

## 4. Определение перемещений.

Для определения коэффициентов  $\delta_{11}$  эпюру  $\bar{M}_1$  умножаем на  $\bar{M}_1$ :

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{h}{4} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{4} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{3h}{4} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3h}{4} \right) + \frac{1}{kEI} l \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{h}{4} = \\ &= \frac{29h^3}{192EI} + \frac{lh^2}{16kEI} = \frac{h^2}{192EI} \left( 29h + \frac{12}{k}l \right).\end{aligned}$$

Для определения  $\delta_{12}$  и  $\delta_{21}$  эпюру  $\bar{M}_1$  умножаем на  $\bar{M}_2$ :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{h}{4} \right)^2 \cdot l + \frac{1}{2} \left( \frac{3h}{4} \right)^2 \cdot l \right) = \frac{lh}{8EI} \left( 2h - \frac{l}{k} \right).$$

Для определения  $\delta_{22}$  эпюру  $\bar{M}_2$  умножаем на  $\bar{M}_2$ :

$$\delta_{22} = \frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI} \cdot lh \cdot l = \frac{l^3}{3kEI} + \frac{l^2 h}{EI} = \frac{l^2}{3EI} \left( 3h + \frac{l}{k} \right).$$

Вычислим коэффициенты  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{21}$  и  $\delta_{22}$ :

$$\delta_{11} = \frac{6^2}{192EI} \left( 29 \cdot 6 + \frac{12}{1,4} \cdot 8 \right) = \frac{45,48}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{8 \cdot 6}{8EI} \left( 2 \cdot 6 - \frac{8}{1,4} \right) = \frac{37,71}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{8^2}{3EI} \left( 3 \cdot 6 + \frac{8}{1,4} \right) = \frac{505,9}{EI}.$$

Умножаем поочередно единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  на грузовую эпюру  $M_P$ , в результате этого найдем свободные члены системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= \frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h}{4} \right)^2 \cdot \frac{ql^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{3h}{4} \right)^2 \cdot \frac{ql^2}{2} \right) = \frac{ql^3 h}{24kEI} - \frac{ql^2 h^2}{8EI} = \\ &= \frac{ql^2 h}{24EI} \left( \frac{l}{k} - 3h \right),\end{aligned}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l - \frac{1}{EI} \frac{ql^2}{2} \cdot h \cdot l = -\frac{ql^3}{8EI} \left( \frac{l}{k} + 4h \right).$$

Вычислим коэффициенты  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{2P}$ :

$$\Delta_{1P} = \frac{5 \cdot 8^2 \cdot 6}{24EI} \left( \frac{8}{1,4} - 3 \cdot 6 \right) = -\frac{982,86}{EI},$$

$$\Delta_{2P} = \frac{5 \cdot 8^3}{8EI} \left( \frac{8}{1,4} - 4 \cdot 6 \right) = -\frac{9508,57}{EI}.$$

### 5. Нахождение величин $X_1$ и $X_2$ .

Подставим найденные величины перемещений в канонические уравнения и сократим их на общий множитель  $\frac{1}{EI}$ :

$$45,48X_1 + 37,71X_2 = 982,86,$$

$$37,71X_1 + 505,9X_2 = 9508,57.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$X_1 = 6,42 \text{ кН}, \quad X_2 = 18,32 \text{ кН}.$$

### 6. Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов: $M$ , $N$ и $Q$ .

Для построения окончательных эпюр внутренних силовых факторов используем эквивалентную систему (рис. 19 б) с учетом найденных силовых факторов  $X_1$  и  $X_2$ .

Эпюры строим обычными методами, которые используются для плоских систем. Эпюры  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  изображены на рис. 19 е, ж, з.

**Задача №1** (пример расчета статически неопределимой плоскопространственной рамы, изображенной на рис. 20 а).

Исходные данные:

$$P = 1500 \text{ Н}, \quad a = 0,8 \text{ м}, \quad b = 0,8 \text{ м}.$$

Решение

Рассекая раму по оси симметрии, учитывая, что для плоскопространственных систем силовые факторы, лежащие в плоскости рамы, равны нулю. (см. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.)

Кроме того, рама симметрична, поэтому в поперечном сечении в плоскости симметрии обращаются в нуль кососимметричные факторы - крутящий момент и вертикальная поперечная сила. Отличным от нуля остается только изгибающий момент  $X_1$  в вертикальной плоскости. Получаем, что система является один раз статически неопределимой.

Разрезаем раму по плоскости симметрии и прикладываем момент  $X_1$ . Изобразим эквивалентную систему (рис. 20 б). Строим эпюры моментов от единичного момента и заданных сил (рис. 20 в, г).

Составим каноническое уравнение

$$\delta_{11}X_1 = -\Delta_{1P}.$$

Определяем коэффициенты этого уравнения.

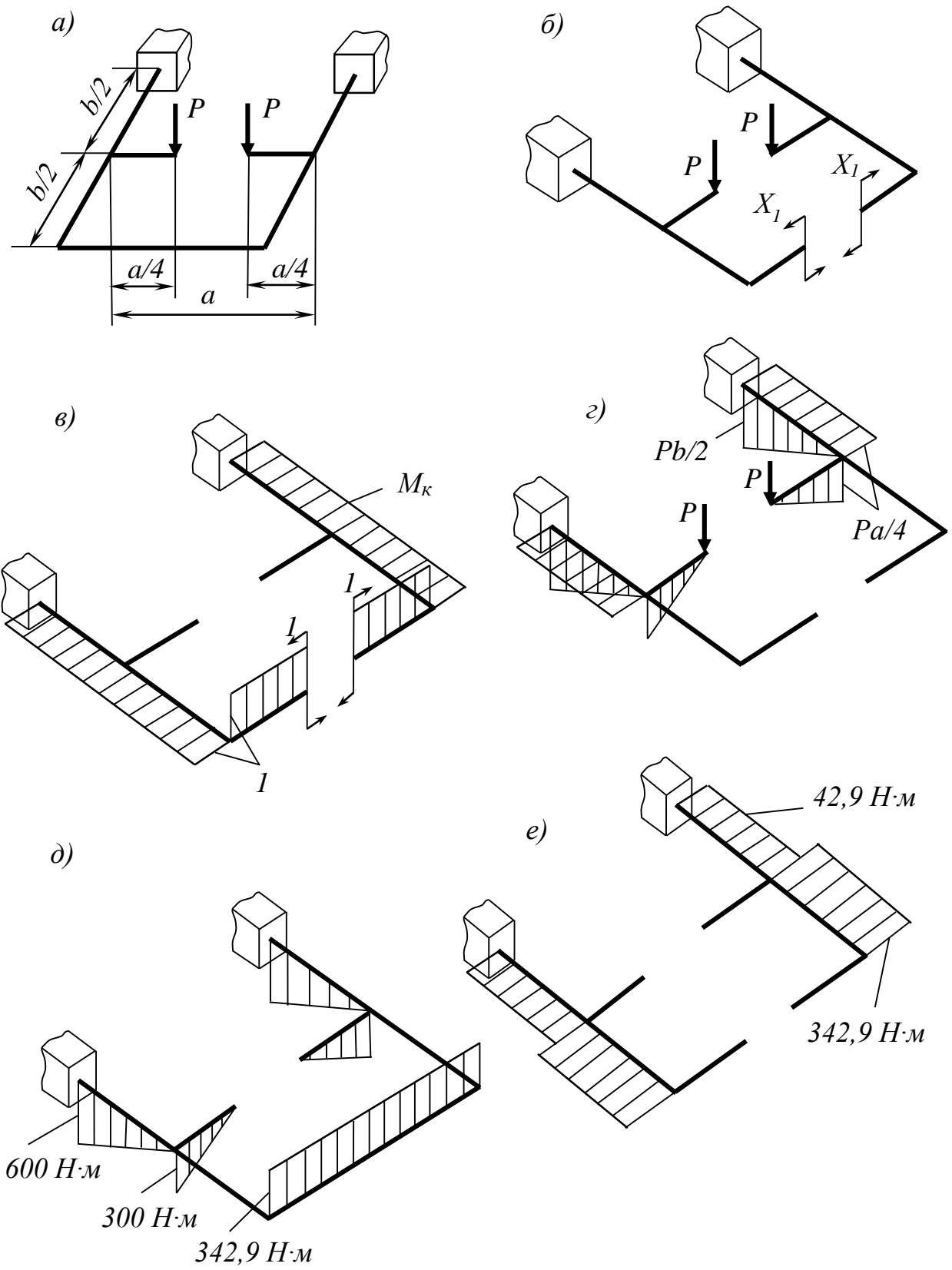


Рис. 20

Для нахождения коэффициента  $\delta_{11}$  эпюру от единичного момента умножим на эпюру от единичного момента, а при определении  $\Delta_{1p}$  эпюру от единичного момента умножаем на эпюру от заданных сил.

Получим

$$\delta_{11} = \frac{a}{EI} + \frac{2b}{GI_{\rho}}, \quad \Delta_{1p} = -\frac{Pab}{4GI_{\rho}},$$

где  $I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}$  - полярный момент инерции для стержня круглого поперечного сечения диаметром  $d$ ,

$I = \frac{\pi d^4}{64}$  - момент инерции сечения при изгибе.

Поскольку  $I_{\rho} = 2I$ ,  $G = 0,4E$ , то упростим выражения для  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$ :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (a + 2,5b), \quad \Delta_{1p} = -\frac{Pab}{3,2EI}.$$

Тогда

$$X_1 = \frac{Pab}{a+2,5b} = \frac{1500 \cdot 0,8 \cdot 0,8}{0,8+2,5 \cdot 0,8} = 342,9 \text{ Нм.}$$

Эпюры изгибающих моментов  $M_{из}$  и крутящих моментов  $M_{кр}$  с учетом величины  $X_1$  показаны на рис. 20 д, е.

**Задача № 2** (пример расчета, схема рис. 21 а).

Исходные данные:

$Q = 15 \text{ кН}$ ,  $H = 7 \text{ кН}$ ,  $n = 750 \text{ об/мин}$ ,  $l = 1,6 \text{ м}$ . Поперечное сечение балок состоит из двух двутавров №20 ( $J_X = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $W_X = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ). Модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

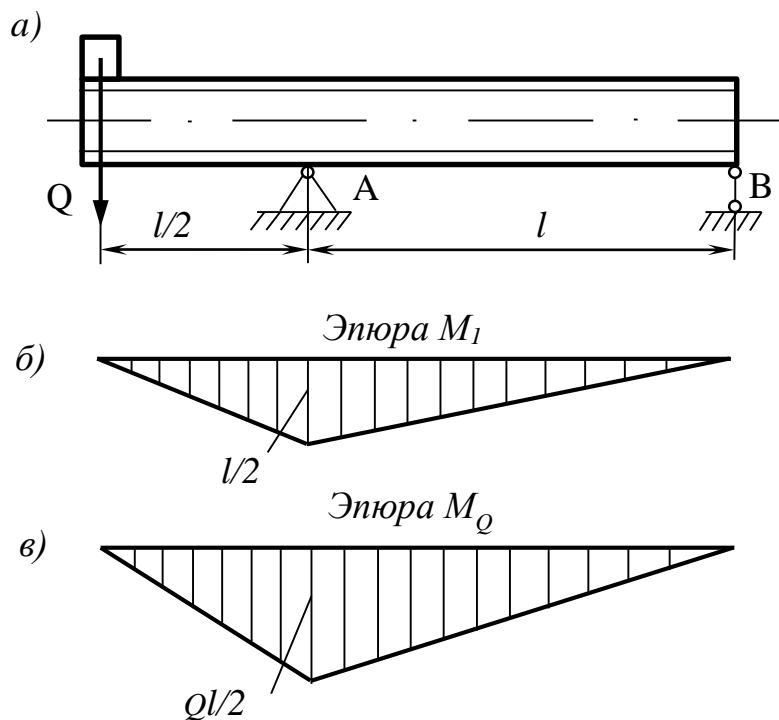


Рис. 21

Решение

1. Определение частоты собственных колебаний  $\omega_0$ .

Для определения частоты собственных колебаний нужно знать перемещение точки, где расположена масса, т.е. прогиб  $\delta_{cm}$  балки в месте расположения двигателя.

Строим эпюры изгибающих моментов  $M_1$  от действия единичной силы  $Q_1 = 1$ , приложенной в точке приложения силы  $Q$  и  $M_Q$  от силы  $Q$  (рис. 21 б, в).

Прогиб  $\delta_{cm}$  найдем графо-аналитическим методом

$$\delta_{cm} = \frac{1}{EJ_X} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Ql}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Ql}{2} \right) = \frac{Ql^3}{8EJ_X} = \frac{1,6^3 \cdot 15 \cdot 10^3}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,209 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Частоту свободных колебаний определяем по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,209 \cdot 10^{-2}}} = 68,6 \text{ 1/с.}$$

2. Определение частоты возмущающей силы  $\omega$ .

Возмущающая сила представляет собой периодическую силу  $H(t) = H \cos \omega t$ , вызывающую поперечные колебания балки в вертикальной плоскости. Частота  $\omega$  силы  $H(t)$  равна:

$$\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 750}{30} = 78,5 \text{ 1/с.}$$

3. Коэффициент нарастания колебаний определяем по формуле:

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 - (78,5/68,6)^2} = -3,23.$$

Поскольку коэффициент  $\beta$  оказался отрицательным, то в дальнейшем расчете будем учитывать его абсолютную величину.

4. Динамический коэффициент находим:

$$K_D = 1 + \frac{f_H}{f_Q} \cdot \beta = 1 + \frac{H}{Q} \cdot \beta = 1 + \frac{7}{15} \cdot 3,23 = 2,507.$$

5. Определение наибольшего нормального напряжения.

Наибольший по модулю изгибающий момент имеет место в сечении  $A$ :

$$M_A = Q \cdot \frac{l}{2} = 15 \cdot 10^3 \cdot 0,8 = 12 \cdot 10^3 \text{ Нм.}$$

Зная величину изгибающего момента, возникающего в опасном сечении балки, определяем статические напряжения в сечении  $A$ :

$$\sigma_{cm} = \pm \frac{M_A}{2W_X} = \pm \frac{12 \cdot 10^3}{2 \cdot 184 \cdot 10^{-6}} = \pm 32,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = \pm 32,6 \text{ МПа.}$$

Наибольшие нормальные напряжения в балках:

$$\sigma_D = K_D \cdot \sigma_{cm} = \pm 2,507 \cdot 32,6 = 81,7 \text{ МПа.}$$

**Задача №3** (пример расчета, схема рис. 22 а).

Исходные данные:

$$l = 0,4 \text{ м}, d = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, [\sigma] = 100 \text{ МПа}, \gamma = 78 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3.$$

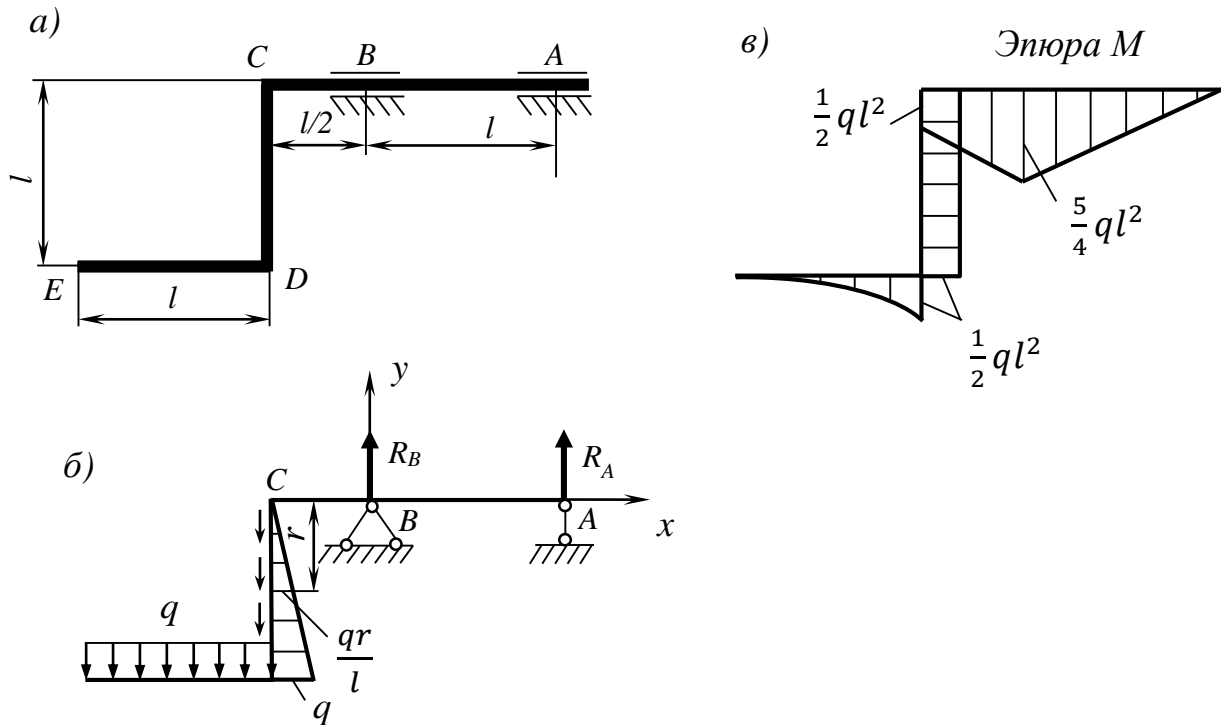


Рис. 22

Решение

1. Построение эпюры изгибающих моментов от сил инерции, возникающих на участках ломаного стержня.

При равномерном вращении стержня вокруг оси инерционные силы направлены по радиусам от оси вращения. Интенсивность их, отнесенная к единице длины стержня, равна:

$$q_i = \frac{\gamma F \omega^2}{g} r,$$

где  $F$  - площадь поперечного сечения стержня,  
 $r$  - расстояния частиц стержня от оси вращения.

Определим интенсивность  $q_i$  сил инерции, действующих на участке  $DE$  ломаного стержня:

$$q_i^{DE} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 l.$$

Введем обозначение  $q = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 l$ . Тогда  $q_i^{DE} = q$ .

Интенсивность сил инерции, действующих на участке  $CD$  ломаного стержня, изменяется по длине этого участка по линейному закону, в точке  $C$  она равна нулю:

$$q_i^C = \frac{\gamma F \omega^2}{g} r_C = 0, \text{ так как } r_C = 0, \text{ а в точке } D:$$

$$q_i^D = \frac{\gamma F \omega^2}{g} r_D = \frac{\gamma F \omega^2}{g} l = q.$$

Силы инерции, действующие на участке  $CD$  ломаного стержня, направлены вдоль его оси.

Расчетная схема, учитывающая инерционные силы, действующие на рассматриваемую систему, показана на рис. 22 б.

Определим реакции связей. Для этого составим уравнения равновесия относительно точек  $A$  и  $B$ :

$$\Sigma M_B = R_A \cdot l + q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2} q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

откуда  $R_A = -\frac{5}{4} ql;$

$$\Sigma M_A = -R_B \cdot l + q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} + l\right) + \frac{1}{2} q \cdot l \cdot \frac{3}{2} l = 0,$$

откуда  $R_B = \frac{11}{4} ql.$

Проверка правильности вычислений:

$$\Sigma Y = R_A + R_B - q \cdot l - \frac{1}{2} q \cdot l = \left(\frac{11}{4} - \frac{5}{4} - 1 - \frac{1}{2}\right) q \cdot l = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 22в).

2. Определение допускаемого числа оборотов валика в минуту.

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении  $B$  валика  $AB$ :

$$M_{max} = \frac{5}{4} ql^2.$$

Наибольшие нормальные напряжения равны:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{5}{4} \frac{ql^2}{W} = \frac{5}{4} \frac{\gamma F \omega^2 l^3}{gW},$$

где  $W = \frac{\pi d^3}{32}$  - момент сопротивления поперечного сечения,

а  $F = \frac{\pi d^2}{4}$  - площадь сечения.

Тогда  $\sigma_{max} = \frac{10\gamma\omega^2 l^3}{gd}.$

Приравниваем максимальное нормальное напряжение  $\sigma_{max}$  допускаемому напряжению  $[\sigma]$ :

$$\sigma_{max} = \frac{10\gamma\omega^2 l^3}{gd} \leq [\sigma],$$

откуда 
$$\omega_{\text{доп}} = \sqrt{\frac{[\sigma]gd}{10\gamma l^3}}.$$

Обозначим  $n$  – число оборотов, совершаемых валом за 1 минуту.

Тогда 
$$\omega_{\text{доп}} = \frac{2\pi n_{\text{доп}}}{60} = \frac{\pi n_{\text{доп}}}{30}.$$

Таким образом,

$$n_{\text{доп}} = \frac{30\omega_{\text{доп}}}{\pi} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{[\sigma]gd}{10\gamma l^3}},$$

$$n_{\text{доп}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{100 \cdot 10^6 \cdot 9,81 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 78 \cdot 10^3 \cdot 0,4^3}} = 211,7 \text{ об/мин.}$$

**Задача №4** (пример расчета).

Исходные данные:

$$M_{\text{и}} = 270 \text{ Нм}, M_{\text{к}} = 270 \text{ Нм}, \sigma_{\text{в}} = 520 \text{ МПа}, \sigma_{\text{т}} = 240 \text{ Мпа},$$

$$d = 40 \text{ мм} = 40 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \rho = 2,3 \text{ мм}, D/d = 1,2.$$

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала.

Нормальные напряжения изгиба изменяются по симметричному циклу, а касательные напряжения – по отнулевому циклу (от нуля до максимального значения).

Решение

1. Определяем максимальные напряжения при изгибе:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{\text{X}}},$$

где  $W_{\text{X}}$  - осевой момент сопротивления поперечного сечения вала,

$$W_{\text{X}} = \frac{\pi d^3}{32},$$

то 
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{32M_{\text{и}}}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 270}{\pi \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}} = 43 \cdot 10^6 \text{ Па} = 43 \text{ МПа}.$$

Поскольку цикл симметричный, то

$$\sigma_a = \sigma_{\text{max}} = 43 \text{ МПа}, \sigma_m = 0,$$

$\sigma_a$  – амплитуда цикла,  $\sigma_m$  – среднее напряжение.

Определяем максимальные касательные напряжения.



$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_\rho},$$

где  $W_\rho$  – полярный момент сопротивления

$$W_\rho = 2 W_X = \frac{\pi d^3}{16},$$

$$\tau_{max} = \frac{270 \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{270 \cdot 16}{\pi \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}} = 21,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21,5 \text{ МПа}.$$

Цикл отнулевой, то

$$\tau_m = \tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = 10,75 \text{ МПа},$$

где  $\tau_a$  - амплитуда цикла,  $\tau_m$  - среднее напряжение.

2. По эмпирическим формулам находим предел текучести при кручении и пределы выносливости при кручении и изгибе:

$$\tau_T = 0,58\sigma_T = 0,58 \cdot 240 = 139,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{-1} = (0,55 - 0,0001 \cdot \sigma_B) \cdot \sigma_B = (0,55 - 0,0001 \cdot 520) \cdot 520 = 259 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1} = 0,6 \cdot \sigma_{-1} = 0,6 \cdot 259 = 155,4 \text{ МПа}.$$

3. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений  $K_\sigma$  и  $K_\tau$  определяем по формуле:

$$K_\sigma = K_\tau = \frac{\alpha_\sigma}{1 + \left(1 + \frac{2}{d}\right) \cdot 10^{-\left(0,33 + \frac{\sigma_T}{712}\right)}},$$

где  $d$  – в мм,  $\sigma_T$  – в МПа.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_\sigma$  определяем, используя график, представленный на рис. 10.

При  $\rho/d = 2,3/40 = 0,0575$   $\alpha_\sigma \approx 1,95$ .

Тогда

$$K_\sigma = K_\tau = \frac{1,95}{1 + \left(1 + \frac{2}{40}\right) \cdot 10^{-\left(0,33 + \frac{240}{712}\right)}} = 1,5905.$$

4. Находим коэффициенты  $K_{d\sigma}$  и  $K_{d\tau}$ , учитывающие влияние размеров, по формуле

$$K_{d\sigma} = K_{d\tau} = 1 - 0,154 \lg \frac{d}{7,5} = 1 - 0,154 \lg \frac{40}{7,5} = 0,888,$$

где  $d$  – в мм.

5. Определяем общие коэффициенты снижения пределов выносливости  $K$ :

$$K = \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}}; \quad K = \frac{K_\tau}{K_{d\tau}}.$$

$$K = \frac{1,5905}{0,888} = 1,791.$$

6. Коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям найдем по формулам:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{\alpha} + \psi_{\sigma}\sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{\alpha} + \psi_{\tau}\tau_m},$$

где  $\psi_{\sigma}$  и  $\psi_{\tau}$  – коэффициенты, учитывающие влияние средних напряжений цикла.

Учитывая, что  $\sigma_m = 0$ , то

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{\alpha}} = \frac{259}{1,791 \cdot 43} = 3,36.$$

Коэффициент, учитывающий влияние средних касательных напряжений, равен:

$$\psi_{\tau} = \frac{0,01 + 10^{-4} \cdot \sigma_B}{K} = \frac{0,01 + 10^{-4} \cdot 520}{1,791} = 0,0346.$$

Тогда, 
$$n_{\tau} = \frac{155,4}{1,791 \cdot 10,75 + 0,0346 \cdot 10,75} = 7,92.$$

7. Находим общий коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{3,36 \cdot 7,92}{\sqrt{3,36^2 + 7,92^2}} = 3,09.$$

## Содержание

|  |    |
|--|----|
| Введение.....  | 3  |
| 1. Цели и задачи дисциплины и ее место в учебном процессе..... | 3  |
| 2. Содержание дисциплины.....                                  | 5  |
| 2.1. Наименование тем, их содержание (основные вопросы).....   | 5  |
| 2.2. Лекции и их содержание.....                               | 13 |
| 2.3. Практические занятия и их содержание.....                 | 13 |
| 2.4. Лабораторные работы.....                                  | 14 |
| 2.5. Учебно-методические материалы по дисциплине.....          | 14 |
| 3. Указания о порядке выполнения контрольных работ.....        | 15 |
| 4. Задачи для контрольных работ.....                           | 16 |
| 4.1. Задачи дня контрольной работы № 1.....                    | 16 |
| 4.2. Задачи для контрольной работы № 2.....                    | 22 |
| 4.3. Задачи для контрольной работы № 3.....                    | 26 |
| 5. Примеры решения задач.....                                  | 34 |
| 5.1. Примеры решения задач в контрольной работе № 1.....       | 34 |
| 5.2. Примеры решения задач в контрольной работе № 2.....       | 45 |
| 5.3. Примеры решения задач в контрольной работе № 3.....       | 55 |