D/d$ . Если теперь положить, например,  $D/d = 12$ , то число мод, падающих на рефлектор, будет равно 36. Из них 19 будут распространяющимися, а остальные – неоднородными. Такое число учитываемых неоднородных мод вполне достаточно для адекватного расчета рефлектора.

### 3. Матричный коэффициент прохождения для системы «облучатель-рефлектор» и поле в апертуре антенны

Полученные в предыдущем пункте выражения для коэффициентов прохождения облучателя  $- {}_{ee} \hat{t}^+$ ,  ${}_{he} \hat{t}^+$  для волн ТЕ - типа и  ${}_{hh} \hat{t}^+$  для волн ТН - типа, вычисляемого аналогично, можно записать в виде блочной матрицы  $\hat{T} = \begin{pmatrix} {}_{ee} \hat{t}^+ & 0 \\ {}_{he} \hat{t}^+ & {}_{hh} \hat{t}^+ \end{pmatrix}$  размерности  $2N \times 2n$ . Отметим, что равенство нулю недиагонального блочного элемента обусловлено тем, что волны ТН - типа порождают волны ТЕ - типа не могут. Если представить иницилирующее поле в волноводе облучателя в виде блочного столбца

$$\vec{E}_{irrad} = \left( ({}_e a_{1,e} a_{2,e} a_{3,e} \dots) {}^T ({}_h a_{1,h} a_{2,h} a_{3,h} \dots) {}^T \right) {}^T \quad (7)$$

в базисе собственных мод волновода ТЕ- и ТН- типов, то поле, падающее на рефлектор, представимо в виде  $\vec{E}_{inc} = \hat{T} \cdot \vec{E}_{irrad}$ . Тогда поле, излучаемое антенной, точнее, поле в ее апертуре в базисе собственных мод волновода с диаметром, равным диаметру раскрыва антенны, представимо в виде

$$\vec{E}_{AP} = \hat{R} \cdot \hat{T} \cdot \vec{E}_{irrad}, \quad (8)$$

где  $\hat{R}$  – блочная матрица коэффициента отражения рефлектора  $\begin{pmatrix} {}_{ee} \hat{R} & 0 \\ {}_{he} \hat{R} & {}_{hh} \hat{R} \end{pmatrix}$ , вид блочных элементов которой получен в работах [1; 2]. Если необходимо записать это поле в обычном представлении, то достаточно  $\vec{E}_{AP}$  домножить слева на блочную строку вида

$$\vec{\Phi}(\vec{\rho}) = \left( ({}_e \vec{\Phi}_1, {}_e \vec{\Phi}_2, {}_e \vec{\Phi}_3, \dots), ({}_h \vec{\Phi}_1, {}_h \vec{\Phi}_2, {}_h \vec{\Phi}_3, \dots) \right),$$

где элементы  ${}_a \vec{\Phi}_n$  определены соотношениями (3), (4),  $\vec{\rho} = (\rho, \varphi)$  – радиус-вектор точки в апертуре антенны. То есть

$$\vec{E}_{AP}(\vec{\rho}) = \vec{\Phi}(\vec{\rho}) \cdot \hat{R} \cdot \hat{T} \cdot \vec{E}_{irrad}. \quad (9)$$

Матричный коэффициент  $\hat{R} \cdot \hat{T}$  в (9) определяет коэффициент прохождения системы облучатель – рефлектор.

Выражение (9) позволяет вычислить поле в апертуре при произвольном виде возбуждения облучателя (7), т.е. позволяет описывать многомодовый режим возбуждения.

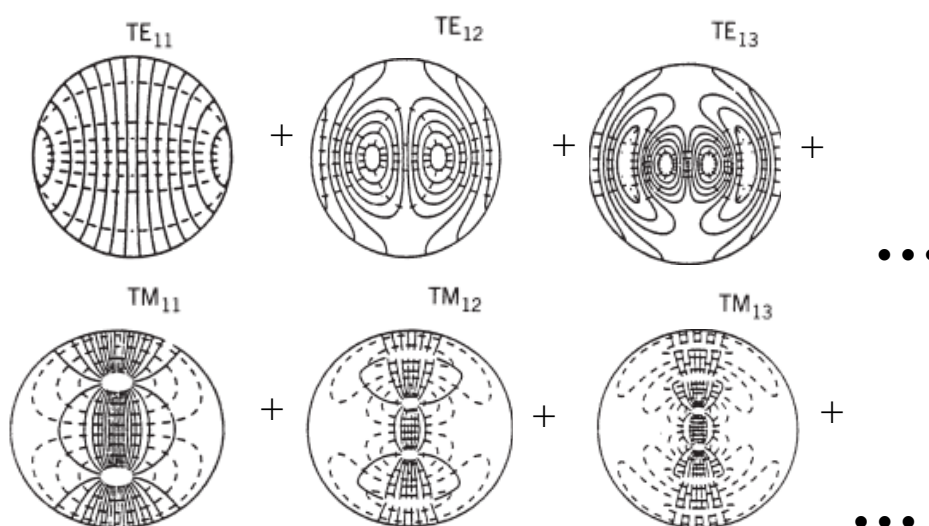
Численно нами был рассмотрен случай возбуждения облучателя первой модой ТЕ - типа. Это соответствует тому, что  $\vec{E}_{irrad}$  в (7) представим блочным столбцом  $\left( (1,0,0,\dots)^T (0,0,0,\dots)^T \right)^T$ . В этом случае поле в апертуре в соответствии с (9) задается соотношением

$$\vec{E}_{AP}(\vec{\rho}) = A_1 \cdot_e \vec{\Phi}_1(\vec{\rho}) + A_2 \cdot_e \vec{\Phi}_2(\vec{\rho}) + A_3 \cdot_e \vec{\Phi}_3(\vec{\rho}) + \dots + B_1 \cdot_h \vec{\Phi}_1(\vec{\rho}) + B_2 \cdot_h \vec{\Phi}_2(\vec{\rho}) + B_3 \cdot_h \vec{\Phi}_3(\vec{\rho}) + \dots, \quad (10)$$

где  $A_1 = -0.359 + 0.424 \cdot i$ ,  $A_2 = 0.288 - 0.332 \cdot i$ ,  $A_3 = -0.117 + 0.197 \cdot i$ , ...

$$B_1 = 0,034 - 0,026 \cdot i, \quad B_2 = 0,03 + 0,006 \cdot i, \quad B_3 = 0,021 - 0,002 \cdot i, \quad \dots$$

Вид поля в апертуре (10) можно наглядно изобразить, представив его в виде суперпозиции структур поля различных мод, взятых с соответствующими коэффициентами (рис. 2).



**Рис. 2.** Компоненты структуры поля в апертуре параболической антенны, суммируемые с весами  $A_n$  и  $B_n$

Соотношение (10) вместе с рассчитанными коэффициентами  $A_n$  и  $B_n$  и графическими изображениями структуры поля различных мод (рис. 2) позволяют оценить степень аппроксимации поля в апертуре антенны, используемую в стандартной апертурной теории [11; 12].

#### 4. Расчет векторной диаграммы направленности параболической зеркальной антенны

Теперь, когда поле в апертуре известно, можно перейти к вычислению векторной диаграммы направленности антенны. Точное решение задачи об излучении открытого конца цилиндрического волновода получено Л.А. Вайнштейном [13]. Фактически с учетом виртуальной секции, наращенной на рефлектор, и соотношения (10) решение Вайнштейна дает возможность точно вычислить векторную диаграмму направленности параболической антенны. В работе [14] эти формулы Вайнштейна для поля в дальней зоне приведены к виду, удобному для проведения численных расчетов. Здесь, однако, мы воспользуемся более простым приближенным приемом, основанном на том, что диаметр используемой антенны –  $D$  значительно больше длины волны излучения  $\lambda$ . В этом случае ролью краевых токов можно пренебречь, поскольку их поле влияет на поле в апертуре в относительно узкой области – «полосе» шириной порядка длины волны.

Это приближение аналогично гипотезе Кирхгофа в теории дифракции света на щели. Тогда векторная диаграмма направленности антенны по полю находится простым разложением  $\vec{E}_{AP}(\vec{\rho})$  – поля в апертуре в угловой спектр.

Вычислим  $\vec{F}(\theta, \varphi) = \vec{F}(\vec{k})$ , где  $\vec{k}$  – волновой вектор, направленный под углами  $\theta, \varphi$  к внешней нормали к апертуре антенны. Далее нам будет удобнее оперировать с вектором  $\vec{q}$  – проекцией волнового вектора  $\vec{k}$  на плоскость раскрыва антенны –  $\vec{k} = (\vec{q}, \sqrt{k^2 - q^2})$ , поэтому вместо  $\vec{F}(\vec{k})$  будем писать  $\vec{F}(\vec{q})$ .

Векторную диаграмму направленности антенны  $\vec{F}(\vec{q})$  будем представлять в базисе горизонтально и вертикально поляризованных плоских волн в системе, связанной с антенной. Поле горизонтально поляризованной плоской волны, характеризуемое вектором  $\vec{q}$ , в плоскости апертуры может быть записано в виде

$${}_H\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q}) = \left( \vec{i} \frac{q_y}{q} - \vec{j} \frac{q_x}{q} \right) \cdot \exp\{-i\vec{q}\vec{\rho}\}, \quad (11)$$

где  $q_x$  и  $q_y$  – проекции вектора  $\vec{q}$  на оси ОХ (орт  $\vec{i}$ ) и ОУ (орт  $\vec{j}$ ), лежащие в плоскости апертуры антенны. Аналогичное выражение может быть записано и для поля плоской вертикально поляризованной волны

$${}_V\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q}) = \left( \vec{i} \frac{q_x}{q} + \vec{j} \frac{q_y}{q} \right) \cdot \exp\{-i\vec{q}\vec{\rho}\}. \quad (12)$$

Теперь диаграмма направленности в базисе горизонтально и вертикально поляризованных волн может быть представлена в виде

$$\vec{F}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \int_S (\vec{E}(\vec{\rho}), {}_H\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q})) d\vec{\rho} \\ \int_S (\vec{E}(\vec{\rho}), {}_V\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q})) d\vec{\rho} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $\vec{E}(\vec{\rho})$  – поле в апертуре антенны, определяемое соотношением (9), а интегрирование ведется по  $S$  – поверхности апертуры.

После подстановки в (13) выражения для поля  $\vec{E}(\vec{\rho})$  из (9) или, в частном случае, (10), интегралы (13), определяющие горизонтальную и вертикальную компоненты диаграммы направленности антенны, сводятся к известным интегралам, приведенным в [15]:

$${}_H C_n(\vec{q}) = \int_S (\vec{e} \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}), {}_H\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q})) d\vec{\rho} = \frac{\sqrt{2\pi} D \chi_n^2}{[(qD/2)^2 - \chi_n^2] \cdot \sqrt{\chi_n^2 - 1}} J_1'(qD/2) \cdot \cos \varphi_1; \quad (14)$$

$${}_H D_n(\vec{q}) = \int_S (\vec{h} \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}), {}_H\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q})) d\vec{\rho} = -\frac{4\sqrt{2\pi}}{qD\mu_n} J_1(qD/2) \cos \varphi_1; \quad (15)$$

$${}_V C_n(\vec{q}) = \int_S (\vec{e} \vec{\Phi}_n(\vec{\rho}), {}_V\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q})) d\vec{\rho} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{q\sqrt{\chi_n^2 - 1}} J_1(qD/2) \cdot \sin \varphi_1; \quad (16)$$

$${}_V D_n(\vec{q}) = \int_S (\vec{h} \vec{\Phi}_1(\vec{\rho}), {}_V\vec{\Psi}(\vec{\rho} | \vec{q})) d\vec{\rho} = -\frac{\sqrt{2\pi} D \mu_n}{[(qD/2)^2 - \mu_n^2]} J_1'(qD/2) \sin \varphi_1, \quad (17)$$

где  $\chi_n$  и  $\mu_n$  – корни уравнений  $J'(x)=0$  и  $J(x)=0$ , соответственно, а  $\varphi_1 = \arctg \frac{q_y}{q_x}$ .

Подставляя (10) и (14) – (17) в (13), получаем следующее выражение для векторной диаграммы направленности антенны в поляризованном базисе вертикально и горизонтально поляризованных волн

$$\vec{F}_1(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \sum_n \{A_n \cdot ({}_H C_n(\vec{q})) + B_n \cdot ({}_H D_n(\vec{q}))\} \\ \sum_n \{A_n \cdot ({}_V C_n(\vec{q})) + B_n \cdot ({}_V D_n(\vec{q}))\} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Отметим, что вычисленные выше коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  были найдены в предположении, что облучатель возбуждается одной модой –  $TE_{11}$  и диаграмма направленности (18) вычислена в одномодовом режиме. Это обстоятельство отражает индекс 1 у  $\vec{F}_1(\vec{q})$ . Нетрудно видеть, что, выбирая в качестве поля в облучателе  $\vec{E}_{irrad}$  (формула (7)) другой базисный столбец, можно получить диаграмму направленности для любого другого, вообще говоря, многомодового режима возбуждения.

### Заключение

В работе развивается оригинальный подход к вычислению векторной диаграммы направленности параболической зеркальной антенны, основанный на принципиально новом способе расчета отражательных характеристик рефлектора антенны. В основе предлагаемого подхода лежит использование метода погружения и представление рефлектора как неплоского торца (нерегулярной секции) цилиндрического волновода. В результате удается получить выражение для распределения векторного поля в апертуре антенны, в том числе, и в многомодовом режиме возбуждения. Развиваемый подход можно интерпретировать как принципиально новый шаг в развитии апертурной теории антенн.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бояркин С.В., Кузнецов В.Л. Метод инвариантного погружения в теории зеркальных антенн // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 195. - С. 29-36.
2. Boyarkin S.V., Kuznetsov V.L. The Imbedding Method in the Internal Electrodynamics Problem of Parabolic Reflector Antennas. В сборнике: *Progress in Electromagnetics Research Symposium*, Сер. "PIERS 2013 Stockholm - Progress in Electromagnetics Research Symposium, Proceedings", 2013. - С. 144-148.
3. Амбарцумян В.А. Об одном случае задачи о рассеивающей и поглощающей среде конечной оптической толщины // Известия Академии наук Армении. - 1944. - № 1-2.
4. Barbanenkov Yu.N., Kouznetsov V.L., Barbanenkov M.Yu. Transfer relations for electro- magnetic wave scattering from periodic dielectric one-dimension interface: TE polarization, *Progress in Electro- magnetic Research: PIER*, Vol. 24, 1999.
5. Barabanenkov Yu.N., Barabanenkov M.Yu. Energy Invariants to Composition Rules for Scattering and Transfer Matrices of Propagating and Evanescent Waves in Dielectric Structures // *PIERS proceedings*. Cambridge, 2006.
6. Кузнецов В.Л., Скобелев С.П., Филонов П.В. Модификация метода погружения для анализа решетки рупоров, возбуждаемых ТЕ-волнами // *Радиотехника*. - 2010. - № 4.
7. Кузнецов В.Л., Филонов П.В. Уравнение погружения и малый параметр в задаче о нерегулярном волноводе // *Радиотехника и электроника*. - 2011. - Т. 56. - № 9.
8. Кузнецов В.Л., Филонов П.В. Уравнение погружения для обобщенной матрицы рассеяния в теории нерегулярных волноводов // *Научный Вестник МГТУ ГА*. - 2010. - № 157. - С. 5-11.
9. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. - М.: МИР, 1977.
10. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. - М.: МИР, 1974.

11. Антенны и устройства СВЧ // Расчёт и проектирование антенных решёток и их излучающих элементов / под ред. Д.И. Воскресенского. - М.: Советское радио, 1972.
12. Silver S. ed., Microwave Antenna Theory and Design, Peter Peregrinus, Ltd, London, 1984.
13. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. - М.: Советское радио, 1966.
14. Скобелев С.П., Виленко И.Л., Сусеров Ю.А. и др. Комбинированный подход к анализу осесимметричных рупорных антенн // Радиотехника. - 2007. - № 4. - С. 82.
15. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. - М.: МИР, 1974.

## MODELING OF A VECTOR RADIATION PATTERN OF PARABOLIC REFLECTOR ANTENNA

Boyarkin S.V., Kuznetsov V.L., Lossiyevskaya T.V.

A new approach to a vector radiation pattern of parabolic reflector antenna calculation based on its reflector consideration as a no-planar end of circular waveguide and reflection coefficient calculation by invariant imbedding method, is developed. As a result, an expression for the distribution of the vector field at antenna aperture in multimode regime of excitation is obtained. The developed approach may be interpreted as a basic new step in the development of aperture antenna theory.

**Key words:** parabolic reflector antenna, invariant imbedding method, aperture-field method, vector radiation pattern.

### Сведения об авторах

**Бояркин Сергей Валерьевич**, 1987 г.р., окончил МГТУ ГА (2010), аспирант МГТУ ГА, автор 4 научных работ, область научных интересов – математическое моделирование электродинамических процессов, дистанционное зондирование, радиолокационные системы.

**Кузнецов Валерий Леонидович**, 1949 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики МГТУ ГА, автор более 100 научных работ, область научных интересов – методы математического моделирования в задачах распространения излучения в пространственно неоднородных случайных и периодических средах, УВД, безопасность полетов.

**Лоссиевская Татьяна Владимировна**, окончила МГУ им. М.В. Ломоносова (1965), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ ГА, автор более 30 научных работ, область научных интересов – методы решения уравнений математической физики, моделирование электродинамических систем.

УДК 519.676

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФфуЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА<sup>1</sup>

К.А. РЫБАКОВ

**Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Пантелеевым А.В.**

В статье сформулирован новый подход к решению задачи оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Предполагается, что объект наблюдения и измерительная система описываются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, причем в уравнении объекта наблюдения присутствует пуассоновская составляющая, которая позволяет моделировать импульсные случайные возмущения и помехи, действующие на систему.

Показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут получать случайные приращения, разветвляться и обрываться в случайные моменты времени.

**Ключевые слова:** апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, скачкообразный процесс, стохастическая система, уравнение Дункана-Мортенсена-Закаи, уравнение Стратоновича-Кушнера.

### Введение

В настоящей работе развивается подход к решению задачи оптимальной нелинейной фильтрации как задачи анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. Распределение времени обрывов и ветвлений в этой системе зависит от текущих измерений оцениваемого вектора состояния исходной системы.

Напомним, что в [14; 15; 18] приведены основные соотношения для решения задачи анализа вспомогательной стохастической системы и приведены пошаговые алгоритмы моделирования ее траекторий методом Монте-Карло с последующим получением оценки вектора состояния исходной системы в приложении к стохастическим системам диффузионного типа. Этот подход основан на общности структуры уравнения оптимальной нелинейной фильтрации для ненормированной апостериорной плотности вероятности (уравнение Дункана-Мортенсена-Закаи или просто уравнение Закаи) при фиксированных измерениях и обобщенного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, включающего дополнительные слагаемые – функции поглощения и функции восстановления [4; 11; 19]. Функция поглощения позволяет учитывать обрывы траекторий случайного процесса, которые образуют пуассоновский поток событий с заданной интенсивностью, а функция восстановления отвечает за появление новых траекторий, также образующее пуассоновский поток событий. Различное задание этих функций позволяет рассматривать сложное поведение стохастических систем: обрывы траекторий, разрывы траекторий со связанными и несвязанными условиями восстановления, ветвление траекторий. Они же позволяют описывать процессы в системах со случайной структурой [1; 4; 6].

Апробация разработанных в [14; 18] алгоритмов проводилась на модельных примерах: для линейно-гауссовского случая эти алгоритмы обеспечивают практически потраекторное совпадение с оптимальной оценкой, получаемой при применении фильтра Калмана-Бьюси. Погрешности обусловлены тем, что и анализ вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий, и фильтрация Калмана-Бьюси проводились приближенно с использованием методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений невысокой

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00323-а).

точности [11] и моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий [1; 5; 10]. Кроме того, апробация проводилась на моделях, заданных нелинейными уравнениями [18].

Далее рассматривается более сложный класс стохастических систем – системы диффузионно-скачкообразного типа, а именно предполагается, что объект наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей. Такие уравнения позволяют описывать как технические, так и экономические модели и процессы, учитывающие случайные воздействия, в том числе импульсные. Основные приложения для подобных систем – задачи радиотехники, навигации, управление движущимися объектами, идентификация параметров моделей в финансовой математике [2; 9; 21; 24]. Теория оптимальной нелинейной фильтрации продолжает активно развиваться [13; 17; 22; 23; 25], однако системы диффузионно-скачкообразного типа рассматриваются гораздо реже, нежели системы диффузионного типа.

В работе показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут получать случайные приращения, разветвляться и обрываться в случайные моменты времени. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи и характеризуются заданными параметрами (интенсивностью и величиной скачков), а обрывы и ветвления должны моделироваться на основе текущих измерений оцениваемого вектора состояния. Интенсивности обрывов и ветвлений выражаются через функции, задающие модель измерительной системы, и текущие измерения.

### 1. Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [2; 3; 16]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X \in R^n$  – вектор состояния;  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_1]$  – отрезок времени функционирования системы;  $f(t, x): T \times R^n \rightarrow R^n$  – вектор-функция  $n \times 1$ ,  $\sigma(t, x): T \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$  – матричная функция  $n \times s$ ;  $W(t)$  –  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния  $X_0$ ;  $Q(t)$  – общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

В правой части последнего равенства  $P(t)$  – пуассоновский процесс;  $\Delta_k$  – независимые случайные векторы из  $R^n$ , распределение которых задано плотностью вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta)$ , т.е. вектор состояния  $X$  получает случайные приращения в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots \in T$ , образующие пуассоновский поток событий

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k. \quad (2)$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta | x)$ , характеризующая распределение  $\Delta_k$  при условии  $X(\tau_k - 0) = x$ . В частном случае  $\psi(\tau_k, \Delta | x) = \psi(\tau_k, \Delta)$ . Наряду с  $\psi(\tau_k, \Delta | x)$  введем плотность вероятности  $\eta(\tau_k, x | \xi)$ , характеризующую распределение  $X(\tau_k)$  при условии  $X(\tau_k - 0) = \xi$ .

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , а также пуассоновский процесс  $P(t)$  определяются интенсивностью  $\lambda(t, x)$ , т.е. условная вероятность события (2) при  $X(t) = x$  на промежутке  $[t, t + \Delta t]$  определяется равенством



$$P(t, t + \Delta t) = \Pr(P(t + \Delta t) - P(t) = 1 | X(t) = x) = \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t). \quad (3)$$

Пуассоновская составляющая  $dQ(t)$  может быть записана в других формах [3; 7; 8; 19; 24]. Варианты определений решения уравнений типа (1) и возможные условия на его коэффициенты, достаточные для существования решения, изложены в [7].

Модель измерительной системы может быть представлена в одной из следующих форм:

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t) \quad (4)$$

или

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (5)$$

где  $Y, Z \in R^m$  – векторы измерений;  $c(t, x): T \times R^n \rightarrow R^m$  – вектор-функция  $m \times 1$ ,  $\zeta(t): T \rightarrow R^{m \times d}$  – матричная функция  $m \times d$ ;  $V(t)$  –  $d$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от  $W(t)$  и от начального состояния  $X_0$ ,  $N(t)$  –  $d$ -мерный стандартный гауссовский белый шум, не зависящий от  $X_0$ .

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки  $\hat{X}(t)$  по результатам измерений  $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$  или  $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ . Дальнейшие выкладки удобнее проводить для измерений  $Z_0^t$ , поэтому измерения  $Y_0^t$  использовать не будем. Задачу можно рассматривать шире: как нахождение апостериорной плотности вероятности  $p(t, x | Z_0^t)$  вектора состояния  $X$ .

При использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценивания имеем [19]

$$\hat{X}(t) = M[X(t) | Z_0^t] = \int_{R^n} xp(t, x | Z_0^t)dx. \quad (6)$$

## 2. Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Апостериорная плотность вероятности  $p(t, x | Z_0^t)$  удовлетворяет уравнению Стратоновича–Кушнера. В форме Ито это уравнение имеет вид [12; 19]

$$\frac{d_0 p(t, x | Z_0^t)}{dt} = Kp(t, x | Z_0^t) + F_{Z(t)}p(t, x | Z_0^t), \quad p(t_0, x) = \varphi_0(x). \quad (7)$$

Здесь операторы  $K$  и  $F_{Z(t)}$  определяются выражениями:

$$Kp(t, x | Z_0^t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)p(t, x | Z_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)p(t, x | Z_0^t)] - \lambda(t, x)p(t, x | Z_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)p(t, \xi | Z_0^t)d\xi; \quad (8)$$

$$F_{Z(t)}p(t, x | Z_0^t) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m (c_k(t, x) - \langle c_k(t, x) \rangle) q_{kr}(t) (Z_r(t) - \langle c_r(t, x) \rangle) p(t, x | Z_0^t),$$

где

$$\langle c_k(t, x) \rangle = \int_{R^n} c_k(t, x)p(t, x | Z_0^t)dx \quad (k = 1, 2, \dots, m);$$

$$g(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x); \quad q(t) = (\zeta(t)\zeta^T(t))^{-1}.$$

Сделаем замену апостериорной плотности вероятности [19] в уравнении (7):

$$p(t, x | Z_0^t) = \gamma(t)\varphi(t, x | Z_0^t); \quad \gamma^{-1}(t) = \int_{R^n} \varphi(t, x | Z_0^t)dx; \quad \gamma(0) = 1,$$

тогда

$$\frac{d_0\varphi(t, x | Z_0^t)}{dt} = K\varphi(t, x | Z_0^t) + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x)q_{kr}(t)Z_r(t)\varphi(t, x | Z_0^t); \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x). \quad (9)$$

Запишем уравнение для ненормированной апостериорной плотности вероятности  $\varphi(t, x | Z_0^t)$ , которое называется уравнением Дункана–Мортенсена–Закаи, в симметризованной форме Стратоновича. Воспользуемся видом соответствующего уравнения для систем диффузионного типа (без скачкообразной компоненты [11]), т.е. при условии  $K = A$

$$A\varphi(t, x | Z_0^t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x | Z_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)].$$

Переход от формы Ито к форме Стратоновича для уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи в случае систем диффузионно-скачкообразного типа осуществляется по тем же правилам, что и для систем диффузионного типа, поэтому [11]:

$$\frac{d_{1/2}\varphi(t, x | Z_0^t)}{dt} = K\varphi(t, x | Z_0^t) + \mu(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Z_0^t); \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (10)$$

где  $K$  – линейный оператор, определенный соотношением (8), а  $\mu(t, x, z)$  задается выражением

$$\mu(t, x, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x)q_{kr}(t) \left( z_r - \frac{c_r(t, x)}{2} \right).$$

Отметим, что уравнения (9) и (10) – линейные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных.

### 3. Сведение к задаче анализа систем с обрывами и ветвлениями траекторий

Далее будем представлять уравнение (10) следующим образом (как детерминированное уравнение при фиксированных измерениях  $Z_0^t$ ):

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Z_0^t)}{\partial t} = K\varphi(t, x | Z_0^t) - \mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Z_0^t) + \mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Z_0^t)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x | Z_0^t)}{\partial t} = & A\varphi(t, x | Z_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Z_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Z_0^t)d\xi - \\ & - \mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Z_0^t) + \mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Z_0^t), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\mu^-(t, x, z) = \begin{cases} -\mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) < 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \geq 0, \end{cases} \quad \mu^+(t, x, z) = \begin{cases} \mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) > 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \leq 0. \end{cases}$$

Уравнение (11) по структуре соответствует обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова, при этом функции  $\mu^-(t, X(t), Z(t))$  и  $\mu^+(t, X(t), Z(t))$  – интенсивности обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса  $X(t)$ , а произведения  $\mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Z_0^t)$  и  $\mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Z_0^t)$  – функции поглощения и восстановления соответственно [4; 6]. Следовательно, условные вероятности обрывов и ветвлений при  $X(t) = x$  и  $Z(t) = z$  на промежутке  $[t, t + \Delta t]$  определяются равенствами:

$$P^-(t, t + \Delta t) = \mu^-(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t); \quad P^+(t, t + \Delta t) = \mu^+(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t).$$

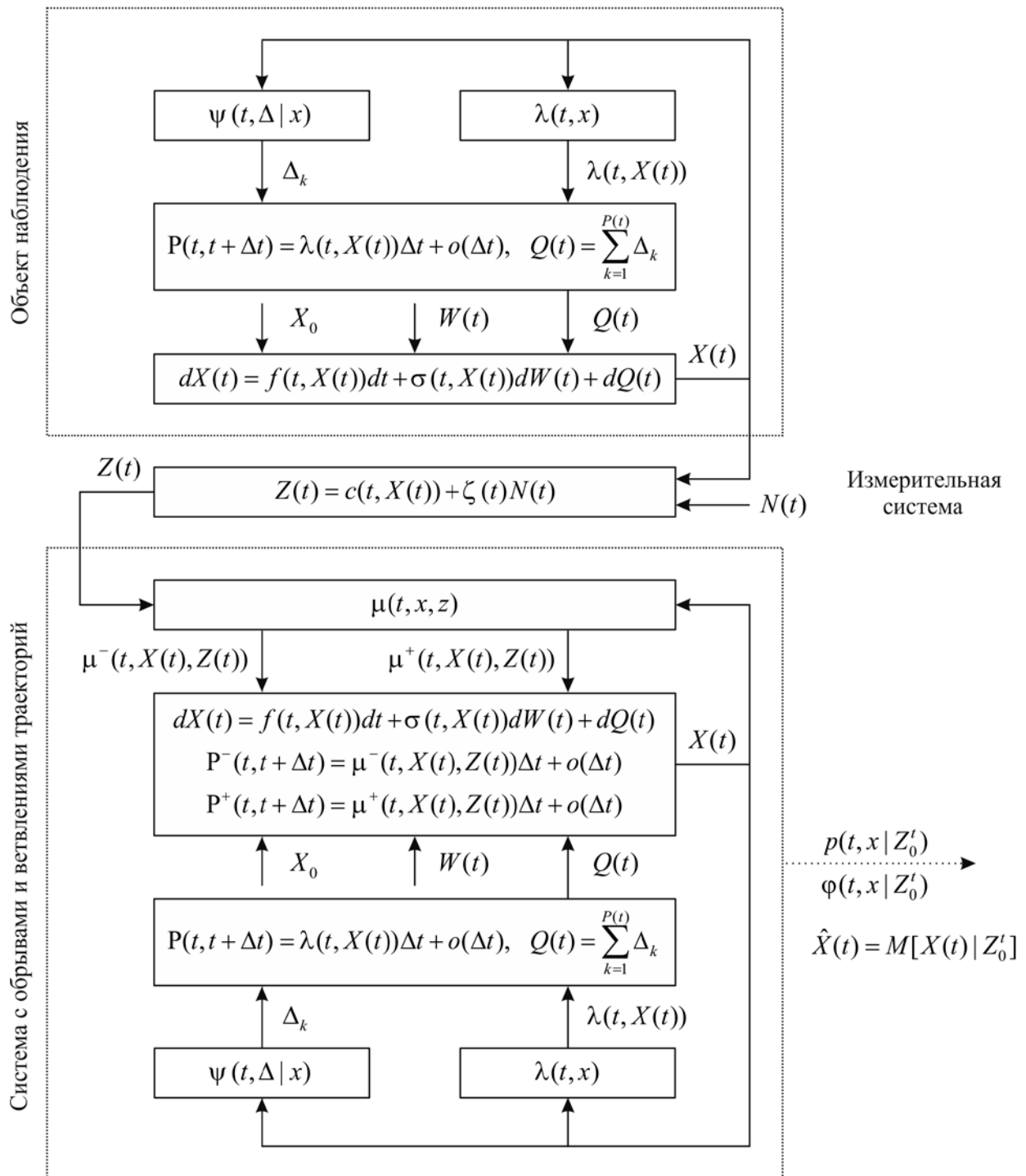


Рис. 1. Структурная схема системы наблюдения и оптимального фильтра

Таким образом, функции  $p(t, x | Z_0^t)$  и  $\varphi(t, x | Z_0^t)$  характеризуют распределение вектора  $X$  – состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), с учетом того, что траектории случайного процесса  $X(t)$  получают случайные приращения, ветвятся или обрываются. Все перечисленные события образуют неоднородные пуассоновские потоки с известными интенсивностями, при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви. Для удобства моделирования, как и в случае стохастических систем диффузионного типа [14; 15; 18], каждая из новых ветвей должна рассматриваться как самостоятельная траектория.

Для приближенного решения задачи оптимальной фильтрации необходимо моделировать траектории вспомогательной стохастической системы, отличающейся от исходной модели наблюдения (1) наличием обрывов и ветвлений траекторий. По ансамблю траекторий, полученному в результате применения методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий [1-3; 5; 8; 10; 11], можно оценить как нормированную апостериорную плотность вероятности  $p(t, x | Z_0^t)$ , так и ненормированную  $\varphi(t, x | Z_0^t)$ , получив таким образом приближенные решения уравнений Стратоновича-Кушнера и Дункана-Мортенсена-Закаи. Оптимальная оценка  $\hat{X}(t)$  может быть найдена и по апостериорной плотности вероятности, и с помощью усреднения по ансамблю траекторий. Структурная схема системы наблюдения и оптимального фильтра приведена на рис. 1.

Чтобы сформировать алгоритм решения задачи оптимальной фильтрации, можно воспользоваться результатами работ [14; 15] и алгоритмами численного решения стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей [1-3; 8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Аверина Т.А.** Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. - 2013. - Т. 16. - № 2. - С. 97–105.
2. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники. - 2013. - № 1. [Электронный ресурс]. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/contents.html>.
3. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2013. - № 3. - С. 85–116. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
4. **Артемьев В.М.** Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. - Минск: Вышэйшая школа, 1979.
5. **Ермаков С.М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы. - М.: Наука, 1971.
6. **Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.** Анализ систем случайной структуры. - М.: Физматлит, 1993.
7. **Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.** Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Наука, 1985.
8. **Кузнецов Д.Ф.** Новые представления явных одношаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2001. - Т. 41. - № 6. - С. 922–937.
9. Марковская теория оценивания в радиотехнике / под ред. М.С. Ярлыкова. - М.: Радиотехника, 2004.
10. **Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. - 2009. - Т. 428. - № 2. - С. 163–165.
11. **Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортакровский А.С.** Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. - М.: Вузовская книга, 2008.
12. **Параев Ю.И.** Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. - М.: Советское радио, 1976.
13. **Руденко Е.А.** Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2013. - № 6. - С. 25–51.
14. **Рыбаков К.А.** Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2012. - № 3. - С. 91–110. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
15. **Рыбаков К.А.** Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. - 2013. - № 3. - С. 15–20.
16. **Рыбаков К.А.** Вероятностный анализ стохастических систем с пуассоновской составляющей // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 194. - С. 55–62.
17. **Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана Мортенсена Закаи спектральным методом // Системи обробки інформації. - 2013. - Вып. 7 (114). - С. 139–143.

18. Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сибирский журнал вычислительной математики. - 2013. - Т. 16. - № 4. - С. 377–391.
19. Сеницын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. - М.: Логос, 2007.
20. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов / под ред. М.Н. Красильщикова, Г.Г. Себрякова. - М.: Физматлит, 2009.
21. Шахтарин Б.И., Микаэльян С.В. Траекторный фильтр в системе координат измерителя для системы слежения за целями по угломерным данным // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 193. - С. 21–25.
22. Candy J.V. Bayesian Signal Processing: Classical, Modern and Particle Filtering Methods. - John Wiley & Sons, 2009.
23. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // IEEE Transactions on Automatic Control. - 2013. V. 58. № 10. - P. 2563–2578.
24. Situ R. Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications. - Springer, 2005.
25. Terejanu G., Singla P., Singh T., Scott P.D. Adaptive Gaussian sum filter for nonlinear Bayesian estimation // IEEE Transactions on Automatic Control. - 2011. V. 56. № 9. - P. 2151–2156.

## APPROXIMATE FILTER FOR JUMP-DIFFUSION MODELS

Rybakov K.A.

A new approach to the optimal filtering problem for jump-diffusion models is considered in this paper. This approach is based on the statistical modeling method (Monte Carlo method). It is assumed that the observation object and measurement system are described by Itô stochastic differential equations, the observation object equation has compound Poisson component, which allows simulating impulse noises and perturbations for control system.

These results have shown that the optimal filtering problem for jump-diffusion models can be solved as an analysis problem for the special stochastic system with jumps, branching and terminating trajectories.

**Key words:** branching processes, conditional density, Duncan-Mortensen-Zakai equation, jump-diffusion, Kushner-Stratonovich equation, Monte Carlo method, optimal filtering problem, stochastic system.

### Сведения об авторе

**Рыбаков Константин Александрович**, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики МАИ, автор 100 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления, методы моделирования систем управления.

УДК 519.92

## МЕТОД СОПОСТАВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ЭТАЛОНАМИ КАК МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОДВИЖНЫХ НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ

**Б.В. КАЗБЕКОВ, Н.А. МАКСИМОВ, А.В. ШАРОНОВ**

Статья посвящена вопросу идентификации подвижных наземных объектов с борта беспилотного летательного аппарата. Показана возможность реализации алгоритма идентификации объектов в режиме реального времени путем сопоставления рассматриваемого изображения объекта и набора эталонных изображений объектов рассматриваемых классов. Приводятся достоинства разработанной модификации и результаты экспериментов.

**Ключевые слова:** идентификация, распознавание объектов, сопоставление изображений.

### Введение

Вопросам распознавания изображений и объектов, находящихся на них, посвящено достаточно много работ, и данная область привлекает внимание многих исследователей и разработчиков уже более полувека, но до сих пор задача распознавания далека от полного решения. Существует достаточно большое количество частных методов и алгоритмов, позволяющих решать те или иные задачи распознавания. Их объединяют общие принципы и подходы по предобработке изображений и различают последующие операции, выполняемые в зависимости от содержимого изображений и конкретных задач распознавания.

Под распознаванием принято понимать выделение необходимой интересующей информации из изображения, это может быть определение рельефа местности, поиск определенного объекта на самом изображении: люди, автомобили, различные предметы, дорожные знаки и прочее, определение расстояний между объектами или траекторий их движения.

Одной из наиболее общих задач распознавания является задача идентификации объектов, находящихся на изображении. Если заранее известно, что именно является объектом интереса и заданы его описания (изображения с разных ракурсов съемки, заданы геометрические размеры и другие параметры объекта), то задача распознавания называется частной и сводится к задаче сопоставления имеющихся описаний с поступающими данными, и в случае совпадения объект считается распознанным. Но в действительности априорно неизвестно, какой именно объект может присутствовать на изображении, а известно, что объект может являться объектом определенного класса. Такие задачи принято называть общими задачами распознавания и их можно сформулировать следующим образом: необходимо распознать объект с точностью до класса, т.е. отнести рассматриваемый объект к одному из перечисленных классов или сделать вывод о том, что данный объект не принадлежит ни к одному из них.

В статье рассматривается метод идентификации подвижных наземных объектов (ПНО) по анализу видеопотока, формируемого бортовой камерой беспилотного летательного аппарата (БЛА). Поэтому подразумевается решение общей задачи распознавания, т.к. заранее неизвестно, какой именно объект может попасть в поле зрения камеры.

Самым эффективным и простым на сегодняшний день методом решения таких задач является сопоставление рассматриваемого изображения с некоторым набором эталонов, т.е. графической базой данных. Такая база содержит в себе все возможные варианты изображений (эталонных) тех или иных объектов интереса, принадлежащих к определенным классам, и задача сводится к сопоставлению рассматриваемого изображения с эталонной базой. При таком подходе выполняется достаточно большое количество операций сравнения двух изображений, а

конечный результат процедуры распознавания зависит от качества сопоставления на каждой итерации.

Основные принципы работы существующих методов разделяются на два типа: использующие некоторые описания и характеристики объектов, позволяющие индексировать содержание базы для дальнейшего ускорения процесса поиска, и методы перебора, основанные на поиске наиболее «похожего» изображения эталона на рассматриваемом изображении.

Методы первого типа используются при наличии некоторой специфики искомым объектов, уникальным образом их описывающих. Точнее говоря, эти методы порождают такие алгоритмы описания объектов интереса, которые позволяют сформировать некую численную характеристику объекта или их набор. И процесс распознавания сводится к сравнению полученных числовых характеристик объектов, в качестве которых могут выступать: площадь объекта, длина контура объекта, удаленность элементов контура относительно оси симметрии объекта, отношение площади к длине контура и т.д. В зависимости от того, какой набор параметров выбран, и какие методы их сравнения используются, можно указать соответствующий частный алгоритм распознавания.

Методы второго типа производят последовательный перебор эталонов с разными масштабами и ориентацией относительно анализируемого изображения, т.е. эталонное изображение объекта скользящим окном прогоняется по всему анализируемому изображению, и для каждого смещения находится мера соответствия по определенному закону. Далее эталонное изображение поворачивается вокруг собственной оси на малое значение, и процесс прогонки повторяется. Подобные операции повторяются для всех значений углов от  $0^0$  до  $360^0$  и большого спектра масштабов. В результате делается заключение, что на анализируемом изображении содержится объект определенного класса с рассчитанной мерой сходства и, если оно выше заданного порога, то говорится, что на изображении распознан объект определенного класса, в противном случае делается вывод, что изображение не содержит объекты перечисленных классов.

К сожалению, на сегодняшний день не существует алгоритмов, позволяющих сформировать уникальные характеристики объектов, перечисленных в поставленной задаче, поэтому в качестве метода идентификации был выбран метод сравнения с эталонами, хотя ему и присущи некоторые недостатки, главным из которых является количество операций сравнения эталонов с рассматриваемым изображением. Обычно шаг изменения угла ориентации эталона составляет  $1^0$ , а количество масштабных преобразований может достигать 100 вариантов, значит количество итераций прогона одного эталона по изображению в среднем составляет 36000. Если учесть, что в базе содержится хотя бы по 10 изображений каждого класса ПНО, то число итераций прогонов составит 14 440 000 раз. При этом каждый прогон является составной операцией, а значит, число сравнений эталона с анализируемой областью будет на несколько порядков выше. Совершенно очевидно, что такой процесс поиска не может быть реализован для бортовой системы идентификации ПНО БЛА. Обычно с проблемой вычислительной сложности борются, увеличивая шаг дискретизации угла и уменьшая количество масштабных преобразований, но это приводит к ухудшению качества работы алгоритма.

В статье предлагается подход к уменьшению числа сопоставлений, использующий метод определения параметров ориентации и масштаба эталонов. Как было показано в работе [1], при анализе видеопотока, поступающего с бортовой видеокамеры беспилотного летательного аппарата, возможно определить направление движения объекта относительно подстилающей поверхности. Это позволяет определить направление ориентации эталонного изображения относительно кадра: оно может совпадать с направлением движения либо быть противоположно ему.

Рассмотрим более подробно процедуру определения направления движения объекта. На завершающем этапе фильтрации маски движения для всех связанных групп пикселей, принадлежащих подвижному наземному объекту, определяется, было ли зафиксировано движение данной группы на предыдущем кадре или нет, т.е. устанавливается соответствие между подвижными объектами на рассматриваемых кадрах. Учет такого соответствия предоставляет возможность

определить направление движения найденного объекта как вектора перемещения центра масс  $X_{ц.м.}$  и  $Y_{ц.м.}$  данного объекта. Координаты центра масс определяются как среднее арифметическое координат всех пикселей, принадлежащих данной группе

$$X_{ц.м.} = \sum_i^N X_i \text{ и } Y_{ц.м.} = \sum_i^N Y_i ,$$

где  $N$  – количество пикселей в связной группе;  $X_i$  и  $Y_i$  – координаты текущего пикселя. Затем формируется вектор перемещения объекта и находится его направление, определенное углом отклонения от вертикали. Данный вектор показывает ориентацию ПНО, так как его перемещение либо совпадает с ориентацией объекта (движение вперед), либо противоположно ему (движение назад).

Таким образом, находится ориентация найденного ПНО относительно кадра, и для всех эталонов задаются две начальные ориентации: совпадающая (при движении объекта вперед) и противоположная ей, т.е. повернутая на  $180^0$  относительно совпадающей (при движении назад). Затем происходит сопоставление найденного ПНО с эталонами, при этом, помимо совпадающей и противоположной ориентации, рассматриваются эталоны, повернутые на определенный угол  $\psi$ , равный  $1^0$ , т.е. отклоненные от начальных направлений (по четыре раза по направлению движения часовой стрелки и против него). Данная операция последовательного поворота эталонов учитывает погрешность вычисления направления смещения самого ПНО. В результате выполняется по 18 итераций сопоставления для каждого эталона.



Рис. 1. Маска движения

Другим важным параметром работы модифицированного алгоритма является масштаб эталона. Интервал его значений можно вычислить по результатам анализа маски движения [2]. На рис. 1 представлен пример определения маски движения.

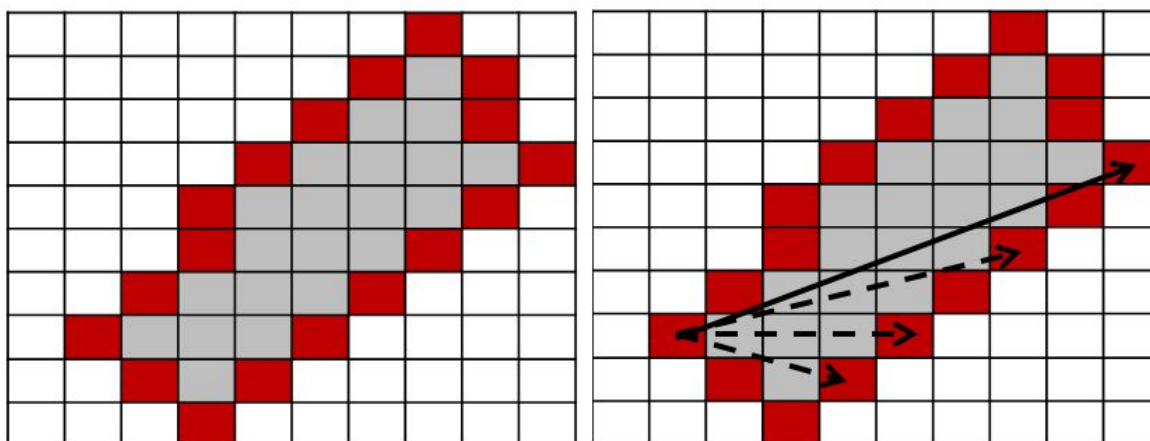


Рис. 2. Определение длины группы связных пикселей



В результате анализа элементов маски движения формируются группы связанных пикселей, представляющих «след» подвижного наземного объекта. Можно вычислить и длины этих групп как максимальное расстояние между всеми точками контура каждой группы. Такая же величина определяется для каждого эталона, хранящегося в базе. Среди всех найденных величин длины групп пикселей маски движения выбирается минимальная, т.е. определяется минимальный возможный размер найденного подвижного объекта. Полученная величина будет определять минимальный масштаб рассмотрения эталонных изображений.

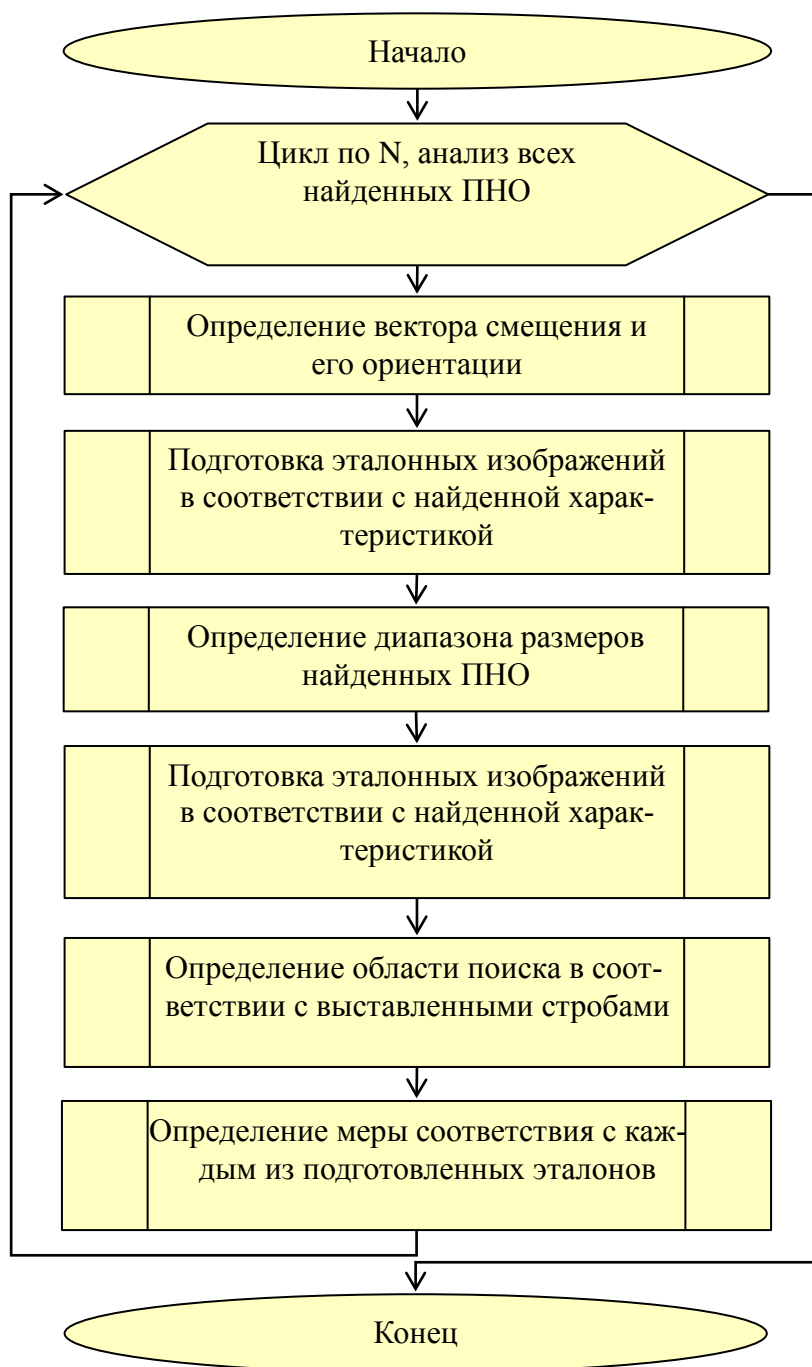


Рис. 3. Блок-схема модифицированного алгоритма идентификации

Найденная характеристика позволяет существенно уменьшить количество операций сопоставления, но этого недостаточно для эффективной работы алгоритма идентификации, так как корреляционные алгоритмы сопоставления изображений достаточно сильно чувствительны к масштабным преобразованиям. Поэтому, помимо ориентации эталонов, на этапе определения характеристик вычисляется диапазон размеров найденных ПНО, это позволяет определить пределы, в которых необходимо производить масштабирование. На этапе определения ПНО для всех найденных групп связанных пикселей были вычислены их линейные размеры (длина и ширина). Опишем алгоритм нахождения данных характеристик более подробно.

Для группы связанных пикселей определяются точки, принадлежащие ее контуру, затем для каждой точки вычисляются расстояния до всех оставшихся точек контура, и среди полученных длин выбирается наибольшая, именно эта величина и будет являться длиной связанной группы. Необходимо отметить, что данная величина не является длиной самого ПНО, а используется лишь для вычисления ориентировочных размеров объекта. На рис. 2 представлена иллюстрация работы алгоритма вычисления длины группы связанных пикселей, где темным цветом выделены пиксели, образующие контур группы.

Вычислив все длины связанных групп пикселей, выбираются минимальная и максимальная. Таким образом, определяется диапазон размеров найденных ПНО, этому диапазону соответствуют масштабные преобразования эталонных снимков, т.е. каждое изображение эталона масштабируется соответственно минимальной и максимальной длине, а также берется еще три промежуточных масштаба. Вычисленные характеристики позволили получить приемлемые показатели точности идентификации, но при этом количество операций сопоставления возросло в 5 раз. В связи с этим в алгоритм сопоставления изображений по эталонам была внесена еще одна модификация: поиск выполняется не по всему изображению методом скользящего окна, а только по областям, выделенным на этапе определения ПНО – стробам [3], т.е. поиск производится только внутри выставленных стробов.

За счет этого была получена модификация алгоритма идентификации объектов путем сопоставления с эталонами, позволяющая функционировать системе идентификации в режиме реального времени при заданном уровне качества (число ошибок идентификации).

На рис. 3 представлена блок-схема модифицированного алгоритма идентификации по эталонным изображениям.

## Заключение

Подводя итог вышесказанному, можно отметить, что разработанная модификация метода позволяет не только определить значения возможной ориентации и масштаба подвижного наземного объекта в режиме реального времени с точностью до класса, но и сузить область поиска от всего изображения до небольшого количества найденных стробов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Казбеков Б.В., Максимов Н.А., Пуртов И.С., Синча Д.П. Локализация местоположения БЛА на основе распознавания изображений подстилающей поверхности // Научно-технический вестник Поволжья. - 2011. - № 5. - С. 20-26.
2. Казбеков Б.В. Совмещение инфракрасных изображений с изображениями видимого диапазона в задачах идентификации подвижных наземных целей с борта беспилотного летательного аппарата // Труды МАИ. - 2013. - № 65. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35912>.
3. Казбеков Б.В. Распознавание подвижных наземных объектов с борта БЛА // Научно-технический вестник Поволжья. - 2013. - № 2. - С. 120-122.

**THE METHOD OF COMPUTATION IMAGES MATCHING WITH THE STANDARD  
AS A METHOD FOR IDENTIFICATION OF MOVING GROUND OBJECTS****Kazbekov B.V., Maximov N.A., Sharonov A.V.**

The article focuses on the identification of moving ground targets on board unmanned aerial vehicle. The possibility of realization of algorithm for identification of objects in real-time by comparing the image of the object under consideration and a set of reference images of the objects of the classes are considered. The merit of the developed modification and the results of the experiments are given.

**Key words:** identification, object recognition, image comparison.

**Сведения об авторах**

**Казбеков Борис Валентинович**, 1987 г.р., окончил МАИ (2010), кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры информационных технологий МАИ (Национального исследовательского университета), автор 10 научных работ, область научных интересов – распознавание изображений.

**Максимов Николай Анатольевич**, 1947 г.р., окончил МАИ (1971), кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий МАИ (Национального исследовательского университета), автор более 150 научных работ, область научных интересов – проектирование информационных систем, обработка изображений и распознавание образов.

**Шаронов Анатолий Васильевич**, 1937 г.р., окончил МАИ (1962), МГУ им. М.В. Ломоносова (1970), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информационных технологий МАИ (Национального исследовательского университета), автор более 150 научных работ, область научных интересов – информационная теория оценок, идентификация сложных динамических систем и обработка изображений.

УДК 004.93'12

## АНАЛИЗ ФОРМЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ СКЕЛЕТНО-КОНТУРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Н.А. МАКСИМОВ, А.В. ШАРОНОВ

Рассматривается информационная технология распознавания самолетов на изображениях, полученных с помощью аэрофотосъемки. Разрабатываемый метод базируется на анализе скелетно-контурных характеристик. Выделены основные признаки распознавания и проведен анализ устойчивости процедуры распознавания к разного рода шумам и искажающим факторам. Результаты работы могут найти применение при создании программно-алгоритмического обеспечения специальных систем беспилотных летательных аппаратов (БЛА).

**Ключевые слова:** изображение, скелетно-контурное представление, распознавание.

### Введение

Задача распознавания изображений возникает в большинстве разработок современных систем машинного зрения. К таким задачам относится и задача распознавания самолетов. Распознавание подразумевает этап выявления признаков формы по изображению и составления его признакового описания. На последующих этапах на основе полученного признакового описания объекта принимается решение о его форме. Для принятия этого решения могут быть использованы различные методы классификации или сравнения описаний исследуемого и эталонных объектов.

Для описания структуры самолёта часто используется представление в виде скелета (серединых осей). Следует отметить, что большинство существующих методов анализа формы ориентируется на использование либо граничного, либо скелетного представления, и тем самым контурных или структурных признаков. В то же время существуют задачи, в которых необходимо использовать как структурные, так и контурные признаки [2; 3].

При использовании скелета в практических исследованиях возникает проблема неоднозначности его вычисления и, соответственно, толкования. Форма скелета чрезвычайно чувствительна к локальным свойствам границы образа. Поэтому до вычисления скелета самолёта необходимо уменьшить влияние шумовых эффектов, например, избавиться от «кипения» по контуру объекта на бинарном изображении.

В настоящей работе сделана попытка объединения скелетных и контурных признаков с целью создания более эффективных методов распознавания самолётов на снимках с БЛА или спутника, а также идентификации и классификации распознанных самолётов. Его суть заключается в построении структуры (скелетно-контурного представления) самолёта и определении совокупности уникальных значений характерных признаков. Распознавание происходит путем сравнения уникальных признаков, полученных при анализе структуры (скелета) и контура самолёта, с аналогичными признаками, вычисленными по справочным данным и занесенными в базу данных для каждого типа самолёта.

### 1. Постановка задачи

Требуется разработать алгоритм и программное обеспечение (ПО) для распознавания типов воздушного судна (ВС) по скелету и контуру их растрового бинарного изображения (РБИ).

Дано множество  $M$  объектов  $\omega$ . Объекты – ВС задаются значениями признаков  $x_i, i = 1, \dots, N$ , вычисленных по скелету их изображения. Эти наборы признаков одинаковы для

всех ВС (длина фюзеляжа, угол между крылом и фюзеляжем и т.д.). Совокупность признаков ВС  $\omega$  определяет некоторым образом его описание  $I(I(\omega) = (x_1(\omega), x_2(\omega), \dots, x_N(\omega)))$ .

Признаки выражаются числовыми значениями.

На всём множестве  $M$  существует разбиение на подмножества (*типы самолетов*):

$$M = \bigcup_{i=0}^m \Omega_i.$$

Разбиение на *типы* может быть задано полностью (т.е. полной совокупностью информации, однозначно описывающей каждый класс) или определяться некоторой априорной информацией  $I_0$  о классах  $\Omega_i$ , например, характеристическим описанием входящих в них объектов.

Задача распознавания состоит в том, чтобы для каждого данного объекта  $\omega$  по его описанию  $I(\omega)$  и априорной (обучающей) информации  $I_0$  вычислить значения предикатов  $P_i = (\omega \in \Omega_i), i = 1, \dots, m$ , каждый из которых принимает истинное значение в том и только в том случае, когда объект  $\omega$  принадлежит типу с номером  $i$ .

Для описания невозможности распознавания ВС предикаты  $P_i$  заменяются величинами  $\alpha_i \in \{0(\omega \notin \Omega_i), 1(\omega \in \Omega_i), \Delta(\text{неизвестно})\}$ .

## 2. Алгоритм решения задачи

Решение задачи можно представить в виде следующей последовательности этапов:

- предварительная обработка изображения (бинаризация, шумоподавление);
  - построение скелета и выделение контура исходного изображения ВС;
  - выделение признаков распознавания и вычисление их значения;
  - идентификация типа ВС, т.е. нахождение эталона с наименьшим отклонением признаков.
- Рассмотрим кратко каждый из перечисленных этапов.

## 3. Предварительная обработка

К предварительной обработке относятся операции преобразования изображения к определенному формату, фильтрация и бинаризация. Предварительная обработка необходима для преобразования всех возможных форматов изображений к единому формату, с которым будут работать алгоритмы на всех последующих этапах.

Указанные процедуры предварительной обработки достаточно хорошо изучены, поэтому, не вдаваясь в подробности, отметим, что нами использовалась пороговая адаптивная бинаризация [10], при которой порог мог задаваться как автоматически, так и вручную.

Удачным решением для удаления шумов в полученном бинарном изображении является применение медианной фильтрации [10].

## 4. Скелетизация

Перед распознаванием объект подвергается процедуре скелетизации (утонения). От результатов скелетизации в значительной степени зависят результаты распознавания.

Методы скелетизации обеспечивают выделение средних линий объектов изображения для дальнейшего анализа. Скелет изображения полностью описывается прямыми (ребрами), соединяющими попарно множество центральных точек окружностей, каждая из которых касается контура объекта изображения минимум в двух точках, и нет такой точки контура, которая бы не лежала на одной из множества окружностей, формирующих скелет [1-4].

Скелет изображения удовлетворяет одному из утверждений:

- скелет сохраняет исходную топологию представляемого им объекта;

- при масштабировании объекта его скелет пропорционально увеличивается (или уменьшается);
- при повороте или переносе объекта его скелет поворачивается или переносится относительно той же центральной точки, что и сам объект.

Большинство из рассматриваемых скелетов несут в себе избыточное количество ребер, многие из которых могут быть удалены в процессе оптимизации скелета без нарушения его топологии.

Существует достаточно много методов скелетизации: волновой алгоритм (алгоритм ЛИ), алгоритмы Форчуна, Щепинга, Зонга-Суня и т.д. Из всех алгоритмов наиболее предпочтительным оказался алгоритм Зонга-Суня, что объясняется его высокой вычислительной эффективностью и возможностью оптимизации.

**Алгоритм Зонга-Суня** является морфологической операцией эрозии. Для алгоритма задаются маски и осуществляется полный проход изображения с подсчетом удаленных пикселей до тех пор, пока есть возможность удалять новые пиксели. Количество проходов по изображению определяется как половина ширины самого широкого объекта изображения.

Алгоритм Зонга-Суня [1] является параллельным, т.к. все изменения пикселей заносятся в отдельный массив, т.е. заносится новое значение в массив, который обрабатывается в данный момент.

Идея алгоритма состоит в утончении фигуры от границы к ее середине путем перекрашивания черных граничных точек в белые. Алгоритм заключается в следующем: в произвольной последовательности просматриваются все точки изображения. Этот алгоритм выполняется в два этапа. На первом этапе обрабатываются северо-западные граничные и юго-восточные угловые соседи пикселя  $p$ ; на втором – юго-восточные граничные пиксели и северо-западные выпуклые угловые [9]. Использование двухпроходного итерационного алгоритма позволяет избежать чрезмерной эрозии результирующего изображения.

Если модифицировать алгоритм Зонг-Суня таким образом, чтобы каждый последующий проход он совершал только по пикселям изображения, оставленным на предыдущем проходе, и не обрабатывал пиксели фона, время его выполнения будет значительно меньше.

Одной из особенностей алгоритма Зонг-Суня [7] является наличие в результирующем изображении линии, толщиной в 2 пикселя. Этот недостаток устраняется дополнительной обработкой результирующего изображения масками, устраняющими лишние пиксели.

Используемый в работе алгоритм является модификацией алгоритма Зонга-Суня. При этом в каждом проходе используются только пиксели цвета переднего плана, оставшиеся с предыдущей итерации. На первой итерации отбираются все пиксели переднего плана, а затем, с каждой итерацией список пикселей уменьшается. Такое усовершенствование позволяет увеличить скорость работы алгоритма.

## 5. Сравнение контуров в задаче распознавания типов ВС

Для получения более точного результата требуется провести дополнительное распознавание, используя контур исходного изображения.

В качестве непрерывной границы (контура) РБИ предлагается использовать границу многоугольной фигуры, которая:

- разделяет белые и черные точки растра;
- имеет минимальный периметр.

Распознавание полученных контуров изображений будем проводить, используя метод полярных диаграмм [6].

В основу метода положен пересчет координат точек, принадлежащих контуру, из прямоугольной в полярную систему координат. Для этого внутри рассматриваемого контура  $A$  некоторым образом выбирается начальная точка  $a_0$  - фактически эта точка становится началом от-

счета (полусом) новой системы координат. Приблизительное положение точки отсчета можно получить, вычислив геометрический центр контура, однако из-за неизбежных неточностей выделения целесообразно рассмотреть множество точек, расположенных в окрестностях геометрического центра. Направление полярной оси не оказывает существенного влияния на свойства результирующей диаграммы, поэтому конкретный выбор определяется в основном удобством представления.

Далее построенная система координат разбивается на  $N$  секторов  $S_i$  (рис. 1),  $i = 0..N-1$  (любому сектору  $S_i$  соответствует пара граничных углов  $\varphi_{S_i}^{\wedge} = \frac{2\pi}{N} \cdot i, \varphi_{S_i}^{\vee} = \frac{2\pi}{N} \cdot (i+1)$ ). Построение полярной диаграммы для контура  $A$  в некоторой точке  $a_0$  заключается в подсчете доли точек контура, принадлежащих тому или иному сектору. Точка принадлежит сектору  $S_i$ , если ее координаты  $(\varphi_k, \gamma_k)$  удовлетворяют условию  $\varphi_{S_i}^{\wedge} \leq \varphi_k < \varphi_{S_i}^{\vee}$ .

Доля точек - отношение количества точек, принадлежащих сектору, к общему числу точек, составляющих контур.

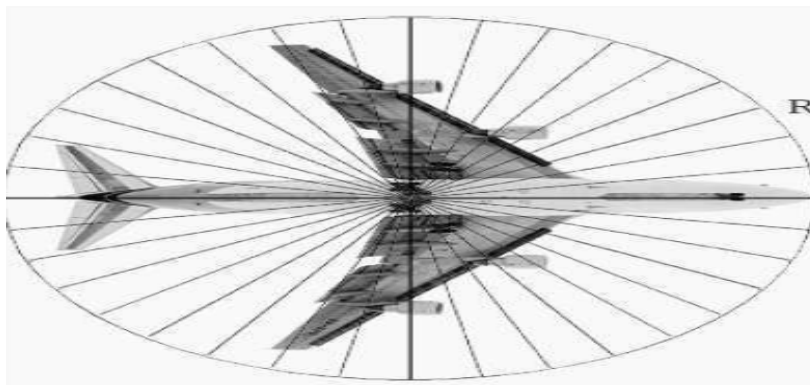


Рис. 1. Разбиение изображения на секторы

Таким образом, полученная диаграмма описывает распределение точек контура в пространстве и не зависит от масштаба рассматриваемого контура.

Использование метода полярных диаграмм дает существенный выигрыш в производительности и точности распознавания типа ВС.

## 6. Выделение основных признаков

После построения скелета исходного изображения во время анализа полученного скелета ВС программа выделяет основные параметры (характеристики) скелета. Для этого происходит построение геометрического центра (E) фигуры (рис. 2). Центр фигуры есть такая точка, в которой делится пополам всякая хорда, проходящая через эту точку.

Далее находится узловая точка (O) пересечения 4-х ребер, находящаяся на наименьшем расстоянии от центра (E). Эта точка пересечения линии фюзеляжа и крыльев.

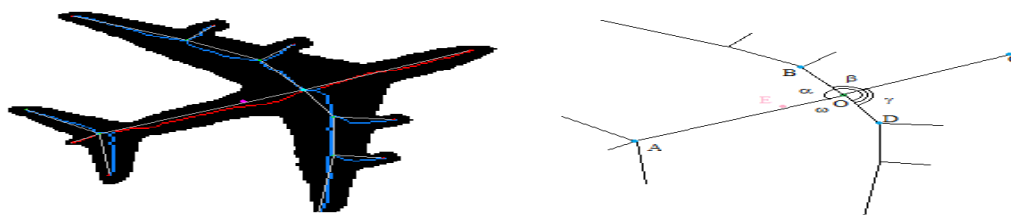


Рис. 2. Анализ скелета изображения

Таким образом, идентификация скелета происходит по следующим признакам:

*K1*: Находится минимальный угол между отрезками, исходящими из узловой точки, т.е. наименьший из углов  $\alpha, \beta, \omega, \gamma$ .

*K2*: Отношение наибольшего ребра узловой точки к наименьшему, т.е. отношение наибольшего к наименьшему из отрезков OA, OB, OC и OD.

*K3*: Отношение наибольшего прямого ребра из узловой точки ко всей длине скелета, т.е. отношение наибольшего из отрезков OA, OB, OC и OD к сумме всех ребер полученного скелета.

*K4*: Находится из контура изображения как отношение количества точек, принадлежащих сектору, к общему числу точек, составляющих контур.

## 7. Идентификация типа ВС

Под идентификацией понимается установление тождественности неизвестного объекта к известному на основании совпадения признаков.

Наиболее простые методы основаны на использовании численных значений признаков, инвариантных относительно параметров положения объекта. Площадь и периметр неизвестного объекта сравниваются с соответствующими параметрами нескольких эталонов, и выбирается тот эталон, отклонение от которого оказалось наименьшим. Понятие наименьшего отклонения можно проиллюстрировать условным размещением распознаваемого объекта и всех эталонов в виде точек в некотором пространстве, координатами в котором являются значения параметров *K1, K2, K3, K4*. Используя так называемое правило ближайшего соседа, выбирают в этом пространстве эталон, который ближе других находится к объекту. Размерность пространства равна числу рассматриваемых признаков. Пусть имеется *m* эталонов, и для каждого из них измерено *n* признаков  $f_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ . Предположим также, что распознаваемый объект имеет признаки  $f_j, j = 1, \dots, n$ . Тогда ненормированное расстояние в пространстве признаков от объекта до эталона *i* будет определяться следующей формулой [10]

$$D_j = \sum_{j=1}^n (f_j - f_{ij})^2. \quad (1)$$

При этом ближайшим соседом будет эталон *i*, для которого *D<sub>i</sub>* минимально.

Приведенная формула применима в том случае, когда все измеряемые признаки имеют сравнимые диапазоны значений. Если же признаки существенно различны, тогда разница в больших параметрах признаков поглотит разницу в малых параметрах. Во избежание этого вводят нормирующие множители. Тогда в приведенном примере необходимо *n* нормирующих множителей  $N_j, j = 1, \dots, n$ , т.е. по одному на каждый признак. В этом случае нормированное расстояние в пространстве признаков определится как

$$D_j = \sum_{j=1}^n \left( \frac{f_j - f_{ij}}{N_j} \right)^2. \quad (2)$$

Коэффициенты  $N_j$  определяются исходя из ожидаемого диапазона изменений значений признаков у каждого эталона, т.е. учитывают возможные значения признаков, которые могут появиться при большом количестве измерений.

Нормирующие коэффициенты  $N_j$ , используемые в уравнении (2), определяются как взвешенные средние дисперсий измерений



$$N_j = \frac{\sum_{i=1}^m P_i v_{ij}}{\sum_{i=1}^m P_i}. \quad (3)$$

Если можно предположить, что разные эталоны дадут разные значения дисперсий, тогда можно пойти на шаг дальше и использовать эти частные значения дисперсий в качестве индивидуальных нормирующих коэффициентов для каждого эталона и каждого признака.

## 8. Тестирование системы и исследование эффективности метода распознавания

Для проведения тестирования созданной программы распознавания самолетов была проведена оценка точности распознавания.

Экспериментально была определена точность распознавания типа ВС в БД в случае отсутствия искажений и составила примерно 96% (191 из 200 изображений были распознаны верно). Это означает, что 4% снимков были неверно определены. Под выражением «отсутствие искажений» здесь понимаются следующие условия:

- изображение ВС не повернуто относительно оси ОХ;
- изображение не имеет шумов;
- изображение не имеет затемнений (т.е. имеет равномерную контрастность).

Для оценки устойчивости алгоритма были построены и проанализированы зависимости точности распознавания изображений от перечисленных выше искажений.

В БД имеется 30 типов эталонов. Определим зависимость точности распознавания изображения к различному роду искажений. За точность распознавания примем отношение количества верно распознанных изображений к общему количеству эталонов, хранящихся в БД.

**Поворот исходного изображения.** В качестве эталонного снимка взято изображение, не имеющее отклонение относительно оси ОХ. Поворот же входного изображения будем изменять каждый раз на 15°. Диапазон изменения от 0° до 180°. Зависимость точности распознавания от угла поворота представлена на рис. 3. Средняя точность распознавания при этом составляет примерно 89%.

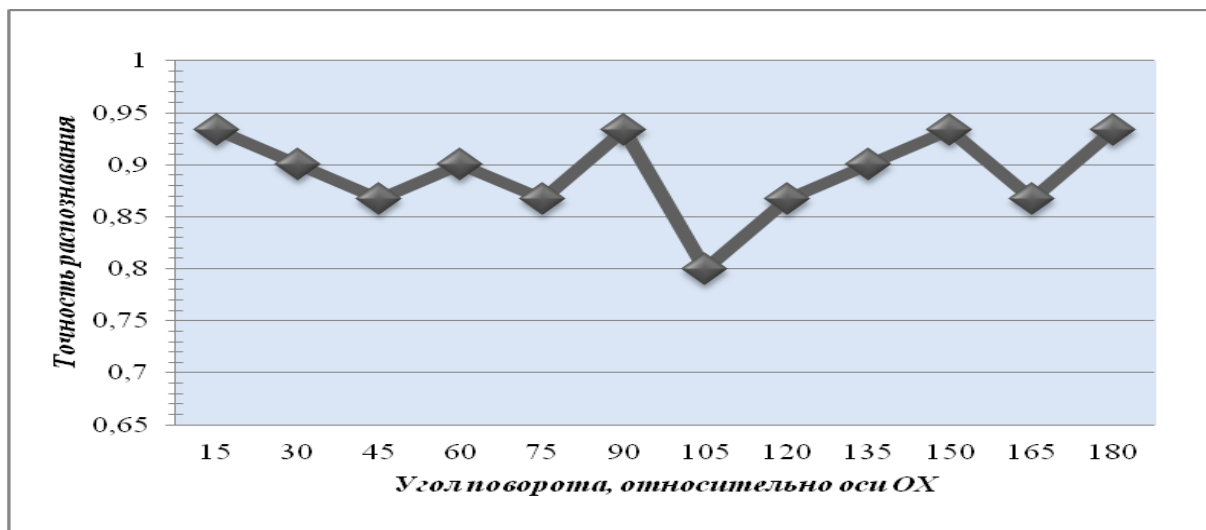


Рис. 3. Зависимость распознавания ВС от угла поворота

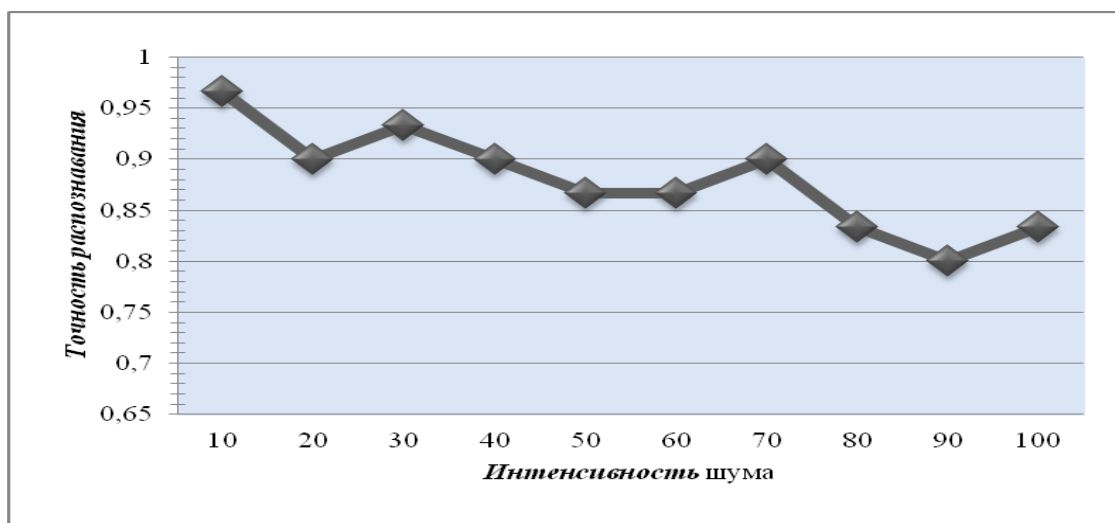
**Количество шума на исходном изображении.** Цифровой шум - дефект изображения, вносимый фотосенсорами и электроникой устройств, которые их используют. Цифровой шум заметен на изображении в виде наложенной маски из пикселей случайного цвета и яркости.

В цветном изображении шум может иметь разную интенсивность для разных каналов изображения, обычно это характеризуется отношением сигнал-шум. Наглядно можно сравнивать шум разных матриц так: привести две парные тестовые фотографии к одному размеру и одинаковой яркости, и после это визуально оценить цветовые шумы.



**Рис. 4.** Изображение с различной интенсивностью шума

В качестве эталонного снимка взято изображение с нулевой интенсивностью шума. Значение интенсивности шума входного изображения будет варьироваться в диапазоне от 0 до 100. Зависимость точности распознавания от интенсивности шума представлена на рис. 5.



**Рис. 5.** Зависимость точности распознавания от значения интенсивности шума

Как видно из графика на рис. 5, точность нахождения снимков в БД уменьшается с увеличением интенсивности шума. Средняя точность распознавания составила 88%.

**Контрастность исходного изображения.** Контрастность - различимость предмета наблюдения от окружающего его фона. Визуальное восприятие объекта возможно только при наличии контраста между объектом и фоном. В качестве эталонного снимка взято изображение с уровнем контрастности, равным нулю. Значение контрастности входного изображения будет изменяться в диапазоне от -100 до 100. Зависимость точности распознавания от контрастности представлена на рис. 6.

Как видно из графика на рис. 6, при изменении значения контрастности на исходном изображении среднее значение точности распознавания составляет 84%, т.е. алгоритм наиболее чувствителен к контрастности изображения.

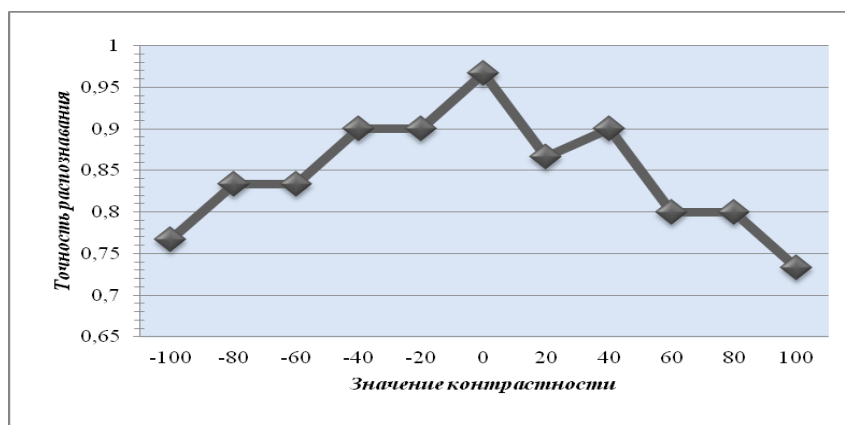


Рис. 6. Зависимость точности распознавания от контрастности

### Заключение

По результатам проведённых выше тестов видно, что изменение угла поворота изображения относительно оси ОХ и наличие шумов в исходном изображении не оказывают существенного влияния на работу программы. При этом алгоритм наиболее чувствителен к контрастности входного изображения и требует дальнейшей доработки, т.к. этот недостаток приводит к уменьшению точности распознавания типа ВС.

В целом же можно сделать вывод о корректной работе программы, обеспечивающей точность распознавания изображений около 90%, т.е. можно заключить, что предлагаемый метод и его программная реализация при соответствующей доработке могут использоваться для решения задачи распознавания типов ВС по скелету его растрового бинарного изображения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Темнов К.А., Галкин С.В., Кирилов А.В. Алгоритм скелетизации растрового монохромного изображения // Информационно-измерительные и управляющие системы. - 2009. - Т. 7. - № 8. - С. 45 - 50.
2. Рейер И.А. Методы анализа формы изображений на основе непрерывного гранично-скелетного представления: дис. ... канд. техн. наук. - М., 2001.
3. Рейер И.А., Петровцева М.А. Язык гранично-скелетного представления бинарных изображений: труды междунар. конф. «Графикон-2003». - М.: МГУ, 2003. - С. 228 - 234.
4. Местецкий Л.М. Непрерывный скелет бинарного растрового изображения: труды междунар. конф. «Графикон-98». - М.: МГУ, 1998. - С. 71 - 78.
5. Местецкий Л.М. Скелетизация многоугольной фигуры на основе обобщенной триангуляции Делоне // Программирование. - 1999. - № 3. - С. 16 - 31.
6. Казбеков А.В., Максимов Н.А. Методы сравнения контуров в задачах распознавания образов // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2012. - № 185 (11). - С. 37 - 43.
7. Быстров М.Ю. Применение структурного подхода к распознаванию скелетов бинарных изображений // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. - 2011. - № 2 (115). - С. 76 - 80.
8. Zhang T., Suen C. A fast parallel algorithm for thinning digital patterns / Communications of the ACM, 1984. - № 3. Vol. 27. - P. 236 - 239.
9. Система распознавания автомобильных номеров «ДИГНУМ АВТО». [Электронный ресурс]. URL: <http://www.dignum.ru/dignumauto/>.
10. Научные и научно-педагогические кадры инновационной России: отчет о научно-исследовательской работе в рамках федеральной целевой программы. [Электронный ресурс]. URL: <http://topreferat.znate.ru/docs/index-3864.html?page=10>.
11. Выделение и анализ скелетов объектов на цветных снимках // Программные продукты и системы. - 2009. - № 2. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.swsys.ru/index.php?page=article&id=2198>.
12. Verma B. Pattern Recognition Technologies and Applications: Recent Advances // B. Verma, M. Blumenstein. USA: IGI Global Press, 2008.

**13. Canny J.** A Computational approach to edge detection IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6):679-698, ноябрь 1986.

## **ANALYSIS OF THE IMAGE AND OBJECTS RECOGNITION ON THE BASIS OF SKELETON-CONTOUR REPRESENTATION**

**Maximov N.A., Scharonov A.V.**

The information technology of recognition of aircraft type aircraft on images obtained from aerial photography. The developed method is based on the analysis of skeleton-contour characteristics is discussed. The main signs of recognition and the analysis of the sustainability of the procedure of all kinds of noises and distorting factors recognition. The results can be used at creation of program-algorithmic support of special systems of unmanned aerial vehicles (UAV).

**Key words:** image, skeleton-contour representation, recognition.

### **Сведения об авторах**

**Максимов Николай Анатольевич**, 1947 г.р., окончил МАИ (1971), кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий МАИ (Национального исследовательского университета), автор более 150 научных работ, область научных интересов – проектирование информационных систем, обработка изображений и распознавание образов.

**Шаронов Анатолий Васильевич**, 1937 г.р., окончил МАИ (1962), МГУ им. М.В. Ломоносова (1970), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информационных технологий МАИ (Национального исследовательского университета), автор более 150 научных работ, область научных интересов – информационная теория оценок, идентификация сложных динамических систем и обработка изображений.

УДК 629.7.07

## МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ СОСТОЯНИЙ В ТЕРМИНАХ МАКРОХАРАКТЕРИСТИК

П.В. ФИЛОНОВ, А.А. ФИЛОНОВА

**Статья представлена доктором технических наук, профессором Кузнецовым В.Л.**

Рассматривается подход к оценке пропускной способности аэродрома с использованием модели квантовой системы состояний. Предложено описание эволюции квантовой системы в терминах макрохарактеристик. Процесс эволюции системы представлен в виде марковской цепи. Приводится аналитический вид для вероятностей переходов между различными состояниями системы. Проведен анализ влияния пересечений воздушных трасс (ВТ) на теоретическую оценку пропускной способности.

**Ключевые слова:** пропускная способность аэропорта, минимумы эшелонирования, квантовые состояния, методика расчета квантовых состояний, макрохарактеристики.

### Введение

В условиях увеличивающегося с каждым годом объема авиаперевозок актуальной становится проблема увеличения пропускной способности аэропорта при условии поддержания необходимых уровней безопасности полетов, регламентированных ИКАО. В существующих программах развития ОрВД – SESAR [1] и NextGen [2], а также в регламенте IATA [3] данная задача представляется одной из наиболее приоритетных.

На сегодняшний день не существует единой утвержденной методики расчета искомой величины. Существует большое количество подходов, многообразие которых обусловлено зависимостью пропускной способности от многих факторов. Критический обзор существующих моделей показывает, что основным их недостатком является возможность учитывать только продольное эшелонирование воздушных судов, следующих по одной и той же ВТ. Такое допущение плохо согласуется с понятиями бокового эшелонирования ВС, которое определяет основные требования по безопасности полётов вблизи пересечения нескольких ВТ.

Целью данной работы является развитие методов оценки пропускной способности (ПС) аэропортов. Отличительной особенностью исследования является учет норм эшелонирования по трем измерениям: по высоте, продольное и боковое. Результат работы может быть непосредственно использован для проведения оценок ПС воздушной зоны аэропорта, что находит свое применение в задачах планирования топологии и согласуется с требованиями ИКАО: для каждого органа воздушного движения необходимо оценить и заявить его пропускную способность.

Исходными данными в предложенной математической модели являются установленные ИКАО минимумы эшелонирования, топология SID/STAR и интенсивности входных и выходных потоков воздушных судов, которые могут быть сформированы на основе расписания рейсов.

### 1. Описание квантовой модели аэродромного воздушного пространства

В работах [4; 5] предложен подход к моделированию аэродромного воздушного пространства по аналогии с квантовыми системами. За счет пространственно-временной дискретизации топология воздушных трасс аэропорта сводится к системе квантовых состояний. Каждое из таких состояний может либо быть пустым, либо в нем может находиться не более одного ВС. Для учета возможных конфликтных ситуаций на пересечении SID/STAR выделяются множества пар состояний, которые будучи заполнены ВС приводят к нарушению минимумов бокового эшелонирования. Такие пары называются связанными, и на них накладывается дополнительное огра-

ничество, которое запрещает двум воздушным судам одновременно находиться в данных состояниях. Таким образом, невозможность возникновения конфликтных ситуаций заложена в сам принцип модели квантовых состояний. Процесс построения системы квантовых состояний на основе анализа топологии воздушных трасс описан в работе [6].

Дополнительное ограничение, связанное с пересечением воздушных трасс, может приводить к появлению незаполненных квантовых состояний. Наличие таких незаполненных состояний может вызывать простой ВПП. В этом случае очевидно, что теоретическая оценка пропускной способности аэродрома не может определяться только пропускной способностью ВПП, и необходимо при расчетах учитывать влияние топологии воздушных трасс. Открытым вопросом остается оценка величины этого влияния. Для получения точной оценки необходимо провести анализ квантовой модели и рассмотреть процесс эволюции системы квантовых состояний. Необходимость работы с большим числом состояний и различных их комбинаций приводит к задаче с чрезвычайно большой размерностью. В работе [7] была описана модель эволюции системы квантовых состояний в виде марковской цепи, в которой в качестве пространства состояний рассматривались все возможные пары матриц заполнения. В такой постановке мы сталкиваемся с «проклятием» размерности, поскольку по предварительным оценкам мощность множества состояний растёт как  $O(N!^2)$ , где  $N$  – число продольных квантовых состояний. Поскольку нахождение стационарных вероятностей для подобной системы не представляется возможным даже для малого числа продольных эшелонов, логичным шагом в исследовании задачи будет являться получение упрощенных моделей на основе той же идеологии.

В качестве подобного упрощения предлагается рассмотреть другой способ построения пространства состояний, основанный только на текущем количестве ВС, находящихся в зоне аэропорта.

## 2. Подход на основе макрохарактеристик

Рассмотрим аэропорт с двумя ВПП, одна из которых работает только на взлёт, другая – только на посадку ВС. Предположим, что воздушное пространство данного аэропорта устроено следующим образом: в нем имеются один SID и один STAR, которые пересекаются на различном удалении от ВПП. Число продольных эшелонов на SID и STAR обозначим как  $N$ . Под состоянием системы будем понимать пару чисел  $(i, j)$ , где  $i$  – число ВС, находящихся на STAR,  $j$  – на SID. При таком подходе множество состояний системы можно представить как  $S = \{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, N\}$ ,  $|S| = (N + 1)^2$ .

В качестве первой макрохарактеристики предлагается рассмотреть величину, которая равна числу занятых квантовых состояний на конкретной SID/STAR. Будем называть данную величину «числом заполнения».

В качестве второй макрохарактеристики рассмотрим величину, которую будем называть «сложностью топологии». Её основное назначение заключается в описании степени влияния связанных квантовых состояний на вероятность возникновения конфликтной ситуации. Основное преимущество введения данной величины заключается в том, что сложность топологии является статической характеристикой и не зависит от текущей воздушной обстановки. Это позволяет оценить её, основываясь исключительно на информации о структуре системы квантовых состояний. Предложенный способ вычисления опирается на систему упрощений и представляет собой комбинаторную вероятность составного события. Важным моментом расчёта является то, что информация о допустимых эшелонах по высоте непосредственно влияет на значение  $q$ , что позволяет дифференцировать влияние пересечений, расположенных на разных удалениях от ВПП (обычно при удалении от ВПП растёт число доступных эшелонов по высоте). В качестве рабочего приближения рассматривается вероятность ровно одного конфликта, и  $q$  заменяется на  $q_1$ .

На пересечениях воздушных трасс нахождение двух ВС является взаимоисключающим. Определим вероятность возникновения конфликтной ситуации комбинаторно

$$p_{(l,k)} = \frac{\min(h_l^k, h_k^-)}{h_l^+ \cdot h_k^-}, \quad (1)$$

где  $h_l^+$  - число разрешённых эшелонов по высоте в  $l$ -м сечении STAR;  $h_k^-$  - та же характеристика для  $k$ -го сечения SID. Введём обозначение  $p_i = p_{(l,k)}$  для всех связанных  $l$  и  $k$ , где  $i = \overline{1, M}$  - номер пересечения воздушных трасс.

Примем гипотезу о том, что в один такт времени в системе может произойти не более одной конфликтной ситуации, и из потока может быть удалено не более одного ВС. В таком случае вероятность возникновения конфликтной ситуации при полном заполнении SID и STAR равна

$$q = p_1 p_2 \dots p_M + p_1 p_2 \dots p_M + \dots + p_1 p_2 \dots p_M. \quad (2)$$

Так как в величине  $q$  сконцентрирована вся информация о пересечениях SID/STAR в аэродромном воздушном пространстве, назовём её сложностью топологии.

При возникновении конфликтной ситуации необходимо принимать решение об удалении одного ВС из потока взлетающих или заходящих на посадку. Для описания этого выбора введём величину  $\alpha_i$  - приоритет потока заходящих на посадку для  $i$ -го пересечения SID/STAR. При возникновении конфликта будем удалять ВС из потока взлетающих с вероятностью  $\alpha_i$ , а из потока заходящих на посадку -  $(1 - \alpha_i)$

$$\alpha_i p_i = \alpha = const.$$

Исходя из определения приоритета потока реализации, SID и STAR будут равновероятны. При удалении ВС из потока образуются «дырки», приводящие к простоя ВПП. Вероятность простоя ВПП в текущий момент времени равна вероятности того, что в предыдущий момент времени на крайнем сечении SID или STAR находилась «дырка». Выражение для этой вероятности можно получить комбинаторно

$$P^+ = \frac{C_{N-1}^i}{C_N^i} = \frac{N-i}{N}$$

для STAR и аналогично для SID

$$P^- = \frac{N-j}{N}.$$

Учитывая то, что события, связанные с возникновением конфликтов и уходом «дырок», являются попарно независимыми, эволюцию заполнения SID и STAR можно рассматривать как марковскую цепь.

Для максимизации пропускной способности аэропорта необходимо, чтобы поток ВС, поступающих в систему, был стационарен и плотен.

Рассмотрим все возможные переходы из состояния  $(i, j)$ , изображенные на рис. 1 и определим их вероятности. Выделим элементарные события, которые могут происходить в данной системе, и определим их вероятности.

В первую очередь рассмотрим событие, связанное с возникновением конфликтной ситуации, которое влечет за собой устранение одного из ВС. Будем считать, что вероятность данного события ( $P_c$ ) пропорциональна долям заполнения воздушными судами SID ( $i/N$ ) и STAR ( $j/N$ ). В качестве коэффициента пропорциональности будем рассматривать сложность топологии  $q$

$$P_c = q \frac{i}{N} \frac{j}{N}.$$

При возникновении конфликтной ситуации необходимо устранить одно из ВС из потока. Выбор соответствующего ВС будем производить на основе величины  $\alpha$  - приоритета потока взлетающих ВС по сравнению с потоком заходящих на посадку. В этом случае вероятность исключения ВС из потока взлетающих равна  $(1-\alpha)P_c$  а из потока заходящих на посадку -  $\alpha P_c$ .

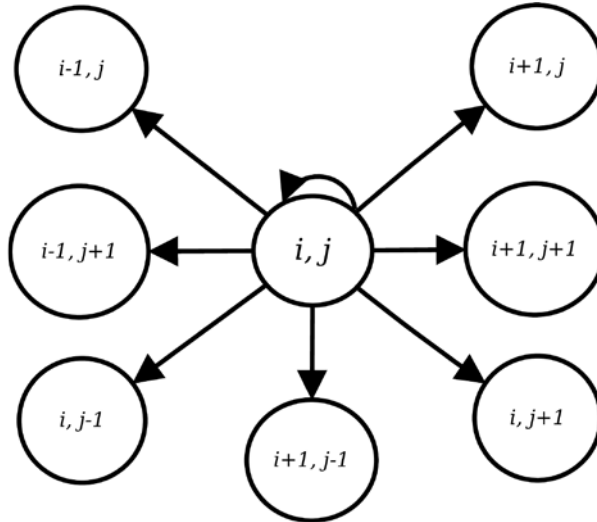


Рис. 1. Переходы из состояния  $(i, j)$

Таким образом, мы можем получить вероятности для следующих элементарных событий:

- при конфликте было устранено ВС со STAR -  $(1-\alpha)P_c$ ;
- при конфликте было устранено ВС с SID -  $\alpha P_c$ ;
- заполнение SID увеличилось на единицу -  $P^-$ ;
- заполнение STAR увеличилось на единицу -  $P^+$ .

Обозначим вероятности дополненных событий как  $Q_c = 1 - P_c, Q^- = 1 - P^-, Q^+ = 1 - P^+$ .

Условные вероятности переходов в марковской цепи можно определить на основе вероятностей элементарных событий  $P_c, P^-, P^+$  следующим образом:

$$\begin{aligned} P[(i-1, j) | (i, j)] &= \alpha P_c Q^- Q^+; \\ P[(i, j-1) | (i, j)] &= (1-\alpha) P_c Q^- Q^+; \\ P[(i+1, j) | (i, j)] &= (1-\alpha) P_c P^- Q^+; \\ P[(i-1, j+1) | (i, j)] &= \alpha P_c Q^- P^+; \\ P[(i+1, j) | (i, j)] &= Q_c P^- Q^+ + (1-\alpha) P_c P^- P^+; \\ P[(i, j+1) | (i, j)] &= Q_c Q^- P^+ + \alpha P_c P^- P^+; \\ P[(i+1, j+1) | (i, j)] &= Q_c P^- P^+. \end{aligned}$$

Вероятность остаться в том же состоянии ( $P[(i, j) | (i, j)]$ ) можно определить из условия нормировки.

Уравнение эволюции данной системы можно представить в виде

$$\vec{P}(t_{k+1}) = \Lambda \vec{P}(t_k),$$

где  $\vec{P}(t_k)$  - вектор вероятностей нахождения системы в одном из состояний;  $\Lambda$  формируется на основе вероятностей условных переходов марковской цепи, определённых выше.



Стационарное решение (при  $\vec{P}(t_{k+1}) = \vec{P}(t_k) = \vec{P}$ ) можно получить из следующего уравнения

$$(I - \Lambda)\vec{P} = 0, \quad (3)$$

где  $I$  - единичная матрица.

Будучи дополнено условием нормировки

$$\sum_{i,j} P_{i,j} = 1,$$

уравнение (3) становится неоднородным и может быть легко решено.

На основе стационарных вероятностей  $\vec{P}$  определим пропускную способность аэропорта. Под пропускной способностью будем понимать разность пропускной способности ВПП и среднего числа ВС, удаленных из системы по причине возникновения конфликтных ситуаций. Таким образом, в данной постановке задачи вычисление пропускной способности сводится к вычислению среднего числа ВС, находящихся в системе квантовых состояний

$$C = \sum_{i,j} (i + j) P_{i,j}. \quad (4)$$

### 3. Анализ результатов эксперимента

Для того чтобы определить насколько наличие пересечения воздушных трасс в зоне аэродрома может повлиять на теоретическую оценку пропускной способности, следует сравнить результат, полученный выше для пропускной способности ( $C$ ), с пропускной способностью ВПП ( $C_{AAR}$ ). Последняя определяется исходя из того, что в системе отсутствуют «дырки» и каждую единицу времени происходит операция взлёта либо посадки. В этом случае выражение для пропускной способности ВПП имеет простой вид

$$C_{AAR} = 2N. \quad (5)$$

В случае отсутствия пересечений ВТ ( $q=0$ ) (4) переходит в (5). График отношения  $C$  к  $C_{AAR}$  при различных значениях «сложности» топологии  $q$  представлен на рис. 2.

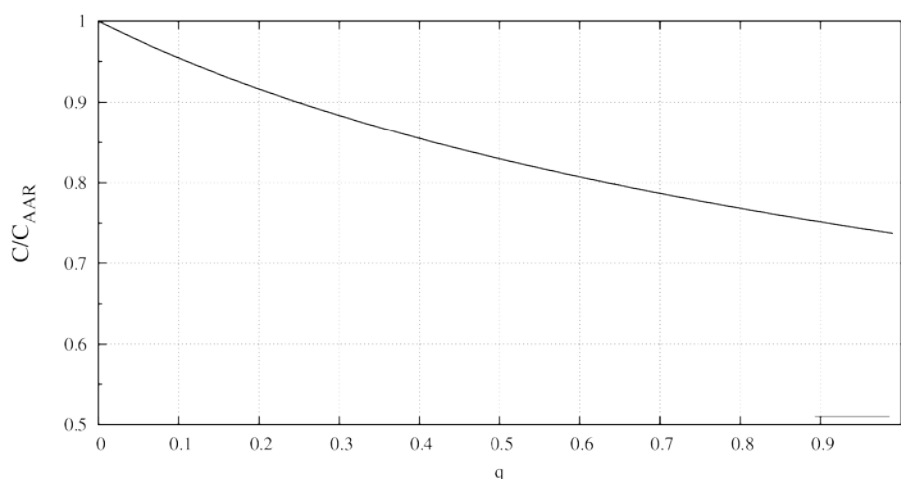


Рис. 2. График зависимости нормированной ПС от «сложности» топологии

Как видно, данная зависимость имеет нелинейный характер и при максимальном значении  $q=1$  достигает величины 0,75. По предварительным оценкам величина  $q$  для реальных топологий ВТ не будет превышать значения 0,3. Но даже в этом случае по полученной оценке видно, что пропускная способность с учетом потенциальных конфликтов может отличаться от пропускной способности ВПП на 10%. Данный результат показывает, что необходимо учитывать потенциальное влияние пересечения ВТ на искомую величину для точной оценки пропускной способности аэродромной воздушной зоны.

## Заключение

Предложенное в данной работе использование таких макрохарактеристик, как «сложность» топологии и числа заполнения, позволяет значительно понизить число степеней свободы исходной квантовой системы и сформулировать задачу вычисления пропускной способности на основе вычисления стационарных вероятностей описанной марковской цепи. Анализ полученных результатов показывает, что учет влияния пересечений воздушных трасс может значительно сказаться на пропускной способности, которая уже не может быть оценена просто как пропускная способность ВПП. Данное утверждение требует дополнительной проверки с учетом реальных топологий ВТ аэропортов для точного определения величины «сложности» топологии, которая может представлять собой простую характеристику, позволяющую провести быструю оценку ПС аэродромного воздушного пространства.

## ЛИТЕРАТУРА

1. [Электронный ресурс]. URL: SESAR <http://ec.europa.eu/transport/modes/air/sesar/>.
2. [Электронный ресурс]. URL: NextGen <http://www.faa.gov/nextgen/>.
3. [Электронный ресурс]. URL: IATA <http://www.iata.org/policy/slots/Documents/positionpaperslots.pdf>.
4. Кузнецов В.Л., Чепурина А.А. Об одной аналитической модели пропускной способности аэропорта // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2011. - № 169. - С. 94-98.
5. Кузнецов В.Л., Филонов П.В., Чепурина А.А. Задача о пропускной способности аэропорта в формализме ферми-систем // Состояние и перспективы развития автоатизированных систем планирования использования воздушного пространства в РФ: сб. тр. семинара. - М.: ГосНИИАС, 2011. - С. 230-234.
6. Кузнецов В.Л., Филонов П.В., Чепурина А.А. Метод построения системы квантовых состояний в модели расчета пропускной способности аэропорта // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2011. - № 184. - С. 23-28.
7. Филонов П.В., Филонова А.А. Уравнение эволюции в квантовой модели аэродромной воздушной зоны в терминах марковский цепей // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 195. - С. 58-64.

## THE MARKOV MODEL OF QUANTUM STATE SYSTEM EVOLUTION IN TERMS OF MACROPARAMETERS

Filonov P.V., Filonova A.A.

An approach to computation of the airport throughput that is based on the quantum model is considered. The description of the quantum system is proposed in terms of macroparameters. The evolution process of quantum system is shown in terms of the markov chain. The transition probabilities between the different states of the system are shown in the analytical form. The dependency between the number of intersection of the SID/STAR – trajectories and airport throughput is considered.

**Key words:** airport throughput, separation minima, quantum states, quantum states computation methods, macroparameters.

## Сведения об авторах

**Филонов Павел Владимирович**, 1985 г.р., окончил МГТУ ГА (2007), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ ГА, автор более 20 научных работ, область научных интересов - задачи распространения электромагнитных волн в неоднородных средах, математическое моделирование процессов УВД, информационные технологии.

**Филонова Анна Александровна**, окончила МГТУ ГА (2011), аспирантка МГТУ ГА, автор 7 научных работ, область научных интересов - математическое моделирование процессов УВД.

УДК 519.876.5

## ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ КОМПЛЕКСОВ СВЕТОСИГНАЛЬНОГО ОБОРУДОВАНИЯ АЭРОДРОМОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПОСАДКИ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВИДИМОСТИ

Ю.Т. ЗЫРЯНОВ, В.М. ДМИТРИЕВ

В статье представлен один из подходов к решению актуальной научно-прикладной задачи - оценки эффективности комплексов светосигнального оборудования аэродромов в условиях ограниченной видимости с применением интегрального показателя на основе моделирования развития визуального контакта летчика со светосигнальной картиной аэродрома.

**Ключевые слова:** оценка эффективности, ограниченная видимость, визуальный контакт, светосигнальная картина, комплекс светосигнального оборудования.

### Введение

Обеспечение безопасности, регулярности и эффективности полетов авиации зависит от многих факторов, обусловленных внешней средой, соотношением сил и средств, уровнем подготовки летного состава и характеристиками оборудования.

По статистике более 50% авиационных происшествий (и инцидентов) происходит во время посадки, на этапе визуального пилотирования из-за потери ориентирования экипажем воздушного судна (ВС). Так, в течение последних 10 лет произошло более 10 авиационных происшествий, причины которых связаны с отсутствием либо потерей экипажем визуального контакта с наземными ориентирами.

Комплекс светосигнального оборудования (КССО) аэродрома обеспечивает командира ВС (КВС) световыми ориентирами на заключительном этапе посадки, так как безопасная посадка невозможна без наличия надежного визуального контакта с огнями светосигнальной системы.

Для ускорения и снижения стоимости разработки новых и модернизации существующих КССО при обеспечении нормированного уровня безопасности полетов, а также для расследования авиационных происшествий и инцидентов целесообразно использовать методы и средства компьютерного моделирования.

### 1. Формализованная постановка задачи

Под эффективностью применения КССО аэродрома понимается степень его приспособленности к выполнению стоящей перед ним задачи. Основной задачей, решаемой КССО, является обеспечение экипажа ВС визуальной информацией для определения отклонения ВС от заданной линии курса и глиссады при посадке, а также определения положения ВС на взлетно-посадочной полосе (ВПП) и рулёжных дорожках аэродрома.

Исходя из анализа процесса посадки ВС на экспериментальный аэродром (ЭА) в условиях I и II категории метеоминимума, ее можно разделить на два основных этапа: пилотирование по приборам до достижения нижней границы облачности и визуальное пилотирование после выхода из облаков и установки визуального контакта с КССО ЭА.

Этап пилотирования по приборам основывается на непрерывном измерении величин отклонения самолета от равносигнальных направлений линий курса и глиссады. Основным источником информации о положении ВС до момента выхода из нижней границы облаков является инструментальная система посадки (ИСП).

В результате пилотирования по приборам ВС должно быть выведено в определенную область пространства перед ВПП, в которой КВС визуально оценивает качество захода на посадку.

ку. Если отклонения по высоте или боковые отклонения превысят допустимые значения, то принимается решение об уходе на второй круг или на запасной аэродром.

Для оценки эффективности функционирования КССО ЭА целесообразно использовать интегральный показатель, который позволит учитывать динамику развития визуального контакта летчика с КССО ЭА в зависимости от вышеописанных факторов.

На основе анализа процесса посадки были выделены факторы [1; 2], влияющие на эффективность применения КССО ЭА в условиях ограниченной видимости, которые объединены в следующие группы факторов: характеристики средств радиотехнического обеспечения (РТО) полетов, характеристики КССО ЭА, уровень подготовки КВС (экипажа), характеристики ВС, метеоусловия.

Для каждой группы факторов были выделены параметры, характеризующие данную группу факторов.

В результате исходными данными для решения задачи оценки эффективности КССО ЭА в условиях ограниченной видимости выбраны:

1. Характеристики КССО ЭА: СПО – схема размещения огней; параметры для каждого огня ( $I_0$  – осевая сила света огня;  $\theta_Y$ ,  $\theta_Z$  – углы наклона осевой линии огня;  $\theta_{Y0}$ ,  $\theta_{Z0}$  – ширина диаграммы излучения;  $C$  – цвет излучения огня).

2. Метеорологические параметры:  $D_{МОДВ}$  – метеорологическая оптическая дальность видимости;  $H_{ВНГО}$  – высота нижней границы облачности;  $f(\varphi)$  – индикатриса рассеяния;  $L_{\varphi_3}$  – яркость фона земной поверхности;  $L_n$  – яркость неба на горизонте.

3. Посадочные характеристики ВС:  $V_{noc}$  – посадочная скорость ВС;  $\nu$  – угол тангажа;  $\varphi_{обз}$  – угол обзора из кабины по линии вперед-вниз;  $\sigma_{yBC}$ ,  $\sigma_{zBC}$  – точность выдерживания ВС посадочной траектории по курсу и глиссаде.

4. Характеристики средств РТО: РТП – расчетная точка посадки;  $H_{MBC}$  – минимальная высота снижения;  $\alpha_0$  – угловая ошибка по курсу;  $\theta_{zl}$  – угол наклона глиссады;  $\theta_0$  – угловая ошибка по глиссаде;  $\sigma_{yСП}$ ,  $\sigma_{zСП}$  – точность выдерживания системой посадки линии курса и глиссады.

5. Уровень подготовки и состояние летчика:  $\varepsilon$  – пороговый контраст;  $T_{ДР}$  – время принятия решения.

Таким образом, для оценки эффективности необходимо решить задачу об определении наиболее информативного показателя эффективности из функции вида

$$W = f(\vec{X}), \quad (1)$$

где  $\vec{X}$  – вектор исходных данных.

Результатом решения данной задачи будет выбор интегрального показателя эффективности, учитывающего максимальное количество параметров доминирующих факторов, влияющих на характеристики видимости светосигнальной картины (ССК) ЭА в процессе посадки ВС в условиях ограниченной видимости.

## 2. Разработка математической модели ССК ВА и алгоритма расчета ее параметров

Для оценки видимости огня необходимо определить освещенность сетчатки глаза  $E_{\text{глаза}}$ , создаваемую огнем, и ее пороговое значение  $E_{\text{пор}}$ .

Для определения освещенности сетчатки глаза КВС была использована формула

$$E_{\text{глаза}} = \frac{I(\theta_Y, \theta_Z) \cdot e^{-\alpha l}}{l^2}, \quad (2)$$

где  $I(\theta_Y, \theta_Z)$  – интенсивность излучения огня КССО с учетом диаграммы излучения огня в вертикальной и горизонтальной плоскости;  $\theta_Y, \theta_Z$  – углы между осевой линией огня и направлением визирования в горизонтальной и вертикальной плоскости;  $l$  – расстояние до текущего огня визирования;  $\alpha$  – показатель ослабления света в атмосфере.

Для определения  $\alpha$  использовалось выражение  $\alpha = \frac{3,9}{D_{МДВ}}$ , где  $D_{МДВ}$  – метеорологическая дальность видимости.

Для существующих СРО КССО ЭА (ССП-1,2; ОВИ-1,2,3) с огнями фарного и прожекторного типа для определения диаграммы излучения  $I(\theta_Y, \theta_Z)$  используется выражение

$$I(\theta_Y, \theta_Z) = I_0 e^{-\left[\left(\frac{\theta_Y}{\theta_{Y0}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_Z}{\theta_{Z0}}\right)^2\right]} \quad (3)$$

Критерием обнаружения огня КССО ЭА выбрано превышение освещенности сетчатки глаза КВС  $E_{\text{глаза}}$  над пороговым уровнем освещенности  $E_{\text{пор}}$ .

Наблюдение световых сигналов постоянного и импульсного действия осуществляется при некотором уровне фоновой яркости  $L_\phi$ . Каждому  $L_\phi$  соответствует определенное значение пороговой освещенности сетчатки глаза  $E_{\text{пор}}$ . Поскольку пороги цветоощущения выше световых порогов, то на значительных расстояниях цветные огни воспринимаются белыми и приобретают свой цвет по мере приближения к ним наблюдателя. Суммарная яркость фона будет равна сумме ее составляющих

$$L_\phi = L_{\phi3} e^{-\alpha \cdot D_\phi} + L_n \left[ 1 - e^{-\alpha \cdot D_\phi} \right] + L_{\text{глаза}} + L_{\text{атм}}, \quad (4)$$

где  $D_\phi$  – расстояние от фона до точки наблюдения.

Влияние времени суток и вида подстилающей поверхности на яркость фона определяется через  $L_n$  и  $L_{\phi3}$ , которые входят в формулу (4). Причем  $L_{\phi3}$  определяются не только видом подстилающей поверхности, но и временем суток. Численные значения  $L_n$  и  $L_{\phi3}$  могут быть определены на аэродроме путем непосредственного измерения этих величин.

Составляющая яркости фона  $L_{\text{глаза}}$  создается за счет физического процесса рассеяния света от источников в глазу летчика и зависит от количества огней, попадающих в поле его зрения. Ее значение рассчитывалось по формуле

$$L_{\text{глаза}} = \sum_{i=1}^m \frac{29 \cdot I_i(\theta_i) \cdot e^{-\alpha \cdot l_{i21}}}{l_{i21}^2 \cdot \Psi_i^{2,8}}, \quad (5)$$

где  $m$  – количество огней, попадающих в поле зрения летчика;  $I_i(\theta_i)$  – диаграмма излучения  $i$ -го аэродромного огня;  $\alpha$  – показатель ослабления света в атмосфере;  $l_{i21}$  – расстояние  $i$ -го огня до глаза летчика;  $\Psi_i$  – угол фиксации  $i$ -го огня летчиком.

Так как на ЭА в зависимости от СРО может использоваться свыше 100 огней, то  $L_{\text{глаза}}$  оказывает существенное влияние на яркость фона.

Для определения  $L_{\text{атм}}$  использовалось выражение

$$\Delta L_{ij\text{атм.}} = -\alpha \cdot \frac{f(\varphi_{ij}) \cdot I_i(\theta_{ij}) \cdot e^{-\alpha(l_{ij1} + l_{ij2})}}{4 \cdot \pi \cdot l_{ij1}^2 \cdot \cos \varphi_{ij}} \cdot \Delta l_{ij1}, \quad (6)$$

где  $f(\varphi_{ij})$  – индикатриса рассеяния;  $\varphi_{ij}$  – угол между заданным направлением наблюдения и направлением распространения излучения;  $l_{ij1}$  – расстояние от прожектора  $i$  до рассматриваемого слоя атмосферы  $j$ , которое отличается от предыдущего значения на величину  $\Delta l_{ij1}$ ;  $l_{ij2}$  – расстояние от рассматриваемого слоя атмосферы до глаза КВС.

Просуммировав значения яркости для всех огней по всем участкам атмосферного слоя в направлении линии визирования наблюдателя, получим общую яркость  $L_{атм}$ , равную

$$L_{атм} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta L_{ijатм}, \quad (7)$$

где  $m$  – количество огней, попадающих в поле зрения летчика;  $n$  – количество элементарных отрезков.

Для расчета параметров ССК ЭА был разработан алгоритм [1], основной задачей которого является определение видимости огней из всех точек траектории посадки. Решение о видимости огня принимается в случае, если освещенность сетчатки глаза больше светового порога освещенности, а решение о различении цвета огня в случае, если освещенность сетчатки глаза больше цветового порога освещенности. В результате оценки видимости отдельных огней из данной точки траектории посадки составляется карта видимости огней, которая и представляет собой ССК ЭА, наблюдаемую из заданной точки траектории посадки. С использованием алгоритма расчета параметров ССК ЭА были проведены численные эксперименты с целью выявления влияния доминирующих факторов на видимость ССК ЭА.

### 3. Обоснование показателя эффективности КССО ЭА

С учетом [3] разработан алгоритм расчета параметров визуального контакта КВС со ССК ЭА, состоящий из следующих этапов:

**1 этап: ввод условий посадки.** На этом этапе вводятся такие параметры, как характеристики средств РТО, характеристики КССО ЭА, уровень подготовки КВС, характеристики ВС, метеословия (подробно представлено) в формализованной постановке задачи.

**2 этап: расчёт начальных координат.** Для учёта стохастического характера процесса посадки для расчета начальных координат предлагается следующая модель:

$$\begin{cases} y = D_{рпп} \cdot tg \alpha_0 + y_{сп} + y_{вс}; \\ z = D_{рпп} \cdot tg(\theta_{21} + \theta_0) + z_{сп} + z_{вс}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $D_{рпп}$  – дальность до расчётной точки посадки;  $y_{сп}$  и  $z_{сп}$  – случайные величины отклонений, обусловленные ТТХ наземной части ИСП;  $y_{вс}$  и  $z_{вс}$  – случайные величины отклонений, определяемые точностью выдерживания ВС линий курса и глиссады. Случайные величины отклонений подчинены нормальному закону распределения.

Реализация  $y_{сп}$ ,  $z_{сп}$ ,  $y_{вс}$ ,  $z_{вс}$  происходит методом Монте-Карло при нормальном распределении со следующими условиями

$$\begin{cases} M[y_{сп}] = 0; D[y_{сп}] = \sigma_{сп}^2; \\ M[z_{сп}] = 0; D[z_{сп}] = \sigma_{зсп}^2; \\ M[y_{вс}] = 0; D[y_{вс}] = \sigma_{ывс}^2; \\ M[z_{вс}] = 0; D[z_{вс}] = \sigma_{звс}^2. \end{cases} \quad (9)$$

**3 этап: расчет текущих координат.** Так как экспериментально полученные математическое ожидание и среднеквадратические отклонения по курсу и глиссаде на различных удалении

ях в процессе посадки меняются незначительно, то реальная посадочная траектория движения ВС заменена прямолинейной моделью:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} - V_{noc} \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta_{zt} + \theta_0) \cdot \cos \alpha_0; \\ y_i = y_{i-1} - V_{noc} \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta_{zt} + \theta_0) \cdot \sin \alpha_0; \\ z_i = z_{i-1} - V_{noc} \cdot \Delta t \cdot \sin \alpha_0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $X(t_i)$  ( $x_i, y_i, z_i$ ) – текущие координаты ВС;  $X(t_{i-1})$  ( $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ ) – предыдущие координаты ВС;  $\Delta t$  – время.

**4 этап: определение параметров визуального контакта.** Для текущей точки траектории посадки рассчитывается ССК ЭА и определяется выполнение условия визуального контакта, а именно видимости 2-3 рядов огней в направлении посадки. В качестве результата функционирования алгоритм выдает информацию о количестве видимых огней, их расположении и выполнении условия визуального контакта для текущей точки траектории посадки.

Реализация 3 и 4 этапов имеет циклический характер и повторяется до приземления ВС.

В результате выполнения алгоритма будет получена информация о параметрах визуального контакта для каждой точки траектории посадки.

В качестве параметра визуального контакта для текущей точки траектории посадки предложено использовать  $L(X(t))$  – длину участка видимых огней по направлению оси ВПП (в глубину) из данной точки траектории посадки  $X(t)$ .

Для определения величины отклонений от заданного курса и глиссады КВС необходимо одновременно наблюдать 2-3 ряда огней в направлении посадки.

При принятии решения на посадку в условиях ограниченной видимости КВС вынужден действовать без визуального контакта с ориентирами ВПП. Он принимает решение, ориентируясь лишь на наличие визуального контакта с огнями приближения и с огнями светового горизонта. Поэтому на основе анализа процесса посадки в условиях ограниченной видимости в качестве интегрального показателя эффективности предлагается использовать **вероятность наличия визуального контакта на высоте не ниже требуемой**

$$H_{BVK\text{треб}} = H_{ВПП} + V_{сн} \cdot T_{ПР}, \quad (11)$$

где  $V_{сн}$  – вертикальная составляющая посадочной скорости ВС.

Определено, что  $T_{ПР}$  принимает значение от 3 до 5 секунд, поэтому значение  $H_{BVK\text{треб}}$  может варьироваться от  $H_{BVK\text{min}}$  до  $H_{BVK\text{max}}$ .

В результате применения разработанного алгоритмического обеспечения будет получена случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения, с математическим ожиданием  $H_{BVK\text{прогноз}}$  и СКО  $\sigma$ .

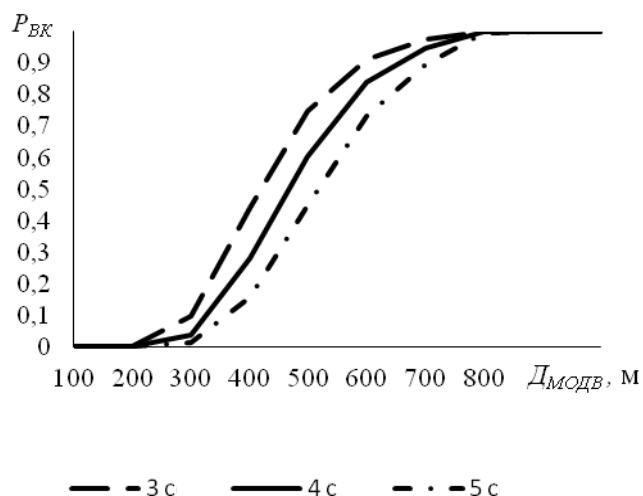
Вероятность наличия визуального контакта на высоте не ниже требуемой определяется выражением

$$P_{BK} = P(H_{BVK} > H_{BVK\text{треб}}). \quad (12)$$

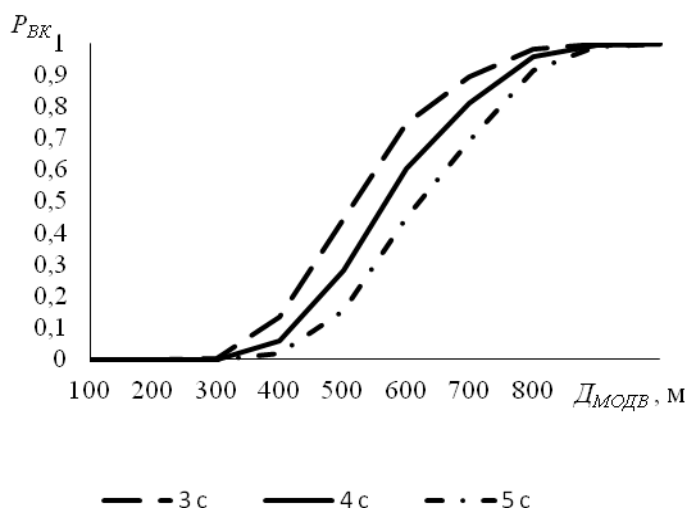
Синтезированные модели и алгоритмы оформлены в виде пакетов прикладных программ для ЭВМ (наглядно-демонстрационного характера в среде Delphi 7.0 и инженерно-расчетного в среде Mat lab 7.0) [4; 5].

На основе анализа результатов моделирования процесса посадки и оценки  $P_{BK}$  для различных условий в качестве критерия выполнения успешной посадки была выбрана  $P_{BK} \geq 0,9$ , как обеспечивающая достаточный запас высоты ( $H_{BVK} - H_{BVK\text{треб}} \geq \sigma$ ).

Пример реализации разработанных алгоритмов иллюстрируется результатами моделирования развития визуального контакта (ВК) и оценки вероятности наличия ВК КВС при посадке ВС (рис. 1, 2).



**Рис. 1.** Оценка вероятности наличия визуального контакта ночью

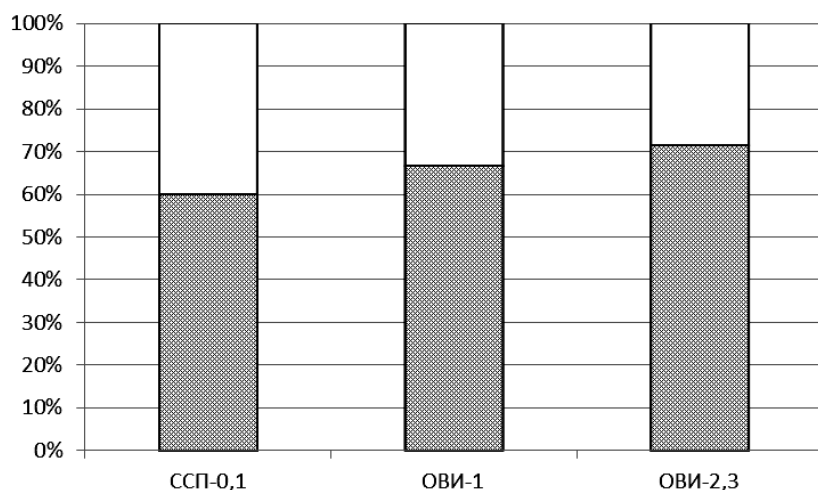


**Рис. 2.** Оценка вероятности наличия визуального контакта днем

Если в качестве критерия возможности выполнения посадки выбрать  $P_{ВК} \geq 0,9$ , то для  $T_{ПР} = 3$  с условие будет выполнено ночью уже при  $D_{МОДВ} = 600$  м, а для летчиков с  $T_{ПР} = 4 - 5$  с это условие будет выполнено при  $D_{МОДВ} = 700$  и  $800$  м соответственно. Днем в связи со значительной яркостью фона условие  $P_{ВК} \geq 0,9$  будет выполнено лишь при  $D_{МОДВ} = 800$  м.

Оценка эффективности разработанного алгоритмического обеспечения показала, что его применение позволяет экономить от 28% до 40% времени летной проверки при облетах РТО и КССО ЭА в зависимости от типа СРО КССО, как это показано на рис. 3.





**Рис. 3.** Расчетное время, необходимое для облета КССО ЭА

На рис. 3 незаштрихованные области показывают процент экономии времени летной проверки.

### Заключение

Таким образом, разработанное алгоритмическое и программное обеспечение применимо для оценки эффективности КССО ЭА в условиях ограниченной видимости с учетом влияния таких групп факторов, как характеристики РТО, характеристики КССО, посадочные характеристики ВС, метеорологические условия, уровень подготовки КВС. Выбранный интегральный показатель эффективности позволяет учесть комплексное влияние указанных групп факторов на качество решения КССО ЭА задачи обеспечения экипажа ВС визуальной информацией при выполнении посадки в условиях ограниченной видимости.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Зырянов Ю.Т., Дмитриев В.М.** Моделирование и исследование влияния доминирующих факторов на видимость светосигнальной картины аэродрома // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2010. - № 152. - С. 99–107.
- 2. Зырянов Ю.Т., Дмитриев В.М., Волков В.В.** Энергосберегающие технологии в проектировании и эксплуатации комплексов светосигнального оборудования аэродромов // Энергобезопасность и энергосбережение. - 2011. - № 2. - С. 22-26.
- 3. Зырянов Ю.Т., Дмитриев В.М., Ледовских Д.Н.** К вопросу об оценке эффективности радиосветотехнического оборудования аэродрома // Авиакосмическое приборостроение. - 2011. - № 8. - С. 31-37.
- 4. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ 2011618625 Российская Федерация.** Программа расчета параметров математической модели светосигнальной картины аэродрома / Дмитриев В.М. (RU); правообладатель Дмитриев В.М. - № 2011616871; заявл. 13.09.11.; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 2.11.11.
- 5. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ 2011618624 Российская Федерация.** Программа для оценки эффективности применения комплексов светосигнального оборудования аэродрома в сложных метеоусловиях. Дмитриев В.М., Зырянов Ю.Т., Малыков К.А. (RU); правообладатели Дмитриев В.М., Зырянов Ю.Т., Малыков К.А. - № 2011616870; заявл. 13.09.11.; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 2.11.2011.

**AIRFIELD RUNWAY LIGHTING EFFICIENCY ESTIMATING BASED  
ON SIMULATING LANDING PROCESS IN LOW VISIBILITY**

**Zyryanov Yu.T., Dmitriev V.M.**

The paper presents an approach to solving important scientific application at the evaluation of the effectiveness of airfields runway lighting in low visibility conditions using the integral index-based fashion.

**Key words:** efficiency estimating, low visibility, visual contact, lighting picture, runway lighting.

**Сведения об авторах**

**Зырянов Юрий Трифонович**, 1960 г.р., окончил Тамбовское ВВАИУ (1983), профессор, доктор технических наук, почетный работник высшего профессионального образования РФ, член-корреспондент РАЕ, профессор ФГБОУ ВПО ТГТУ, автор более 120 научных работ, область научных интересов – управление состоянием организационно-технических систем при ограниченных ресурсах.

**Дмитриев Владимир Михайлович**, 1984 г.р., окончил Тамбовское ВВАИУРЭ (2006), кандидат технических наук, преподаватель ФГКВОУ ВПО ВУНЦ ВВС «ВВА», автор более 20 научных работ, область научных интересов – повышение эффективности комплексов радиосветотехнического оборудования аэродромов.

УДК 621.396.933

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ВРЕМЕННАЯ КОРРЕКЦИЯ ОШИБОК ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ДЛЯ СПУТНИКОВЫХ РАДИОНАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

О.А. ГОРБАЧЕВ, В.Б. ИВАНОВ, А.А. ХОЛМОГОРОВ

На основе открытого авторами эффекта повторяемости суточного хода ошибок позиционирования с характерными временами в десятки – тысячи секунд в одночастотной пользовательской аппаратуре предложен новый метод повышения точности спутниковых радионавигационных систем.

**Ключевые слова:** спутниковая навигационная система, точность позиционирования, одночастотная навигационная аппаратура.

### Введение

Задача повышения точности позиционирования спутниковых радионавигационных систем (СРНС) является одной из важнейших проблем навигации. Состояние этой проблемы подробно описано, в частности, в обзорной работе [1]. В данной статье предлагается новый способ повышения точности позиционирования СРНС, связанный с описанной далее особенностью поведения во времени экспериментально наблюдаемых ошибок позиционирования. Особенность заключается в повторяемости в соседних сутках временного хода ошибок определения местоположения радионавигационных приемников.

Типичные значения ошибок позиционирования СРНС при использовании одночастотных навигационных приемников составляют несколько метров [2]. Использование высокоточных навигационных приборов и специальных методик решения навигационной задачи, включая применение нестандартных моделей ионосферного запаздывания сигналов (так называемая концепция PPP – precision point positioning), позволяет в одночастотном режиме выйти на дециметровый уровень точности. Соответствующие подходы описаны, например, в работе [3]. Однако такие средства пока не достигли стадии широкого использования в массовой потребительской аппаратуре. В этой связи представляет интерес использовать для повышения точности позиционирования указанную выше и детально описанную далее особенность.

В предыдущих экспериментальных исследованиях авторов [4; 5] был выявлен следующий интересный эффект, заключающийся в том, что измерения отклонений определяемых координат антенн навигационных приемников от их истинных значений имеют хорошо выраженную повторяемость в двух и более последовательных сутках. Эффект наиболее выражен во временных вариациях определяемой высоты фазового центра антенны. Эффект не связан с суточным ходом полного электронного содержания в ионосфере с периодом в 24 часа. Речь идет о более короткопериодических флуктуациях с характерными временами в десятки-тысячи секунд. Данные получены на специализированных наблюдательных пунктах Иркутского филиала МГТУ ГА в г. Иркутске для навигационной системы GPS.

Для наглядности на рис. 1 представлен типичный временной ход определяемой навигационным приемником высоты антенны в двух соседних сутках из работы [5]. По вертикальной оси отложены определяемые высоты антенн  $h$ . Здесь нам интересны только относительные вариации высот, поэтому на вертикальной оси показан масштаб единицы измерений. Кривые, соответствующие двум суткам, изображены одна под другой с некоторым смещением по вертикали. По горизонтальной оси отложено мировое время UTC в сеансах наблюдений соседних суток. Хорошо видна высокая степень корреляции временных ходов в двух соседних сутках и присутствие флуктуаций различных временных масштабов. Из последних можно выделить менее интенсивные ко-

роткопериодические флуктуации длительностью в десятки секунд и более интенсивные длинно-периодические вариации с характерными временами порядка тысяч секунд.

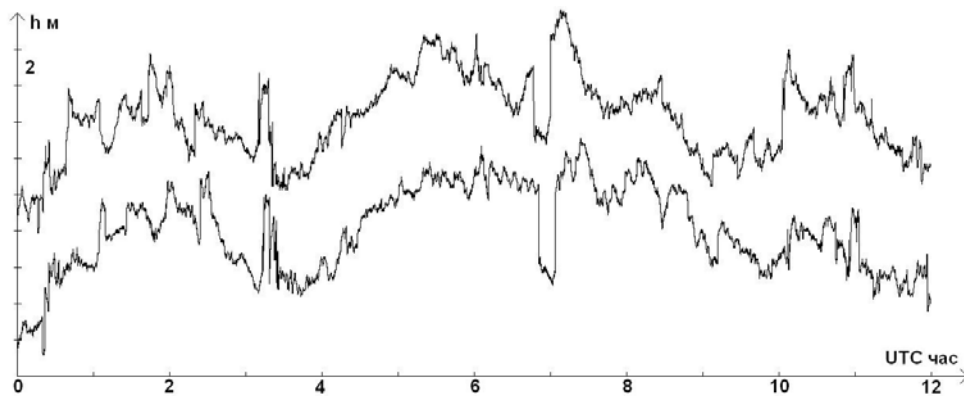


Рис. 1. Временной ход определяемой высоты антенны в соседних сутках

### Дифференциально-временная коррекция

Представленная в работе [5] особенность – повторяемость суточного хода ошибок позиционирования может быть применена для повышения точности определения положения потребителя с использованием данных реперных станций в данном регионе. Здесь имеет место определенная аналогия с известным дифференциальным режимом СРНС [8; 9], который в данном контексте следует назвать пространственно-дифференциальным. В простейшем варианте пространственно-дифференциальный режим реализуется следующим образом. В некотором регионе постоянно функционирует реперный навигационный приемник с известными координатами фазового центра антенны, называемый контрольно-корректирующей станцией (ККС). ККС в режиме реального времени определяет и по специализированным каналам связи передает потребителю текущие значения ошибок позиционирования по широте, долготе и высоте или по декартовым геоцентрическим координатам. Приемники в данном регионе, включенные в дифференциальный режим, непрерывно принимают эти значения, которые в качестве поправок вычитаются из определяемых координат. Скорректированные таким образом итоговые значения имеют существенно более высокую точность по сравнению с автономными измерениями.

Учитывая повторяемость суточного хода ошибок позиционирования, мы предлагаем метод коррекции координат, в котором используются поправки с ККС не в данный момент времени, а извлеченные из заранее записанного временного хода ошибок позиционирования ККС в предыдущие сутки. Для оценки эффективности предлагаемого метода нами было последовательно проведено два тестирования, результаты которых представлены ниже.

В первом тестировании использовались три станции из сети IGS: А1 - BLYT, А2 – JPLM и В – SIC1, расположенные в Калифорнии, США. Расстояние между станциями А1 и В составляет 252 км, между станциями А2 и В – 361 км. Первые две станции использовались в качестве ККС, и с них 22 февраля 2008 года снимался суточный ход ошибок позиционирования. По станции SIC1 производилось собственно тестирование. В следующие сутки производилось измерение координат станции SIC1 без коррекции, с коррекцией по ККС А1 и с коррекцией по ККС А2. Навигационная задача решалась с использованием программы RINEXPVT из инструментария GPStk [6; 7]. В качестве исходных использовались данные, представленные в виде навигационных и наблюдательных RINEX-файлов.

В табл. 1 представлены усредненные за сутки ошибки по широте, долготе и высоте. Ошибки в горизонтальной плоскости, как и по высоте, представлены в метрах. В строках таблицы представлены результаты тестирования без коррекции и с коррекцией по указанным ККС.

Таблица 1

Усредненные за сутки ошибки по широте, долготе, высоте

Средняя ошибка	По широте	По долготе	По высоте
В	0,77	-0,31	1,164
В-А1	-0,36	-0,23	-0,14
В-А2	-0,04	0,04	0,01

Как можно видеть из табл. 1, применение дифференциально-временной коррекции приводит к существенному снижению средней ошибки для обеих контрольно-корректирующих станций. По всем координатам средняя ошибка снижается не менее чем вдвое. Для ККС А2 (станция JPLM) средняя ошибка уменьшается не менее чем в 8 раз. По абсолютной величине достигается сантиметровая точность определения координат.

Другой вариант представления результатов этого же тестирования представлен в табл. 2. Здесь приведены значения усредненных за сутки абсолютных ошибок, т.е. евклидовых расстояний между точным положением антенны и определяемыми положениями по вертикали, в горизонтальной плоскости и для полного расстояния (3D).

Таблица 2

Усредненные абсолютные ошибки по высоте, по горизонтали, 3D

Средняя абсолютная ошибка	По высоте	В плоскости	Полная
В	1,164	0,83	1,43
В-А1	-0,14	0,42	0,45
В-А2	0,01	0,05	0,05

Для абсолютной ошибки эффективность коррекции несколько ниже, но и в этом случае достигается сантиметровая точность определения координат.

Второе тестирование проведено на двух упомянутых выше наблюдательных пунктах в г. Иркутске, принадлежащих Иркутскому филиалу МГТУ ГА. Эксперимент проводился 5 – 6 мая 2014 года. Пункт А являлся ККС, пункт В тестировался. В строках В и В-А табл. 3 и табл. 4, аналогично табл. 1 и табл. 2, представлены соответствующие ошибки позиционирования без применения дифференциально-временной коррекции и с ее применением. Ошибки в горизонтальной плоскости, как и по высоте, представлены в метрах.

Таблица 3

Усредненные за сутки ошибки по широте, долготе, высоте

Средняя ошибка	По широте	По долготе	По высоте
В	0,810	0,649	1,342
В-А	-0,220	0,312	-0,596
(В-А)~	-0,215	0,309	-0,587

В последних строках таблиц представлены результаты тестирования с использованием сглаживания (удаления высокочастотных флуктуаций) в корректирующем временном ходе. Сглаживание выполнялось усреднением по 20-минутным интервалам. Таким образом, суточный временной ход представлялся сеткой из 73 временных точек. В промежуточные моменты времени расчеты проводились с использованием линейной интерполяции. Сглаживание рационально как с точки зрения устранения влияния случайных флуктуаций, так и в плане компактного представления корректирующего временного хода.

Таблица 4

Усредненные абсолютные ошибки по высоте, по горизонтали, 3D

Средняя абсолютная ошибка	По высоте	В плоскости	Полная
В	1,342	1,038	1,697
В-А	0,596	0,382	0,708
(В-А)~	0,587	0,376	0,697

Как можно видеть из табл. 3 - 4, и для данного эксперимента имеет место существенное улучшение точности позиционирования с использованием дифференциально-временного режима, а сглаживание приводит только к дальнейшим уточнениям позиции.

### Заключение

Проведенные исследования позволяют уверенно говорить о возможности использования в спутниковой навигации нового метода коррекции координат для односторонней аппаратуры СРНС, базирующегося на открытом авторами эффекте повторяемости в соседних сутках вариаций ошибок позиционирования с характерными временными масштабами от десятков до тысяч секунд. Данный метод, названный авторами дифференциально-временной коррекцией, можно использовать для повышения точности позиционирования навигационной спутниковой аппаратуры массового потребления, что является его несомненным преимуществом перед стандартными методами коррекции (дифференциальным, PPP и др.).

Для реализации дифференциально-временной коррекции на базовой ККС необходимо записать суточный ход ошибок с применением сглаживания. Затем сформировать соответствующий файл числовых данных, выложить его в Интернет или передать оператору сотовой связи. В последующие сутки аппаратура потребителя в автоматическом режиме однократно загружает данный файл из сети Интернет либо получает его по каналам сотовой связи. Затем в аппаратуре потребителя из текущих вычисленных координат вычитаются соответствующие ошибки. Таким образом, существенная часть ошибок текущего позиционирования будет скомпенсирована.

В предлагаемом методе отпадает необходимость использования специализированных радиоканалов и значительно сокращается суточный объем передаваемой информации. Наиболее удобной дифференциально-временная коррекция может быть для потребителей, использующих мобильные устройства со встроенными навигационными приемниками, имеющими доступ к сотовой связи и сети Интернет. Именно для них наиболее просто организовать загрузку данных с корректирующей информацией.

Основным преимуществом дифференциально-временной коррекции является его дешевизна и простота реализации по сравнению со стандартными методами коррекции. В первую оче-

редь предлагаемая методика может быть полезна в условиях, когда реализация стандартных методов коррекции невозможна.

Более широкое применение дифференциально-временной коррекции может основываться на том факте, что подавляющее большинство потребителей навигационных услуг в мире обладают устройствами, совмещающими функции компьютера, сотового телефона и навигационного приемника. С учетом этого организация дифференциально-временного режима работы СРНС на территориях, охваченных сетью Интернет и сотовой связью, приведет к существенному улучшению качества навигационных услуг.

Отметим также, что в стандартном дифференциальном режиме СРНС корректирующая информация с ККС транслируется потребителям обычно не в форме поправок к координатам, а в виде поправок к псевдодальностям. Аналогичная методика может быть применена и к дифференциально-временной коррекции. Такую возможность следует рассматривать как предмет дальнейших исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Thomas Grinte.** *Precise Point Positioning: Where are we now?* - International Global Navigation Satellite System Society IGSS Symposium, 2011. [Электронный ресурс]. URL: [www.gmat.unsw.edu.au/snap/publications/grinter&roberts2011a.pdf](http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/publications/grinter&roberts2011a.pdf).

2. **Boubeker Belabbas, Achim Hornbostel and Mohammed Z. Sadeque.** Error Analysis of Single Frequency GPS Measurements and Impact on Timing and Positioning Accuracy. - PROCEEDINGS OF THE 2nd WORKSHOP ON POSITIONING, NAVIGATION AND COMMUNICATION (WPNC'05) & 1st ULTRA-WIDEBAND EXPERT TALK (UET'05), 2011, pp. 81-86.

3. **Roel J.P. van Bree, Christian C.J.M. Tiberius.** Real-time single-frequency precise point positioning: accuracy assessment. - GPS Solution, 2012, 16:259–266.

4. **Былинин К.Е., Горбачев О.А., Иванов В.Б., Хазанов Д.В.** Сравнительная оценка точности позиционирования одночастотной аппаратуры систем ГЛОНАСС и GPS // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2011. - № 171. - С. 78 - 83.

5. **Горбачев О.А., Иванов В.Б., Холмогоров А.А.** Временные вариации ошибок позиционирования в спутниковой навигационной системе GPS // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 195. - С. 118 - 125.

6. **Brian Tolman, Benjamin Harris R.** "The GPS Toolkit," Linux Journal, September, 2004, p. 72.

7. **Benjamin Harris R., Richard G. Mach.** The GPSTk: an open source GPS toolkit. - GPS Solution, 2007, 11:145-150.

#### THE TIME-DIFFERENTIAL MODE OF CORRECTING THE POSITIONING ERRORS OF SATELLITE NAVIGATION SYSTEMS

Gorbachev O.A., Ivanov V.B., Kholmogorov A.A.

The results of research of time variations of positioning errors in consumer's equipment of satellite navigation systems are presented. The shown repetition on adjacent days, peculiarity of day variation of errors, are proposed to be used for increasing accuracy of satellite navigation systems.

**Key words:** satellite navigation system, positioning accuracy, single frequency navigation equipment.

#### Сведения об авторах

**Горбачёв Олег Анатольевич**, 1959 г.р., окончил ИГУ (1982), доктор технических наук, доцент, директор Иркутского филиала МГТУ ГА, автор 52 научных работ, область научных интересов – радиоп физика, спутниковые системы навигации.

**Иванов Всеволод Борисович**, 1948 г.р., окончил ИГУ (1972), доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиоп физики ИГУ, автор 100 научных работ, область научных интересов – радиоп физика.

**Холмогоров Андрей Александрович**, 1991 г.р., студент ИГУ, автор 2 научных работ, область научных интересов – радиоп физика.

УДК 629.735.015:681.3

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАНОВЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА РАДИОЛОКАЦИОННОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

К.А. ГЛАГОВСКИЙ, В.В. ЛАВИНА, Л.Е. РУДЕЛЬСОН

Методическую основу вторичной обработки радиолокационной информации составляет критерий максимума апостериорной вероятности для правильного объединения измерений местоположения воздушных судов. Траектория движения строится по результатам анализа статистики их наблюдения. Рассматривается дополнение этой схемы априорными сведениями о маршруте, известными системе из плана полета.

**Ключевые слова:** обработка радиолокационной информации, критерий максимума апостериорной вероятности, априорные сведения о маршруте полета.

### Введение

Методической основой традиционной схемы вторичной обработки радиолокационной информации (РЛИ) является известный [1] критерий максимума апостериорной вероятности, т.е. вероятности адекватного (правильного) объединения последовательных (в темпе обзора антенны локатора) измерений местоположения объектов, необходимого для построения наблюдаемых траекторий (моделей движения). Применение критерия состоит в следующем. На основании  $n$  измерений текущих параметров движения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , выполненных с погрешностью, необходимо оценить параметры траектории  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Считается, что закон распределения вероятностей  $p(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  известен, но неизвестны параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Их выбирают так, чтобы при измеренных значениях  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и при подстановке выбранных  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_k$  плотность распределения вероятностей  $p(x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_k)$  оказывалась максимальной. Априорные сведения, содержащиеся в планах полетов, в полной мере не используются, траектория строится на базе накапливаемой информации.

### 1. Постановка и формализация задачи

На этапе радиолокационного сопровождения для принятия правильного решения об истинности (достоверности) образования траектории нужно уметь оценивать качество ее прокладки. Из теории случайных процессов и математической статистики известно [1], что если случайные векторы  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  имеют нормальное распределение с ковариационной матрицей  $\Sigma$ , то оценка  $S$  максимального правдоподобия  $\Sigma$  для выборки векторов  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  составляет

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^n (X^{(m)} - \bar{X})(X^{(m)} - \bar{X})^T,$$

где  $\bar{X}$  – вектор арифметического среднего  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ ;  $(X^{(m)} - \bar{X})$  – исходный вектор;  $(X^{(m)} - \bar{X})^T$  – транспонированный вектор разности между измеренными и сглаженными координатами. Считается, что случайный процесс измерений лучше всего описывается именно нормальным распределением, и задачей привязки новых точек к сглаживаемым от обзора к обзору траекториям становится их сортировка по вычисленному максимальному значению  $S$ . Каждая новая измеренная точка (текущая точка) рассматривается совместно с каждым сопровождаемым вектором и приписывается к тому из них, для которого расчетное  $S$  достигает максимума. Важно отметить, что в отличие от оценки погрешности  $\sigma$  единичного измерения, в данном слу-



чае анализу подвергается наложение новой ошибки на всю предысторию ошибок, и как следствие, в качестве рабочего инструмента вместо дисперсии используется ковариация.

Статистический показатель  $S$ , хорошо зарекомендовавший себя при оценке процессов, не допускающих пропусков и ложных измерений, не учитывает этой специфики радиолокационных наблюдений. В результате за показатель  $S_n$  качества привязки текущих точек к прокладываемой траектории стали принимать логарифм отношения правдоподобия двух гипотез относительно их принадлежности той или иной траектории. При этом считается, что дисперсия расстояния между измеренной и предсказанной точками в случае ложной привязки в  $Q$  раз больше, чем при истинной привязке. Этот показатель качества  $S_n$  ( $n$  – индекс обзора) имеет вид

$$S_n = \left( \frac{1}{Q} - 1 \right) \cdot \Delta Z_n^T \Sigma_n^{-1} \Delta Z_n + \ln Q,$$

где  $\Delta Z_n$ ,  $\Delta Z_n^T$  – векторы (исходный и транспонированный) разности между экстраполяционной (упрежденной) точкой прокладываемой траектории и соответствующей текущей точкой на  $n$ -м обзоре;  $\Sigma_n$  – ковариационная матрица вектора  $\Delta Z_n$ .

Не углубляясь в детали традиционной схемы, отметим ее принципиальную направленность на концепцию статистического накопления информации о траектории движения цели, на апостериорные вероятности правильного объединения измеренных и прогнозируемых точек. Использование этого отправного пункта заимствовано из логики процедур обработки радиолокационной информации в системах специального назначения, где оно оправдано высоким значением риска выдвижения ложной гипотезы о дальнейшем маршруте движения сопровождаемого объекта. В приложении к задачам управления полетами гражданской авиации (ГА) риск ошибки минимален, так как на каждый рейс заранее поступают формализованные заявки на использование воздушного пространства (ИВП). Они содержат описание маршрута, отклонения от которых возможны лишь в чрезвычайных ситуациях, таких как опасные явления погоды по маршруту движения, вынужденная посадка, бедствие на борту, нападение на экипаж и т.д.

## 2. Алгоритм обнаружения маневра

В обычных условиях выполнения полетов ГА плановая траектория может служить в роли предиктора процедуры обработки РЛИ, что позволяет привлекать имеющиеся в системе априорные сведения о маршруте. С этой целью следует выполнять в момент обнаружения цели ее отождествление с соответствующим планом полета и последовательно (в темпе обзора антенны радиолокатора) уточнять текущие плановые значения вектора скорости и координат местоположения по результатам радиолокационных измерений. Параметры движения задаются в заявке на ИВП со значительной погрешностью (скорость – десятками метров в секунду, высота – заданным эшелон, время пролета пунктов маршрута – минутами). Отождествление плана полета с воздушным судном (ВС), наблюдаемым радаром, позволяет достичь необходимой для управления воздушным движением точности определения местоположения и прогноза траектории.

В сложной информационной обстановке – пропуски и неоднозначность измерений, ложные измерения, маневрирующие и групповые объекты, помехи – сопровождение на основе критерия максимума апостериорной вероятности характеризуется большим числом ложных траекторий, перепутыванием траекторий, срывом сопровождения и пропуском движущихся объектов [2]. Неустойчивость традиционной схемы объясняется ошибками измерений и выставления математического строга для отбора отметки измерения (около прогнозируемого положения объекта в предположении его прямолинейного движения). Классические алгоритмы создавались для компьютеров первых поколений с низким быстродействием и малым объемом памяти. При переходе к технике нового поколения, имеющей практически неограниченные вычислительные ресурсы, алгоритмы обработки попросту заимствовались у предшественников. Ситуацию можно

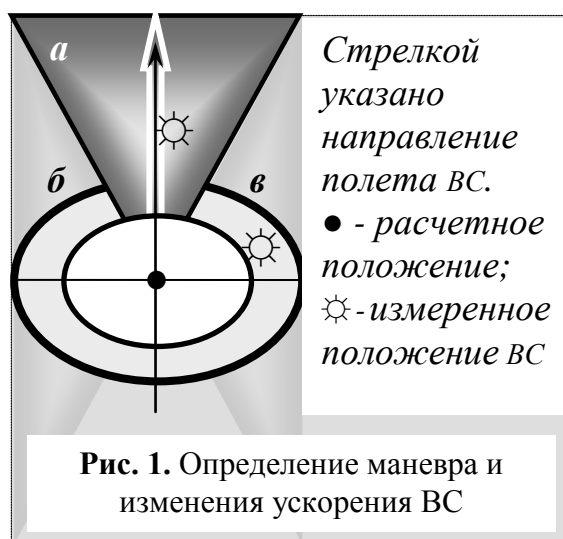
улучшить, если более полно использовать возможности современных компьютеров. Можно в любой информационной обстановке получить достаточно точное сопровождение всех наблюдаемых объектов с помощью более сложных фильтров, накопления дополнительной статистики, учета возможностей маневрирования и комплексной обработки нескольких гипотез прокладки траекторий.

Сигналом обнаружения маневра считается изменение параметров прокладываемой траектории. Прямолинейное равномерное движение преобразуется в линию с неопределенной кривизной, ускорение становится отличным от нуля. На рис. 1 около экстраполированной отметки построены два строба. Измеренное местоположение ВС должно оказаться (ожидается) во внутреннем стробе с вероятностью  $Conf_1 = 0,65$ , а во внешнем –  $Conf_2 = 0,95$ . Попадание измеренной отметки во внутренний строб означает сохранение гипотезы о прямолинейности и равномерности. При обнаружении ВС в области, ограниченной треугольником  $a$  и дугой внутреннего строба, принимается решение о том, что цель движется прямолинейно с ускорением. Если точка наблюдается в заштрихованных областях  $b$  или  $v$ , тогда считается, что цель маневрирует по курсу и скорости.

При маневрах ВС нарушается соответствие между гипотезой прямолинейного равномерного движения и фактической траекторией, вследствие чего появляется динамическая ошибка сопровождения. Возрастание отклонений используется для обнаружения маневра путем сравнения результата накопления погрешности за  $n$  обзоров с установленным порогом. Геометрическая интерпретация соответствующего алгоритма приведена на рис. 2. Траектория ВС изображается в виде стрелки, проходящей через две последовательные отметки положения цели на  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м обзорах.

В момент  $t_i$  измеренные дальность  $R_i$  и азимут  $\theta_i$  определяют текущее положение и дают возможность рассчитать координаты на момент  $t_{i+1}$  (точка  $l$  на рис. 2). Кроме строба автосопровождения метки  $l$ , в предположении прямолинейного движения выставляется так называемый «сторожевой» строб обнаружения маневра  $Conf_3 = 0,998$ , помеченный штриховкой. Попадание в сторожевой строб измеренной отметки  $3$  от наблюдаемого ВС свидетельствует о маневре, а относительное положение внутри строба – о направлении и величине скорости его исполнения. Для алгоритмов обработки РЛИ факт обнаружения маневра становится переключателем длины учитываемой предыстории с  $10 \div 20$  точек до  $2 \div 4$  либо служит основанием для перехода к уравнениям движения с использованием полиномов более высокой степени.

Однако при этом сохраняется запаздывание сопровождения маневрирующего объекта, заложенное в традиционной схеме. Для преодоления затруднения следует отвергать гипотезу прямолинейного равномерного движения не по факту обнаружения маневра, а по рассчитанным плановым данным [3]. Такой подход позволяет расширить возможности системы с помощью добавления к принципу обратной связи (нет подтверждения упрежденной расчетной точки – переход к гипотезе маневра) автоматическим прогнозированием начала маневрирования на основе плана полета. Программное обеспечение (ПО) должно строить плановую траекторию движения с учетом описаний воздушных трасс, а также известных из летно-технических характеристик типов ВС радиусов разворота, и рассчитывать экстраполяционные точки по результатам вычислений на основе заданной линии пути.



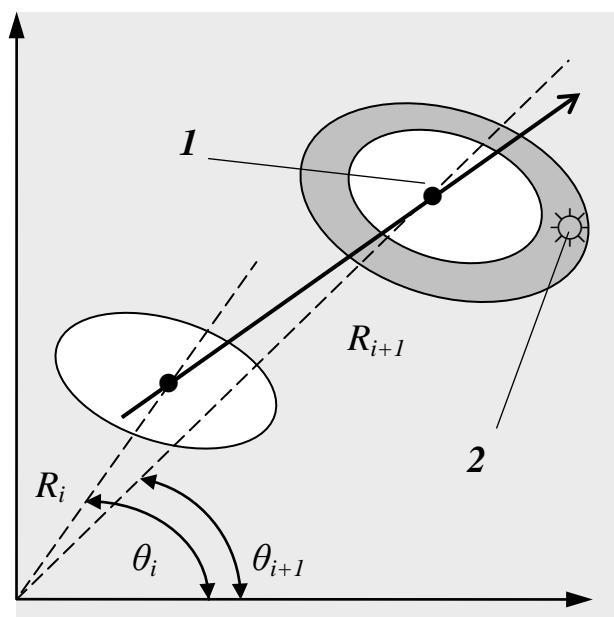


Рис. 2. Схема обнаружения маневра

кации [5]. С момента отождествления план полета пересчитывается с учетом измеренных значений скорости и координат. Далее расчет экстраполяционной точки использует априорную информацию о маршруте полета. На прямолинейных участках трасс сохраняется традиционная схема, а в окрестности каждой поворотной точки маршрута ПО, не дожидаясь обнаружения маневра по радиолокационным данным, превентивно укорачивает действующую предысторию полета и расширяет строб автосопровождения до размеров «сторожевого». При этом упрежденные точки рассчитываются на основании модели движения по окружности, описываемой радиусом разворота, соответствующим летно-техническим характеристикам, известным из плана полета сопровождаемого ВС [6].

### Заключение

По результатам моделирования можно заключить, что использование априорной плановой информации улучшает показатели быстродействия и устойчивости радиолокационного сопровождения ВС в штатных ситуациях управления воздушным движением [7]. Однако при имитации чрезвычайных ситуаций (например, нападение на экипаж), приводящих к неожиданному изменению маршрута, план полета становится дезинформацией для системы и требует специальных мер блокировки.

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 3.

С момента обнаружения ВС вместо традиционного выдвижения гипотезы о равновероятном значении курса его движения следует анализировать [4], какие трассы ГА расположены в окрестности координат появившегося ВС, и какой рейс должен выполняться в текущее время.

Захват и сопровождение ВС производятся по обычным правилам вторичной обработки РЛИ. Далее ПО устанавливает связь между описаниями объекта в комплексах программ обработки плановой информации и РЛИ. Наилучшим способом отождествления является их объединение в единую запись базы данных, хотя допускается и установление взаимных ссылок.

Отождествление происходит автоматически, если борт оснащен средствами опознавания, либо выполняется диспетчером с помощью функции «Привязка формуляра», если ВС сопровождается только по данным первичной ло-

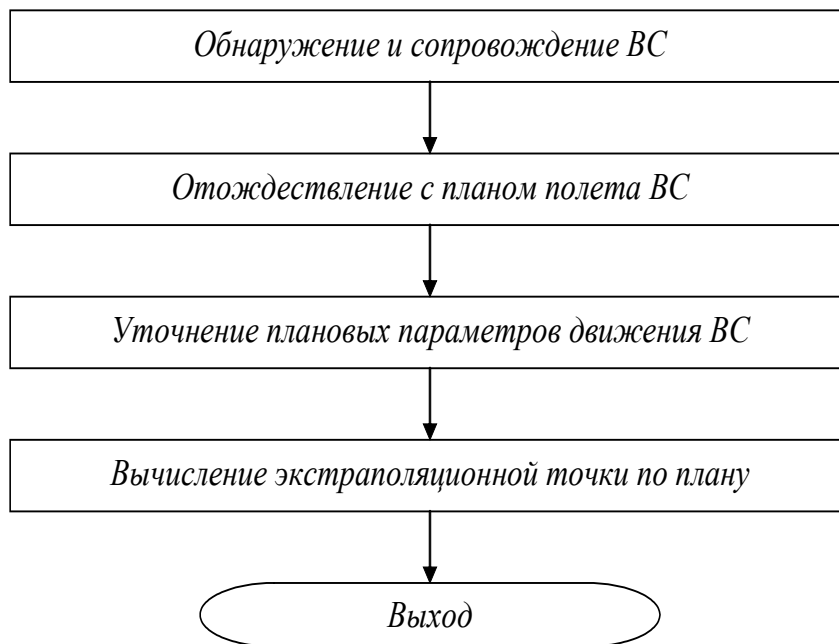


Рис. 3. Упрощенная схема алгоритма

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Хазен Э.М., Паронджанов С.Д.** Исследование задачи отождествления траекторий воздушных судов // Управление воздушным движением. - М.: Воздушный транспорт, 1983.
2. **Широков Л.Е.** Комплексное гипотезное сопровождение движущихся объектов // Известия Академии наук. Теория и системы управления. - 2000. - № 6.
3. **Рудельсон Л.Е.** Программное обеспечение автоматизированных систем управления воздушным движением // Функциональное программное обеспечение: учеб. пособие. - М.: МГТУ ГА, 2004. - Ч. II.
4. **Кузнецов В.Л.** Кинетический подход к описанию эволюции неопределенности состояния воздушного судна в задаче расчета риска катастроф // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2006. - № 105.
5. Документ Евроконтроля DLM-0607-001-02-00, 2007. Этап определения проекта SESAR (Исследование организации воздушного движения в едином Европейском небе).
6. **Глаговский К.А., Лавина В.В., Преображенская Е.В.** Организация сетевого доступа к распределенной базе аэронавигационной информации // Актуальные проблемы и перспективы развития гражданской авиации – 2012: сб. докладов междунар. науч.-технич. конф. - Иркутск: ИФ МГТУ ГА, 2012.
7. **Омородион Р.О., Рудельсон Л.Е.** Функция и предикат поиска аэронавигационных данных для оценки загрузки воздушного пространства // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 195.

USING OF FLIGHT-PLAN INFORMATION FOR QUALITY  
IMPROVEMENT OF RADAR DATA PROCESSING

Glagovskiy K.A., Lavina V.V., Rudelson L.E.

Criterion of a posteriori probability maximum is the methodological basis of the secondary processing of radar data in order to receive proper aircraft trajectory gasket. It is proposed to add to this scheme a priori information about the route which is known from the flight plan.

**Key words:** processing of radar data, criterion of a posteriori probability maximum, a priori information about the route of flight.

## Сведения об авторах

**Глаговский Кирилл Андреевич**, 1989 г.р., окончил МГТУ ГА (2011), аспирант МГТУ ГА, автор 8 научных работ, область научных интересов – вычислительные системы и методы, распределенные системы, организация вычислений.

**Лавина Виктория Валерьевна**, окончила МГТУ ГА (2012), аспирантка МГТУ ГА, автор 7 научных работ, область научных интересов – программная обработка радиолокационной информации в автоматизированных системах организации воздушного движения.

**Рудельсон Лев Ефимович**, 1944 г.р., окончил МЭИ (1968), доктор технических наук, профессор МГТУ ГА, автор более 170 научных работ, область научных интересов – программное обеспечение автоматизированных систем организации воздушного движения.

UDC 514.763

## AFFINE CONNECTION ADJOINED TO WEB $W(1, n, 1)$

A.A. DUYUNOVA

The article is presented by professor, Science Doctor in Technics A.V. Samokhin

The 3-web  $W(1, n, 1)$  and the system of differential equations are adjoined with an associated affine torsion-free connection (the so called canonical connection of an ordinary differential equations' system). Components of the torsion tensor of this connection are expressed through the functions defining the system of differential equations. A general form of the system of differential equations with the zero torsion tensor is obtained.

**Key words:** multidimensional three-web, system of ordinary differential equations, affine connection.

### Introduction

The paper is a continuation of [3], where we set the correspondence between the systems of ordinary differential equations and 3-webs  $W(1, n, 1)$  formed by foliations of dimension  $1, n, 1$  on the manifold of dimension  $n+1$ . In [3] we had found structural equations for the  $W(1, n, 1)$ -web and its principal tensors. In the present paper their components and differential forms contained in the structural equations are expressed through functions that define the system of differential equations; we also clarify the geometrical content of reducing the first structural tensor to zero (see Theorem 1 below).

Let  $M$  be a smooth manifold of dimension  $n+1$ . Consider a 3-web on it given by families  $\lambda_1$  and  $\lambda_3$  of curves and family  $\lambda_2$  of hypersurfaces. Denote by  $T_p(M)$  a space tangent to manifold  $M$  at point  $p$ , and by  $T_p(F_\alpha)$ ,  $\alpha=1, 2, 3$ , spaces tangent to foliations  $F_\alpha$  of web  $W$  at this point. At the same point  $p$  we consider the manifold  $R(W)$  of adapted frames  $e_a$ ,  $a, b, \dots = 1, 2, \dots, n+1$ , whose first  $n$  vectors lie in  $T_p(F_2)$ ,  $e_{n+1}$  lies in  $T_p(F_1)$ , and vector  $e_n - e_{n+1}$  - in  $T_p(F_3)$ . It is shown in [3] that in the above described frame of the family  $\lambda_\alpha$  webs  $W(1, n, 1)$  are given by the following Pfaffian equations:

$$\begin{aligned}\lambda_1 : \omega^u &= 0, \omega^n = 0; \\ \lambda_2 : \omega^{n+1} &= 0; \\ \lambda_3 : \omega^u &= 0, \omega^n + \omega^{n+1} = 0,\end{aligned}$$

where  $\{\omega^u, \omega^n, \omega^{n+1}\}$  is a dual coframe, and  $u, v, \dots = 1, 2, \dots, n-1$ . The group of admissible transformations preserving the form of the equations defines  $G$ -structure on the manifold of 3-web  $W(1, n, 1)$ . The introduced forms satisfy the following structural equations:

$$\begin{aligned}d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega_v^u + \mu^u \omega^n \wedge \omega^{n+1}; \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \omega_u^n + \omega^n \wedge \omega_n^n; \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \omega_n^n,\end{aligned}\tag{1}$$

and quantities  $\mu^u$  form a tensor on  $G$ -structure. It is called *the first structural tensor* of 3-web  $W(1, n, 1)$ . The differential extension of (1) leads to the equations:

$$\begin{aligned}
d\omega_v^u &= \omega_v^w \wedge \omega_w^u + \mu^u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1} + k_v^u \omega^n \wedge \omega^{n+1} - \omega^w \wedge \omega_{vw}^u; \\
d\omega_u^n &= \omega_u^v \wedge \omega_v^n + \omega_u^w \wedge \omega_w^n + t_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} - \omega^v \wedge \omega_{uv}^n; \\
d\omega_n^n &= \mu^u \omega^{n+1} \wedge \omega_u^n + t_u \omega^u \wedge \omega^{n+1} + t_n \omega^n \wedge \omega^{n+1}; \\
d\mu^u &= -\mu^v \omega_v^u + 2\mu^u \omega_n^n + k_v^u \omega^v + k_n^u \omega^n + k_{n+1}^u \omega^{n+1};
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
d\omega_{vw}^u + \omega_s^u \wedge \omega_{vw}^s - \omega_v^s \wedge \omega_{sw}^u - \omega_w^s \wedge \omega_{vs}^u - \mu^u \omega_{vw}^n \wedge \omega^{n+1} &= \\
= -k_w^u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1} - k_v^u \omega_w^n \wedge \omega^{n+1} - h_{vw}^u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega_{vws}^u \wedge \omega^s; \\
d\omega_{uv}^n - \omega_{uv}^w \wedge \omega_w^n - \omega_u^w \wedge \omega_{vw}^n - \omega_{uv}^n \wedge \omega_n^n + \omega_{uw}^n \wedge \omega_v^w &= \\
= -t_v \omega_u^n \wedge \omega^{n+1} - t_u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1} - m_{uv} \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega_{uvw}^n \wedge \omega^w; \\
dt_u - t_v \omega_u^v - t_u \omega_n^n - t_n \omega_u^n + k_u^v \omega_v^n = m_{uv} \omega^v + m_{un} \omega^n + m_{u(n+1)} \omega^{n+1} + \mu^v \omega_{vu}^n;
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
dt_n - 2t_n \omega_n^n + k_n^u \omega_u^n = m_{un} \omega^u + m_{nn} \omega^n + m_{n(n+1)} \omega^{n+1}; \\
dk_v^u + k_v^w \omega_w^u - k_w^u \omega_v^w - k_n^u \omega_v^n - 2k_v^u \omega_n^n = h_{vw}^u \omega^w + h_{vn}^u \omega^n + h_{v(n+1)}^u \omega^{n+1} + \mu^w \omega_{vw}^u; \\
dk_n^u + k_n^v \omega_v^u - 3k_n^u \omega_n^n = h_{vn}^u \omega^v + h_{nn}^u \omega^n + h_{n(n+1)}^u \omega^{n+1};
\end{aligned}$$

$$dk_{n+1}^u + k_{n+1}^v \omega_v^u - 3k_{n+1}^u \omega_n^n = 3\mu^u \mu^v \omega_v^n + (h_{v(n+1)}^u - 2\mu^u t_v) \omega^v + (h_{n(n+1)}^u - 2\mu^u t_n) \omega^n + h_{n+1(n+1)}^u \omega^{n+1},$$

and the following relations take place:

$$\begin{aligned}
h_{vw}^u &= h_{vw}^u; & m_{uv} &= m_{vu}; \\
\omega_{uv}^n &= \omega_{vu}^n; & \omega_{vw}^u &= \omega_{vw}^u; & \omega_{uvw}^n &= \omega_{uvw}^n; & \omega_{vws}^u &= \omega_{vsw}^u.
\end{aligned}$$

The set of quantities  $\{t_u, t_n, k_v^u, k_n^u, k_{n+1}^u\}$  forms a tensor on  $\check{G}$ -structure, where  $\check{G}$  is a subgroup of the extended group  $G$ . It is called *the second structural tensor* of 3-web  $W(1, n, 1)$ .

By [3], the system of differential equations

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad (i, j, \dots = 1, \dots, n) \tag{4}$$

is related with a 3-web  $W(1, n, 1)$  on manifold of variables  $x^i, t$  consisting of families  $\lambda_\alpha$ , where

$$\lambda_1 : x^i = const; \quad \lambda_2 : t = const; \quad \lambda_3 : F^i(t, x^j) = c^i = const$$

(the latter family consists of integral curves of the system (4)). Components of the first and second structural tensors of the web are expressed through the functions  $f^i$  defining the system of ordinary differential equations:

$$\begin{aligned}
\mu^u &= f^u \frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n \frac{\partial f^u}{\partial t}; \\
t_u &= \frac{1}{(f^n)^3} \frac{\partial f^n}{\partial x^u} \frac{\partial f^n}{\partial t} - \frac{1}{(f^n)^2} \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t}; \\
t_n &= \frac{1}{f^n} \left( \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} + \frac{\partial f^n}{\partial x^u} \frac{\partial f^u}{\partial t} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} \right) - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t}; \\
k_v^u &= \frac{1}{f^n} \left( \frac{\partial f^u}{\partial x^v} \frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \frac{\partial f^u}{\partial t} - f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + \frac{f^w}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \delta_v^u - \frac{\partial f^w}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \delta_v^u \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_n^u &= f^u f^v \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - f^v f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + f^u f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} - (f^n)^2 \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t} + \\
&+ f^n \frac{\partial f^u}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} + f^n \frac{\partial f^v}{\partial t} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} - f^u \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^n} - f^u \frac{\partial f^v}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^v}; \\
k_{n+1}^u &= f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial t^2} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial t^2} + 3 \frac{f^u}{f^n} \left( \frac{\partial f^n}{\partial t} \right)^2 - 3 \frac{\partial f^u}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial t}.
\end{aligned}$$

The forms contained in the structural equations (1), (2) can be expressed through  $dx^i$  and  $f^i$ . In particular, these formulas allow proving the following statement.

**Theorem 1.** A system of ordinary differential equations is autonomous iff  $\mu^u$  and  $\omega_n^n$  are equal to zero.

### 1. Affine connection

It is known (see, for example, [4]) that on manifold  $M$  with an affine connection, the Pfaffian forms  $\theta^a$ ,  $\theta_b^a$ ,  $a, b, \dots = 1, 2, \dots, n+1$  that define the connection satisfy equations of the form:

$$\begin{aligned}
d\theta^a &= \theta^b \wedge \theta_b^a + R_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c; \\
d\theta_b^a &= \theta_b^c \wedge \theta_c^a + R_{bcd}^a \theta^c \wedge \theta^d,
\end{aligned} \tag{5}$$

where  $R_{bc}^a$ ,  $R_{bcd}^a$  are the torsion and curvature tensors of the connection respectively, and quadratic forms  $\Omega^a = R_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c$  and  $\Omega_b^a = R_{bcd}^a \theta^c \wedge \theta^d$  are the torsion and curvature forms of the connection. We can see from equations (1) and (2) that, generally, they are not structural equations of an affine connection.

**Theorem 2.** Equations (1) and (2) on manifold  $M$  define an affine connection without torsion iff the forms  $\omega_u^n$ ,  $\omega_{uv}^n$  and  $\omega_{vw}^u$  are principal, i.e., they are expressed through the basic forms  $\omega^u$ ,  $\omega^a$  and  $\omega^{n+1}$ .

Sufficiency. For the equations (1) and (2) we put

$$\begin{aligned}
\theta^a &\equiv (\omega^u, \omega^n, \omega^{n+1}); \\
\theta_b^a &= \begin{pmatrix} \theta_v^u & \theta_n^u & \theta_{n+1}^u \\ \theta_u^n & \theta_n^n & \theta_{n+1}^n \\ \theta_u^{n+1} & \theta_n^{n+1} & \theta_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_v^u & \mu^u \omega^{n+1} & 0 \\ \omega_u^n & \omega_n^n & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^n \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{6}$$

and

$$\begin{aligned}
\omega_u^n &= \lambda_{uv}^n \omega^v + \lambda_{un}^n \omega^n + \lambda_{un+1}^n \omega^{n+1}; \\
\omega_{uv}^n &= \lambda_{uvw}^n \omega^w + \lambda_{uvn}^n \omega^n + \lambda_{uvn+1}^n \omega^{n+1}; \\
\omega_{vw}^u &= \lambda_{vws}^u \omega^s + \lambda_{vwn}^u \omega^n + \lambda_{vwn+1}^u \omega^{n+1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Then the connection forms obtained this way satisfy the equations (5). Indeed, the forms  $\theta_v^u$ ,  $\theta_u^n$ ,  $\theta_n^n$  and  $\theta_{n+1}^{n+1}$  become structural equations of web (2); and for the forms  $\theta_n^u$  by (6) and (2) we get:

$$\begin{aligned}
&d\theta_n^u - \theta_n^v \wedge \theta_v^u - \theta_n^n \wedge \theta_n^u - \theta_n^{n+1} \wedge \theta_{n+1}^u = \\
&= d\mu^u \wedge \omega^{n+1} + \mu^u d\omega^{n+1} - \mu^v \omega^{n+1} \wedge \omega_v^u - \mu^u \omega_n^n \wedge \omega^{n+1} = \\
&= \left( -\mu^v \omega_v^u + 2\mu^u \omega_n^n + k_v^u \omega^v + k_n^u \omega^n + k_{n+1}^u \omega^{n+1} \right) \wedge \omega^{n+1} + \mu^u \omega^{n+1} \wedge \omega_n^n - \\
&- \mu^v \omega^{n+1} \wedge \omega_v^u - \mu^u \omega_n^n \wedge \omega^{n+1} = k_v^u \omega^v \wedge \omega^{n+1} + k_n^u \omega^n \wedge \omega^{n+1}.
\end{aligned}$$

The right-hand side of the latter equation contains only combinations of basic forms, which proves the statement.

Necessity. Let structural equations (1), (2) set affine connection without torsion. Comparing equations (1) and equations (5) for the connection we see that components of connection forms may be chosen only in the form (6). Since equations (2) must have the form (5) then firstly, the forms  $\omega_{uv}^n$  and  $\omega_{vw}^u$  must be principal, i.e., relations (7) must hold; secondly, the last two equations of (5) have the form:

$$\begin{aligned}\theta_n^n &= \theta_n^u \wedge \theta_u^n + \theta_n^{n+1} \wedge \theta_{n+1}^n + R_{nuv}^n \theta^u \wedge \theta^v + 2R_{nmu}^n \theta^u \wedge \theta^n + 2R_{nun+1}^n \theta^u \wedge \theta^{n+1} + 2R_{mnn+1}^n \theta^n \wedge \theta^{n+1}; \\ d\theta_{n+1}^{n+1} &= \theta_{n+1}^u \wedge \theta_u^{n+1} + \theta_{n+1}^n \wedge \theta_n^{n+1} + R_{n+1uv}^{n+1} \theta^u \wedge \theta^v + 2R_{n+1un}^{n+1} \theta^u \wedge \theta^n + 2R_{n+1un+1}^{n+1} \theta^u \wedge \theta^{n+1} + 2R_{n+1nn+1}^{n+1} \theta^n \wedge \theta^{n+1}.\end{aligned}$$

In view of (6) the right-hand sides of these equations must coincide. But the right part of the latter equation contains only basic forms since the first two addends are equal to zero (see (6)). Therefore the form  $\theta_n^u \wedge \theta_u^n$  contained in the right-hand side of the first equation must be expressed through basic forms. Since the forms  $\theta_n^u$  are principal (see (6)) it follows that the forms  $\theta_u^n$  are expressed through basic forms, i.e., the relations (7) hold.

Following [2] we call connections satisfying the hypotheses of Theorem 2 by *connections associated* with 3-web  $W(1, n, 1)$  and denote them by  $\Gamma$ .

Hereafter, speaking of affine connections on 3-web  $W(1, n, 1)$  we will mean associated connections.

Using equations (1), (2) and (7), we find nonzero components of curvature tensor of the connection  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned}R_{vws}^u &= -\lambda_{v[ws]}^u; & R_{vwn}^u &= -\frac{1}{2}\lambda_{vwn}^u; & R_{vwn+1}^u &= -\frac{1}{2}\lambda_{vwn+1}^u; & R_{vnn+1}^u &= \frac{1}{2}k_v^u; \\ R_{nvn+1}^u &= \frac{1}{2}k_v^u; & R_{nnn+1}^u &= \frac{1}{2}k_n^u; \\ R_{uvw}^n &= -\lambda_{u[vw]}^n; & R_{uvn}^n &= -\frac{1}{2}\lambda_{uvn}^n; & R_{uvn+1}^n &= -\frac{1}{2}\lambda_{uvn+1}^n; & R_{un+1}^n &= \frac{1}{2}t_u; \\ R_{nun+1}^n &= \frac{1}{2}t_u; & R_{nnn+1}^n &= \frac{1}{2}t_n; \\ R_{n+1un+1}^{n+1} &= \frac{1}{2}(t_u - \mu^v \lambda_{vu}^n); & R_{n+1nn+1}^{n+1} &= \frac{1}{2}(t_n - \mu^u \lambda_{un}^n).\end{aligned}$$

**Theorem 3.** For all affine connections  $\Gamma$  associated with 3-web  $W(1, n, 1)$ , and only for such connections, foliations of the web are completely geodesic.

Parallel transfer of the vector  $\xi = \{ \xi^a \}$  in affine connection is defined by the equations

$$d\xi^a + \xi^b \theta_b^a = 0,$$

while equations of geodesic lines of the connection have the form

$$d\theta^a + \theta^b \theta_b^a = \theta\theta^a, \quad (8)$$

where  $d$  is the symbol of the ordinary (not exterior) differentiation, and  $\theta$  is a Pfaffian form.

Let us set on manifold  $M^{n+1}$  carrying 3-web  $W(1, n, 1)$  an affine connection associated with the web. Since the form matrix of the such a connection has the form (6), the equations of geodesic lines (8) are of the form:



$$\begin{aligned}
d\omega^u + \omega^v \omega_v^u + \mu^u \omega^n \omega^{n+1} &= \theta \omega^u; \\
d\omega^n + \omega^u \omega_u^n + \omega^n \omega_n^n &= \theta \omega^n; \\
d\omega^{n+1} + \omega^{n+1} \omega_n^{n+1} &= \theta \omega^{n+1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

It follows from (9) that the lines of web  $W(1,n,1)$  of family  $\lambda_1$  defined by equations  $\omega^u = 0$ ,  $\omega^n = 0$  are geodesic with respect to the connection  $\Gamma$ . The surfaces of the second family  $\lambda_2$  defined by the equation  $\omega^{n+1} = 0$  are completely geodesic since the last equation of (9) is identically satisfied, while the other two define geodesic lines on the surfaces. By analogy, for the lines of the web in the third family  $\lambda_3$  defined by equations  $\omega^u = 0$  and  $\omega^n + \omega^{n+1} = 0$  the first equation of (9) is satisfied identically, while the second and third equations are equivalent. We find the form  $\theta$  from this unique equation.

Inversely, consider on a manifold  $M^{n+1}$  carrying the 3-web  $W(1,n,1)$  an affine connection  $\Gamma$  without torsion with the forms  $\theta_b^a$ . The geodesics equations for the 3-web have the common form:

$$\begin{aligned}
d\omega^u + \omega^v \theta_v^u + \omega^n \theta_n^u + \omega^{n+1} \theta_{n+1}^u &= \theta \omega^u; \\
d\omega^n + \omega^u \theta_u^n + \omega^n \theta_n^n + \omega^{n+1} \theta_{n+1}^n &= \theta \omega^n; \\
d\omega^{n+1} + \omega^u \theta_u^{n+1} + \omega^n \theta_n^{n+1} + \omega^{n+1} \theta_{n+1}^{n+1} &= \theta \omega^{n+1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Consider the web  $W(1,n,1)$ . Let the lines of the first foliation  $\lambda_1$  defined by equations  $\omega^u = 0$  and  $\omega^n = 0$  be geodesic for this connection. Then from (10) we get  $\theta_{n+1}^u = 0$  and  $\theta_{n+1}^n = 0$  modulo forms  $\omega^u$ ,  $\omega^n$ . If the second foliation  $\lambda_2$  defined by the equation  $\omega^{n+1} = 0$  is completely geodesic, from (10) it follows  $\omega^u \theta_u^{n+1} + \omega^n \theta_n^{n+1} = 0$ . Since geodesic lines on the completely geodesic surface  $\omega^{n+1} = 0$  may pass in any direction, the last equality is satisfied identically with respect to  $\omega^u$  and  $\omega^n$ . It follows then  $\theta_u^{n+1} = 0$  and  $\theta_n^{n+1} = 0$  modulo form  $\omega^{n+1}$ . Finally, if the lines of the third foliations of 3-web  $W$  defined by equations  $\omega^u = 0$  and  $\omega^n + \omega^{n+1} = 0$  are geodesic, from the same equations (10) we obtain  $\theta_n^n = \theta_{n+1}^{n+1}$  and  $\theta_n^u = 0$  modulo forms  $\omega^u$  and  $\omega^n + \omega^{n+1}$ .

Thus, for any connection  $\Gamma$  such that the leaves of web  $W(1,n,1)$  are completely geodesic the following relations hold:

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1}^u &= \chi_{n+1v}^u \omega^v + \chi_{n+1n}^u \omega^n; \\
\theta_{n+1}^n &= \chi_{n+1v}^n \omega^v + \chi_{n+1n}^n \omega^n; \\
\theta_u^{n+1} &= \chi_{un+1}^{n+1} \omega^{n+1}; \\
\theta_n^{n+1} &= \chi_{nn+1}^{n+1} \omega^{n+1}; \\
\theta_{n+1}^{n+1} &= \theta_n^n + \chi_{n+1v}^{n+1} \omega^v + \chi_{n+1n}^{n+1} (\omega^n + \omega^{n+1}); \\
\theta_n^u &= \chi_{nv}^u \omega^v + \chi_{nm}^u (\omega^n + \omega^{n+1}).
\end{aligned} \tag{11}$$

We see that the choice of connection  $\Gamma$  is of great arbitrariness. In this sense we can speak about a family of connections  $\Gamma$ .

Assuming (11) in the first set of equations (5), we have:

$$\begin{aligned}
d\omega^u &= \omega^v \wedge \theta_v^u + \omega^n \wedge (\chi_{nv}^u \omega^v + \chi_{nn}^u \omega^n) + \omega^{n+1} \wedge (\chi_{n+1v}^u \omega^v + \chi_{n+1n}^u \omega^n); \\
d\omega^n &= \omega^u \wedge \theta_u^n + \omega^n \wedge \theta_n^n + \omega^{n+1} \wedge (\chi_{n+1v}^n \omega^v + \chi_{n+1n}^n \omega^n); \\
d\omega^{n+1} &= \chi_{un+1}^{n+1} \omega^u \wedge \omega^{n+1} + \chi_{nn+1}^{n+1} \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega^{n+1} \wedge (\theta_n^n + \chi_{n+1v}^{n+1} \omega^v + \chi_{n+1n}^{n+1} \omega^n);
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \left( \theta_v^u - \chi_{nv}^u \omega^n - \chi_{n+1v}^u \omega^{n+1} \right) + \omega^n \wedge \omega^{n+1} (\chi_{nn}^u - \chi_{n+1n}^u); \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \left( \theta_u^n + \left( \chi_{n+1u}^{n+1} + \chi_{un+1}^{n+1} \right) \omega^n - \chi_{n+1u}^n \omega^{n+1} \right) + \\ &+ \omega^n \wedge \left( \theta_n^n + \left( \chi_{n+1u}^{n+1} - \chi_{un+1}^{n+1} \right) \omega^u + \left( \chi_{n+1n}^{n+1} - \chi_{nn+1}^{n+1} \right) \omega^n - \chi_{n+1n}^n \omega^{n+1} \right); \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \left( \theta_n^{n+1} + \left( \chi_{n+1u}^{n+1} - \chi_{un+1}^{n+1} \right) \omega^u + \left( \chi_{n+1n}^{n+1} - \chi_{nn+1}^{n+1} \right) \omega^n - \chi_{n+1n}^n \omega^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Denoting

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_v^u &= \theta_v^u - \chi_{nv}^u \omega^n - \chi_{n+1v}^u \omega^{n+1}; \\ \tilde{\mu}^u &= \chi_{nn}^u - \chi_{n+1n}^u; \\ \tilde{\theta}_u^n &= \theta_u^n + \left( \chi_{n+1u}^{n+1} + \chi_{un+1}^{n+1} \right) \omega^n - \chi_{n+1u}^n \omega^{n+1}; \\ \tilde{\theta}_n^n &= \theta_n^n + \left( \chi_{n+1u}^{n+1} - \chi_{un+1}^{n+1} \right) \omega^u + \left( \chi_{n+1n}^{n+1} - \chi_{nn+1}^{n+1} \right) \omega^n - \chi_{n+1n}^n \omega^{n+1}; \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \tilde{\theta}_v^u + \tilde{\mu}^u \omega^n \wedge \omega^{n+1}; \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \tilde{\theta}_u^n + \omega^n \wedge \tilde{\theta}_n^n; \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \tilde{\theta}_n^n. \end{aligned}$$

The latter equations coincide with equations (1), if we put  $\omega_v^u = \tilde{\theta}_v^u$ ,  $\mu^u = \tilde{\mu}^u$ ,  $\omega_u^n = \tilde{\theta}_u^n$ ,  $\omega_n^n = \tilde{\theta}_n^n$ . Note that Theorems 2 and 3 were formulated in [2]. However, their proofs were not given.

## 2. System of ordinary differential equations with zero curvature tensor

By [3], the forms  $\omega_u^n$ ,  $\omega_{uv}^n$  and  $\omega_{vw}^u$  are expressed through functions  $f^i$  defining the system of ordinary differential equations:

$$\omega_u^n = -\frac{1}{(f^n)^3} \frac{\partial f^n}{\partial x^u} dx^n; \quad (12)$$

$$\omega_{uv}^n = \frac{1}{(f^n)^4} \left( \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial x^u} - \frac{4}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^u} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \right) dx^n; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \omega_{vw}^u &= \frac{1}{(f^n)^3} \left( \frac{2}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^v} \right) \omega^u + \\ &+ \frac{1}{(f^n)^2} \left( -\frac{1}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \frac{\partial f^n}{\partial t} \delta_w^u - \frac{1}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial t} \delta_v^u + \frac{\partial^2 f^n}{\partial t \partial x^v} \delta_w^u + \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial t} \delta_v^u \right) dt + \\ &+ \frac{1}{(f^n)^3} \left( -\frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} - \frac{\partial f^u}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} - 2 \frac{f^s}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \delta_v^u - 2 \frac{f^s}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \delta_w^u - \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \delta_v^u + \right. \\ &+ \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^s}{\partial x^w} \delta_v^u + \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^s}{\partial x^v} \delta_w^u + f^s \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^s} \delta_v^u + f^s \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s \partial x^v} \delta_w^u + f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^n} \delta_v^u + f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial x^v} \delta_w^u + \\ &\left. + \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \delta_w^u + 2 \frac{f^u}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^v} + f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w \partial x^v} \right) dx^n. \quad (14) \end{aligned}$$

The above formulas show that forms  $\omega_u^n$ ,  $\omega_{uv}^n$  and  $\omega_{vw}^u$  are expressed through basic forms  $\omega^u$ ,  $\omega^n$  and  $\omega^{n+1}$ . By Theorem 2 this implies that an associated affine connection is adjoined to the system of differential equations (4) in a natural way. Let us call it a *canonical connection* of the system. And the curvature tensor of the connection will be called *the curvature tensor of the system of ordinary differential equations*.

After a number of calculations we find the expression of components of the curvature tensor through functions  $f^i$  that define the system (4):

$$\begin{aligned}
R_{vws}^u &= -\frac{1}{2(f^n)^3} \left( \frac{2}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^v} \right) \delta_s^u + \frac{1}{2(f^n)^3} \left( \frac{2}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s \partial x^v} \right) \delta_w^u; \\
R_{vwn}^u &= -\frac{1}{2(f^n)^2} \left( -\frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} - \frac{\partial f^u}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} - 2 \frac{f^s}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \delta_v^u - 2 \frac{f^s}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \delta_w^u - \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \delta_v^u - \right. \\
&\quad - \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \delta_w^u + \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^s}{\partial x^w} \delta_v^u + \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^s}{\partial x^v} \delta_w^u + f^s \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^s} \delta_v^u + f^s \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s \partial x^v} \delta_w^u + f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^n} \delta_v^u + \\
&\quad \left. + f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial x^v} \delta_w^u + 2 \frac{f^u}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial x^v} + f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w \partial x^v} \right); \\
R_{vwn+1}^u &= \frac{1}{2(f^n)^2} \left( -\frac{1}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \frac{\partial f^n}{\partial t} \delta_w^u - \frac{1}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \frac{\partial f^n}{\partial t} \delta_v^u + \frac{\partial^2 f^n}{\partial t \partial x^v} \delta_w^u + \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w \partial t} \delta_v^u \right); \\
R_{vnn+1}^u &= R_{nvn+1}^u = \frac{1}{2f^n} \left( \frac{\partial f^u}{\partial x^v} \frac{\partial f^n}{\partial t} + f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \frac{\partial f^u}{\partial t} - f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + \frac{f^w}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \delta_v^u - \frac{\partial f^w}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^w} \delta_v^u \right); \\
R_{nnn+1}^u &= \frac{1}{2} \left( f^u f^v \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial t} - f^v f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} + f^u f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} - (f^n)^2 \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t} + \right. \\
&\quad \left. + f^n \frac{\partial f^u}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} + f^n \frac{\partial f^v}{\partial t} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} - f^u \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^n} - f^u \frac{\partial f^v}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \right); \\
R_{uvn}^n &= -\frac{1}{2(f^n)^3} \left( \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial x^u} - \frac{4}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^u} \frac{\partial f^n}{\partial x^v} \right); \\
R_{unn+1}^n &= R_{nunn+1}^n = R_{n+1unn+1}^n = \frac{1}{2(f^n)^2} \left( \frac{1}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^u} - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} \right); \\
R_{nnn+1}^n &= \frac{1}{2f^n} \left( \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^n} + \frac{\partial f^n}{\partial x^u} \frac{\partial f^u}{\partial t} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t}; \\
R_{n+1nn+1}^{n+1} &= \frac{1}{2f^n} \left( \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^n} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} + \frac{f^u}{2(f^n)^2} \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^u}.
\end{aligned}$$

Let us find the form of the system of ordinary differential equations with a zero curvature tensor. To do this we must put all components of the curvature tensor equal to zero. From the equation  $R_{vws}^u = 0$ , for  $u = w \neq s$ , we get

$$\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s \partial x^v} = \frac{2}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial x^s} \frac{\partial f^n}{\partial x^v}.$$

From this and the condition  $R_{uvn}^n = 0$  it follows that

$$\frac{\partial f^n}{\partial x^v} = 0.$$

Therefore function  $f^n$  depends on the variables  $x^n$  and  $t$  only, i.e.,

$$f^n = f^n(x^n, t). \quad (15)$$

By (15) in the system  $R_{bcd}^a = 0$  only the following equations are left:

$$\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial x^v} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} = \frac{1}{f^n} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} \frac{\partial f^n}{\partial t}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} = \frac{1}{f^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^n}; \quad (18)$$

$$f^v f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v \partial t} - f^u f^n \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} + (f^n)^2 \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t} - f^n \frac{\partial f^u}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n \frac{\partial f^v}{\partial t} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} + f^u \frac{\partial f^n}{\partial t} \frac{\partial f^n}{\partial x^n} = 0. \quad (19)$$

Putting (17) and (18) in (19) we have

$$-\frac{f^v}{f^n} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} \frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t} + \frac{\partial f^u}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial t} + \frac{\partial f^v}{\partial t} \frac{\partial f^u}{\partial x^v} = 0. \quad (20)$$

Now we integrate the equation (16)

$$f^u = a_v^u(x^n, t)x^v + b^u(x^n, t). \quad (21)$$

Let us write (17) in the form

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\frac{\partial f^u}{\partial x^v}}{f^n} \right) = 0,$$

or, using (21),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a_v^u(x^n, t)}{f^n(x^n, t)} \right) = 0.$$

Hence

$$a_v^u(x^n, t) = c_v^u(x^n) f^n(x^n, t). \quad (22)$$

Now we find the form  $f^n(x^n, t)$ . Let us assume  $f^n = e^\varphi$ ,  $\varphi = \varphi(x^n, t)$ . Then (18) becomes

$$\varphi_m = 0,$$

whence

$$\varphi = \tilde{q}(x^n) + \tilde{g}(t).$$

We come back to  $f^n$

$$f^n = e^{\bar{q}(x^n) + \bar{g}(t)} = q(x^n)g(t). \quad (23)$$

From (22) and (23) it follows that the function  $f^u$  (see (21)) will take the form

$$f^u = c_v^u(x^n)q(x^n)g(t)x^v + b^u(x^n, t). \quad (24)$$

We put (23) and (24) in the equation (20). To do this we first find

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^u}{\partial x^n} &= \frac{\partial c_v^u(x^n)}{\partial x^n} q(x^n)g(t)x^v + \frac{\partial q(x^n)}{\partial x^n} c_v^u(x^n)g(t)x^v + \frac{\partial b^u(x^n, t)}{\partial x^n}; \\ \frac{\partial f^u}{\partial t} &= c_v^u(x^n)x^v q(x^n) \frac{\partial g(t)}{\partial t} + \frac{\partial b^u(x^n, t)}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n \partial t} &= \frac{\partial c_v^u(x^n)}{\partial x^n} \frac{\partial g(t)}{\partial t} q(x^n)x^v + \frac{\partial q(x^n)}{\partial x^n} c_v^u(x^n) \frac{\partial g(t)}{\partial t} x^v + \frac{\partial^2 b^u(x^n, t)}{\partial x^n \partial t}. \end{aligned}$$

Substituting this in (20), after some transformations we come to the equation

$$\left( b^v(x^n, t)c_v^u(x^n) - \frac{\partial b^u(x^n, t)}{\partial x^n} \right) \frac{\partial g(t)}{\partial t} + \left( \frac{\partial^2 b^u(x^n, t)}{\partial x^n \partial t} - \frac{\partial b^v(x^n, t)}{\partial t} c_v^u(x^n) \right) g(t) = 0$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\frac{\partial b^u(x^n, t)}{\partial x^n} - b^v(x^n, t)c_v^u(x^n)}{g(t)} \right) = 0. \quad (25)$$

Integrating (25) we find

$$\frac{\partial b^u(x^n, t)}{\partial x^n} = b^v(x^n, t)c_v^u(x^n) + g(t)r^u(x^n), \quad (26)$$

where  $r^u(x^n)$  are some new functions. Thus the following Theorem is proved.

**Theorem 4.** The system of ordinary differential equations (4) with zero curvature tensor has the form:

$$\begin{aligned} \frac{dx^u}{dt} &= c_v^u(x^n)q(x^n)g(t)x^v + b^u(x^n, t); \\ \frac{dx^n}{dt} &= q(x^n)g(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Here functions  $b^u(x^n, t)$  satisfy the equation (26).

This result can be simplified. By admissible substitution of the variables  $x^n = x^n(\tilde{x}^n)$  and  $t = t(\tilde{t})$  the last equation of (27) takes the form

$$\frac{dx^n}{dt} = 1,$$

i.e.,  $f^n(x^n, t) = 1$ . By integration we get  $x^n = t + c$ . In this case system (27) takes the form

$$\frac{dx^u}{dt} = C_v^u(t)x^v + B^u(t),$$

where, taking (26) into account, functions  $B^u(t)$  satisfy the equations

$$\frac{dB^u}{dt} = B^v(t)C_v^u(t) + R^u(t)$$

and

$$R^u(t) = r^u(t+c) + \frac{\partial b^u(t+c, t)}{\partial t}.$$

### REFERENCES

1. **Akivis M., Goldberg V.** On multidimensional three-webs formed by surfaces of different dimensions: Dokl. AN USSR. - 1972. - V. 203. - № 2. - P. 263-266.
2. **Akivis M., Goldberg V.** On multidimensional three-webs formed by surfaces of different dimensions: Trudy geometr. seminara VINITI AN USSR. - 1973. - V. 4. - P. 179-204.
3. **Duyunova A.** Three-webs defined by systems of ordinary differential equations // Fundamental and applied mathematics. - 2010. - V. 16. - № 2. - P. 13-31.
4. **Kirichenko V.** Differential geometric structures on manifolds. - M.: Moscow State Pedagogical University, 2003.

### АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, ПРИСОЕДИНЕННАЯ К ТКАНИ $W(1, N, 1)$

Дуюнова А.А.

В статье к три-ткани  $W(1, n, 1)$  и системе дифференциальных уравнений присоединяется совместимая аффинная связность без кручения, названная канонической связностью системы ОДУ. Компоненты тензора кривизны этой связности вычислены через функции, определяющие систему дифференциальных уравнений, и записан вид системы ОДУ с нулевым тензором кривизны.

**Ключевые слова:** три-ткань, система обыкновенных дифференциальных уравнений, аффинная связность.

### About the author

**Duyunova Anna Andreevna**, graduated Saratov State University named after Chernyshevskiy (2007), Ph.D. in physical and mathematical sciences, author of 6 published scientific papers.

УДК 517.956.223+517.983

## О СИЛЬНО УПЛОТНЯЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОПЕРАТОРАХ

Н.А. ЕРЗАКОВА

Введено понятие сильно уплотняющего на бесконечности оператора. Это естественная вариация понятия локально сильно уплотняющего оператора в конечной точке, введенного автором ранее. Доказывается, что если такие операторы асимптотически линейные, то их асимптотическая производная компактна. В частности, сильно уплотняющими операторами на бесконечности могут быть операторы, не являющиеся компактными, уплотняющими, даже  $(k, \psi)$ -ограниченными. Такие операторы образуют линейное пространство. Приводится приложение введенного понятия к теории точек бифуркации.

**Ключевые слова:** мера некомпактности, уплотняющий оператор, локально сильно уплотняющий оператор, асимптотически линейный оператор, асимптотическая производная, точка бифуркации.

### Введение

Уплотняющий оператор - это отображение, при котором образ любого множества в определенном смысле более компактен, чем само множество. Степень некомпактности множества измеряется с помощью функций, называемых мерами некомпактности [1]. В частности, для уплотняющих операторов справедлива теорема Шаудера о существовании неподвижной точки.

В настоящей работе вводится новое понятие, а именно, сильно уплотняющего оператора на бесконечности. Показывается, что сильно уплотняющими операторами на бесконечности могут быть операторы, не являющиеся компактными, уплотняющими, даже  $(k, \psi)$ -ограниченными. Введенное понятие можно отнести, как и все, что связано с асимптотикой нелинейностей [2], к новой ветви классического нелинейного анализа. А следовательно, понятие сильно уплотняющего оператора на бесконечности может иметь приложения, в частности, при решении задач о вынужденных колебаниях в системах различных типов (включая одноконтурные и многоконтурные системы управления, системы с запаздыванием и др.).

### 1. Постановка и формализация задачи

Приведем в удобной для дальнейшего изложения форме используемые определения [1].

Неотрицательная числовая функция  $\psi$ , заданная на множестве подмножеств банахова пространства  $E$ , называется мерой некомпактности, если она инвариантна относительно перехода к замыканию выпуклой оболочки любого подмножества  $U$  из  $E$ , т.е.  $\psi(\overline{co} U) = \psi(U)$ .

Пример. Мерой некомпактности Хаусдорфа  $\chi_E(U)$  множества произвольного ограниченного множества  $U$  банахова пространства  $E$  называется инфимум всех  $\varepsilon > 0$ , при которых  $U$  имеет в  $E$  конечную  $\varepsilon$ -сеть.

Пусть  $E$  и  $E_1$  - банаховы пространства. Непрерывный оператор  $f : G \subseteq E \rightarrow E_1$  называется уплотняющим [1], если для любого ограниченного подмножества  $U$  из  $G$ , замыкание которого некомпактно, выполняется неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U)) < \psi_E(U).$$

Непрерывный оператор  $f : G \subseteq E \rightarrow E_1$  называется  $(k, \psi)$ -ограниченным, если существует такая постоянная  $k > 0$ , что для всех подмножеств  $U$  из  $G$  выполняется неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U)) \leq k\psi_E(U).$$

В работах [2; 3] было введено понятие локально сильно  $\psi$ -уплотняющего на  $M$  отображения, не являющегося компактным, уплотняющим, даже  $(k, \psi)$ -ограниченными.

Непрерывное отображение  $f : M \subseteq E \rightarrow E_1$  называется локально сильно  $\psi$ -уплотняющим на  $M$ , если существует функция  $\lambda_{M,f} : R_+ \rightarrow R_+$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lambda_{M,f}(r) = 0.$$

такая, что для любой точки  $x \in M$ , для каждого  $r > 0$ , для произвольного подмножества  $U \subseteq B(x, r) \cap M$  справедливо неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U)) \leq \lambda_{M,f}(r) \psi_E(U).$$

Мы скажем, что мера некомпактности  $\psi$  обладает свойством ограниченности, если  $\psi_E(U) < \infty$ , тогда и только тогда, когда  $U$  ограничено в  $E$  [2; 3].

В утверждениях, сформулированных ниже, мера некомпактности  $\psi$  будет обладать некоторыми свойствами из следующего списка [1-3]:

1) монотонности, т.е. из  $U_1 \subseteq U$  следует, что

$$\psi_E(U_1) \leq \psi_E(U);$$

2) полуаддитивности, т.е.

$$\psi_E(U_1 \cup U) = \max\{\psi_E(U_1), \psi_E(U)\};$$

3) полуоднородности, т.е.

$$\psi_E(tU) = |t| \psi_E(U),$$

где  $t$  - число;

4) алгебраической полуаддитивности, т.е.

$$\psi_E(U + V) \leq \psi_E(U) + \psi_E(V),$$

где  $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$ ;

5) непрерывности по метрике Хаусдорфа  $\rho$ :

$$\forall (U, \varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \forall (U_1) [\rho(U, U_1) < \delta \Rightarrow |\psi_E(U) - \psi_E(U_1)| < \varepsilon],$$

где

$$\rho(U, U_1) = \inf\{\varepsilon > 0 : U_1 \subset U + \varepsilon \bar{B}, U \subset U_1 + \varepsilon \bar{B}\}, \bar{B} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\};$$

6) липшицевости, т.е.

$$|\psi_E(U) - \psi_E(U_1)| \leq L_\psi \rho(U, U_1)$$

для некоторой константы  $L_\psi > 0$ ;

7) регулярности, т.е.  $\psi_E(U) = 0$ , если и только если множество  $U$  относительно компактно;

8) ограниченности, т.е.  $\psi_E(U) < \infty$ , если и только если ограничено подмножество  $U \subset E$ ;

9) инвариантности относительно сдвигов, т.е.

$$\psi_E(U + u) = \psi_E(U) \quad (u \in E).$$

Цель настоящей работы:

1. Ввести новое понятие сильно уплотняющего оператора на бесконечности.
2. Доказать, что если такие операторы асимптотически линейные, то их асимптотическая производная компактна.
3. Привести пример сильно уплотняющего оператора на бесконечности, не являющегося компактным, уплотняющим, даже  $(k, \psi)$ -ограниченным.
4. Показать, что сильно уплотняющие операторы на бесконечности образуют линейное пространство.
5. Рассмотреть приложение введенного понятия к теории точек бифуркации.



## 2. Основной результат

Пусть  $B(x, r)$  – шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x$ . В частности,  $B(\theta, r)$  – шар радиуса  $r$  с центром в нулевой точке  $\theta$  банахова пространства  $E$ . Пусть  $R_+$  – множество всех положительных вещественных чисел.

Определение. Непрерывное отображение  $f : M \subseteq E \rightarrow E_1$  (не обязательно линейное) назовем сильно  $\psi$ -уплотняющим на бесконечности, если существует число  $R_f > 0$  и непрерывная на  $[R_f, \infty)$  монотонно убывающая функция  $\tilde{\lambda}_f : R_+ \rightarrow R_+$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_f(r) = 0 \quad (1)$$

такая, что

$$\psi_{E_1}(f(U)) \leq \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U) \quad (2)$$

для любых чисел  $R_2 > R_1 > R_f$  и произвольного непустого подмножества  $U \subseteq M \cap (B(\theta, R_2) \setminus B(\theta, R_1))$ .

*Теорема 1.* Пусть мера некомпактности  $\psi$  обладает свойствами: полуоднородности, алгебраической полуаддитивности и ограниченности. Тогда множество  $\tilde{\Lambda}$  всех (не обязательно линейных) операторов  $f : E \rightarrow E_1$  сильно  $\psi$ -уплотняющих на бесконечности, образуют линейное пространство, в частности, абелеву аддитивную группу. Композиция  $(k, \psi)$ -ограниченного оператора  $E_1 \rightarrow E_2$  и сильно  $\psi$ -уплотняющего на бесконечности оператора  $E \rightarrow E_1$  является сильно  $\psi$ -уплотняющим на бесконечности оператором  $E \rightarrow E_2$ .

*Доказательство.* Покажем, что конечная линейная комбинация (над полем вещественных чисел) сильно  $\psi$ -уплотняющих операторов на бесконечности будет вновь сильно  $\psi$ -уплотняющим оператором на бесконечности. Действительно, пусть  $f : E \rightarrow E_1$  и  $g : E \rightarrow E_1$  — сильно  $\psi$ -уплотняющие операторы на бесконечности. Тогда существуют числа  $R_f > 0$ ,  $R_g > 0$  и функции  $\tilde{\lambda}_f$ ,  $\tilde{\lambda}_g$  такие, что для любых чисел  $R_1 > R > \max\{R_f, R_g\}$  и произвольного непустого подмножества  $U \subseteq B(\theta, R_2) \setminus B(\theta, R_1)$  выполняется  $\psi_{E_1}(f(U)) \leq \tilde{\lambda}_f(R)\psi_E(U)$ ,  $\psi_{E_1}(g(U)) \leq \tilde{\lambda}_g(R)\psi_E(U)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \psi((c_1 f + c_2 g)(U)) &= \psi(c_1 f(U) + c_2 g(U)) \leq |c_1| \tilde{\lambda}_f(R)\psi(U) + |c_2| \tilde{\lambda}_g(R)\psi(U) = \\ &= (|c_1| \tilde{\lambda}_f + |c_2| \tilde{\lambda}_g)\psi(U). \end{aligned}$$

Полагая  $\tilde{\lambda}_{c_1 f + c_2 g} = |c_1| \tilde{\lambda}_f + |c_2| \tilde{\lambda}_g$ , мы получаем функцию, удовлетворяющую (1) и (2). Таким образом, множество  $\tilde{\Lambda}$  всех  $f : E \rightarrow E_1$  сильно  $\psi$ -уплотняющих операторов на бесконечности является линейным пространством над полем вещественных чисел и, в частности, абелевой группой относительно сложения.

Пусть  $g : E_1 \rightarrow E_2$  -  $(k, \psi)$ -ограниченный оператор, а  $f : E \rightarrow E_1$  - сильно  $\psi$ -уплотняющий на бесконечности оператор. Тогда существуют число  $R_f > 0$  и функция  $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_f(r) = 0$  такие, что  $\psi_{E_1}(f(U)) \leq \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U)$  для любых чисел  $R_2 > R_1 > R_f$  и произвольного непустого подмножества  $U \subseteq B(\theta, R_2) \setminus B(\theta, R_1)$ . Поскольку  $\psi$  удовлетворяет свойству ограниченности, по лемме 1 [3]  $f(U)$  ограничено в  $E_1$ . Тогда

$$\psi_{E_2}(g(f(U))) \leq k\psi_{E_1}(f(U)) \leq k\tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U),$$

т.е. композиция  $(k, \psi)$ -ограниченного оператора и сильно  $\psi$ -уплотняющего на бесконечности оператора является сильно  $\psi$ -уплотняющим на бесконечности оператором с  $R_{fg} = R_f$  и  $\tilde{\lambda}_{gf} = k\tilde{\lambda}_f$ .

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим непрерывный оператор  $F : E \rightarrow E$ , определенный равенством  $F(u) = b + a \cdot \|u\|^{-\gamma}$  для некоторого  $b \in E$  и скалярных величин  $a$ ,  $0 < \gamma < 1$ . Тогда  $F$  является сильно  $\psi$ -уплотняющим оператором на бесконечности с  $\tilde{\lambda}_F(r) = |a| r^{-\gamma}$  для всех мер некомпактности  $\psi$ , удовлетворяющим свойствам (1), (2), (3), (5), (7), перечисленным выше, и  $F$  не является  $(k, \chi)$ -ограниченным оператором.

Доказательство. Заметим, что  $F$  является непрерывным, так как

$$\lim_{u \rightarrow 0} \|F(u) - b\| = \lim_{u \rightarrow 0} |a| \cdot \|u\|^{1-\gamma} = 0.$$

Рассмотрим произвольные числа  $R_1 > R > 1$  и также произвольное непустое подмножество  $U \subseteq B(\theta, R_1) \setminus B(\theta, R)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  компакт  $[R, R_1]$  допускает конечное покрытие открытыми интервалами

$$[R, R_1] \subset \bigcup_{i=1}^N (r_i - \varepsilon, r_i + \varepsilon),$$

где  $r_i > R$  для всех  $i$ . Тогда  $F(U)$  допускает по определению  $F$  покрытие

$$F(U) \subset b + a \bigcup_{i=1}^N \left( \bigcup_{r \in (r_i - \varepsilon, r_i + \varepsilon)} r^{-\gamma} U \right).$$

В силу свойств монотонности, инвариантности относительно сдвигов, полуоднородности, полуаддитивности, непрерывности относительно метрики Хаусдорфа  $\rho$  меры некомпактности  $\psi$  имеем

$$\psi(F(U)) \leq |a| \max_{1 \leq i \leq N} \psi \left( \bigcup_{r \in (r_i - \varepsilon, r_i + \varepsilon)} r^{-\gamma} U \right) \leq |a| \max_{1 \leq i \leq N} r_i^{-\gamma} \psi(U) + \omega(\varepsilon),$$

где  $\omega(\varepsilon)$  - метрика Хаусдорфа, т.е.

$$\omega(\varepsilon) = \max_{1 \leq i \leq N} \rho \left( \left( \bigcup_{r \in (r_i - \varepsilon, r_i + \varepsilon)} r^{-\gamma} U \right), r_i^{-\gamma} U \right)$$

и  $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Так как  $1 < R < r_i$  для всех  $i$  и  $\varepsilon$  может быть произвольно малым, мы получаем  $\psi(F(U)) \leq |a| R^{-\gamma} \psi(U)$ .

Пусть  $S = S(\theta, \varepsilon) = \{u \in E : \|u\| = \varepsilon\}$ , тогда  $\chi(S) = \varepsilon$ ,  $\chi(F(S)) = \varepsilon^{-\gamma} |a| \chi(F(S))$  и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\chi(F(S))}{\chi(S)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\gamma} |a| = \infty.$$

Поэтому  $F$  не является  $(k, \chi)$ -ограниченным оператором.

*Замечание.* Все компактные операторы являются сильно  $\psi$ -уплотняющими операторами на бесконечности, но, как следует из примера, сильно  $\psi$ -уплотняющий на бесконечности оператор необязательно  $(k, \psi)$ -ограниченный оператор, в частности,  $\psi$ -уплотняющий оператор или компактный оператор.

### 3. Приложения

Напомним [1, 3.3.3]), что оператор  $f : E \rightarrow E$  называется асимптотически линейным, если найдется такой линейный оператор  $f'(\infty)$ , называемый производной оператора  $f$  в точке  $\infty$  или асимптотической производной оператора  $f$  в точке  $\infty$ , что

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\|f(u) - f'(\infty)u\|}{\|u\|} = 0.$$

Как доказано в теореме 3.3.3 из [1], асимптотическая производная  $(k, \chi)$ -ограниченного оператора в случае ее существования также является  $(k, \chi)$ -ограниченным оператором. В следующей теореме докажем, практически повторяя доказательство теоремы 3.3.3, что если оператор сильно  $\psi$ -уплотняющий на бесконечности, то его асимптотическая производная в случае ее существования вполне непрерывна.

*Теорема 2.* Пусть мера некомпактности  $\psi$ , заданная на подмножествах банахова пространства  $E$ , полуоднородна и алгебраически полуаддитивна, непрерывна по метрике Хаусдорфа  $\rho$ , и, кроме того,  $\psi$  - регулярная мера некомпактности. Тогда если существует непрерывная асимптотическая производная  $f'(\infty)$  сильно  $\psi$ -уплотняющего на бесконечности оператора  $f : E \rightarrow E$ , то  $f'(\infty)$  вполне непрерывна.

*Доказательство.* Пусть  $A = f'(\infty)$  и  $\omega(h) = f(h) - Ah$ . Тогда  $Ah = f(h) - \omega(h)$ ,  $h \in E$ , где  $\omega(h)/\|h\| \rightarrow 0$  при  $\|h\| \rightarrow \infty$ . Предположим сначала, что ограниченное множество  $U \subset E$  отделено от нуля  $\|u\| \geq \rho > 0$  для  $u \in U$ . Тогда для произвольного  $r > 0$  мы можем записать

$$AU = \frac{1}{r} A(rU) \subseteq \frac{1}{r} [f(rU) - \omega(rU)].$$

Из монотонности  $\psi$

$$\psi(AU) \leq \psi\left(\frac{1}{r} f(rU) - \frac{1}{r} \omega(rU)\right),$$

из алгебраической полуаддитивности  $\psi$

$$\psi(AU) \leq \psi\left(\frac{1}{r} f(rU)\right) + \psi\left(-\frac{1}{r} \omega(rU)\right),$$

из полуоднородности  $\psi$

$$\psi(A(U)) \leq \frac{1}{r} \psi(f(rU)) + \frac{1}{r} \psi(\omega(rU)).$$

По предположению теоремы 2  $f : E \rightarrow E_1$  - сильно  $\psi$ -уплотняющий на бесконечности оператор, т.е. существуют число  $R_f > 0$  и функция  $\tilde{\lambda}_f(r)$ , удовлетворяющие (1) и (2). Пусть  $r\rho > R_f$ ,  $rU \subseteq E \setminus B(\theta, r\rho)$  и  $\psi(f(rU)) \leq \tilde{\lambda}_f(r\rho)\psi(rU)$ .

Тогда

$$\psi(A(U)) \leq \frac{1}{r} \tilde{\lambda}_f(r\rho)\psi(rU) + \frac{1}{r} \psi(\omega(rU))$$

или из полуоднородности  $\psi$

$$\psi(A(U)) \leq \tilde{\lambda}_f(r\rho)\psi(U) + \frac{1}{r}\psi(\omega(rU)).$$

Устремляя в последнем неравенстве  $r \rightarrow \infty$ , получим  $\psi(A(U)) = 0$  в силу (1), т.е. замыкание  $A(U)$  компактно, так как  $\psi$  — по предположению правильная мера некомпактности.

Пусть  $U$  теперь произвольное ограниченное подмножество  $E$ . Запишем  $U = U_1 \cup U_2$ , где  $U_1 = U \cap B(\theta, \rho)$  и  $U_2 = U \setminus U_1$ . Для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  выберем  $\rho > 0$  достаточно малое, чтобы выполнялось неравенство  $\|Au\| \leq \varepsilon$  для всех  $u \in U_1$ . В силу непрерывности  $\psi$  относительно метрики Хаусдорфа мы можем выбрать  $\rho > 0$  с дополнительным условием, что  $\psi(A(U_1)) \leq \varepsilon$ . Тогда из свойств меры некомпактности  $\psi$  будем иметь

$$\psi(AU) = \psi(A(U_1) \cup A(U_2)) = \max\{\psi(A(U_1)), \psi(A(U_2))\} \leq \max\{\varepsilon, \psi(A(U_2))\}.$$

Так как из первой части доказательства следует, что  $\psi(A(U_2)) = 0$  и  $\varepsilon > 0$  выбрано произвольно, то опять получаем, что  $\psi(A(U)) = 0$ .

Теорема доказана.

Замечание. Пусть  $K$  - конус в  $E$ . Напомним [1, 3.3.8], что конусом в банаховом пространстве  $E$  называется выпуклое замкнутое множество, инвариантное относительно умножения на неотрицательные скаляры и не содержащее противоположных элементов. Оператор  $f$  называется положительным на множестве  $M$ , если  $f(M) \subset K$ .

Оператор  $f'(\infty)$  называется сильной асимптотической производной по конусу  $K$  [7], а оператор  $f$  - сильно асимптотически линейным по конусу, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\|u\| \geq r, u \in K} \frac{\|f(u) - f'(\infty)u\|}{\|u\|} = 0.$$

Утверждение теоремы 2 останется верным для сильной асимптотической производной по конусу.

Напомним [2, 5-7], что число  $\alpha_0$  называется асимптотической точкой бифуркации  $f$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует шар  $B(\theta, r)$  такой, что граница каждого ограниченного открытого множества  $U \supset B(\theta, r)$  содержит собственные векторы  $f$  с характеристическими числами  $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ , т.е. уравнение

$$u = \alpha f(u) \tag{3}$$

имеет непрерывную ветвь собственных векторов, уходящую в бесконечность.

*Теорема 3.* Пусть выполнены все предположения теоремы 2 и существует непрерывная асимптотическая производная  $f'(\infty)$  оператора  $f$ . Тогда точками бифуркации оператора  $f$  могут служить лишь характеристические значения линейного оператора  $f'(\infty)$ , т.е. такие числа  $\alpha$ , что  $1/\alpha$  являются собственными значениями оператора  $f'(\infty)$ .

*Доказательство.* Обозначим  $A = f'(\infty)$ . Предположим сначала, что  $\|A\| \neq 0$ . В силу теоремы 2  $A$  - вполне непрерывный оператор. Пусть  $\alpha_0$  не является характеристическим значением оператора  $f'(\theta)$ . Следовательно, оператор  $(I - \alpha_0 A)^{-1}$  непрерывен. Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{3\|(I - \alpha_0 A)^{-1}\|\|A\|}.$$

По определению асимптотической производной  $Ah = f(h) + \omega(h)$ , где  $\omega(h)/\|h\|_E \rightarrow 0$  при  $\|h\|_E \rightarrow \infty$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы для всех  $\|u\| \geq \delta$  было выполнено

$$\|\omega(u)\|_E < \frac{\|u\|_E}{3\|(I - \alpha_0 A)^{-1}\|(|\alpha_0| + \varepsilon)}.$$

Пусть теперь  $\alpha$  – произвольное число, удовлетворяющее условию  $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ . Покажем, что решение  $u$  уравнения (3) не удовлетворяет  $\|u\| \geq \delta$ , и поэтому  $\alpha_0$  не является асимптотической точкой бифуркации. Действительно, пусть  $u = \alpha f(u)$ . Тогда  $\alpha Au = \alpha f(u) + \alpha \omega(u) = u + \alpha \omega(u)$  или  $u = \alpha Au - \alpha \omega(u)$ . Из равенства  $u = (I - \alpha_0 A)^{-1}(u - \alpha_0 Au)$  следует, что

$$\begin{aligned} \|u\|_E &\leq \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\| \|u - \alpha_0 Au\|_E = \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\| \|\alpha Au - \alpha \omega(u) - \alpha_0 Au\|_E \leq \\ &\leq |\alpha - \alpha_0| \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\| \|A\| \|u\|_E + |\alpha| \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\| \|\omega(u)\|_E \leq (2/3)\|u\|_E. \end{aligned}$$

Таким образом,  $u = 0$ , и мы пришли к противоречию с тем, что  $\alpha_0$  – точка бифуркации.

Пусть  $\|A\| = 0$ . По определению асимптотической производной  $\theta = f(h) + \omega(h)$ , где  $\omega(h)/\|h\|_E \rightarrow 0$  при  $\|h\|_E \rightarrow \infty$ . Для произвольного числа  $\varepsilon > 0$  рассмотрим произвольное число  $\alpha$ , удовлетворяющее условию  $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы для всех  $\|u\| \geq \delta$  было выполнено

$$\|\omega(u)\|_E < \frac{\|u\|_E}{3(|\alpha_0| + \varepsilon)}.$$

Покажем, что решение  $u$  уравнения (3) не удовлетворяет  $\|u\| \geq \delta$ , и поэтому  $\alpha_0$  не является асимптотической точкой бифуркации. Действительно, пусть  $u = \alpha f(u)$  и  $\|u\| \geq \delta$ . Тогда  $u = -\alpha \omega(u)$ . Из равенства  $u = (I - \alpha_0 A)^{-1}(u - \alpha_0 Au)$  следует, что

$$\|u\|_E \leq \|-\alpha \omega(u)\|_E \leq (|\alpha_0| + \varepsilon) \|\omega(u)\|_E \leq (1/3)\|u\|_E.$$

Таким образом,  $u = 0$ , и мы пришли к противоречию с тем, что  $\alpha_0$  – точка бифуркации.

Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 3 частично совпадает с утверждением теоремы 3.1 из [5]. В отличие от теоремы 3.1 из [5] оператор  $f$  не обязательно компактный.

## Заключение

Итак, в настоящей работе было введено новое понятие сильно уплотняющего оператора на бесконечности.

Приведен пример сильно уплотняющего оператора на бесконечности, не являющегося компактным, уплотняющим, даже  $(k, \psi)$ -ограниченным. Показано, что сильно уплотняющие операторы на бесконечности образуют линейное пространство и, следовательно, указан метод построения таких операторов. Доказано, что если сильно уплотняющего оператора на бесконечности операторы асимптотически линейные, то их асимптотическая производная компактна. Рассмотрено приложение введенного понятия к теории точек бифуркации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Садовский Б.Н., Родкина А.Е. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. - Новосибирск: Наука, 1986.
2. Красносельский А.М. Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения. - М.: Наука, 1992.
3. Erzakova N.A. On locally condensing operators, *Nonlinear Analysis: Theory Methods Applications*. 2012,75. no 8, 3552-3557.
4. Ерзакова Н.А. Почти-кольцо локально сильно уплотняющих операторов // *Научный Вестник МГТУ ГА*. - 2012. - № 184(10). - С. 78-85.
5. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1956.
6. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966.
7. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. - М.: Физматгиз, 1962.

## ON STRONGLY CONDENSING OPERATORS AT INFINITY

Erzakova N.A.

The paper introduces the notion of an operator strongly condensing at infinity, which is a natural variation of the notion of a locally strongly condensing operator at a finite point (introduced by the author earlier). It turns out that if such an operator is asymptotically linear, then its asymptotic derivative is compact. In particular, this notion allows to build examples of operators that are neither compact, nor condensing, not even  $(k, \psi)$ -bounded. Such operators form a linear space. Some applications of the notion to the theory of bifurcation points are discussed.

**Key words:** measure of noncompactness, condensing operator, locally strongly condensing operator, asymptotically linear operator, asymptotic derivative, bifurcation point.

## Сведения об авторе

**Ерзакова Нина Александровна**, окончила НГУ (1976), доктор физико-математических наук, профессор МГТУ ГА, автор более 60 научных работ, область научных интересов – теория неподвижных точек, меры некомпактности, уплотняющие операторы, интегральные операторы, пространства С.Л. Соболева, краевые задачи для уравнений с частными производными.

УДК 517.988.6+517.988.521

## МЕРА НЕКОМПАКТНОСТИ $\beta$ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Н.А. ЕРЗАКОВА

Введены геометрические характеристики для произвольного правильного пространства, каковыми являются, в частности, пространства Лебега и Лоренца. Для произвольных подмножеств пространства Лоренца получены неравенства, связывающие меры некомпактности  $\beta$  и  $\nu$ . В случае компактных по мере множеств доказывается пропорциональность  $\beta$  и  $\nu$ . Выделен класс уплотняющих операторов, действующих в пространствах Лоренца, относительно  $\beta$  среди частично аддитивных операторов и, в частности, линейных операторов.

**Ключевые слова:** мера некомпактности, уплотняющий оператор, пространство Лоренца, пространство Лебега, правильное пространство, частично аддитивный оператор.

### Введение

Математические модели, описывающие различные явления естествознания, часто имеют вид уравнения, разрешимость которого равносильна существованию неподвижной точки у соответствующего оператора. Поэтому теория неподвижных точек имеет широкое приложение в серьезных научных исследованиях практически во всех сферах деятельности человека.

Теория мер некомпактности и уплотняющих операторов позволяет, в частности, доказать существование неподвижных точек дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах, функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа, интегральных уравнений, а также некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными. Основные результаты и главные прикладные аспекты теории изложены в обзорах [1; 2].

Результаты данной работы имеют тесную связь с предшествующими работами автора [5 - 11]. Цель данной работы – перенести утверждения с пространств Лебега на “родственные” им пространства Лоренца и получить результаты обобщающего характера для произвольного правильного пространства.

### 1. Постановка и формализация задачи

Пусть  $\Omega$  – подмножество конечномерного пространства, причем  $\mu(\Omega) < \infty$ ,  $\mu$  – непрерывная мера, т.е. всякое подмножество  $\Omega$  можно разбить на два подмножества равной меры.

Пусть  $\lambda(u, h) = \mu\{s \in \Omega : |u(s)| \geq h\}$  [3]. Рассматриваются пространства Лоренца  $\Lambda_p = \Lambda_p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) с нормой  $\|u\|_{\Lambda_p} = \int_0^{\infty} \lambda^{1/p}(u, h) dh$ .

Пусть  $E$  – банахово пространство,  $B(u_0, r) = \{u \in E : \|u - u_0\| \leq r\}$  обозначает шар в  $E$  с центром в  $u_0$  и радиуса  $r$ ,  $\bar{B} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ ,  $\theta$  – нулевой элемент  $E$ .

Мерой некомпактности Хаусдорфа  $\chi_E(U)$  множества произвольного ограниченного множества  $U$  банахова пространства  $E$  называется инфимум всех  $\varepsilon > 0$ , при которых  $U$  имеет в  $E$  конечную  $\varepsilon$ -сеть.

Мера некомпактности  $\beta(U) = \beta_E(U)$  подмножества  $U$  банахова пространства  $E$  – это точная нижняя грань таких  $r > 0$ , что всякое подмножество, расстояние между любыми двумя элементами которого не меньше  $r$ , конечно.

Другими словами, мера некомпактности  $\beta(U) = \beta_E(U)$  подмножества  $U$  банахова пространства  $E$  – это точная верхняя грань таких  $r > 0$ , что существует бесконечное подмножество, расстояние между любыми двумя элементами которого не меньше  $r$ .

Пусть  $\phi$  обозначает ниже  $\chi$  или  $\beta$ .

МНК (мера некомпактности)  $\phi$  обладает рядом замечательных свойств [2, 1.1.4], среди которых правильность  $\phi(U) = 0$  тогда и только тогда, когда  $U$  относительно компактно; полуоднородность  $\phi(tU) = |t| \phi(U)$  ( $t$ -число); полуаддитивность  $\phi(U_1 \cup U_2) = \max \{ \phi(U_1), \phi(U_2) \}$ ; инвариантность относительно сдвигов  $\phi(U + b) = \phi(U)$  ( $b \in E$ ); алгебраическая полуаддитивность  $\phi(U_1 + U_2) \leq \phi(U_1) + \phi(U_2)$ ; липшицевость  $\phi$  по метрике Хаусдорфа  $\rho$  ( $|\phi_{\Lambda_p}(U) - \phi_{\Lambda_p}(U_1)| < 2\rho(U, U_1)$ , где  $\rho(U, U_1) = \inf \{ \varepsilon > 0 : U_1 \subset U + \varepsilon \bar{B}, U \subset U_1 + \varepsilon \bar{B} \}$ ); инвариантность относительно перехода к замыканию выпуклой оболочки  $\phi(U) = \phi(\overline{co}U)$ .

Так же как в работах [5 - 11], обозначим через  $\nu_E(U)$  меру неравностепенной абсолютной непрерывности норм элементов подмножества  $U$  правильного пространства  $E$ .

Мера  $\nu_E(U)$  обладает всеми вышеперечисленными свойствами  $\phi$ , за исключением правильности: для относительно компактного множества  $U$  справедливо равенство  $\nu(U) = 0$ , но равенство  $\nu_E(U) = 0$  возможно на множествах, не являющихся относительно компактными.

В работах [5; 6] было доказано, что для произвольного ограниченного подмножества  $U$  правильного пространства  $E$  имеет место  $\chi_E(U) \geq \nu_E(U)$ ; если  $U$  к тому же компактно по мере, то  $\chi_E(U) = \nu_E(U)$ . Ниже будут доказаны аналогичные свойства для  $\beta$ .

Здесь компактность по мере означает [2, 4.9.1] компактность в нормированном пространстве  $S$  всех измеримых почти всюду конечных функций  $u$  с нормой  $\|u\| = \inf_{s>0} \{ s + \mu \{ t : |u(t)| \geq s \} \}$ .

Банахово пространство  $E$  вещественных измеримых функций на  $\Omega$  называется идеальным, если выполнено условие: любая измеримая функция  $u$  на  $\Omega$ , для которой найдется такая функция  $v \in E$ , что  $|u(s)| \leq |v(s)|$  почти всюду, также принадлежит  $E$ , и справедливо неравенство  $\|u\|_E \leq \|v\|_E$  [4].

Идеальное пространство  $E$  называется правильным, если норма обладает свойством абсолютной непрерывности  $\lim_{\mu(D) \rightarrow 0} \|P_D u\|_E = 0$ . В частности,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|P_{D(u, T, u_0)} u\|_E = 0, \tag{1}$$

где  $u_0 \in E$  — функция с положительными значениями, называемая условно *единицей* пространства  $E$ ,  $D(u, T, u_0) = \{ s : |u(s)| > T u_0(s) \}$  для произвольного числа  $T > 0$ ,  $P_D u(s) = u(s)$ , если  $s \in D$  и  $P_D u(s) = 0$ , если  $s \notin D$ .

*Определение 1.* Пусть  $\tilde{S}$  - множество всех последовательностей  $\{u_n\}$  элементов из  $E$ , удовлетворяющих следующим условиям: 1)  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  имеют попарно непересекающиеся носители; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 1$ ; 3) мера носителя стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ ; 4) существует такая строго возрастающая последовательность положительных чисел  $\{T_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ , что имеет место неравенство  $T_n u_0(s) \leq |u_n(s)| \leq T_{n+1} u_0(s)$  для всех  $n = 1, 2, \dots$  и  $s \in \text{supp } u_n$ .

В настоящей работе поставлена задача - получить неравенства, связывающие меры некомпактности  $\beta$  и  $\nu$  в пространстве Лоренца. В случае компактных по мере множеств доказать



пропорциональность  $\beta$  и  $\nu$ . Найти новый класс  $\beta$ -уплотняющих операторов, действующих в пространствах Лоренца.

## 2. Неравенства для $\beta$ и $\nu$ в правильном пространстве

Пусть  $\underline{c}_E = \inf_{\{u_n\} \in \mathcal{S}} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E$ ;  $\bar{c}_E = \inf_{\{u_n\} \in \mathcal{S}} \overline{\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E}$ .

В следующем утверждении предположим, что норма в правильном пространстве  $E$  удовлетворяет условию:

А) для любой ограниченной последовательности  $\{u_n\}$  из  $E$ , если последовательность подмножеств  $\{D_n\}$  из  $\Omega$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n) = 0$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{D_n} u_n\|_E = \nu_E \{u_n\}$ , то  $\nu_E \{v_n\} = 0$ , где  $v_n = u_n - P_{D_n} u_n$ .

Заметим, что условие А) выполняется, в частности, в пространствах Лоренца.

*Лемма 1.* Пусть  $U$  - произвольное ограниченное подмножество правильного пространства  $E$  с  $\nu_E(U) > 0$ . Тогда существует такая последовательность  $\{u_n\}$  в  $U$ , что

$$\underline{c}_E \nu_E(U) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E.$$

Если  $U$  компактно по мере, то мы можем выбрать последовательность  $\{u_n\}$ , дополнительно удовлетворяющую неравенству  $\bar{c}_E \nu_E(U) \geq \overline{\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E}$ .

*Доказательство.* Пусть  $U$  - произвольное ограниченное подмножество правильного пространства  $E$  с  $\nu_E(U) > 0$ . В силу утверждений из [5; 6] существует монотонно возрастающая последовательность чисел  $\{T_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  и последовательность функций  $\{u_n\} \subseteq U$ , для которых справедливо равенство  $\nu_E(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{D(u_n, T_n, u_0)} u_n\|_E$ .

Заметим, что (1) влечет  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{D(u_n, T_n, u_0)} u\|_E = 0$  для любого фиксированного  $u$ . Рассмотрим такую подпоследовательность (для простоты изложения не меняем обозначение), что  $\nu_E(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{\tilde{D}_n} u_n\|_E$ , где  $\tilde{D}_n = \{s : T_n u_0(s) \leq u(s) \leq T_{n+1} u_0(s)\}$ . Из ограниченности  $U$  следует, что  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(D(u, T_n, u_0)) = 0$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tilde{D}_n) = 0$ .

Переходя к подпоследовательностям, можно предполагать без ограничения общности, что мера  $\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \tilde{D}_k\right)$  достаточно мала, а разность между  $\|P_{D_n} u_n\|_E$  и  $\|P_{\tilde{D}_n} u_n\|_E$  незначительна для  $D_n = \tilde{D}_n \setminus \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \tilde{D}_k$ . В итоге, очевидно, мы получим последовательность  $\{u_n\} \subseteq U$ , для которой справедливо равенство  $\nu_E(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{D_n} u_n\|_E$ , и множества  $D_n$  попарно не пересекаются.

Заметим, что по предположению А) относительно нормы в  $E$  имеем  $\nu_E \{v_n\} = 0$ , где  $v_n = u_n - P_{D_n} u_n$ . Следовательно,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|P_{D_m} (u_n - P_{D_n} u_n) - P_{D_n} (u_m - P_{D_m} u_m)\|_E = 0$ ;

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|P_{D_m} u_n - P_{D_n} u_m\|_E = 0. \quad (2)$$

Построенная последовательность  $\tilde{u}_n = P_{D_n} u_n$  удовлетворяет условиям 1, 3, 4 определения 1. Вместо условия 2 этого определения имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n\|_E = \nu_E(U)$ .

Поэтому  $\underline{c}_E \nu_E(U) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E$ . Так как  $E$ , в частности, идеальное пространство, то

$$\|u_n - u_m\|_E \geq \|P_{D_m \cup D_n}(u_n - u_m)\|_E \geq \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E - \|P_{D_m} u_n - P_{D_n} u_m\|_E$$

для всех  $n \neq m$  и в силу (2)  $\underline{c}_E \nu_E(U) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E$ .

Первая часть утверждения леммы доказана.

Заметим, что последовательность  $\{\tilde{u}_n\}$  в силу условия 3 стремится по мере к нулю. Так как множество  $U$  компактно по мере, то последовательность  $\{u_n\} \subseteq U$  тоже компактна по мере. Отсюда компактна по мере последовательность  $\{u_n - \tilde{u}_n\}$ .

Как было доказано в [5; 6] в этом случае  $\chi_E\{u_n - \tilde{u}_n\} = \nu_E\{u_n - \tilde{u}_n\}$ . По предположению А) относительно нормы в  $E$  имеем  $\chi_E\{u_n - \tilde{u}_n\} = \nu_E\{u_n - \tilde{u}_n\} = 0$ .

По определению меры некомпактности Хаусдорфа для каждого  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_N\} \subset E$  такая, что  $\{u_n - \tilde{u}_n\} \subset C + \varepsilon B$ . Так как  $C$  конечно, мы можем выбрать бесконечную подпоследовательность (с тем же обозначением), что  $\{u_n - \tilde{u}_n\} \subset c^* + \varepsilon B$  для некоторого  $c^* \in C$ . Отсюда  $\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E - \|u_n - u_m\|_E \leq 2\varepsilon$ .

Устремляя  $\varepsilon$  к нулю и переходя к подпоследовательности, не меняя при этом обозначение, получим  $\overline{\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty}} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E - \|u_n - u_m\|_E = 0$ .

Вторая часть утверждения леммы доказана, так как  $\overline{c}_E \nu_E(U) \geq \overline{\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty}} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E$ .

*Теорема 1.* В правильном пространстве  $E$  МНК  $\nu$  и  $\beta$  связаны неравенством  $\beta_E(U) \geq \underline{c}_E \nu_E(U)$  для любого ограниченного подмножества  $U$ ; более того, если  $U$  компактно по мере, то  $\underline{c}_E \nu_E(U) \leq \beta_E(U) \leq \overline{c}_E \nu_E(U)$ .

*Доказательство.* Если  $\nu_E(U) = 0$ , то неравенство  $\beta_E(U) \geq \underline{c}_E \nu_E(U)$  выполнено, если  $U$  компактно по мере и  $\nu_E(U) = 0$ , то по критерию компактности в правильном пространстве [3; 4]  $U$  относительно компактно и  $\beta_E(U) = 0$ . Таким образом, утверждение теоремы 1 для случая  $\nu_E(U) = 0$  выполнено. Предположим, что  $\nu_E(U) > 0$ . Пусть последовательность  $\{u_n\}$  такая как в лемме 1. Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно выбрано. По лемме 2 [11] мы можем предполагать без ограничения общности, что  $\|u_n - u_m\|_E \leq \beta_E\{u_n\} + \varepsilon$  для всех  $m$  и  $n$ . Отсюда в силу монотонности  $\beta$  получим  $\|u_n - u_m\|_E \leq \beta_E\{u_n\} + \varepsilon \leq \beta_E(U) + \varepsilon$  для всех  $m$  и  $n$ .

Так как  $\varepsilon$  может быть произвольно малым и по лемме 1  $\underline{c}_E \nu_E(U) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_E$ , то мы получаем первую часть утверждения теоремы 1.

Пусть  $U$  компактно по мере. По определению  $\beta$  для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется последовательность  $\{\omega_n\}$ , такая что  $\|\omega_n - \omega_m\|_E \geq \beta_E(U) - \varepsilon$  для всех  $n \neq m$ . Следовательно, по лемме 1 мы можем извлечь подпоследовательность  $\{u_n\}$  из  $\{\omega_n\}$ , такую что

$$\beta_E(U) - \varepsilon \leq \overline{\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty}} \|u_n - u_m\|_E \leq \overline{c}_E \nu_E\{u_n\} \leq \overline{c}_E \nu_E(U),$$

что завершает доказательство теоремы, поскольку  $\varepsilon$  может быть произвольно малым.

*Теорема 2.* В пространствах Лоренца  $\Lambda_p$  имеет место  $\underline{c}_{\Lambda_p} = \overline{c}_{\Lambda_p} = 2$  при  $1 \leq p < \infty$ .

*Доказательство.* Так как в силу [3, 15.1] множество всех конечнозначных функций плотно в  $\Lambda_p$  при  $1 \leq p < \infty$ , то без ограничения общности мы можем предполагать, что  $\tilde{S}$  состоит из последовательностей конечнозначных функций.

По определению 1  $\{u_n\}$  последовательность таких функций с попарно непересекающимися носителями, что существует строго возрастающая последовательность положительных чисел  $\{T_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  и  $T_n u_0(s) \leq u_n(s) \leq T_{n+1} u_0(s)$  для всех  $n = 1, 2, \dots$  и  $s \in \text{supp } u_n$ .

Имеем  $\|f\| = \|f\|$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением функций вида

$$u_n = \sum_{i=1}^{l_n} c_i \mathcal{K}_{D_i}, \quad u_m = \sum_{i=l_n+1}^{l_n+l_m} c_i \mathcal{K}_{D_i}, \quad c_1 > c_2 > \dots > c_{l_n} > c_{l_n+1} > \dots > c_{l_n+l_m} > c_{l_n+l_m+1} = 0, \quad n \geq m.$$

По формуле [3, 15.3]  $\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} = \sum_{i=1}^{l_n+l_m} (c_i - c_{i+1}) \mu\left(\bigcup_{k=1}^i D_k\right)^{1/p}$ . Следовательно,

$$\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} = \|u_n\|_{\Lambda_p} - c_{l_n+1} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{l_n} D_k\right)^{1/p} + \sum_{i=l_n+1}^{l_n+l_m} (c_i - c_{i+1}) \mu\left(\bigcup_{k=1}^i D_k\right)^{1/p}.$$

В силу условия 3 определения 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{l_n} D_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\text{supp } u_n) = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|u_n\|_{\Lambda_p} - c_{l_n+1} (\mu(\text{supp } u_n))^{1/p} + \sum_{i=l_n+1}^{l_n+l_m} (c_i - c_{i+1}) \left( \mu\left(\bigcup_{k=l_n+1}^i D_k\right) + \mu(\text{supp } u_n) \right)^{1/p} \right) = \\ &= 1 + \|u_m\|_{\Lambda_p}, \end{aligned}$$

так как при фиксированном  $m$  постоянные  $c_{l_n+1}, \dots, c_{l_n+l_m}$  не меняются. В итоге

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \|u_m\|_{\Lambda_p}) = 2 \quad \text{и} \quad \underline{c}_{\Lambda_p} = \bar{c}_{\Lambda_p} = 2.$$

*Следствие.* В пространствах Лоренца  $\Lambda_p$  имеет место неравенство  $\beta_{\Lambda_p}(U) \geq 2\nu_{\Lambda_p}(U)$  при  $1 \leq p < \infty$  и, в частности,  $\beta_{\Lambda_p}(B) = 2$ . Если  $U$  компактно по мере, то  $\beta_{\Lambda_p}(U) = 2\nu_{\Lambda_p}(U)$ .

Обозначим так же как в [3, 15.5] через  $T_p$  множество функций  $u(s)$  вида

$$u(s) = (\mu(D_1) + \mu(D_2))^{-1/p} (\mathcal{K}_{D_1} - \mathcal{K}_{D_2}),$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – непересекающиеся подмножества  $\Omega$ , в силу [3, 15.3] с единичной нормой.

*Лемма 2.* Пусть подмножество  $U \subset T_p$  такое, что  $\mu(D_1) = c$  и  $\mu(D_2) = d$  для всех  $u \in U$  для некоторых  $c \geq 0$  и  $d \geq 0$ . Тогда  $\beta_{\Lambda_p}(U) \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ .

*Доказательство.* По определению  $\beta$  для каждого  $\varepsilon > 0$  существует в  $U$  последовательность  $\{u_n\}$  такая, что  $\beta_{\Lambda_p}(U) - \varepsilon \leq \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p}$  для всех  $m \neq n$ . В силу [11, лемма 4] мы можем предполагать без ограничения общности, что для всех  $m$  и  $n$

$$a = \mu\{s : |u_n(s) - u_m(s)| = 2(\mu(D_1) + \mu(D_2))^{-1/p} = 2(c+d)^{-1/p}\} \leq \frac{1}{2} \mu(\text{supp } u_n \cap \text{supp } u_m) \leq \frac{c+d}{2}.$$

Итак, для любых  $m$  и  $n$  разность  $u_n(s) - u_m(s)$  принимает два ненулевых значения по абсолютной величине  $(c+d)^{-1/p}$  на множестве с мерой

$$2c + 2d - 2\mu(\text{supp } u_n \cap \text{supp } u_m) \leq 2c + 2d - 4a$$

и  $2(c+d)^{-1/p}$  на множестве с мерой  $a$ . Поэтому в силу [3, 15.3]

$$\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} \leq (2(c+d)^{-1/p} - (c+d)^{-1/p})(a)^{1/p} + (c+d)^{-1/p}(2c+2d-3a)^{1/p}.$$

Обозначим через  $y$  неотрицательную переменную  $y = \frac{a}{c+d} \leq \frac{1}{2}$ . Имеем

$$\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} \leq y^{1/p} + (2-3y)^{1/p} \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}.$$

Действительно, при  $y=0$  имеем  $y^{1/p} + (2-3y)^{1/p} = 2^{1/p} \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ , при  $y = \frac{1}{2}$  имеем  $y^{1/p} + (2-3y)^{1/p} = 2^{1-1/p} \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ . Заметим, что  $t^{1/p} + (1-3t)^{1/p} \leq 2$  при  $0 \leq t \leq 1/4$ , так как  $\max\{t^{1/p}, (1-3t)^{1/p}\} \leq 1$ . Полагая  $t = \frac{y}{2}$ , получим  $\left(\frac{y}{2}\right)^{1/p} + \left(1-3\frac{y}{2}\right)^{1/p} \leq 2$ . Отсюда

$$y^{1/p} + (2-3y)^{1/p} \leq 2^{1-1/p} \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}.$$

В силу произвольности выбора  $\varepsilon$  в неравенстве  $\beta_{\Lambda_p}(U) - \varepsilon \leq \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p}$  получаем утверждение леммы 2.

*Теорема 3.* Пусть  $U \subset B_{L_\infty}(\theta, r_1) \cap B_{\Lambda_p}(\theta, r)$  для некоторых  $r_1 > 0$  и  $r > 0$ . Тогда  $\beta_{\Lambda_p}(U) \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}r$ .

*Доказательство.* В силу свойства полуоднородности  $\beta$  достаточно доказать для  $U \subset B_{L_\infty}(\theta, r_1) \cap B_{\Lambda_p}(\theta, 1)$  неравенство  $\beta_{\Lambda_p}(U) \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ . В силу [3, 15.1]  $U$  — это подмножество в замыкании выпуклой оболочки функций

$$u(s) = (\mu(D_1) + \mu(D_2))^{-1/p} (\kappa_{D_1} - \kappa_{D_2})$$

из  $T_p$ . Поэтому из свойства инвариантности  $\beta$  относительно замыкания выпуклой оболочки, без ограничения общности, можно предположить, что  $U \subseteq T_p$ . По определению меры некомпактности  $\beta$  для каждого  $\varepsilon > 0$  в  $U$  содержится бесконечная последовательность  $\{u_n\}$ , для любых различных членов которой справедливо неравенство  $\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} \geq \beta_{\Lambda_p}(U) - \varepsilon$ . В силу вложения  $U \subset B_{L_\infty}(\theta, r_1)$  и липшицевости  $\beta$  по метрике Хаусдорфа мы можем предполагать, что  $\{u_n\}$  состоит из функций, удовлетворяющих предположениям леммы 2. Поэтому  $\beta_{\Lambda_p}\{u_n\} \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$ . По лемме 2 [11] мы можем предполагать без ограничения общности, что  $\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} \leq \beta_{\Lambda_p}\{u_n\} + \varepsilon$  для всех  $m$  и  $n$ . В итоге

$$\beta_{\Lambda_p}(U) - \varepsilon \leq \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} \leq \beta_{\Lambda_p}\{u_n\} + \varepsilon \leq \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\} + \varepsilon,$$

что в силу произвольности выбора  $\varepsilon$  завершает доказательство теоремы.

### 3. Мера некомпактности $\beta$ операторов в пространстве $\Lambda_p$

Пусть также как в [7-10]

$$k(U, A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega)) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p} \neq 0, u \in U} \frac{\|AP_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}}{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}} \leq k(B(\theta, v_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega)).$$

*Теорема 4.* Пусть  $A$  - непрерывный частично аддитивный оператор, действующий из  $\Lambda_p(\Omega)$  в  $L_\infty(\Omega)$ , сужение которого на  $L_\infty(\Omega)$  вполне непрерывно. Тогда для любого подмножества  $U$  из  $\Lambda_p(\Omega)$  мы будем иметь

$$\beta_{\Lambda_p}(AU) \leq \max \left\{ 2^{\frac{1}{p}-1}, 2^{-\frac{1}{p}} \right\} k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega)) \beta_{\Lambda_p}(U),$$

т.е. оператор  $A$  является  $(k, \beta)$ -ограниченным и уплотняющим при всех  $1 \leq p < \infty$ , если

$$k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega)) < \max \left\{ 2^{1-\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

*Доказательство.* Если  $U$  не ограничено, то в этом случае  $\beta_{\Lambda_p}(U) = \infty$  и утверждение выполнено. Поэтому без ограничения общности предположим, что  $U$  ограничено. Тогда  $U \subseteq \{P_{D(u,T)}u : u \in U\} + \{P_{A(u,T)}u : u \in U\}$  для любого  $T > 0$ .

В силу предположения о частичной аддитивности оператора  $A$  имеем

$$AU \subseteq A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\} + A\{P_{A(u,T)}u : u \in U\} - A(\theta).$$

Из алгебраической полуаддитивности  $\beta$  получаем

$$\beta_{\Lambda_p}(AU) \leq \beta_{\Lambda_p}(A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\}) + \beta_{\Lambda_p}(A\{P_{A(u,T)}u : u \in U\}) + \beta_{\Lambda_p}(A(\theta)).$$

Имеем  $\beta_{\Lambda_p}(A\{P_{A(u,T)}u : u \in U\}) = 0$ , так как сужение оператора на  $L_\infty(\Omega)$  вполне непрерывно.

Кроме того,  $\beta_{\Lambda_p}(A(\theta)) = 0$  как на одноэлементном множестве. Поэтому

$\beta_{\Lambda_p}(AU) \leq \beta_{\Lambda_p}(A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\})$  и справедливо включение для любого  $T > 0$

$$A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\} \subseteq B \left( \theta, \sup_{\substack{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p} \neq 0, u \in U}} \frac{\|AP_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}}{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}} \sup_{u \in U} \|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p} \right).$$

Отсюда  $A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\} \subseteq B(\theta, k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega)) \nu_{\Lambda_p}(U))$ . Имеем

$\beta_{\Lambda_p}(AU) \leq \max \{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\} k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega)) \nu_{\Lambda_p}(U)$  в силу теоремы 3.

Так как  $\beta_{\Lambda_p}(U) \geq 2\nu_{\Lambda_p}(U)$ , то получаем утверждение теоремы 4.

*Следствие.* Линейный оператор является частным случаем частично аддитивного. Поэтому утверждение теоремы 4 останется в силе для линейного оператора с заменой  $k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega))$  на  $\|A\|_{\nu_{\Lambda_p}(U)}$ .

### Заключение

В данной работе для произвольного правильного пространства  $E$  введены величины геометрического характера  $\bar{c}_E$  и  $\underline{c}_E$ , значения которых были подсчитаны ранее в пространствах Лебега, а здесь вычисляются в пространствах Лоренца  $\Lambda_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Результат получается неожиданный, поскольку значения не зависят от  $p$ , в отличие от пространств Лебега.

Кроме того, в настоящей работе было доказано, что для любого ограниченного подмножества  $U$  пространств Лоренца справедливы неравенства  $\beta_{\Lambda_p}(U) \geq 2\nu_{\Lambda_p}(U)$ . Если  $U$  компактно по мере, то  $\beta_{\Lambda_p}(U) = 2\nu_{\Lambda_p}(U)$ .

Если  $U \subset B_{L_\infty}(\theta, r_1) \cap B_{L_p}(\theta, r)$  для некоторых  $r_1 > 0$  и  $r > 0$ , то получаем оценку для меры некомпактности  $\beta$ , опять таки, в отличие от пространств Лебега, не зависящую от  $r_1$ .

Лемма 1 настоящей работы доказана при более слабых предположениях по сравнению с аналогичным утверждением из [12].

Завершает работу утверждение, позволяющее выделить новый класс уплотняющих операторов в пространствах Лоренца.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Banas' J., Goebel K.** Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., vol. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.
2. **Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др.** Меры некомпактности и уплотняющие операторы. – Новосибирск: Наука, 1986.
3. **Красносельский М.А., Забрейко П.П. и др.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966.
4. **Väth M.** Ideal Spaces, Let. Notes in Math. 1664, Springer Verlag, Berlin, 1997.
5. **Erzakova N.A.** On Measures of Non-Compactness in Regular Spaces // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. - 1996. - V. 15. - № 2. - P. 299-307.
6. **Ерзакова Н.А.** Компактность по мере и мера некомпактности // Сибирский математический журнал. - 1997. - Т. 38. - № 5. - С. 1071-1073.
7. **Ерзакова Н.А.** О нелинейных операторах // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2009. - № 140. - С. 57-64.
8. **Ерзакова Н.А.** О разрешимости уравнений с частично аддитивными операторами // Функциональный анализ и его приложения. - 2010. - № 44. - Вып. 3. - С. 69-72.
9. **Ерзакова Н.А.** О компактных по мере операторах // Известия вузов. Математика. - 2011. - № 9. - С. 44-51.
10. **Erzakova N.A.** On locally condensing operators // Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications, 75, 2012, № 8, 3552-3557.
11. **Ерзакова Н.А.** Мера некомпактности  $\beta$  в пространствах  $L_p$  // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 195. - С. 65-73.
12. **Erzakova N.A.** Measures of Noncompactness in Regular Spaces // Canadian Mathematical Bulletin. Published electronically on March 25, 2014. [Электронный ресурс] URL: <http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2014-015-4>.

#### MEASURE OF NON-COMPACTNESS $\beta$ IN THE LORENTZ SPACES

**Erzakova N.A.**

Geometric characteristics of regular spaces are determined. Examples of regular spaces are the Lebesgue and Lorentz spaces, in particular. For the Lorentz spaces an inequality for arbitrary subsets, connecting the measures of noncompactness  $\beta$  and  $\nu$  are proved. A new class of  $\beta$ -condensing operators in the Lorentz spaces among partially-additive operators linear operators, in particular, is obtained.

**Key words:** measure of non-compactness, condensing operator, Lebesgue space, Lorentz space, regular space, partially-additive operator.

#### Сведения об авторе

**Ерзакова Нина Александровна**, окончила НГУ (1976), доктор физико-математических наук, профессор МГТУ ГА, автор более 70 научных работ, область научных интересов – теория неподвижных точек, меры некомпактности, уплотняющие операторы, интегральные операторы, пространства С.Л. Соболева, краевые задачи для уравнений с частными производными.

УДК 517.988.8:536.48

## О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ К ЗАМКНУТОМУ МНОЖЕСТВУ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

А.А. ФОНАРЁВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Кузнецовым В.Л.

Исследуется возможность использования проекционного итерационного метода, сочетающего в себе проекционный метод и итерационный процесс, для отыскания приближений к замкнутому множеству нетривиальных обобщённых решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости. Обобщённые решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау являются критическими точками функционала свободной энергии сверхпроводника.

**Ключевые слова:** проекционный итерационный метод, уравнения Гинзбурга – Ландау, решения.

### Введение

В феноменологической теории сверхпроводимости изучается поведение сверхпроводимости во внешнем магнитном поле. Состояние сверхпроводника, занимающего объём  $\bar{\Omega} \subset R^3$  ( $\Omega$  – ограниченная выпуклая область в трёхмерном евклидовом пространстве  $R^3$  с границей  $\partial\Omega$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ), описывают решения уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости, имеющих тривиальное (нулевое) решение.

В [1] исследуется более общая краевая задача для уравнений Гинзбурга – Ландау, чем исследуемая в [2] соответствующая абрикосовскому смешанному состоянию краевая задача, и определяется обобщённое решение краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости, являющееся критической точкой функционала сверхпроводника.

С использованием уравнений Гинзбурга – Ландау и граничных условий, определяющих их решения, в [1, с. 345–350] доказывается существование нетривиального обобщённого решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау.

Точная аналитическая запись решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау оказывается невозможной в силу существенной нелинейности уравнений Гинзбурга – Ландау. Поэтому для поиска решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау применимы только численные методы.

В численных методах для поиска решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау важное место занимают частные конкретные задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау [3; 4]. Например, в [4] численными методами изучено влияние граничных условий на решения уравнений Гинзбурга – Ландау для тонких сверхпроводящих пластин в безвихревом пределе.

В статье, следуя [1], при построении численного метода для поиска решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау рассматривается общая краевая задача для уравнений Гинзбурга – Ландау.

Показывается, что приближения к замкнутому множеству нетривиальных обобщённых решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау можно получить с использованием проекционного итерационного метода (ПИМ), сочетающего в себе проекционный метод и итерационный процесс [5, с. 141], где это утверждается без строгого обоснования). При этом существенно используется исследование функционала свободной энергии сверхпроводника, приведённое в [1].

### 1. Функционал свободной энергии сверхпроводника

Пусть  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $R^3$ ;  $\nabla$  – оператор градиента в  $R^3$ :

$$\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3);$$

$rot$  – оператор ротора:  $rot = (\partial/\partial x_2 - \partial/\partial x_3, \partial/\partial x_3 - \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_1 - \partial/\partial x_2)$ ;  $n$  – вектор нормали к  $\partial\Omega$ ;  $W_2^1(\Omega)$  – вещественное пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{W_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \{uv + (\nabla u, \nabla v)\} dx$$

и нормой

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left( \langle u, u \rangle_{W_2^1(\Omega)} \right)^{1/2}$$

для  $u, v \in W_2^1(\Omega)$ ;  $E_1$  – рассматриваемое над полем действительных чисел гильбертово пространство комплексных функций, вещественные и мнимые части которых являются элементами пространства  $W_2^1(\Omega)$ . Скалярное произведение на  $E_1$  определяется равенством

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{E_1} = \text{Re} \int_{\Omega} \{ \psi(x) \varphi^*(x) + (\nabla \psi(x), \nabla \varphi^*(x)) \} dx$$

для  $\psi, \varphi \in E_1$ . Здесь и далее  $(*)$  – операция комплексного сопряжения.

Обозначим через  $E_2$  гильбертово пространство вектор-функций  $A = (A_1, A_2, A_3)$ , компоненты которых принадлежат пространству  $W_2^1(\Omega)$ . Скалярное произведение вектор-функций  $A = (A_1, A_2, A_3)$ ,  $B = (B_1, B_2, B_3)$  на  $E_2$  определим равенством

$$\langle A, B \rangle_{E_2} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^3 A_i B_i + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \right\} dx.$$

Рассмотрим гильбертово пространство  $E = E_1 \times E_2$ , состоящее из пар  $(\psi, A)$  с  $\psi \in E_1$  и  $A \in E_2$ . Скалярное произведение элементов  $(\psi, A), (\varphi, B) \in E$  определим равенством

$$\langle u, v \rangle_E = \langle \psi, \varphi \rangle_{E_1} + \langle A, B \rangle_{E_2}.$$

При соответствующем выборе единиц измерения уравнения Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости и граничные условия, определяющие их решения  $(\psi, A) \in E$ , имеют вид:

$$(i\nabla - A)^2 \psi + \mu |\psi|^2 - \lambda \psi = 0; \tag{1}$$

$$-rot \ rot A = A |\psi|^2 + i(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*); \tag{2}$$

$$(n, -i\nabla \psi - A\psi) \Big|_{\partial\Omega} = 0; \tag{3}$$

$$rot A \times n \Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – вещественные параметры;  $i = \sqrt{-1}$ .

Уравнения Гинзбурга – Ландау являются уравнениями Эйлера функционала  $f$  свободной энергии сверхпроводника, который определяется на парах  $u = (\psi, A) \in E$  равенством



$$f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |\operatorname{rot} A|^2 + |\nabla \psi - iA\psi|^2 + \frac{\mu}{2} |\psi|^4 - \lambda |\psi|^2 \right\} dx. \quad (5)$$

Функционал  $f$  непрерывно дифференцируем по Фреше на  $E$  и

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(u), v \rangle_E &= \int_{\Omega} \left\{ (\operatorname{rot} A, \operatorname{rot} B) + (A|\psi|^2 + i\psi^* \nabla \psi - i\psi \nabla \psi^*, B) \right\} dx + \\ &+ \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left\{ (\nabla \psi - iA\psi, \nabla \varphi^* + iA\varphi^*) + (\mu |\psi|^2 \psi - \lambda \psi) \varphi^* \right\} dx \end{aligned} \quad (6)$$

для  $u = (\psi, A)$ ,  $v = (\varphi, B) \in E$ , где  $\nabla f$  – градиент (производная Фреше) функционала  $f$ .

Критические точки функционала  $f$  на  $E$  являются решениями операторных уравнений

$$P\nabla f(u) = 0, \quad Q\nabla f(u) = 0 \quad (u \in E), \quad (7)$$

где  $P: E \rightarrow E_1$ ,  $Q: E \rightarrow E_2$  – операторы ортогонального проектирования пространства  $E$  на  $E_1$  и  $E_2$  соответственно.

Операторные уравнения (7) называются в [1] уравнениями Гинзбурга – Ландау, а их решения – обобщёнными решениями краевой задачи (1)–(4). Если обобщённое решение  $u = (\psi, A)$  достаточно гладкое, то пара  $(\psi, A)$  является классическим решением краевой задачи (1)–(4) для уравнений Гинзбурга – Ландау.

Обозначим через  $F$  подпространство пространства  $E_2$ , состоящее из вектор-функций  $A = (A_1, A_2, A_3)$ , удовлетворяющих условиям:

$$\operatorname{div} A \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0; \quad (A, n)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Пусть  $H$  – прямое произведение пространств  $E_1$  и  $F$ . Пространство  $H$  является замкнутым подпространством пространства  $E$ . На пространстве  $H$  [1] норма  $\|\cdot\|_H$  эквивалентна норме

$$\|u\|_H = \left( \|\psi\|_{E_1}^2 + \|\operatorname{rot} A\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (u = (\psi, A) \in H),$$

где

$$\|\operatorname{rot} A\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} A, \operatorname{rot} A) dx.$$

На пространстве  $H$  функционал (5) допускает представление

$$f(u) = \frac{1}{2} \|u\|_H^2 + g(u).$$

В [1] отмечается, что: 1) из равенства (6) вытекает, что функционал  $g$  дифференцируем по Фреше на  $H$ , а его градиент  $\nabla g: H \rightarrow H$  вполне непрерывен; 2) градиент  $\nabla f$  функционала  $f$  на  $H$  удовлетворяет условию  $(S)_+$ , т.е. из слабой сходимости последовательности  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$  к  $u_0 \in H$  и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(u_n), u_n - u_0 \rangle_H \leq 0$$

( $\limsup$  – верхний предел) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_H = 0.$$

В [1, с. 349] доказано, что если  $u = (\varphi, A)$  – критическая точка функционала  $f$ , рассматриваемого на  $H$ , то  $u$  – критическая точка этого функционала на  $E$ . Таким образом, задача об отыскании критических точек функционала  $f$  на  $E$  сводится к отысканию критических точек на более узком пространстве  $H$  точек.

И в [1] доказано, что функционал  $f : H \rightarrow R^1$  растущий, т.е.  $\lim_{\|u\|_H \rightarrow \infty} f(u) = +\infty$ .

При  $\lambda > 0$  на вектор-функциях  $(\psi, 0)$ , где  $\psi$  – малая ненулевая постоянная, функционал  $f$  принимает отрицательные значения, а  $f(0) = 0$ .

Пусть  $L_q(\Omega)$ ,  $q > 1$ , – пространство Лебега с нормой

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (u \in L_q(\Omega)).$$

Пространство С.Л. Соболева  $W_2^1(\Omega)$  вложено в пространство Лебега  $L_q(\Omega)$  с  $q \leq 6$ , т.е.  $W_2^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$  и оператор вложения  $j : W_2^1(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$ ,  $j(u) = u$  ( $u \in W_2^1(\Omega)$ ), является непрерывным взаимно-однозначным отображением  $W_2^1(\Omega)$  в  $L_q(\Omega)$ . При  $q < 6$  пространство  $W_2^1(\Omega)$  вложено в  $L_q(\Omega)$  компактно, т.е. оператор  $j$  компактный.

Говоря о компактности оператора, имеем в виду преобразование оператором любого ограниченного множества в компактное множество, т.е. в такое множество, что из любой последовательности, содержащейся в множестве, можно выделить фундаментальную подпоследовательность [6]. И говоря далее о компактности последовательности, будем иметь в виду, что из любой подпоследовательности последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Покажем, что градиент  $\nabla g$  функционала  $g$  равномерно непрерывен на ограниченных множествах пространства  $H$ . При доказательстве равномерной непрерывности оператора  $\nabla g$  на ограниченных множествах пространства  $H$  ограничимся исследованием только члена

$$i\psi^* \nabla \psi - i\psi \nabla \psi^* = 2\{(\operatorname{Im} \psi) \nabla \operatorname{Re} \psi - (\operatorname{Re} \psi) \nabla \operatorname{Im} \psi\}$$

в первом интеграле в равенстве (6).

Если  $\psi = v + i\omega$ , то

$$(i\psi^* \nabla \psi - i\psi \nabla \psi^*, B) = 2 \sum_{k=1}^3 (\omega v_{x_k} - v \omega_{x_k}) B_k. \quad (8)$$

Рассматривая слагаемое  $v \omega_{x_1} B_1$  в сумме в (8) (остальные слагаемые в сумме в (8) рассматриваются аналогично), при  $u = (\psi, A)$ ,  $\tilde{u} = (\tilde{\psi}, \tilde{A})$ ,  $v = (\varphi, B) \in H$ ,  $\psi = v + i\omega$ ,  $\tilde{\psi} = \tilde{v} + i\tilde{\omega}$  имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (v \omega_{x_1} - \tilde{v} \tilde{\omega}_{x_1}) B_1 dx \right| &\leq \int_{\Omega} |(v - \tilde{v}) v_{x_1} B_1| dx + \int_{\Omega} |\tilde{v} (\omega_{x_1} - \tilde{\omega}_{x_1}) v_{x_1} B_1| dx; \\ \int_{\Omega} |(v - \tilde{v}) v_{x_1} B_1| dx &\leq \|v - \tilde{v}\|_{L_6(\Omega)} \|v_{x_1} B_1\|_{L_{6/5}(\Omega)} \leq C \|v - \tilde{v}\|_{W_2^1(\Omega)} \|v_{x_1}\|_{L_2(\Omega)} \|B_1\|_{L_3(\Omega)}; \\ \int_{\Omega} |\tilde{v} (\omega_{x_1} - \tilde{\omega}_{x_1}) B_1| dx &\leq \|\omega_{x_1} - \tilde{\omega}_{x_1}\|_{L_2(\Omega)} \|\tilde{v} B_1\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\omega - \tilde{\omega}\|_{W_2^1(\Omega)} \|\tilde{v}\|_{L_4(\Omega)} \|B_1\|_{L_4(\Omega)}, \end{aligned}$$

где  $C$  – норма оператора вложения  $j$  из  $W_2^1(\Omega)$  в  $L_6(\Omega)$ .

Следовательно, оператор  $T : H \rightarrow H$ , определяемый равенством

$$\langle T(u), v \rangle_H = \int_{\Omega} (i\psi^* \nabla \psi - i\psi \nabla \psi^*, B) dx$$

для  $u = (\psi, A)$ ,  $v = (\varphi, B) \in H$ , является равномерно непрерывным на ограниченных множествах пространства  $H$ .

Из компактности и равномерной непрерывности на ограниченных множествах оператора  $\nabla g : H \rightarrow H$  вытекает, что оператор  $\nabla g$  усиленно непрерывный (теорема 7.2 в [7, с. 86]), т.е. из слабой сходимости последовательности  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset H$  к  $u_0 \in H$  следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla g(u_n) - \nabla g(u_0)\|_H = 0.$$

Отметим, что в [5] усиленная непрерывность оператора  $\nabla g$  не обосновывается.

На самом деле, при построении ПИМ для отыскания приближений к нетривиальным решениям уравнений Гинзбурга – Ландау усиленную непрерывность оператора  $\nabla g$  можно не использовать при использовании равномерной непрерывности на ограниченных множествах оператора  $\nabla f : H \rightarrow H$ , вытекающей из равномерной непрерывности на ограниченных множествах оператора  $\nabla g : H \rightarrow H$ .

Таким образом, обоснована возможность отыскания критических точек функционала  $f$  в пространстве  $H$  с использованием аналога ПИМ части 6.6 в [5], ибо результаты исследования уравнений Гинзбурга – Ландау в [1] и равномерная непрерывность на ограниченных множествах оператора  $\nabla f : H \rightarrow H$  позволяют использовать аналог ПИМ части 6.6 в [5] для отыскания нетривиальных решений уравнения  $\nabla f(u) = 0$  ( $u \in H$ ), являющихся критическими точками функционала  $f$  на  $H$ .

## 2. Проекционный итерационный метод

Пусть  $\{H_i\}_{i=1}^\infty$  и  $\{P_i\}_{i=1}^\infty$  – такие последовательности подпространств (замкнутых) пространства  $H$  и операторов ортогонального проектирования  $P_i$  пространства  $H$  на  $H_i$  ( $i \geq 1$ ), что выполняются следующие условия:

- 1)  $H_i \subseteq H_{i+1}$  для каждого  $i \geq 1$ ;
- 2)  $P_i u \rightarrow u$  при  $i \rightarrow \infty$  для каждого  $u \in H$ ;
- 3)  $H_1$  состоит из элементов  $(\psi, 0) \in H$  с функциями  $\psi$ , равными константам.

Зафиксируем произвольные числа

$$q_0 \in (0, 1); \quad q \in (0, q_0); \quad b > 0; \quad \theta \in (0, 1].$$

Предположим, что  $\lambda > 0$ .

Рассмотрим последовательность  $\{u_i\}_{i=1}^\infty$  ПИМ

$$u_{i+1} = u_i - t_i w_i \quad (i \geq 1) \tag{9}$$

с таким начальным элементом  $u_1 \in H_1$ , что  $f(u_1) < 0$ , где при

$$h_i \equiv P_{i+1} \nabla f(u_i) \neq 0$$

имеем:

$$\begin{aligned} t_i &\in [\theta \tau_i, \tau_i]; \\ \tau_i &= \sup_{\tau \in (0, b]} \left\{ \langle P_{i+1} \nabla f(u_i - s w_i), w_i \rangle_H \geq q \|h_i\|_H, \forall s \in (0, \tau) \right\}; \\ w_i &\in H_{i+1}, \quad \langle h_i, w_i \rangle_H \geq q_0 \|h_i\|_H, \end{aligned}$$

а при  $h_i = 0$  имеем  $t_i = 0$ ,  $w_i = 0$ .

В силу выбора элементов  $w_i$  и множителей  $t_i$  ( $i \geq 1$ ) в (9) ПИМ (9) является градиентным методом (методом типа метода наискорейшего спуска). И ПИМ (9) сочетает в себе проекционный метод и итерационный процесс, ибо элементы последовательности  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  ПИМ (9) принадлежат подпространствам пространства  $H$ .

Справедливы следующие лемма и теорема, являющиеся аналогами леммы 6.7 и теоремы 6.12 в [5] и доказываемые так же, как лемма 6.7 и теорема 6.12 в [5].

*Лемма.* Для последовательности  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  ПИМ (9) имеем:

- 1)  $f(u_i) \geq f(u_{i+1})$  для всех  $i \geq 1$ ;
- 2) последовательность  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  ограничена в  $H$ ;
- 3) ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} t_i \|h_i\|_H$  сходится;
- 4)  $\|h_i\|_H \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ ;
- 5) последовательность  $\{\nabla f(u_i)\}_{i=1}^{\infty}$  слабо сходится к нулю в  $H$ ;
- 6)  $\langle \nabla f(u_i), u_i - u \rangle_H \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$  для каждого  $u \in H$ .

*Теорема.* Последовательность  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  ПИМ (9) компактна, частичные пределы последовательности  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  принадлежат множеству  $K = \{u \in H : \nabla f(u) = 0, f(u) \leq f(u_1)\}$  и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{u \in K} \|u_i - u\|_H \right\} = 0. \quad (10)$$

Заключение 1 леммы означает, что последовательность  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  ПИМ (9) релаксационная [7, с. 155]. Поэтому множители  $t_i$  ( $i \geq 1$ ) в (9) можно назвать, следуя терминологии в [7], релаксационными множителями.

В силу (10) последовательность  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  ПИМ (9) сходится к замкнутому множеству  $K$  нетривиальных критических точек функционала  $f$ , рассматриваемого на пространстве  $H$ . Множество  $K$  является замкнутым множеством нетривиальных обобщённых решений краевой задачи (1)–(4) для уравнений Гинзбурга – Ландау.

## Заключение

Автором предложен проекционный итерационный метод, сочетающий в себе проекционный метод и итерационный процесс, для отыскания приближений к замкнутому множеству нетривиальных обобщённых решений краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау феноменологической теории сверхпроводимости. Обобщённые решения краевой задачи для уравнений Гинзбурга – Ландау являются критическими точками функционала свободной энергии сверхпроводника.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.** Геометрические методы в вариационных задачах. - М.: Изд-во Магистр, 1998.
2. **Одех Ф.** Задача о бифуркации в теории сверхпроводимости // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана. - М.: Мир, 1974. - С. 63-70.
3. **Саунина С.С., Лексин А.Ю., Прохоров А.В.** Автоматизация исследования солитонных решений диссипативного уравнения Гинзбурга – Ландау с использованием параллельных вычислений // Високопродуктивні обчислення: міжнародна конференція НРС-UA'2012 (Україна, Київ, 8-10 жовтня 2012 року). - С. 300-304. [Электронный ресурс]. URL: <http://hpc-ua.org/hpc-ua-12/files/proceedings/60.pdf>.

4. **Безотосный П.И., Лыков А.Н., Цветков А.Ю.** Численное решение уравнений Гинзбурга – Ландау для сверхпроводящих пластин с использованием различных граничных условий // Научный Вестник СПбГУ ИТМО. - 2008. - № 13 (58). - С. 42-46.
5. **Фонарёв А.А.** Проекционные итерационные методы решения уравнений и вариационных неравенств с нелинейными операторами теории монотонных операторов: монография. - М.: ИНФРА-М, 2014.
6. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980.
7. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. - М.: Наука, 1972.

## **ABOUT SOME APPROXIMATIONS TO THE CLOSED SET OF NOT TRIVIAL SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF GINZBURG – LANDAU**

**Fonarev A.A.**

Possibility of use of a projective iterative method for search of approximations to the closed set of not trivial generalised solutions of a boundary value problem for Ginzburg – Landau's equations of the phenomenological theory of superconduction is investigated. The projective iterative method combines a projective method and iterative process. The generalised solutions of a boundary value problem for Ginzburg – Landau's equations are critical points of a functional of a superconductor free energy.

**Key words:** projective iterative method, Ginzburg-Landau's equations, solutions.

### **Сведения об авторе**

**Фонарёв Анатолий Афанасьевич**, 1942 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ, автор 127 научных работ, область научных интересов – нелинейные уравнения в нормированных пространствах, приближенные методы нелинейного функционального анализа, решение нелинейных эллиптических краевых задач.

УДК 519.46

## О ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ТОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А.М. ЛУКАЦКИЙ

Предложена конструкция продолжения диффеоморфизма 2-тора до сохраняющего элемент объема диффеоморфизма полнотория. Конструкция иллюстрируется на примере продолжения диффеоморфизмов действия группы  $SL(2, \mathbf{R})$  на торе. Полученные продолжения используются для построения примеров кинематического динамо в полнотории. Для случая  $n$ -мерной сферы предлагается обобщение ранее полученных результатов.

**Ключевые слова:** диффеоморфизм, граница, продолжение, тор, полноторие, аналитическое продолжение, бездивергентное векторное поле, сохраняющий элемент объема диффеоморфизм, кинематическое динамо.

### Введение

Пусть задано полноторие (прямое произведение окружности на диск)  $P = S^1 \times D^2$ . Предполагается, что полноторие  $P$  снабжено координатами окружности и диска

$$\{\theta, x, y \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, x^2 + y^2 \leq 1\}. \quad (1)$$

Рассмотрим задачу продолжения диффеоморфизма границы полнотория (тора  $T^2$ ) внутрь до сохраняющего элемент объема диффеоморфизма полнотория. Для произвольного гладкого риманова многообразия с краем задача продолжения произвольного диффеоморфизма края до сохраняющего элемент объема диффеоморфизма всего многообразия сформулирована В.И. Арнольдом в [1], задача 1988-20. Там же предложено разобрать ее на примере полнотория. Для случая  $n$ -мерной сферы эта задача разобрана в [2; 3].

### 1. Конструкция продолжения диффеоморфизмов тора

Следуя [3], рассмотрим однородные гармонические многочлены степени  $m$  на диске. Согласно [4], они образуют двумерное пространство с базисом

$$\{p_m = \frac{1}{2}((x+iy)^m + (x-iy)^m), q_m = \frac{1}{2i}((x+iy)^m - (x-iy)^m)\}. \quad (2)$$

Заметим, что в полярных координатах  $\{\rho, \phi\}$  на диске имеем

$$\{p_m = \rho \cos(m\phi), q_m = \rho \sin(m\phi)\}. \quad (3)$$

Введем векторные поля на диске

$$\{e_m = \nabla_{S^1} p_m, f_m = \nabla_{S^1} q_m, n = (x, y), r^2 = x^2 + y^2 = (n, n), \\ h = (-y, x) = \partial_\phi, g = \partial_\theta\}. \quad (4)$$

Заметим, что для однородного гармонического многочлена  $p$  степени  $m$  на диске имеем:

$$\nabla_{S^1} p = \nabla p - m p n; \\ \operatorname{div}(\nabla_{S^1} p) = -m(m+2)p, \quad (5)$$

где  $\nabla p, \operatorname{div}$  являются градиентом и дивергенцией в стандартных координатах  $(x, y)$  на диске. Векторные поля

$$\{h, e_m, f_m \mid m = 1, 2, \dots\} \quad (6)$$

образуют полную ортогональную систему на окружности с координатой  $\phi$ . Векторное поле  $w$  на торе удобно представить в виде

$$w = a_0(\theta)h + \sum_m (a_m(\theta)e_m + b_m(\theta)f_m) + (c_0(\theta) + \sum_m (c_m(\theta)p_m + d_m(\theta)q_m))g. \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} w &= \sum_m \{-m(m+2)(a_m(\theta)p_m + b_m(\theta)q_m)\} + c_0'(\theta) + \sum_m \{c_m'(\theta)p_m + d_m'(\theta)q_m\} = \\ &= c_0'(\theta) + \sum_m \{(-m(m+2)a_m(\theta) + c_m'(\theta))p_m + (-m(m+2)b_m(\theta) + d_m'(\theta))q_m\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем векторное поле, обращающееся в ноль на границе

$$u = (r^2 - 1) \left\{ \sum_m (s_m(\theta)\nabla p_m + t_m(\theta)\nabla q_m) + \alpha c_0'(\theta)g + \beta c_0'(\theta)n \right\}.$$

Покажем, что добавлением такого поля к  $w$  можно получить бездивергентное векторное поле.

Имеем

$$\operatorname{div} u = \sum_m 2m(s_m(\theta)p_m + t_m(\theta)q_m) + \alpha c_0'(\theta)(r^2 - 1) + \beta c_0'(\theta)(4r^2 - 2). \quad (9)$$

Выберем коэффициенты в формуле для  $u$  из условия  $\operatorname{div}(w + u) = 0$ . Имеем:

$$\begin{aligned} 2ms_m(\theta) - m(m+2)a_m(\theta) + c_m'(\theta); \\ 2mt_m(\theta) - m(m+2)b_m(\theta) + d_m'(\theta); \\ \alpha + 4\beta = 0, 1 - \alpha - 2\beta = 0. \end{aligned}$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned} s_m(\theta) &= \frac{m+2}{2}a_m(\theta) - \frac{1}{2m}c_m'(\theta); \\ t_m(\theta) &= \frac{m+2}{2}b_m(\theta) - \frac{1}{2m}d_m'(\theta); \\ \alpha &= 2, \beta = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, получена

**Теорема 1.** Гладкое (аналитическое) векторное поле на торе продолжается до гладкого (аналитического) векторного поля на полнотории.

*Доказательство.* Произвольное гладкое (аналитическое) векторное поле  $w$  на торе представимо в виде (7). Из свойств рядов Фурье [5] следует, что для гладкого (аналитического) векторного поля на торе коэффициенты  $\{a_m(\theta), b_m(\theta), c_m(\theta), d_m(\theta)\}$  убывают быстрее любой степенной функции  $\frac{1}{m^k}$ , где  $k \in \mathbb{N}$  (как некоторая показательная функция  $a^m$ , где  $0 < a < 1$ ). По вектор-

ному полю  $w$  построим векторное поле  $u$  по формулам (10). Из формул (10) следует, что порядок убывания коэффициентов векторного поля  $u$  тот же, что и для  $w$ , а значит оно гладкое (аналитическое). Тогда векторное поле  $w+u$  на торе совпадает с  $w$  на торе и имеет нулевую дивергенцию на полнотории. Теорема доказана.

*Следствие 1.* Гладкий (аналитический) диффеоморфизм тора, изотопный тождественному, продолжается до гладкого (аналитического) диффеоморфизма полнотория, сохраняющего элемент объема.

*Доказательство.* Здесь используется теорема о разложении диффеоморфизма, изотопного тождественному в произведение потоков векторных полей. Для гладкого случая это следует из теоремы Терстона о простоте связной компоненты единицы группы диффеоморфизмов компактного многообразия [6], для аналитического - из теоремы М. Эрмана [7] о простоте связной компоненты единицы группы аналитических диффеоморфизмов тора.

## 2. Некоторые обобщения конструкции продолжения диффеоморфизмов сферы

Вернемся к случаю сферы  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ , рассмотренному в [3]. Для однородного гармонического многочлена  $p$  степени  $m$  на сфере имеем:

$$\begin{aligned} w &= \nabla_{S^{d-1}} p = \nabla p - mpn; \\ \operatorname{div} w &= -m(m+d)p, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\nabla p, \operatorname{div}$  являются градиентом и дивергенцией в стандартных координатах  $(x_1, \dots, x_d)$  в  $\mathbb{R}^d$ . Здесь  $n = (x_1, \dots, x_d), r^2 = (n, n) = x_1^2 + \dots + x_d^2$ .

В [3] показано, что если ввести векторное поле

$$u = \frac{(r^2 - 1)}{2} (d + m) \nabla p, \tag{12}$$

обращающееся в ноль на сфере, то векторное поле  $w + u$  является бездивергентным продолжением векторного поля  $w$  со сферы внутрь шара. Заметим теперь, что для однородного многочлена степени  $m$  имеем  $mp = n(p)$ . Тогда можно переписать формулу (12) для  $u$  в следующем виде

$$u = \frac{1}{2} (d \nabla p + \nabla(n(p))). \tag{13}$$

Преимущество формулы (13) состоит в том, что она не зависит от степени многочлена  $p$ . Поскольку любая функция на сфере разлагается в ряд по однородным, гармоническим в шаре многочленам ([4]), то получаем формулу для бездивергентного продолжения векторных полей градиентной серии ([3]) на сфере внутрь шара.

Пусть задана гармоническая в шаре функция  $f$  и

$$w = \nabla_{S^{d-1}} f = \nabla f - n(f)n. \tag{14}$$

Введем векторное поле

$$u = \frac{(r^2 - 1)}{2} (d \nabla f + \nabla(n(f))). \tag{15}$$

Резюмируя проведенные рассуждения, получаем

*Предложение 1.* Векторное поле  $w$  (14) на сфере, где  $f$  – гармоническая в шаре функция, имеет бездивергентное продолжение внутрь шара  $w + u$ , где  $u$  дается формулой (15).

## 3. Приложения конструкции продолжения диффеоморфизмов

*Пример 1.* Рассмотрим векторные поля

$$\{g = \partial_\theta, u = \sin(\theta)g, v = \cos(\theta)g\},$$

они порождают подалгебру  $sl(2, \mathbb{R})$ . Бездивергентными продолжениями этих векторных полей ( $\operatorname{div} g = 0$ ) являются:



$$\begin{aligned}
\bar{u} &= u + (r^2 - 1)(2 \sin(\theta)g - \frac{1}{2} \cos(\theta)n) = \\
&= r^2(2 \sin(\theta)g - \frac{1}{2} \cos(\theta)n) - \sin(\theta)g + \frac{1}{2} \cos(\theta)n; \\
\bar{v} &= v + (r^2 - 1)(2 \cos(\theta)g + \frac{1}{2} \sin(\theta)n) = \\
&= r^2(2 \cos(\theta)g + \frac{1}{2} \sin(\theta)n) - \cos(\theta)g - \frac{1}{2} \sin(\theta)n.
\end{aligned}$$

Заметим, что на оси полнотория ( $x = y = 0$ ) имеем  $\bar{u} = -\sin(\theta)g$ ,  $\bar{v} = -\cos(\theta)g$ , в частности, это инвариантное множество, на которой бездивергентные продолжения также порождают подалгебру  $sl(2, \mathbf{R})$ . При этом задаваемые действия группы  $SL(2, \mathbf{R})$  на торе и оси полнотория разнонаправлены. При этом непосредственно проверяется, что на всем полнотории векторные поля  $g$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  порождают бесконечномерную алгебру Ли.

Обозначим

$$A = g + \bar{v}, \quad (16)$$

на оси полнотория имеем  $[A, \bar{u}] = A$ . Введем элемент потока векторного поля  $A$   $F = \exp(\bar{u})$ .

Тогда из свойств действия диффеоморфизма на векторное поле на оси полнотория имеем

$$F_*^n(A) = \exp(n)A. \quad (17)$$

Здесь имеет место эффект, аналогичный кинематическому динамо, но в норме  $C^0$ .

Напомним, что эффект кинематического динамо [8] на компактном римановом многообразии  $M$  заключается в существовании такого сохраняющего элемент объема  $M$  диффеоморфизма  $f$  и бездивергентного векторного поля  $v$ , что

$$\|f_*^n(v)\|_{L^2} \geq a^n \|v\|_{L^2}, \text{ где } a > 1. \quad (18)$$

Векторное поле  $\bar{u}$  имеет на оси полнотория особые точки  $a = (0, 0, 0)$ ,  $b = (\pi, 0, 0)$ , линеаризация  $\bar{u}$  в этих точках задается матрицей

$$\begin{pmatrix}
-\cos(\theta), & 0, & 0 \\
0, & \frac{\cos(\theta)}{2}, & 0 \\
0, & 0, & \frac{\cos(\theta)}{2}
\end{pmatrix}.$$

Собственные числа линеаризации  $\bar{u}$  в точке  $b: (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . Тогда, согласно [8], имеет место эффект кинематического динамо для действия потока векторного поля  $\bar{u}$  на бездивергентное векторное поле, имеющее направление, соответствующее собственному числу 1 линеаризации, в точке  $b$ , т.е.  $(1, 0, 0)$ . Заметим, что  $A|_b = (2, 0, 0)$  и может служить таким бездивергентным векторным полем. Таким образом, экспоненциальному растяжению (17) вдоль оси полнотория векторного поля  $A$  под действием диффеоморфизма  $F$  соответствует эффект кинематического динамо (18) в полнотории.

## Выводы

Предложена конструкция явного продолжения векторного поля на торе до бездивергентного векторного поля на полнотории. Как следствие, установлено, что гладкий (аналитический) диффеоморфизм тора продолжается до гладкого (аналитического) диффеоморфизма полнотория. Конструкция продолжения диффеоморфизмов тора позволяет естественным образом построить примеры кинематического динамо на полнотории. Это обусловлено тем, что на границе полнотория – торе действует полная группа диффеоморфизмов тора, и с ее помощью естественным образом получаются примеры экспоненциального растяжения векторного поля при действии потоком другого векторного поля. Бездивергентные продолжения таких векторных полей внутри полнотория могут давать примеры кинематического динамо в полнотории. Здесь важен явный характер конструкции бездивергентного продолжения векторных полей, поскольку становится возможным получить в явном виде бездивергентные продолжения для элементов алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{R})$  и т.п.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Задачи Арнольда. - М.: ФАЗИС, 2000. - С. 71.
2. Лукацкий А.М. О задаче продолжения диффеоморфизмов // Анализ и особенности (Арнольд-75): тезисы междунар. конф. - М.: МИ РАН, 2012. - С. 77-78.
3. Lukatsky A.M. A Construction of Diffeomorphism Extension and its Applications // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2014. - № 204.
4. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. - М.: Наука, 1965.
5. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. - Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1983. - С. 188.
6. Thurston W. Foliations and Groups of Diffeomorphisms. Bul. A.M.S., 1975, Vol. 80, p.p. 304-307.
7. Hermam M.R. Sur le groupe des diffeomorphismes R-analitiques du tore. Diff. Top. and Geom. (Proc. Colloq. Dijon, 1974) (Lect. Notes. Math., 484) Springer, Berlin, 1975, p.p. 36-42.
8. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. - М.: МЦНМО, 2007.

## ON THE PROBLEM OF TORE DIFFEOMORPHISM EXTENSION AND ITS APPLICATIONS

Lukatsky A.M.

The construction of the extensions of a 2-torus diffeomorphism up to volume preserving diffeomorphism of solid tori is proposed. The construction is illustrated on the example of extension of diffeomorphism of  $SL(2, \mathbb{R})$  action on the torus. These extensions are used for the construction of kinematic dynamo examples onto solid torus. For the case of  $n$ -sphere a generation of results obtained before is proposed.

**Key words:** diffeomorphism, boundary, extension, torus, solid torus, analytic extension, free-divergence vector field, volume preserving diffeomorphism, kinematic dynamo.

## Сведения об авторе

Лукацкий Александр Михайлович, 1949 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник института энергетических исследований (ИНЭИ) РАН, автор более 100 научных работ, область научных интересов – бесконечномерные группы Ли в применении к уравнениям математической физики.

УДК 621.396; 681.34

## ОБ ОЦЕНКАХ СТАТИСТИКИ ОШИБОК ПИЛОТИРОВАНИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ СБОЯ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

В.Л. КУЗНЕЦОВ, Е.С. ГОРЯЧЕНКОВА

Развивается новый подход к задаче совместной обработки данных о положении воздушного судна с помощью спутниковой навигационной системы и системы вторичных обзорных радиолокаторов. Цель задачи – получение оценок для распределений собственных ошибок систем контроля и ошибок пилотирования. Учитывается возможная статистическая зависимость между ошибками пилотирования и ошибками данных спутниковой навигационной системы.

**Ключевые слова:** ошибки пилотирования, ошибки измерительной системы, метод фурье-сепарации.

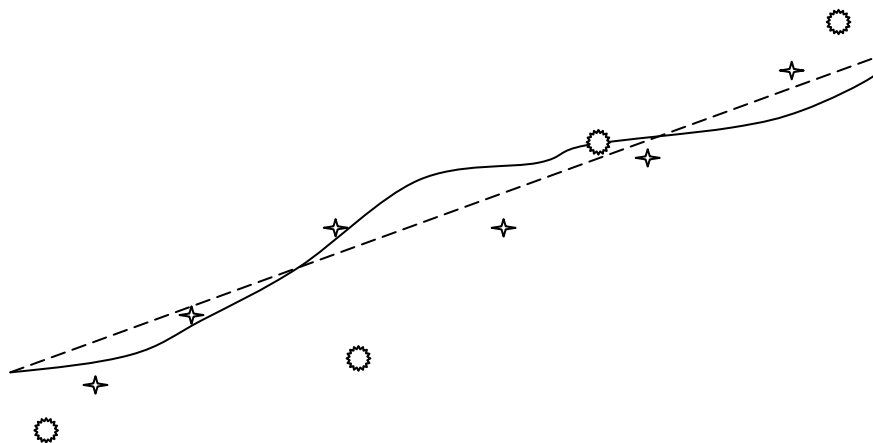
### Введение

То обстоятельство, что вещательное автоматическое зависимое наблюдение (АЗН-В) рассматривается в настоящее время как перспективная система наблюдения обслуживания воздушного движения (ОВД), стимулировало дополнительный интерес к исследованию надежности измерений спутниковых навигационных систем (СНС). АЗН-В предполагает, что координаты каждого воздушного судна (ВС), определяемые на борту, передаются диспетчеру для использования в системе ОВД. Можно также предположить, что с введением АЗН-В данные СНС официально будет разрешено использовать при пилотировании ВС. В этом случае потенциально возможные ошибки, сбои в работе СНС как измерительной системы могут сказаться на статистике ошибок пилотирования. В работе [1] контроль целостности информации АЗН-В предложено проводить путем сравнения измерений координат ВС с данными, полученными от независимой системы наблюдения, например, от вторичных обзорных радиолокаторов (ВОРЛ).

В работе [2] был предложен метод фурье-сепарации для оценок распределений собственных ошибок двух независимых систем контроля положения ВС и ошибок пилотирования. Лаконичность предложенного в [1] решения во многом определялась статистической независимостью ошибок пилотирования и систем наблюдения. Однако использование данных СНС для улучшения точности пилотирования делает гипотезу о независимости ошибок неадекватной новой постановке задачи. В этой работе мы предпримем попытку расширения области применения метода фурье-сепарации на случай такой зависимости и получим формулы для оценки вероятности сбоя в работе СНС.

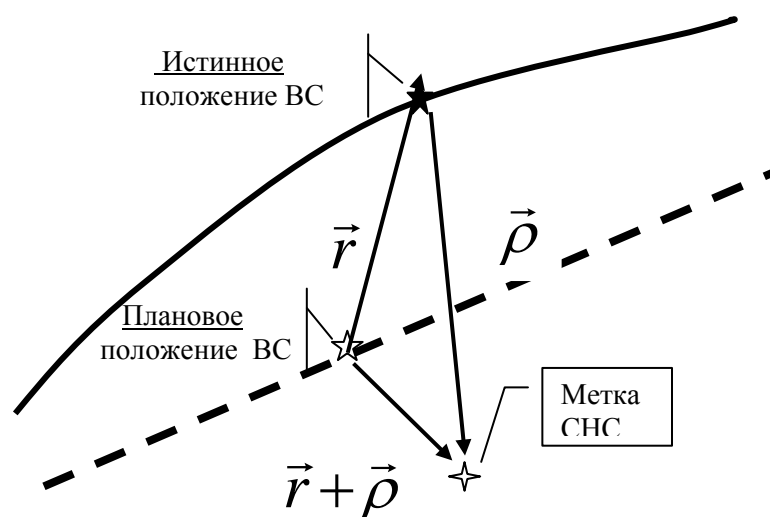
### 1. Постановка задачи и основные гипотезы модели

Рассмотрим движение ВС по плановой траектории в соответствии с некоторым известным законом  $\vec{R} = \vec{R}_0(t)$ . Реально при полете ВС отклоняется от плановой траектории, имеет ошибки пилотирования  $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) - \vec{R}_0(t)$ , статистические характеристики которых требуется определить. Будем полагать, что положение ВС в пространстве отслеживается с помощью двух независимых систем наблюдения - СНС и вторичных обзорных радиолокаторов (ВОРЛ), характеризуемых своими ошибками (рис. 1). Поскольку пилот (автопилот) управляет ВС, опираясь на данные СНС, то ошибки пилотирования -  $\vec{r}(t)$  и ошибки СНС -  $\vec{\rho}(t)$  в такой постановке задачи нельзя считать статистически независимыми.



**Рис. 1.** Плановая (пунктир) и реальная траектории движения ВС с отметками СНС и РЛС -наблюдений

Ошибки СНС можно разделить на 2 класса: "быстрые", существенно изменяющие свою величину от измерения к измерению, и "медленные" – слабо эволюционирующие во времени. В последнем случае будем говорить, что в работе СНС наблюдается сбой. Отметим, что именно медленные ошибки представляют для нашей задачи особый интерес, поскольку они после векторного суммирования с ошибкой пилотирования воспринимаются экипажем как реальное отклонение ВС от плановых параметров полета (рис. 2).



**Рис. 2.** Отклонение метки СНС от плановой траектории ВС:  $\vec{r}$  – отклонение ВС от плановой траектории;  $\vec{\rho}$  – погрешность измерительной системы;  $\vec{r} + \vec{\rho}$  – отклонение метки СНС от плановой траектории

Набирая статистику данных СНС и вычисляя фиксируемые (но не реальные) отклонения ВС от плановой траектории, можно экспериментально получить распределение  $f_1(\vec{r} + \vec{\rho})$ . Однако для определения распределений истинных ошибок пилотирования –  $w_1(\vec{r})$  и ошибок СНС –  $w_2(\vec{\rho})$  этих данных явно недостаточно. Дополнительная информация может быть получена от ВОРЛ в виде распределения  $f_2(\vec{r} + \vec{\delta})$ , где  $\vec{\delta}$  – ошибки измерений радиолокационной системы. Обработывая далее совместно данные АЗН-В и РЛС, можно также экспериментально построить распределение  $f_3(\vec{\rho} - \vec{\delta})$ . В работе [2] задача об определении распределений  $w_1(\vec{r})$ ,  $w_2(\vec{\rho})$  и  $w_3(\vec{\delta})$  решалась в предположении, что все ошибки:  $\vec{r}$ ,  $\vec{\rho}$  и  $\vec{\delta}$  – статистически независимы. Здесь мы будем полагать, что ошибки СНС и пилотирования статистически связаны, и существует маленькая, но конечная вероятность того, что в работе СНС наблюдается сбой. Будем полагать здесь также, что распределение ошибок данных ВОРЛ –  $w_3(\vec{\delta})$  известно.

Основные гипотезы модели можно кратко сформулировать в виде следующих положений:

1. Пилот (автопилот) управляет ВС так, чтобы усредненная отметка СНС совпадала с плановой траекторией полета. При этом полагаем, что действия пилота не зависят от того, исправна СНС или она дает сбой.

2. Медленные и быстрые ошибки СНС статистически независимы, поскольку порождены различными физическими механизмами.

3. Ошибки пилотирования также могут быть разделены на две группы: первая порождена медленными ошибками СНС и в соответствии с первой гипотезой однозначно определяется ими, а вторая порождена случайными внешними воздействиями на ВС, такими как сдвиг ветра, турбулентность и т.д.

## 2. Вывод основных уравнений модели

Рассмотрим сначала представление ошибок СНС. Представим полную текущую ошибку СНС –  $\vec{\rho}$  в виде суммы быстрой –  $\vec{\xi}$  и медленно меняющейся ошибок  $\vec{\rho} = \vec{\xi} + \vec{X}$ . Вводя обозначения для распределений этих величин –  $w_2^{(1)}(\vec{\xi})$  и  $w_2^{(2)}(\vec{X})$ , представим их совместное распределение в виде

$$\tilde{w}_2(\vec{\xi}, \vec{X}) = P_1 w_2^{(1)}(\vec{\xi}) \cdot \delta(\vec{X}) + P_2 w_2^{(1)}(\vec{\xi}) \cdot w_2^{(2)}(\vec{X}), \quad (1)$$

где  $P_1$  – вероятность того, что СНС работает без сбоев;  $P_2$  – вероятность появления сбоев.

Для получения распределения  $w_2(\vec{\rho})$  воспользуемся стандартным приемом: перейдем в (1) к новым переменным  $\vec{u} = \vec{\xi} + \vec{X}$ ,  $\vec{v} = \vec{X}$  и проинтегрируем полученное выражение по  $\vec{v}$ . В результате получаем

$$w_2(\vec{\xi} + \vec{X}) = \int d\vec{v} \tilde{w}_\rho(\vec{u}, \vec{v}) \Big|_{\vec{u}=\vec{\xi}+\vec{X}} = \left[ P_1 w_2^{(1)}(\vec{u}) + P_2 \int d\vec{v} w_2^{(1)}(\vec{u} - \vec{v}) \cdot w_2^{(2)}(\vec{v}) \right] \Big|_{\vec{u}=\vec{\xi}+\vec{X}}. \quad (2)$$

Переходя в (2) к фурье-образам, находим

$$w_2(\vec{k}) = w_2^{(1)}(\vec{k}) \left[ P_1 + P_2 w_2^{(2)}(\vec{k}) \right]. \quad (3)$$

Перейдем теперь к описанию ошибок пилотирования. Совместное распределение отклонений ВС от плановых параметров полета –  $\vec{Y}$  и медленных ошибок СНС может быть представлено в виде

$$\tilde{w}_{\vec{r}, \vec{X}}(\vec{Y}, \vec{X}) = P_1 w_1^{(1)}(\vec{Y}) \delta(\vec{X}) + P_2 w_{\vec{r}/\vec{X}}(\vec{Y} / \vec{X}) \cdot w_2^{(2)}(\vec{X}). \quad (4)$$

Условная вероятность  $w_{\vec{r}/\vec{X}}(\vec{Y} / \vec{X})$ , фигурирующая в последнем слагаемом правой части (4), отображает статистическую зависимость ошибок пилотирования и медленных ошибок СНС. Для определения этой величины воспользуемся первой гипотезой модели. Заметим, что сечения распределения  $\tilde{w}_{\vec{r}, \vec{X}}(\vec{Y}, \vec{X})$  при  $\vec{X} = \overline{const}$  подобны с точностью до сдвига, т.е.

$$\tilde{w}_{\vec{r}, \vec{X}}(\vec{Y} + \vec{X}, \vec{X}) = w_2^{(2)}(\vec{X}) F(\vec{Y}), \quad (5)$$

где  $F(Y)$  - некоторая универсальная функция.

С другой стороны,

$$\tilde{w}_{\vec{r}, \vec{X}}(\vec{Y} + \vec{X}, \vec{X}) = w_{\vec{r}/\vec{X}}(\vec{Y} + \vec{X} / \vec{X}) \cdot w_2^{(2)}(\vec{X}). \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем

$$\frac{\tilde{w}_{\vec{r}, \vec{X}}(\vec{Y} + \vec{X}, \vec{X})}{w_2^{(2)}(\vec{X})} = w_{\vec{r}/\vec{X}}(\vec{Y} + \vec{X} | \vec{X}) = F(\vec{Y}). \quad (7)$$

Из приведенного соотношения видно, что  $w_{\vec{r}/\vec{X}}(\vec{Y} + \vec{X} | \vec{X})$  не зависит от  $\vec{X}$ , т.е.  $\vec{X}$  может быть любым, в частности, можно положить  $\vec{X} = 0$ . Но  $w_{\vec{r}/\vec{X}}(\vec{Y} + 0 | 0)$  имеет смысл распределения собственных ошибок пилотирования, порожденных внешними воздействиями на ВС –  $w_1^{(1)}(Y)$ . С учетом сказанного уравнение (4) можно переписать в виде

$$\tilde{w}_{\vec{r}, \vec{X}}(\vec{Y}, \vec{X}) = P_1 w_1^{(1)}(\vec{Y}) \delta(\vec{X}) + P_2 w_1^{(1)}(\vec{Y} - \vec{X}) w_2^{(2)}(\vec{X}). \quad (8)$$

Интегрируя (8) по  $\vec{X}$  и проводя преобразование Фурье по  $\vec{Y}$ , находим

$$w_1(\vec{k}) = w_1^{(1)}(\vec{k}) [P_1 + P_2 w_2^{(2)}(\vec{k})]. \quad (9)$$

Перейдем теперь к соотношениям, в которых фигурируют ошибки ВОРЛ. Поскольку они не зависят от ошибок СНС и не влияют на качество пилотирования, то согласно результатам работы [2] можно записать:

$$\begin{aligned} f_2(\vec{k}) &= w_1(\vec{k}) w_3(\vec{k}); \\ f_3(\vec{k}) &= w_2(\vec{k}) w_3(\vec{k}). \end{aligned} \quad (10)$$

Несколько сложнее обстоит дело с распределением отклонений меток СНС. Однако здесь мы вновь воспользуемся первой гипотезой, согласно которой пилотирование осуществляется так, как если бы медленные ошибки СНС отсутствовали вовсе. Это соответствует тому, что распределение  $f_1(\vec{r} + \vec{\rho})$  имеет одинаковый вид как при наличии сбоев в работе СНС, так и при их отсутствии. Это позволяет записать для  $f_1(\vec{r} + \vec{\rho})$  следующее соотношение

$$f_1(\vec{r} + \vec{\rho}) = \int w_1^{(1)}(\vec{r} + \vec{\rho} - \vec{z}) w_2^{(1)}(\vec{z}) dz. \quad (11)$$

Или после преобразования Фурье получаем

$$f_1(\vec{k}) = w_1^{(1)}(\vec{k}) w_2^{(1)}(\vec{k}) \quad (12)$$

Тот факт, что фурье-образ функции распределения отклонения меток СНС не зависит от наличия или отсутствия сбоев, видится вполне естественным, поскольку ВС пилотируется так, чтобы метки СНС ложились как можно ближе к плановой траектории полета. Из-за этого может создаться впечатление, что статистика меток СНС не несет в себе информации о наличии сбоев. Однако, как это будет показано далее,  $f_1(\vec{k})$  входит в явном виде в выражение для вероятности работы системы без сбоев.

Выпишем теперь совместно всю систему уравнений, определяющую математическую модель процесса регистрации отклонений ВС от плановой траектории полета

$$\begin{cases} f_1(\vec{k}) = w_1^{(1)}(\vec{k}) w_2^{(1)}(\vec{k}) \\ f_2(\vec{k}) = w_1(\vec{k}) w_3(\vec{k}) \\ f_3(\vec{k}) = w_2(\vec{k}) w_3(\vec{k}) \\ w_2(\vec{k}) = w_2^{(1)}(\vec{k}) [P_1 + P_2 w_2^{(2)}(\vec{k})] \\ w_1(\vec{k}) = w_1^{(1)}(\vec{k}) [P_1 + P_2 w_2^{(2)}(\vec{k})] \end{cases} \quad (13)$$

### 3. Оценка вероятности сбоя в работе СНС

Проанализируем теперь возможность получения на основании системы (13) оценки вероятности сбоя в работе СНС.

Из второго и третьего уравнений системы следует, что

$$\frac{f_2(\vec{k})}{f_3(\vec{k})} = \frac{w_1(\vec{k})}{w_2(\vec{k})}.$$

Из четвертого и пятого уравнений аналогично получаем

$$\frac{w_1(\vec{k})}{w_2(\vec{k})} = \frac{w_1^{(1)}(\vec{k})}{w_2^{(1)}(\vec{k})}.$$

Таким образом, распределения  $w_1^{(1)}(\vec{k})$  и  $w_2^{(1)}(\vec{k})$  связаны между собой соотношением

$$w_1^{(1)}(\vec{k}) = \frac{f_2(\vec{k}) \cdot w_2^{(1)}(\vec{k})}{f_3(\vec{k})}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в первое уравнение системы (13), находим

$$w_1^{(1)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{f_1(\vec{k}) f_2(\vec{k})}{f_3(\vec{k})}}. \quad (15)$$

Заметим, что выражение в правой части (15) совпадает с выражением для  $w_1(\vec{k})$ , полученным в работе [2] для случая, когда данные СНС не используются для коррекции пилотирования.

Теперь, используя (14), находим выражение для  $w_2^{(1)}(\vec{k})$ .

С учетом (15) и последнего уравнения системы (13) находим, что

$$[P_1 + P_2 w_2^{(2)}(\vec{k})] = \sqrt{\frac{f_2(\vec{k}) \cdot f_3(\vec{k})}{f_1(\vec{k})}} / w_3(\vec{k}). \quad (16)$$

Соотношение (16) представляет собой выражение для фурье-образа функции распределения медленных ошибок СНС –  $F(\vec{X})$ . Применяя к (16) обратное преобразование Фурье, находим

$$F(\vec{X}) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{f_2(\vec{k}) \cdot f_3(\vec{k})}{f_1(\vec{k})}} / w_3(\vec{k}) \right], \quad (17)$$

где  $\mathcal{F}^{-1}$  – оператор обратного преобразования Фурье.

Вероятность отсутствия сбоев в работе СНС –  $P_1$  можно определить как значение функции распределения  $F(\vec{X})$  вблизи нуля, т.е. как интеграл от  $F(\vec{X})$  по малой области  $\Delta\Omega$ , где  $|\vec{X}| < \varepsilon$ , т.е. там, где ошибка СНС меньше допустимого значения. Тогда искомая вероятность появления сбоев будет равна  $P_2 = 1 - P_1$ .

Необходимость введения  $\varepsilon$  – окрестности при вычислении искомых вероятностей связана с тем, что все конкретные вычисления могут быть реализованы лишь численно. Это приведет к тому, что сингулярная составляющая в распределении  $F(\vec{X})$  «размажется», и получаемое значение  $F(0)$  будет давать очень грубые оценки искомых величин.

### Заключение

В работе развивается новый подход к задаче об оценке распределения ошибок пилотирования ВС на основании обработки статистических данных, полученных с помощью двух независимых систем наблюдения – спутниковой навигационной системы и вторичных обзорных радиолокаторов. Существенным является то, что в работе предполагается возможная статистическая связь между ошибками пилотирования и ошибками показаний СНС.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Спрысков В.Б., Дупиков В.В. Математические модели оценки вероятности ложной тревоги и риска целостности координатной информации вещательного автоматического зависимого наблюдения // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2012. - № 184. - С. 14-22.
2. Кузнецов В.Л. Метод фурье-сепарации в задаче оценки распределений ошибок пилотирования, АЗН-В и РЛС – наблюдений // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2012. - № 180. - С.106-109.

### ESTIMATION PILOTING ERRORS STATISTICS AND PROBABILITY OF SATELLITE NAVIGATION SYSTEM FAILURE

Kuznetsov V.L., Goryachenkova E.S.

A new approach to the problem of co-processing of data about the aircraft position with the help of satellite navigation systems and secondary surveillance radar system is been developed. The purpose of the task is to obtain estimates of mistakes distribution for control systems and piloting errors. Possibility of a statistical relationship between piloting errors and mistakes of satellite navigation system is taken into account.

**Key words:** piloting errors, measurement system errors, Fourier-separation method.



### Сведения об авторах

**Кузнецов Валерий Леонидович**, 1949 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики МГТУ ГА, автор более 100 научных работ, область научных интересов – методы математического моделирования в задачах распространения излучения в пространственно неоднородных, случайных и периодических средах; задачи УВД и безопасность полетов.

**Горяченкова Екатерина Сергеевна**, окончила МГТУ ГА (2013), аспирантка МГТУ ГА, область научных интересов – использование спутниковых технологий при ОрВД.

**Editor-in-chief**

Boris Eliseev, Rector, MSTU CA.

**Deputy Editor-in-chief**

Vadim Vorobyev, Vice Rector for Research and Innovations, MSTU CA.

**Executive Secretary**

Oksana Feoktistova, Professor, Chair of Safety and Life Activities, MSTU CA.

**Member of the chief editorial Board**

Olga Garanina, Professor, Chair of Humanitarian and Social-Political Sciences, MSTU CA, Moscow, Russia.

Anatoly Kozlov, Professor, Chair of Technical Operation of Radio/Electronic Systems in Air Transport, MSTU CA, Moscow, Russia.

Vladimir Tchipenko, Head of Chair of Aircraft Aerodynamics, Design and Strength, MSTU CA, Moscow, Russia.

Vladimir Kalugin, Dean, Department of Special Machine Design, Bauman University, Moscow, Russia.

Dmitry Lukin, Professor, Chair of Wave Processes, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia.

Vacily Shapkin, General Director, State Research Institute of Civil Aviation, Moscow, Russia.

Bruno Lamiscarre, Deputy Dean, French Civil Aviation University (ENAC), France.

Franco Persiani, Director, Interdepartmental Centre of Industrial Research in Aeronautics, University of Bologna, Italy.

Damian Rivas, Professor, Department of Aerospace Engineering, University of Seville, Spain.

ББК 05  
Н 34  
Св. план 2014 г.

Научный Вестник МГТУ ГА  
№ 207

Свидетельство о регистрации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-47989 от 27 декабря 2011 г.

Редакторы И.В. Вилкова, Е.В. Гаранина  
Компьютерная верстка Т.Н. Котиковой

---

Подписано в печать 16.09.14 г.

Печать офсетная  
18,25 усл. печ. л.

Формат 60x90/8  
Заказ № 1841/

15,04 уч.-изд. л.  
Тираж 100 экз.

---

*Московский государственный технический университет ГА*  
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20  
*Редакционно-издательский отдел*  
125493 Москва, ул. Пулковская, д. 6а

Подписной индекс в каталоге Роспечати 84254  
© Московский государственный  
технический университет ГА, 2014