Практическое занятие 1

Разработка УР алгоритмами матричной алгебры

Постановка задачи

Предприятие производит в 3-х цехах по одному продукту в каждом цеху. ***Известны*** нормы расхода $A=a_{ij}$ - единиц продукции i-го цеха на единицу продукции j-го цеха, объемы реализуемой продукции y_i i-го цеха (табл.1),

Таблица 1.1.

Расходные коэффициенты

Цех	Прямые затраты матрица $A=a_{ij}$			Конечный продукт $У=\{y_i\}$
1	0.0	0.2	0.0	350
2	0.1	0.0	0.3	250
3	0.0	0.4	0.0	350

нормы расхода ресурсов R и стоимости единиц ресурсов (табл.1.2).

Таблица 1.2.

Нормы расхода и стоимости единиц ресурсов

Ресурс \ Цех	1	2	3	Цена 1 ед
Сырье а	1.1	1.0	0.6	2.0
Сырье б	0.2	0.5	1.0	5.0
Топливо	2.0	1.5	2.2	3.0
Трудозатраты	14.0	25.0	22.0	1.0

Необходимо определить:

X - валовой выпуск продукции для каждого цеха X = (x1, x2, x3);
К - коэффициенты косвенных затрат;
P - суммарный расход сырья а, сырья б, топлива и трудовых ресурсов;
RR - коэффициенты прямых затрат сырья **а**, сырья **б**, топлива и труда;
PC - расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;
PR расходы по цехам на всю производственную программу;
PZ производственные расходы на единицу конечной продукции.

Модель задачи $x_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3)=y_i$ (1.1) или $X–A*X=Y$. (1.2)

Методические рекомендации

Из $X-A*X=Y$ имеем $(E-A)*X=Y$ и $X=(E-A)^{-1}*Y=S^{-1}*Y$, где $S^{-1}=(E-A)^{-1}$ (1.3)

Далее вычисляем согласно **алгоритму расчета**:

Шаг 1. Матрицу $S=(E-A)$. (1.4)

$$\begin{vmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.4 & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.00 & -0.2 & 0.0 \\ -0.1 & 1.00 & -0.3 \\ 0.0 & -0.4 & 1.00 \end{vmatrix}$$

Шаг 2. Матрицу $S^{-1}=(E-A)^{-1}$. (1.5)

Таблица 1.3.

Обращение матрицы S=(E-A) алгоритмом Жордана-Гаусса

Матрица (E-A)	**[1.00]**	-0.20	0.00	1.00	0.00	0.00	Матрица E
	-0.20	1.00	-0.30	0.00	1.00	0.00	
	0.00	-0.40	1.00	0.00	0.00	1.00	
Итерация 1	1.00	-0.20	0.00	1.00	0.00	0.00	
	0.00	**[0.98]**	-0.30	0.10	1.00	0.00	
	0.00	-0.40	1.00	0.00	0.00	1.00	

Продолжение табл.1.3.

Итерация 2	1.00	0.00	-0.06	1.02	0.20	0.00	(1.5)
	0.00	1.00	-0.31	0.10	1.02	1.00	
	0.00	0.00	**[0.88]**	0.04	0.41	0.00	
Итерация 3	1.00	0.00	0.00	**1.02**	**0.23**	**0.07**	Матрица $(E-A)^{-1}$
	0.00	1.00	0.00	**0.12**	**1.16**	**0.35**	
	0.00	0.00	1.00	**0.05**	**0.47**	**1.14**	

***Шаг 3.* Валовой выпуск продукции** *цехов* $(E - A)^{-1} * Y = X.$ (1.6)

Расчеты на ЭВМ

$$\begin{vmatrix} 1.02 & 0.23 & 0.07 \\ 0.12 & 1.16 & 0.35 \\ 0.05 & 0.47 & 1.14 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 350 \\ 250 \\ 350 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 441 \\ 453 \\ 531 \end{vmatrix}$$

Расчеты на калькуляторе

1.02*350+0.23*250+0.07*350=357+57.5+24.5 = **439**
0.12*350+1.16*250+0.35*350=42+290+122.5 = **454**
0.05*350+0.47*250+1.14*350=17.5+117.5+399=**534**

Шаг 4. Программу производства (табл.1.4) $z_{ik}= \sum a_{ik*}\, x_k$ (1.7)

Таблица 1.4.

Программа производства

Цех	Внутреннее потребление 1	2	3	Итого	Конечный продукт	Валовой продукт
1	0	91	0	91	350	441
2	51	0	152	203	250	453
3	0	181	0	181	350	531

Шаг 5. Матрицу коэффициентов косвенных затрат $(E-A)^{-1}-A=K$ (1.8)

$$\begin{vmatrix} 1.02 & 0.23 & 0.07 \\ 0.12 & 1.16 & 0.35 \\ 0.05 & 0.47 & 1.14 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0.00 & 0.20 & 0.00 \\ 0.10 & 0.00 & 0.30 \\ 0.00 & 0.40 & 0.00 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.02 & 0.03 & 0.07 \\ 0.02 & 1.16 & 0.05 \\ 0.05 & 0.07 & 1.14 \end{vmatrix}$$

Шаг 6. Расход сырья а и в, топлива и труда $R*X=P.$ (1.9)

$$\begin{vmatrix} 1.1 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \\ 2.0 & 1.5 & 2.2 \\ 14 & 25 & 22 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 441 \\ 453 \\ 531 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1257 \\ 846 \\ 2731 \\ 29198 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Сырье а} \\ \text{Сырье б} \\ \text{топливо} \\ \text{Чел.-ч.} \end{matrix}$$

1.1*439+1*454+0.6*534=482.5+439 + 320.4 = **1242**
0.2*439+0.5*454+1*534=87.8+227+534 = **849**
2*439+1.5*454+2.2*534=878+681+1174.8 = **2734**
14*439+25*454+22*534=6146+11350+11748= **29244**

Шаг 7. Расход ресурсов на ед. конечной продукции $(E -A)^{-1}=RR$ (1.10)

$$\begin{vmatrix} 1.1 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \\ 2.0 & 1.5 & 2.2 \\ 14 & 25 & 22 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1.02 & 0.23 & 0.07 \\ 0.12 & 1.16 & 0.35 \\ 0.05 & 0.47 & 1.14 \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.27 & 1.70 & 1.11 \\ 0.31 & 1.09 & 1.33 \\ 2.32 & 3.23 & 3.17 \\ 18.26 & 42.56 & 34.77 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1.272 & 1.695 & 1.111 \\ 0.314 & 1.096 & 1.329 \\ 2.330 & 3.234 & 3.173 \\ 18.38 & 42.56 & 34.87 \end{vmatrix}$$

Шаг 8. Расход ресурсов по каждому цеху $X^{\sim}*R=PC$. (1.11)

$$\begin{vmatrix} 441 & 453 & 531 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1.1 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \\ 2.0 & 1.5 & 2.2 \\ 14.0 & 25.0 & 22.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 485 & 453 & 319 \\ 88 & 226 & 531 \\ 882 & 680 & 1168 \\ 6174 & 11325 & 11682 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 483 & 454 & 320 \\ 88 & 227 & 534 \\ 878 & 681 & 1175 \\ 6146 & 11350 & 11748 \end{vmatrix}$$

485 = 441 * 1.1; 453 = 453 * 1.0; 319 = 531 * 0.6; и т.д.

Шаг 9. Расходы цехов $c^{\sim}*PC = PR,$ где $c^{\sim}$ - цены 1 ед. ресурсов. (1.12)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 485 & 453 & 319 \\ 88 & 226 & 531 \\ 882 & 680 & 1168 \\ 6174 & 11325 & 11682 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10231 \ 1540218479 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 10186 & 15436 & 18583 \end{vmatrix}$$

Шаг 10. Затраты на 1 ед. конечной продукции $c^{\sim}*RR=PZ.$ (1.13)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1.27 & 1.70 & 1.11 \\ 0.31 & 1.09 & 1.33 \\ 2.32 & 3.23 & 3.17 \\ 18.26 & 42.56 & 34.77 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29.3 & 61.1 & 53.1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 29.48 & 61.14 & 53.26 \end{vmatrix}$$

Таблица 1.5.

Исходные данные вариантов задачи 1

	Вариант 1					***Вариант 2***					***Вариант 3***			
Цех 1	**0.0**	**0.2**	**0.0**	**205**		**0.0**	**0.1**	**0.0**	**250**		**0.0**	**0.2**	**0.0**	**400**
Цех 2	**0.1**	**0.0**	**0.1**	**110**		**0.3**	**0.0**	**0.3**	**120**		**0.4**	**0.0**	**0.3**	**200**
Цех 3	**0.0**	**0.2**	**0.1**	**305**		**0.0**	**0.2**	**0.2**	**330**		**0.0**	**0.3**	**0.2**	**500**
Сырье а	**1.3**	**2.3**	**0.7**	**6**		**1.2**	**2.3**	**1.8**	**5**		**1.6**	**2.3**	**0.9**	**5**
Сырье а	**0.0**	**0.5**	**1.5**	**12**		**0.0**	**1.6**	**2.6**	**7**		**0.0**	**0.5**	**1.4**	**9**
Топливо	**2.1**	**1.7**	**2.1**	**3**		**2.2**	**1.8**	**3.2**	**2**		**1.5**	**1.4**	**2.1**	**1**
Труд ч-ч	**10**	**23**	**25**	**1.4**		**12**	**15**	**14**	**1.2**		**15**	**10**	**15**	**1.5**
	Вариант 4					***Вариант 5***					***Вариант 6***			
Цех 1	**0.0**	**0.3**	**0.0**	**505**		**0.0**	**0.6**	**0.0**	**250**		**0.0**	**0.1**	**0.0**	**600**
Цех 2	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**410**		**0.4**	**0.0**	**0.2**	**320**		**0.2**	**0.0**	**0.1**	**400**
Цех 3	**0.0**	**0.2**	**0.3**	**505**		**0.0**	**0.5**	**0.1**	**430**		**0.0**	**0.3**	**0.2**	**300**
Сырье а	**1.2**	**2.1**	**0.5**	**4**		**0.1**	**2.5**	**1.4**	**1**		**1.3**	**2.1**	**0.6**	**5**
Сырье а	**0.1**	**0.2**	**1.4**	**13**		**0.2**	**1.3**	**2.3**	**13**		**0.2**	**0.2**	**1.5**	**13**
Топливо	**2.0**	**1.3**	**2.6**	**5**		**2.3**	**1.6**	**3.1**	**2**		**1.3**	**1.4**	**2.7**	**4**
Труд ч-ч	**10**	**20**	**15**	**1.1**		**12**	**13**	**14**	**1.1**		**15**	**10**	**15**	**1.2**

Практическое занятие 2

Принятие УР по критерию Пирсона

Постановка задачи

Собрана выборка А из n=100 наблюдений x_i - t подготовки самолетов к вылету (мин) {X} = {187, 143, 250, 140, 131, 110, 90, 79, 199, 177, 143, 226, 150, 197, 144, 63, 144, 192, 200, 162 , 72, 171, 158, 156, 155, 91, 151, 140, 129, 121, 140, 125, 132, 203, 181, 150, 195, 243, 167, 242, 143, 116, 216, 182, 134, 148, 89, 152, 192, 236, 100, 220, 180, 175,163, 163, 94, 156, 150, 175, 216, 240,108, 70, 164, 83, 170, 156, 151, 173, 156, 66, 110, 66, 166, 86, 91, 128, 128, 105, 142, 130, 144, 125, 170, 155, 218, 201, 146, 64, 214, 131, 190, 191, 50, 112, 112, 155, 232, 144}, для которой вычислены:

1) точечная оценка математического ожидания {X} $\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}; \quad i = 1, n;$ (2.1)

2) точечная оценка среднего квадратичного отклонения {X}

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \mu^*)^2} = 45.9\,; \qquad (2.2)$$

3) максимальное и минимальное значения x_i x_{max}=250 и x_{min}=50;

4) число интервалов $n_и$ разбиения ряда {x_i} $n_и = 5Log(n) = 5Log(100) = 10$; (2.3)

5) количества попаданий n_i в интервалы (табл.2.1).

Таблица 2.1.

Количества попаданий в интервалы

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	8	8	11	20	20	10	8	5	4

Необходимо оценить три гипотезы о распределении случайной величины {X} по законам: Гаусса, Пуассона и экспоненты. Для этого вычисляем:

Шаг 1. Ширину интервала $\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{n_u} = \frac{250-50}{10} = 20$. (2.4)

Шаг 2. Границы интервалов, начиная с x_{min}=50 до x_{max}=250 (табл.2.2.)

Таблица 2.2.

Границы интервалов

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Граница левая Граница правая	50- 70	71- 91	92- 112	113- 133	134- 154	155- 175	176- 196	197- 217	218- 238	239- 259

Шаг 3. Вероятности попаданий p^*_i {X} в i -й интервал $p_i^* = \frac{n_i^*}{n}$. (2.5)

Шаг 4. Оценки функции плотности *распределения* $f_x^* = \frac{p_i^*}{\Delta x}$. (2.6)

Шаг 5. Оценки функции распределения $F^*(x) = \sum p_i^*$. (2.7)

Таблица 2.3.

Расчетные значения n_i, p^*_i, $f^*(x)$, $F^*(x)$

Интервал	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Границы	***50-70***	***71-91***	***2-112***	***13-133***	***134-154***	***55-175***	***76-196***	***197-217***	***218-238***	***239- 259***
n_i	**6**	**8**	**8**	**11**	**20**	**20**	**10**	**8**	**5**	**4**
p^*_i **f^*_i** **F^*_i**	**0.060** **0.003** **0.060**	**0.080** **0.004** **0.140**	**0.080** **0.004** **0.220**	**0.110** **0.005** **0.330**	**0.200** **0.010** **0.530**	**0.200** **0.010** **0.730**	**0.100** **0.005** **0.830**	**0.080** **0.004** **0.910**	**0.050** **0.003** **0.960**	**0.040** **0.002** **1.000**

Оценивая гипотезы H_o о закон распределения {X}, находим:

Шаг 6. Параметры закона по теоретическим моделям табл.2.4.

Шаг 7. Теоретические точечные оценки $F_т(x)$ и $f_т(x)$ (табл.2.4).

Шаг 8. Теоретические вероятности попадания p_{Ti} в i-й интервал

$$p_{т\,i} = F_т(x_i) - F_т(x_{i-1}) \quad , \qquad (2.8)$$

где $F_т(x_i)$ и $F_т(x_{т\,i-1})$ - $F_т(x)$ вычислены по моделям табл.2.4.

Таблица 2.4.

Модели законов распределения

Закон	Параметр	Модели F(x) и f(x)
Пуассона	$\lambda = \sum_{i=1}^{n_u} \frac{i * n_i}{n};$	$F_T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};\ f_T(x) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};\ 0 < n < 4;\ k = 0,1,..n;$
Гаусса	$\mu = \mu^*;$ $\sigma^2 = \sigma^{*2};$	$F_T(x) = \int f_Т(x)dx;\ f_Т(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};0 < x < 4;$
Экспоненциальный	$\lambda = \frac{1}{\mu};$	$F_T(x) = 1 - e^{-\lambda};\quad f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x};\quad 0 < x < 4;$

Шаг 9. Расчетную оценку критерия Пирсона χ^{*2} $0 < n < 4;$

$$\chi^{2*} = \sum_{i=1}^{n_u} \frac{(n_i - np_{Tii})^2}{np_{Ti}}, \qquad (2.9)$$

где $n_и$ - количество интервалов;

p_{Ti} - теоретическая вероятность попадания в i-й интервал.

Шаг 10. Сравниваем $\chi^{*2} \leq \chi^{*2}_{v,p\ таб}$, (2.10) где $\chi^{*2}{}_{v,p\ таб}$ – табл. хи-квадрат, при v=($n_и$- n_p-1) и p=(1-p_d) (табл.2.2. П.І.);

p_d - доверительная вероятность (рекомендуется p_d=95%);

n_p - число параметров в модели закона.

Гипотеза Но не отвергается если $\chi^{*2} \le \chi^{*2}{}_{v,p\ таб}$.

Оценка гипотезы Но о распределении {X} по закону Гаусса

Шаг 1*. *Выдвигаем *гипотезу H_o* о законе Гаусса при μ*=150.9 и σ*=45.9.

Шаг 2*. *Определяем теоретические F_{mi}=Φ(Z_i), где $Z_i=(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x})$ из табл.2.1 П.І, в которой Φ(-Z_i) = 1 - Φ(Z_i). Результаты расчетов в табл.2.5.

Шаг 3*. *Находим по (2.8): $p_{т1}=F_{т1}$=0.039; $p_{т2}=F_{т2}-F_{т1}$=0.093-0.039=0.054 и т.д.

Шаг 4. Вычисляем теоретические F_{mi} и p_{Ti} *для закона Гаусса* (табл.2.5).

Таблица 2.5.

Теоретические F_{Ti} и p_{Ti} для закона Гаусса

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Границы	50 - 70	71 - 91	92 - 112	113 – 133	134 - 154	155 - 175	176 - 196	197-217	218-238	239 - 259
x_i - μ	-80.92	-60.92	-40.92	-20.92	-0.92	19.08	39.08	59.08	79.08	99.08
Z_i	-1.76	-1.33	-0.89	-0.46	-0.02	0.42	0.85	1.29	1.72	2.16
F_{Ti}	0.039	0.093	0.188	0.328	0.496	0.665	0.805	0.903	0.958	0.985
p_{Ti}	0.039	0.054	0.095	0.139	0.168	0.169	0.141	0.097	0.056	0.026

Шаг 5. Вычисляем

$$\chi^{2*}=\sum_{i=1}^{n_u}\frac{(n_i-np_{Ti})^2}{np_{Ti}}=\frac{(6-100*0.039)^2}{100*0.039}+\frac{(8-100*0.054)^2}{100*0.054}+\frac{(8-100*0.095)^2}{100*0.095}+..+..=6.60.$$

Шаг 6. Сравниваем $\chi^{*2}{}_{v,p\ таб}$=14.07 (v=$n_и$-n_p-1=10-2-1=7 и p=1-p_d=1-0.95=0.05, из табл.2.2.П.І), с расчетным x^{*2}=6.60.

Поскольку χ^{*2} =6.60 < $\chi^{*2}{}_{v,p\ таб}$ =14.07, гипотеза Но не отвергается.

Оценка гипотезы Но о распределении {X} ***по закону Пуассона***

Шаг 1*. *Вычисляем параметр *закона Пуассона* $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\frac{i*n_i}{n}=5.29$.

***Шаг 2. Находим по табл*.**2.2 П.І $e^{-5.29}$ = 0.005.

Шаг 3*. *Определяем *теоретические F_{mi}*, вычисляя слагаемые модели

k=0; $F_{Ti}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=\frac{1}{1}0.005=0.005;$

k=1; $F_{Ti}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^0}{0!}*\frac{\lambda}{1}*e^{-\lambda}=\frac{\lambda^0}{0!}*e^{-\lambda}*\frac{\lambda}{1}=0.005*\frac{\lambda}{1}=0.005*\frac{5.29}{1}=0.027;$

k=2; $F_{Ti}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}*\frac{\lambda}{2}*e^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}*e^{-\lambda}*\frac{\lambda}{2}=0.027*\frac{\lambda}{2}=0.071;$

k=3; $F_{Ti}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=0.071*\frac{\lambda}{3}=0.124;$ k=4; $F_{Ti}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=0.124*\frac{\lambda}{4}=0.165;$ и т.д.

Таблица 2.6.

Теоретические F_{Ti} и p_{Ti} для закона Пуассона

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_{Ti}	0.032	0.102	0.227	0.391	0.565	0.719	0.835	0.911	0.956	0.980
p_{Ti}	0.032	0.071	0.124	0.165	0.174	0.153	0.116	0.077	0.045	0.024

Шаг 3*. *Находим интервальные квантили критерия Пирсона χ^{*2}

χ^{*2}=2.52+0.13+1.58+1.81+0.39+1.41+0.22+0.01+0.05+1.09=9.22< $\chi^{*2}_{v,p таб}$=15.5 при v=10-1-1=8 и p=1-p_d=1-0.95=0.05. Так как $\chi^{*2} < \chi^{*2}_{v,p таб}$, H_o не отвергается.

Оценка гипотезы Но об экспоненциальном законе

Шаг 1*. *Выдвигаем гипотезу Но распределении {X} по экспоненциальному закону с параметром λ=1/μ* = 0.0066.

Шаг 2*. *Определяем теоретические $F_{Ti}(x_i)$, подставляя x_i правой границы интервалов в модель закона. Для i=1 F_{Ti}=1(x=50)=1-$e^{-0.0066*50}$=1-$e^{-0.33}$ = 0.375.

Шаг 3*. *Находим теоретические вероятности p_{Ti}=F_{Ti}-F_{Ti-1}

p_{T1}= F_{T1}= 0.375; p_{T2}=0.46-0.375 = 0.085 и т.д. Результаты в табл.2.7.

Таблица 2.7.

Теоретические F_{Ti} и p_{Ti} для экспоненциального закона

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_{Ti}	0.375	0.460	0.533	0.597	0.651	0.699	0.739	0.775	0.805	0.832
P_{Ti}	0.375	0.085	0.073	0.063	0.055	0.047	0.041	0.035	0.031	0.026

Шаг 4. χ^{*2}=26.49+0.03+0.06+3.44+38.57+49.3+8.55+5.64+1.24+0.70=134.02

Шаг 5. Поскольку χ^{*2}=134.02> $\chi^{*2}_{v,p таб}$=15.51 (при v=10-1-1=8 и p = 1-p_d = =1-0.95=0.05), гипотезу H_o об экспоненциальном законе отвергаем. ***Так как*** у закона Гаусса x^{*2}=6.6 < x^{*2}=9.22 Пуассона, принимаем гипотезу о законе Гаусса.

Таблица 2.8.

Исходные данные вариантов задачи 2

$n_и$	μ	σ	x_{max}	x_{min}	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
1	**33.09**	**2.29**	**39**	**30**	**7**	**5**	**14**	**19**	**20**	**10**	**8**	**9**	**4**	**4**
2	**46.22**	**6.89**	**60**	**30**	**4**	**2**	**9**	**20**	**14**	**13**	**14**	**7**	**12**	**5**
3	**47.68**	**7.06**	**67**	**35**	**11**	**10**	**16**	**18**	**16**	**14**	**8**	**3**	**1**	**3**
4	**36.06**	**36.69**	**180**	**1**	**46**	**15**	**15**	**11**	**4**	**3**	**2**	**2**	**1**	**1**
5	**46.91**	**11.92**	**89**	**24**	**8**	**14**	**18**	**26**	**14**	**12**	**5**	**1**	**0**	**2**
6	**46.69**	**11.85**	**78**	**23**	**5**	**5**	**23**	**18**	**14**	**16**	**6**	**6**	**5**	**2**

Практическое занятие 3

Однофакторное прогнозирование критических факторов

Постановка задачи

Задана динамика фактора ***x***. Исходные данные примера - в табл.3.1.

Таблица 3.1.

Исходные данные для прогнозирования фактора x

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	.?.

Необходимо спрогнозироватьY методом экстраполяции тенденций полиномами Лагранжа. Метод приемлем, если процесс не подвержен влиянию новых критических факторов. Max глубина P_{max}=P прогноза при известном n и min допустимой длины q для ряда $P_{\max} = \left[\dfrac{n-1}{q-1}\right]$ где [...] – целая часть.

Методические рекомендации

Для прогноза ищем полином Лагранжа оптимальной степени. В качестве ***критерия*** его пригодности берем среднюю абсолютную погрешность прогноза. ***Полиномы Лагранжа*** формируем последовательностями разных степеней (через две точки – линейные, через три – квадратичные и т.д.). Ретропрогнозы сравниваем с фактическими значениями и выбираем полином Лагранжа, дающий min средней абсолютной погрешности прошлых значений. Если ошибки малы и тенденция сохраняется, алгоритм пригоден для прогноза.

Алгоритм решения задачи

Построим по данным табл.3.1. полиномы Лагранжа 1-й, 2-й и 3-й степеней и вычислим с их помощью значение показателя за промежуток времени 1 – 9.

Шаг 1. Вычисляем полином 1-й степени для f(3) и f(4). Итоги в табл.3.2.

Таблица 3.2.

Полином Лагранжа 1-й степени

x	Y	
1	0.47	$f(3) = \dfrac{(3-2)}{(1-2)} * 0.47 + \dfrac{(3-1)}{(2-1)} * 0.55 = -0.47 + 1.1 = 0.63$
2	0.55	
x	y	
2	0.55	$f(4) = \dfrac{(4-3)}{(2-3)} * 0.55 + \dfrac{(4-2)}{(3-2)} * 0.58 = -0.55 + 1.16 = 0.61$
3	0.58	

Шаг 2. Аналогично прогнозируем f(5), f(6), f(7), f(8), f(9)и вычисляем точечные оценки ошибок прогнозирования |0.63-0.58|=0.05; и т.д. Итоги в табл.3.3.

Таблица 3.3.

Результаты прогнозирования полиномом Лагранжа 1-й степени

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_1
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	
Рпро			0.63	0.61	0.76	0.35	0.65	0.72	0.77	
Δ ошибка	-	-	***0.05***	***0.06***	***0.25***	***0.23***	***0.0***	***0.01***	***0.04***	***0.091***

Шаг 3. Вычисляем среднюю величину абсолютной погрешности

$$\Delta_1 = (0.05+0.06+0.25+0.23+0+0.01+0.04)/7 = 0.091 .$$

Шаг 4. Вычисляем полиномы 2-й степени для f(4) и f(5). Итоги в табл.3.4.

Таблица 3.4.

Полиномы Лагранжа 2-й степени

x	y	
1	0.47	$f(4) = \dfrac{(4-2)}{(1-2)}\dfrac{(4-3)}{(2-3)} * 0.47 + \dfrac{(4-1)}{(2-1)}\dfrac{(4-3)}{(2-3)} * 0.55 + \dfrac{(4-1)}{(3-1)}\dfrac{(4-2)}{(3-2)} * 0.58 = 0.56$
2	0.55	
3	0.58	

Продолжение табл.3.4.

x	y	
2	0.55	$f(5)=\frac{(5-3)}{(2-3)}\frac{(5-4)}{(3-4)}*0.55+\frac{(5-2)}{(3-2)}\frac{(5-4)}{(3-4)}*0.58+\frac{(5-2)}{(4-2)}\frac{(5-3)}{(4-3)}*0.67=0.82$
3	0.58	
4	0.67	

Аналогично прогнозируем f(6), f(7), f(8), f(9). Результаты в табл.3.5.

Таблица 3.5.

Результаты прогнозирования полиномом Лагранжа 2-й степени

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_2
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	
Рпро	-	-	-	0.56	0.82	0.10	0.85	0.72	0.76	
δ	-	-	-	0.11	0.31	0.48	0.20	0.01	0.03	0.19

Шаг 5. Вычисляем точечные оценки ошибок прогнозирования

|0.56-0.67| =0.11, |0.51-0.82| =0.31 и т.д. Итоги в табл.3.5.

Шаг 6. Вычисляем среднюю величину абсолютной погрешности

Δ_2=(0.11+0.31+0.48+0.20+0.01+0.03)/6=0.19. Итоги в табл.3.5.

Шаг 7. Вычисляем полиномы 3-й степени для f(5) и f(6). Итоги в табл.3.6.

Таблица 3.6.

Полиномы Лагранжа 3-й степени

x	y	
1	0.47	$f(5)=\frac{(5-2)(5-3)(5-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}*0.47+\frac{(5-1)(5-3)(5-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}*0.55+$
2	0.55	
3	0.58	$+\frac{(5-1)(5-2)(5-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}*0.58+\frac{(5-1)}{(3-1)}\frac{(5-2)}{(3-2)}\frac{(5-3)}{(4-3)}*0.67=0.93$
4	0.67	
x	y	
2	0.55	$f(6)=\frac{(6-3)}{(2-3)}\frac{(6-4)}{(2-4)}\frac{(6-5)}{(2-5)}*0.55+\frac{(6-2)}{(3-2)}\frac{(6-4)}{(3-4)}\frac{(6-5)}{(3-5)}*0.58+$
3	0.58	
4	0.67	$+\frac{(6-2)}{(4-2)}\frac{(6-3)}{(4-3)}\frac{(6-5)}{(4-5)}*0.67+\frac{(6-2)}{(5-2)}\frac{(6-3)}{(5-3)}\frac{(6-4)}{(5-4)}*0.51=-0.21$
5	0.51	

Аналогично прогнозируем f(6), f(7), f(8), f(9). Итоги в табл.3.7.

Таблица 3.7.

Результаты прогнозирования полиномом Лагранжа 3-й степени

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_3
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	
Рпро	-	-	-	-	0.93	-0.21	1.36	0.49	0.75	
δ	-	-	-	-	0.42	0.79	0.71	0.22	0.02	0.43

Шаг 8. Вычисляем точечные оценки ошибок прогнозирования

|0.93-0.51| =0.42, |-0.21-0.58| =0.79 и т.д. Итоги в табл.3.7.

Шаг 9. Вычисляем среднюю величину абсолютной погрешности

Δ_3= (0.42+0.79+0.71+0.22+0.02)/5 =0.43. Итоги в табл.3.7.

Шаг 10. Сравнивая Δ_1, Δ_2, Δ_3 находим $\Delta_{min}=\Delta_1$=0.091 и принимаем решение: прогноз показателя вычислять полиномом Лагранжа 1-й степени.

Шаг 11. Прогноз для k=10 вычисляем при k=8 и k=9. Итоги в табл.3.8 и 3.9.

Таблица 3.8.

Полином Лагранжа 1-й степени

x	Y	
1	0.71	$f(3)=\frac{(3-2)}{(1-2)}*0.71+\frac{(3-1)}{(2-1)}*0.73=-0.71+1.46=0.75$
2	0.73	

Таблица 3.9.

Результаты прогнозирования полиномом 1-й степени для К=10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73			
Рпро			0.63	0.61	0.76	0.35	0.65	0.72	0.77	**0.75**		
					0.69		0.44		0.79		**0.81**	
									0.58			**0.88**
Δ ошибка	-	-	**0.05**	**0.06**	**0.25**	**0.23**	**0.0**	**0.01**	**0.04**			

Прогнозы для К≥11 рассчитываем по данным

1	3	5	7	9
0.47	0.58	0.51	0.65	0.73

через одно, начиная с последнего значения начальной матрицы исходных данных.

Шаг 12. Прогнозируем для К=11, выполняя расчеты при k=7 и k=9.

Таблица 3.10.

Полином Лагранжа 1-й степени для К=11

x	Y	
1	0.65	$f(3)=\frac{(3-2)}{(1-2)}*0.65+\frac{(3-1)}{(2-1)}*0.73=-0.65+1.46=0.81$
2	0.73	

Шаг 13. Прогнозируем для К=12, выполняя расчеты при k=6 и k=9.

Таблица 3.11.

Полином Лагранжа 1-й степени для К=12

x	Y	
1	0.58	$f(3)=\frac{(3-2)}{(1-2)}*0.58+\frac{(3-1)}{(2-1)}*0.73=-0.58+1.46=0.88$
2	0.73	

Анализ ошибок показывает, что значение показателя за 9-й год занижено, и можно предположить, что и прогноз на 12-й год искажен - завышен. Таким образом, полиномом Лагранжа 1-й степени найден прогноз показателя (табл.3.9).

Таблица 3.12.

Исходные данные вариантов задачи 3

Вариант\годы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	**82**	**89**	**93**	**96**	**97**	**99**	**101**	**104**	**111**
2	**104**	**114**	**125**	**140**	**153**	**168**	**186**	**204**	**224**
3	**35**	**63**	**80**	**112**	**141**	**166**	**189**	**208**	**229**
4	**38**	**46**	**58**	**66**	**75**	**86**	**96**	**104**	**115**
5	**102**	**104**	**108**	**110**	**114**	**117**	**121**	**126**	**135**
6	**130**	**142**	**156**	**171**	**187**	**199**	**204**	**215**	**228**

Практическое занятие 4

Расчет многофакторной производственной функции

Постановка задачи

Известна динамика спроса на перевозки по ВЛ $\mathbf{Q_7}$ и факторов x_1 и x_2.

Необходимо вычислить a_0, a_1, a_2 и критерии адекватности модели

$$Q_7 = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \tag{4.1}$$

Искомыми являются: a_0, a_1, a_2 , критерии адекватности и прогноз **у.**

Алгоритм решения задачи 4

Алгоритм поясняется на примере, исходные данные которого приведены в табл.4.1. Предварительно логарифмируем У, x_1, x_2 .

Таблица 4.1.

Исходные данные для задачи 4

У	-	x_1	x_2		Ln У	-	Ln x_1	Ln x_2
512	1	19	84		6.238	1	2.944	4.431
524	1	24	107		6.261	1	3.178	4.673
538	1	27	130		6.288	1	3.296	4.868
543	1	29	154		6.297	1	3.367	5.037
556	1	31	178		6.321	1	3.434	5.182
561	1	29	203		6.330	1	3.367	5.313
572	1	27	228		6.349	1	3.296	5.429
577	1	23	254		6.358	1	3.135	5.537

Используем критерий $K=\sum_i (y_i^{\phi} - y_i^{p})^2 + \sum_i \xi_i^2 = (y_i^{\phi} - y_i^{p})^T (y_i^{\phi} - y_i^{p})$, (4.2)

Параметры модели (4.1) находим, решая уравнение $A = (X^T X)^{-1} X^T Y$ по алгоритму:

Шаг 1. Транспонируем матрицу X : $M_1 = X^T$. (4.3)

$$M1 = \begin{vmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.944 & 3.178 & 3.296 & 3.367 & 3.434 & 3.367 & 3.296 & 3.135 \\ 4.431 & 4.673 & 4.868 & 5.037 & 5.182 & 5.313 & 5.429 & 5.537 \end{vmatrix}$$

Шаг 2. Умножаем M_1 на X: $M_2 = (X^T X)$ (4.4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.94 & 3.18 & 3.3 & 3.37 & 3.43 & 3.37 & 3.3 & 3.14 \\ 4.43 & 4.67 & 4.87 & 5.04 & 5.18 & 5.31 & 5.43 & 5.54 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 2.94 & 4.43 \\ 1 & 3.18 & 4.67 \\ 1 & 3.30 & 4.87 \\ 1 & 3.37 & 5.04 \\ 1 & 3.43 & 5.18 \\ 1 & 3.37 & 5.31 \\ 1 & 3.3 & 5.43 \\ 1 & 3.14 & 5.54 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8.000 & 26.018 & 40.470 \\ 26.018 & 84.796 & 131.842 \\ 40.470 & 131.842 & 205.752 \end{vmatrix}$$

Шаг 3. Обращаем матрицу M_2 : $M_3 = (X^T X)^{-1}$ (4.5)

M_2 =	8.00	26.02	40.47	1.0	0.0	0.0	Матрица E
	26.02	84.80	131.84	0.0	1.0	0.0	
	40.47	131.84	205.75	0.0	0.0	1.0	
Итерация 1	1.00	3.25	5.06	0.13	0.00	0.00	
	0.00	0.18	0.22	-3.25	1.00	0.00	
	0.00	0.22	1.03	-5.06	0.00	1.00	
Итерация **2**	1.00	0.00	0.97	59.82	-18.36	0.00	
	0.00	1.00	1.26	-18.36	5.64	0.00	
	0.00	0.00	0.75	-0.97	-1.26	1.00	
Итерация 3	1.00	0.00	0.00	61.07	-16.73	-1.30	Матрица M_3
	0.00	1.00	0.00	-16.73	7.77	-1.69	
	0.00	0.00	1.00	-1.30	-1.69	1.34	

Шаг 4. Умножаем M_2 на M_1: $M_4 = (X^T X)^{-1} X^T$ (4.6)

$$\begin{vmatrix} 61.072 & -16.726 & -1.295 \\ -16.726 & 7.767 & -1.687 \\ -1.295 & -1.687 & 1.341 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.94 & 3.18 & 3.3 & 3.37 & 3.43 & 3.37 & 3.3 & 3.14 \\ 4.43 & 4.67 & 4.87 & 5.04 & 5.18 & 5.31 & 5.43 & 5.54 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6.087 & 1.866 & -0.356 & -1.771 & -3.074 & -2.128 & -1.083 & 1.459 \\ -1.332 & 0.075 & 0.661 & 0.930 & 1.204 & 0.464 & -0.287 & -1.715 \\ -0.322 & -0.392 & -0.330 & -0.223 & -0.142 & 0.147 & 0.423 & 0.839 \end{vmatrix}$$

Шаг 5. Умножая M_4 на У : $M_5 = (X^T X)^{-1} X^T Y$, (4.7)

имеем вектор коэффициентов уравнения регрессии a_0= 5.766; a_1=-0.0059; a_2= 0.110.

Преобразуя a_0=5.766221 → a_0= exp(-a_0), получаем мультипликативную многофакторную регрессионную модель $Q_7 = 319.33 x_1^{-0.006} x_2^{-0.11}$ (4.8)

Шаг 6. Вычисляем y_{pj}, подставляя x_{1i}, x_{2i} в (4.8) (табл.4.3).

Таблица 4.3.

Анализ регрессионной модели (4.8)

x_1	x_2	Уфi	Уpi	Δy	%Δy
19	84	512.00	511.73	0.27	0.05
24	107	524.00	524.86	0.86	0.16
27	130	538.00	535.88	2.12	0.39
29	154	543.00	545.77	2.77	0.51
31	178	556.00	554.34	1.66	0.30
29	203	561.00	562.67	1.67	0.30
27	228	572.00	570.17	1.83	0.32

Шаг 7. Вычисляем критерии *аспектов адекватности* модели ***y*** (табл.4.4).

1. ***Остаточная*** *дисперсия* – степень отображения дисперсии.

2. ***Средняя ошибка*** *аппроксимации* - точность модели.

3. ***$F^*_{кр} \geq F_{кр\ таб}$ - критерий*** *Фишера* - однородность дисперсий.

4. ***Коэффициент*** *множественной корреляции R* - линейность связи ***y*** и ***x***.

5. ***Коэффициент*** *множественной детерминации D* - полноту множества {x}. Так, при R=0.9, а D=0.81, то {x} отображает 81% дисперсии **У**, а 19% - доля факторов, которых нет в модели.

6. Оценки значимости *коэффициентов регрессии* t_{ai}.

Таблица 4.4.

Критерии адекватности

Критерий	Модель	Значимость	
Системная дисперсия σ_y^2	$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i^{ф} - \mu_y)^2}{(n-1)} = 520.98$		(4.9)
Остаточная дисперсия $\sigma_{ост}^2$	$\sigma_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i^{ф} - y_i^{p})^2}{(n-n_p)} = 4.426$		(4.10)
F-критерий Фишера	$F^*_{кр} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{ост}^2} \geq F_{кр}^{таб}$; $\frac{975.62}{0.516} = 117.7 \geq 3.11$,	значим	(4.11)
Средняя ошибка $\Delta\varepsilon$	$\Delta\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mid y_i^{ф} - y_i^{p} \mid}{y_i^{ф}} * 100\% = 0.266\%$		(4.12)
Коэффициент D	$D = R^2 = 0.992$.		(4.13)

Продолжение табл.4.4.

Коэффициент R	$R=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}}=\sqrt{1-\frac{0.516}{975.62}}=0.996$.		(4.14)
t_R-критерий значимости R	$t_R=\frac{R}{\mu_R}=\frac{R\sqrt{n-n_p-1}}{1-R^2}=234.41$	значим	(4.15)
Оценки значимости a_i:	$t_{a_i}=\frac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост\sqrt{c_{ii}}}}\ge t_{\alpha,k}$		(4.16)
t_a$_1$	$t_{a1}=\frac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост}\sqrt{M_{3ii}}}=\frac{41.511}{0.7183*\sqrt{15.94}}=1924.7>2.447;$	значим	(4.17)
t_a$_2$	$t_{a2}=\frac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост}\sqrt{M_{3ii}}}=\frac{7.511}{0.7183*\sqrt{0.26}}=2.56>2.447$	значим	(4.18)
t_a$_3$	$t_{a3}=\frac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост}\sqrt{M_{3ii}}}=\frac{5.399}{0.7183*\sqrt{0.01}}=24..91>2.447$	значим	(4.19)

Модель адекватна так как: 1) $y_{pi}\approx y_{фi}$, суть a_j совпадает с сутью влияния $\mathbf{x_i}$ на $y_{фi}$; 2) $F^*_{кр}=117.7>F_{кр\ таб\ [k1,\ k2,\nu]}=3.11$ при $к_1$=n-1=6, $к_2=n-n_p-1=3$ и $\nu = 0.1$;

Таблица 4.5.

Исходные данные вариантов задачи 4

Вариант - 1					***Вариант - 2***					***Вариант - 3***			
y	**-**	***x$_1$***	***x$_2$***		***y***	**-**	***x$_1$***	***x$_2$***		***y***	**-**	***x$_1$***	***x$_2$***
401	**1**	**6**	**71**		**213**	**1**	**10**	**58**		**200**	**1**	**15**	**92**
405	**1**	**8**	**89**		**234**	**1**	**12**	**69**		**228**	**1**	**14**	**94**
409	**1**	**10**	**107**		**256**	**1**	**13**	**80**		**240**	**1**	**13**	**95**
412	**1**	**12**	**125**		**265**	**1**	**14**	**90**		**260**	**1**	**12**	**96**
417	**1**	**14**	**143**		**287**	**1**	**13**	**101**		**280**	**1**	**7**	**97**
421	**1**	**16**	**161**		**294**	**1**	**12**	**112**		**305**	**1**	**12**	**99**
467	**1**	**23**	**179**		**305**	**1**	**11**	**122**		**314**	**1**	**15**	**100**
		27	**?**				**10**	**?**				**16**	**?**
Вариант - 4					***Вариант - 5***					***Вариант - 6***			
331	**1**	**48**	**61**		**202**	**1**	**24**	**104**		**412**	**1**	**20**	**171**
344	**1**	**46**	**71**		**204**	**1**	**25**	**105**		**424**	**1**	**20**	**186**
357	**1**	**44**	**80**		**208**	**1**	**26**	**106**		**434**	**1**	**19**	**203**
369	**1**	**42**	**90**		**213**	**1**	**27**	**108**		**446**	**1**	**19**	**221**
382	**1**	**40**	**99**		**216**	**1**	**27**	**109**		**454**	**1**	**20**	**241**
393	**1**	**38**	**109**		**221**	**1**	**26**	**110**		**466**	**1**	**19**	**263**
408	**1**	**34**	**118**		**233**	**1**	**25**	**111**		**478**	**1**	**19**	**287**
		32	**?**				**24**	**?**				**20**	**?**

Практическое занятие 5
Прогнозирование системы показателей
Постановка задачи

Задана матрица A={a_{ij}} i=1,m; j=1,n; (табл.5.1) где a_{ij} –система показателей за n периодов наблюдений. ***Необходимо спрогнозировать*** структуру {a_{ij}}.

Таблица 5.1.

Численности работников по категориям

Категории работников/Годы	*2010*	*2011*	*2012*	*2013*
Производственные рабочие	266	267	268	269
Вспомогательные рабочие	114	120	127	132
Инженерно-технические работники	66	70	70	72
Служащие и МОП	32	33	35	41
Итого:	***478***	***490***	***500***	***514***

Алгоритм решения задачи *вычисляет:*

Шаг 1. Относительные % доли t_{ij} (табл.5.2), деля a_{ij}*100% на сумму чисел j-го столбца табл.5.1 и переходя от a_i к t_{jm} $t_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j} * 100\%$. (5.1)

Таблица 5.2.

Относительные % доли структуры

Категории работников \ Годы	*2010*	*2011*	*2012*	*2013*
Производственные рабочие	55.65	54.49	53.60	52.33
Вспомогательные рабочие	23.85	24.49	25.40	25.68
Инженерно-технические работники	13.81	14.29	14.00	14.01
Служащие и МОП	6.69	6.73	7.00	7.98
Итого:	***100%***	***100%***	***100%***	***100%***

Шаг 2. Относительные изменения $c_{i,k}=t_{i,j+1}-t_{i,j}$(табл.5.3). Например, 54.49 - 55.65 =-1.16. Суммируем по столбцам $c_{ik}>0$ и пишем суммы внизу табл.5.3. $C_{ik}>0$ в столбцах табл.5.3 равны приросту числа работников i-й категории в k-м периоде за счет уменьшения $c_{ik}<0$. Сумма $c_{ik}<0$ в столбцах табл.5.3 равна сумме c_{ik}.

Таблица 5.3.

Относительные изменения

Годы	*10/11*	*11/12*	*12/13*
	@ -1.16	@ -0.89	@ -1.27
	# 0.64	*# 0.91*	*# 0.28*
	# 0.48	@ -0.29	*# 0.01*
	# 0.04	*# 0.27*	*# 0.98*
$\sum c_{ij+}$	***1.16***	***1.18***	***1.27***

Таблица 5.4.

Доли общего прироста

Годы	*10/11*	*11/12*	*12/13*
	0	0	0
	0.55	0.77	0.22
	0.41	0	0.01
	0.03	0.23	0.77
	1.00	***1.00***	***1.00***

Шаг 3. Доли приростов численностей работников по категориям (табл.5.3) оценивая отношения c_{ik} к суммам $c_{ik}>0$ в столбцах: 0.64/1.16=0.55; 0.48/1.16=0.41 и 0.04/1.16=0.03. Сумма 0.55+0.41+0.03=1.0 .

Шаг 4. Матрицы D(k) изменений соседних пар лет, фиксирующие изменения в структуре работников по категориям в k-м периоде от j-го к (j+1)-му году. На диагонали (табл.5.5) min a_{ij} из табл.5.2 для пары лет 2010 и 2011 г.г.

Таблица 5.5.

Матрица D(1) для 2010/2011 г.г.

	54.49	0	0	0	**53.60**
#(+)	*0.64*	**23.85**	0	0	**25.40**
#(+)	*0.48*	0	**13.81**	0	**14.00**
#(+)	*0.04*	0	0	**6.69**	**6.73**
	54.49@(-)	**23.85**	**13.81**	**6.69**	100%

В столбце j=1 - доли прироста категорий i=2,3,4 на 0.64%, 0.48% и 0.04% за счет уменьшения числа работников категории j=1 на (0.64%+0.48%+0.04%)=1.16%. При отсутствии уменьшения работников j-й $D(k)_{ij}=0$. В D(1) записаны изменения в $\{a_{ij}\}$ за 2010-2011 г.г. Суммы a_{ij} по столбцам j=1,4 соответствуют структуре $\{a_{ij}\}$ в 2010 г. Суммы a_{ij} по строкам i=1,4 - структуре $\{a_{ij}\}$ в 2011 г. Сумма a_{ij} правого столбца и нижней строки равны 100%. Матрицы D(k) формируем для всех пар лет.

Таблица 5.6.

Матрица D(2) для 2011/2012 г.г.

	53.60	0	0	0	**53.60**
#(+)	*0.69*	**24.49**	*0.22*	0	**25.40**
	0	0	**14.00**	0	**14.00**
#(+)	*0.20*	0	*0.07*	**6.73**	**7.00**
	54.49	**24.49**	**14.29**	**6.73**	100%
	@ (-)		@ (-)		

Таблица 5.7.

Матрица D(3) для 2012/2013 г.г.

	52.33	0	0	0	**52.33**
#(+)	*0.28*	**24.40**	0	0	**25.68**
#(+)	*0.01*	0	**14.00**	0	**14.01**
#(+)	*0.98*	0	0	**7.00**	**7.98**
	53.60	25.40	14.00	7.00	100%
	@ (-)				

Шаг 5. Матрицу кумулятивных изменений (табл.5.8) за 2010-2013гг.

$$S_{ij}=d(1)_{ij}+d(2)_{ij}+\ldots+d(n-1)_{ij};\ i=1,...m;\ j=1,...m. \quad (5.2)$$

Шаг 6. Матрицу тенденций переходов E_{ij} (табл.5.9)

$$E_{ij} = S_{ij}/S_{m+1j};\quad i=1,..m+1;\ j=1,..m. \quad (5.3)$$

Таблица 5.8.

Матрица S_{ij}

160.42	0.00	0.00	0.00
1.61	73.74	0.22	0.00
0.49	0.00	41.81	0.00
1.22	0.00	0.06	20.43
163.74	***73.74***	***42.09***	***20.43***

Таблица 5.9.

Матрица E_{ij}

0.9798	0.0000	0.0000	0.0000
0.0098	1.0000	0.0053	0.0000
0.0030	0.0000	0.9932	0.0000
0.0074	0.0000	0.0015	1.0000
1.0000	***1.0000***	***1.0000***	***1.0000***

Шаг 7. Ретропрогноз t_{ij} (табл.5.10), умножая E_{ij} на табл.5.2.

Таблица 5.10.

Ретропрогноз t_{ij}

Категории работников \Год	***2010***	***2011***	***2012***	***2013***
Производственные рабочие	54.52	53.39	52.52	51.28
Вспомогательные рабочие	24.47	25.10	26.00	26.27
Инженерно-технические работники	13.88	14.35	14.06	14.07
Служащие и МОП	7.13	7.16	7.42	8.39

Шаг 8. Точность воспроизведения структуры 2010-2013, вычитая табл.5.2 из табл.5.10 $D_{ij}=t^{p}_{ij}-t_{ij}$. Ошибки ретропрогноза в табл.5.11.

Таблица 5.11.

	Ошибки ретропрогноза D_{ij}				***Прогноз***	
Категории работников \ Год	***2010***	***2011***	***2012***	***2013***	***% 2014***	
Производственные рабочие	-1.13	-1.10	-1.08	-1.06	50.24	264
Вспомогательные рабочие	0.62	0.61	0.60	0.59	26.85	141
Инженерно-техн. работники	0.07	0.06	0.06	0.06	14.12	74
Служащие и МОП	0.43	0.43	0.42	0.41	8.79	46
	100%	100%	100%	100%	100%	525

Шаг 9. Средние ошибки по годам: $D_{ij}=\{0.56, 0.55, 0.54, 0.53\}$.

Шаг 10. Min D_{ij}=0.06% ***и max D_{ij}***=1.13% в табл.5.11. Сложив D_{ij} и разделив их сумму на число наблюдений, находим D_{ij}=0.55%.

Шаг 10. Min D_{ij}=0.06% ***и max D_{ij}***=1.13% в табл.5.11. Сложив $D_{ij.}$ и разделив их сумму на число наблюдений, находим D_{ij}=0.55%.

Шаг 11. Прогноз структуры на 2014 г., умножая Е на вектор прогноза % 2014 г. (табл.5.1%). Итоги в табл.5.11.

Таблица 5.13.

Исходные данные вариантов задачи 5

Вариант 1					*Вариант 2*					*Вариант 3*			
266	262	265	263		66	62	65	63		106	112	124	133
232	238	220	223		32	38	20	23		202	218	220	223
57	58	55	60		57	58	55	60		47	58	55	60
58	50	45	44		58	50	45	44		48	50	45	44
613	608	585	590		213	208	185	190		403	438	444	460
Вариант 4					*Вариант 5*					*Вариант 6*			
166	162	165	169		166	162	165	169		166	162	165	169
132	138	130	131		132	138	130	131		132	138	130	131
127	118	12	129		127	118	12	129		127	118	12	129
64	70	59	63		64	70	59	63		64	70	59	63
489	488	479	492		489	488	479	492		489	488	479	492

Практическое занятие 6

Оптимизация использования ресурсов матричным симплекс-методом

Постановка задачи

Предприятие имеет n видов ресурсов объемом b_i i=1,n, из которых можно произвести m видов продукции. ***Заданы:*** нормы расхода a_{ij} i-го ресурса на 1 ед. продукции j-го вида; c_j - доход от реализации 1 ед. j-го вида продукции.

Математическая модель задачи

$$Z= 4x_1 +3x_2 +5x_3 \dashrightarrow \max; \tag{6.1}$$

при

$$\begin{aligned} 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 &\le 21; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 19; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 17; \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0. \tag{6.3}$$

Необходимо найти x_j j=1,m - объемы продукции, дающие max доход.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Приводим модель задачи к каноническому виду:

а) преобразуем неравенства (6.2) в уравнения, вводя в них x_4, x_5, x_6

$$\begin{aligned} 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 &= 21; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 &= 19; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 &= 17; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0;\ x_6 \ge 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

б) включаем x_4, x_5, x_6 в (6.3) в Z с множителем 0

$$Z =4x_1 + 3x_2 + 5x_3+ 0(x_4+x_5+x_6) \to \max. \tag{6.5}$$

Шаг 2. Переносим правую часть (6.5) за знак (=) с множителем (-1)

$$Z - 4x_1- 3x_2- 5x_3 - 0(x_4+x_5 +x_6)=0. \tag{6.6}$$

Шаг 3. Заполняем симплекс-таблицу (табл.6.1).

Таблица 6.1.

Опорный план задачи

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_4	21	2	0	2	1	0	0	10.5
X_5	19	1	2	0	0	1	0	∞
x_3	17	1	2	[2]	0	0	1	8.5←Опорная строка i=q
Z	0	-4	-3	-5	0	0	0	-

Опорный ↑ столбец

Шаг 4. Поскольку в строке Z в x_j есть $a_{ij} < 0$ - план не оптимален.
Шаг 5. В строке Z ищем min число<0 (-5). Это опорный столбец (j=p).
Шаг 6. Делим элементы столбца a_{i0} на элементы опорного столбца a_{ij} (j=p)

$\Theta_i = \dfrac{a_{i0}}{a_{ij}} > 0$, $\{\frac{21}{2};\frac{19}{0};\frac{17}{2}\}$. Min $\Theta_i = \frac{17}{2} = 8.5$ в опорной строке (i=q=3).

Шаг 7. На пересечении опорного столбца j=p=3 и опорной строки i=q=3 стоит опорный элемент $a_{i=q;j=p}$ $x_{[q,p]}=x_{[3,3]}=[2]$. Выполняем ***процедуру Жордана-Гаусса:*** а) ***элементы опорной строки*** *делим на опорный элемент* и записываем их на те же места в табл. 6.2 $\qquad a_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{a_{qp}}$ при j=1,m; i=q . (6.7)

б) ***в опорном столбце*** *все a_{jp} кроме опорного равны* $\quad a_{jp}=0$ (6.8)

Таблица 6.2.

Мнемонический прямоугольник для a_{10}=21

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_4	21	2	0	2	1	0	0	10.5
X_5	19	1	2	0	0	1	0	∞
x_3	17	1	2	[2]	0	0	1	8.5 ←Оп стр i=q
Z	0	-4	-3	-5	0	0	0	-

↑ Оп ст

в) ***элементы*** *вне опорной строки и опорного столбца* (i≠q, j≠p) a_{ij}',

вычисляем по модели $\qquad a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{qj}a_{ip}}{a_{qp}} \qquad$ i≠q; j≠p. (6.9)

где a_{ij}, a_{qj}, a_{ip}, a_{qp} - элементы на вершинах прямоугольника.

Соединив a_{ij} с опорным элементом a_{qp} прямой, считаем ее диагональю, вокруг которой строим прямоугольник и реализуем модели (6.8-6.9). Подставляем в (6.9) числа, с вершин прямоугольника. Так $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{oj}a_{ip}}{a_{op}} = 21 - \dfrac{17*2}{2} = 4$. Итоги в табл.6.3.

Таблица 6.3.

Итог 1-й итерации

Базис	a_{i0}	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_4	4	**[1.0]**	-2	0	1	0	-1	4 min
X_5	19	1	2	0	0	1	0	19
x_3	8.5	0.5	1	1	0	0	0.5	17
Z	42.5	-1.5	2	0	0	0	2.5	-

Шаг 8. В Z есть a_{ij}=-1.5<0 - ***план не оптимален.***

Шаг 9. Находим в строке Z min по a_{ij}< 0 = -1.50 *опорный столбец* j=2.

Шаг 10. **Вычисляем** $\Theta_i=a_{i0}/a_{ij}>0$ (j=p) для всех строк, кроме Z {Θ_1=4/1; Θ_2=19/1; Θ_3=8.5/0.5=17}. По minΘ_i=4 находим опорную строку i=1.

Шаг 11. На пересечении опорного столбца и строки стоит опорный элемент a_{qp}=x[1,1]=1.00.

Таблица 6.4.

Итог 2-й итерации

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_1	4	1	-2	0	1	0	-1	-
X_5	15	0	4	0	-1	1	1	3.75
x_3	6.5	0	**[2]**	1	-0.5	0	1	3.25 min
Z	48.5	0	**-1**	0	0	0	1	-

Вновь ищем опорный элемент [2.0] и выполняем 3-ю итерацию (табл.6.5) **.** В Z все ≥0 - план оптимален: Z*max=51.75 при x_1*=10.5, x_2*=3.25 и x_5*=2.0.

Таблица 6.5.

Оптимальный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	**10.5**	1	0	1	0.5	0	0
X_5	**2**	0	0	-2	0	1	-1
x_2	**3.25**	0	1	0.5	-0.25	0	0.5
Z	**51.75**	**0**	**0**	**0.5**	**1.25**	**0**	**1.5**

Таблица 6.6.

Исходные данные вариантов задачи 6 (все x_i≥0)

Вариант 1		***Вариант 2***		***Вариант 3***
Z= $4x_1$ $-3x_2$ $+3x_3$ -> max		**Z= $4x_1$ $+3x_2$ $-4x_3$ > max**		**Z= $5x_1$ $+2x_2$ $+3x_3$ -> max**
$-2x_1$ $+1x_2$ $+0x_3$ ≤ 19;		**$3x_1$ $+3x_2$ $+2x_3$ ≤ 10;**		**$-1x_1$ $+2x_2$ $+6x_3$ ≤ 20;**
$3x_1$ $-2x_2$ $+1x_3$ ≤ 17;		**$3x_1$ $+4x_2$ $+0x_3$ ≤ 12;**		**$2x_1$ $+5x_2$ $-3x_3$ ≤ 22;**
$4x_1$ $+2x_2$ $-1x_3$ ≤ 8;		**$4x_1$ $+2x_2$ $+5x_3$ ≤ 8 ;**		**$3x_1$ $-2x_2$ $+3x_3$ ≤ 18 ;**
Вариант 4		***Вариант 5***		***Вариант 6***
Z= $7x_1$ $-2x_2$ $+4x_3$ -> max		**Z= $6x_1$ $-1x_2$ $+4x_3$ > max**		**Z= $3x_1$ $-1x_2$ $+4x_3$ -> Max**
$-2x_1$ $+3x_2$ $+5x_3$ ≤ 20;		**$-3x_1$ $+1x_2$ $+3x_3$ ≤ 30;**		**$-2x_1$ $+1x_2$ $+3x_3$ ≤ 10;**
$2x_1$ $+5x_2$ $-2x_3$ ≤ 22;		**$3x_1$ $+3x_2$ $-1x_3$ ≤ 32;**		**$2x_1$ $+2x_2$ $-1x_3$ ≤ 12;**
$4x_1$ $-3x_2$ $+2x_3$ ≤ 18;		**$5x_1$ $-2x_2$ $+1x_3$ ≤ 18 ;**		**$3x_1$ $-2x_2$ $+1x_3$ ≤ 18 ;**

Практическое занятие 7

Оптимизация УР симплекс-методом с искусственным базисом

Постановка задачи

В модель 6.1 вводим условие равенства объема производства плановому значению

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \dashrightarrow \max \qquad (7.1)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1; \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 16; \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 13; \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 10; \quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Задачу решаем симплекс-методом с искусственным базисом [1,с.58-59].

Шаг 1. Вводя x_3, x_4, x_5, x_6, преобразуем неравенства в уравнения

$$\begin{array}{llllll} x_1 & + x_2 & - x_3 & & & = 1; \\ 2x_1 & + 5x_2 & & + x_4 & & = 16; \\ 3x_1 & + 3x_2 & & & + x_5 & = 13; \\ 3x_1 & + 2x_2 & & & \quad + x_6 & = 10; \end{array} \quad \begin{array}{r} (7.3) \\ \\ (7.4) \\ \\ \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0;\ x_6 \geq 0. \qquad (7.5)$$

Шаг 2. Вводим в (7.1) x_3, x_4, x_5, x_6 с множителями 0

$$Z= 5x_1+ 4x_2 + 0(x_3 + x_4+x_5 +x_6) \text{ --> } \max. \qquad (7.6)$$

Шаг 3. В (7.4) при x_3 стоит знак минус (-), т.е. в задаче нет базиса.

Шаг 4. Формируем базис, вводя в (7.4) "искусственную" $x7' \geq 0$

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & + x_2 & - x_3 & & & + x_{7'} & = 1; \\ 2x_1 & + 5x_2 & & + x_4 & & & = 16; \\ 3x_1 & + 3x_2 & & & + x_5 & & = 13; \\ 3x_1 & + 2x_2 & & & \quad + x_6 & & = 10; \end{array} \quad \begin{array}{r} (7.7) \\ \\ (7.8) \\ \\ \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0;\ x_6 \geq 0,\ x7' \geq 0. \qquad (7.9)$$

Шаг 5. Вводим в Z–>max неизвестную $x_{7'}$ с множителем M=-100

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0(x_3 + x_4+ x_5 + x_6) - 100x_{7'} \text{ -->} \max.$$

Шаг 6. Заполняем симплекс-таблицу и ее строку (m+1) (см. табл.7.1):

1) $m+1;Z=(\sum C_i–a_{i0})=(-100*1+0*16+0*13+0*10)=-100;$

2) $m+1;(\sum C_i-a_{i1})-C_{i1}=(-100*1+0*2+0*3+0*3)-(5)=-100-5=-105$ и т.д.

Таблица 7.1.

Опорный план

			5	4	0	0	0	0	-100	Θ_i
Базис	**$C_{iб}$**	**a_{i0}**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
X_7	*- 100*	1	**[1]**	1	-1	0	0	0	1	1.0 Оп строка
X_4	*0*	16	2	5	0	1	0	0	0	3.2
X_5	*0*	13	3	3	0	0	1	0	0	4.33
X_6	*0*	10	3	2	0	0	0	1	0	5.0
M+1	-	**-100**	**-105**	**-104**	**100**	***0***	***0***	***0***	**0**	
		Опорный ↑ столбец				**Базис**				

Шаг 8. По min (<0) числу в строке (m+1) находим опорный столбец j=1. По min $\Theta i=a_{io}/a_{ip}>0$ $\{\Theta_1=1/1=1;\ \Theta_2=16/2=8;\ \Theta_3=13/3=4.3;\ \Theta_4=10/3=3.3\}$ - опорную строку i=1 и опорный элемент x[i=1,j=1]=1.

Шаг 9. Выполняя итерацию Жордана-Гаусса, находим (m+1)-ю строку и повторяем Шаги 8-9, пока в (m+1)-й строке все $a_{ij}<0$. Результаты в табл.7.2.

Таблица 7.2.

Оптимизация плана

			5	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-100**	Θ_i
Базис	**$C_{iб}$**	**a_{i0}**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
X_1	*5*	1	1	1	1	0	0	0	1	-
X_4	*0*	14	0	3	2	1	0	0	-2	7
X_5	*0*	10	0	0	3	0	1	0	-3	3.33
X_6	*0*	7	0	1	**[3]**	0	0	1	-3	2.33 Оп строка
M+1	**-**	**5**	***0***	**1**	**-5**	***0***	***0***	***0***	105	

										Продолжение табл.7.2.
X_1	*5*	1.64	1	0.67	0	0	0	0.33	-	4.97
X_2	*4*	2.55	0	3.67	0	1	0	-0.67	-	2.54
X_5	*0*	0.45	0	1	0	0	1	-1	-	3.00
X_6	*0*	3.18	0	-0.33	1	0	0	0.33	-	-
M+1		16.67	***0***	-0.67	***0***	***0***	***0***	1.67	-	
X_1	*5*	***1.64***	1	0	0	-0.18	0	0.45		
X_2	*4*	***2.55***	0	1	0	0.27	0	-0.18	0.18	
X_5	*0*	***0.45***	0	0	0	-0.27	1	-0.82		
X_3	*0*	***3.18***	0	0	1	0.09	0	0.27		
M+1		**18.36**	***0***	***0***	***0***	0.18	***0***	1.55		

Поскольку в строке (m+1) все $a_{ij} \geq 0$-план оптимален и Zmax*=18.36 при x_1*=1.64, x_2*=2.55, x_3*=3.18. Ответы в табл.1.4 и 1.5 П. I .

Таблица 7.3.

Исходные данные вариантов задачи 7

Вариант 1		***Вариант 2***		***Вариант 3***
$Z= 4x_1 \ -x_2 \ +2x_3 \ -> \min$ $4x_1 -1x_2 +2x_3 = 4;$ $1x_1 +1x_2 -1x_3 \leq 4;$ $3x_1 -1x_2 +4x_3 \quad 12;$		$Z= 3x_1 \ -1x_2 \ +2x_3 \ -> \min$ $4x_1 -1x_2 +2x_3 = 4$ $1x_1 +1x_2 -1x_3 \leq 4$ $3x_1 -1x_2 +4x_3 \quad 14$		$Z= -5x_1 \ -2x_2 \ +3x_3 \ -> \min$ $-2x_1 +0x_2 +1x_3 = 6$ $6x_1 -1x_2 +1x_3 \leq 2$ $3x_1 +0x_2 -1x_3 \ 3\geq 6$
Вариант 4		***Вариант 5***		***Вариант 6***
$Z= 4x_1 \ -2x_2 \ -3x_3 \ -> \min$ $2x_1 -1x_2 +1x_3 = 2;$ $1x_1 +1x_2 -.5x_3 \leq 5;$ $0x_1 +2x_2 -1x_3 \geq 9;$		$Z= -4x_1 \ +1x_2 \ +3x_3 \ -> \min$ $2x_1 -1x_2 +1x_3 = 0$ $1x_1 +1x_2 -.5x_3 \leq 5$ $0x_1 +2x_2 -1x_3 \quad 7$		$Z= 3x_1 \ +2x_2 \ -1x_3 \ -> \min$ $-2x_1 -.5x_2 +2x_3 = 5$ $1x_1 +1x_2 -1x_3 \leq 1$ $2x_1 -3x_2 +4x_3 \geq 6$

Практическое занятие 8
Оптимизация УР двойственным симплекс-методом
Постановка задачи

При целочисленной оптимизации используется алгоритм двойственного симплекс-метода, при котором в правых частях ограничений $a_{i0}<0$.

Модель задачи: $Z= 7x_1 +3x_2 +6x_3$ ---> min (8.1)

при

$$\begin{aligned} 9x_1 -2x_2 -5x_3 &\geq -7; \\ 7x_1 +4x_2 -4x_3 &\leq 4; \\ -4x_1 -7x_2 +4x_3 &\leq -6; \end{aligned} \qquad (8.2)$$

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$;

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Вводим x_4, x_5, $x_6 \geq 0$ в ограничения и в Z

$$\begin{aligned} -9x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -7; \\ 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_5 &= 4; \\ -4x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_6 &= -6; \end{aligned} \qquad (8.3)$$

$$Z= 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6) \text{ --> } \min;$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0;\ x_6 \geq 0. \qquad (8.4)$$

Шаг 2. Преобразуем Z (8.4) и записываем опорный план в табл.8.1.

$$0 = -Z +7.0x_1 +3.0x_2 +6.0x_3 +0(x_4+x_5+x_6) \text{-->} \min , \qquad (8.5)$$

$$-Z + 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 +0(x_4+x_5+x6) = 0 . \qquad (8.6)$$

Таблица 8.1.

Опорный план

Базис	***a_{i0}***	***x_1***	***x_2***	***x_3***	***x_4***	***x_5***	***x_6***	***Θ_i***
x_4	-7	**{-9}**	-2	-5	1	0	0	3.5 $_{max}$ ← Оп строка i=q
X_5	4	7	4	-4	0	1	0	-
X_6	-6	-4	-7	4	0	0	1	1.5
-Z	0	7	3	6	0	0	0	-

Опорный ↑ столбец

Шаг 3. В строках с $a_{i0}<0$ делим $\Theta_i = \{\frac{-7}{-9};\frac{-7}{-2};\frac{-7}{-5}\};\{\frac{-6}{-4};\frac{-6}{-7}\}$. По $\Theta_{i\ max}=\frac{-7}{-2}$

Таблица 8.2.

Итерация 1

Базис	***a_{i0}***	***x_1***	***x_2***	***x_3***	***x_4***	***x_5***	***x_6***	***Θ_i***
X_1	-7	**1**	0.22	0.56	-0.11	0	0	-
X_5	4	0	2.44	-7.89	0.78	1	0	0.18
X_6	-6	0	***-6.11***	6.22	-0.44	0	1	6.57$_{max}$
-Z	0	0	1.44	2.11	0.78	0	0	-

Опорный ↑ столбец

ищем опорную строку i=1и по $\Theta_{imin}=\frac{-7}{-9}$ =0.78 опорный элемент a_{qp}=-9.00. и далее алгоритм Жордана-Гаусса. В табл.8.2 a_{ij}=-7,-9, поэтому план не оптимален.

Шаг 4. Находим по $\Theta_{i=3max}$ =6.57 опорную строку i=3, в которой по min Θ_i=0.47 опорный элемент a_{qp}=[-6.11]. Выполняем преобразования Жордана-Гаусса.

Таблица 8.3.

Итерация 2

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
X_1	0.67	**1**	0	0.78	-0.13	0	0.04	-
X_5	-2.60	0	0	**{-5.40}**	0.60	1	0.40	0.48
X_2	0.47	0	1	-1.02	0.07	0	-0.16	
-Z	-6.13	7	0	3.58	0.67	0	0.24	-

Опорный ↑ столбец

Поскольку в табл.8.3 строке Z есть a_{i0}=-2.60<0, план не оптимален.

Шаг 5. $a_{i0}<0$ есть только во 2-й строке - опорная строка (i=2).

Шаг 6. В опорной строке Θ_i>0=-2.6/-5.4 - опорный элемент a_{qp}= [-5.4].

Шаг 7. В табл.8.4 $a_{i0}<0$ нет и нет $a_{ij}<0$ в строке -Z - план оптимален.

Таблица 8.4.

Оптимальный план

Базис	***a_{i0}***	***x_1***	***x_2***	***x_3***	***x_4***	***x_5***	***x_6***
X_1	**0.30**	1	0	0	-0.04	0.14	0.09
X_3	**0.48**	0	0	1	-0.11	-0.19	-0.07
X_2	**0.96**	0	1	0	-0.04	-0.19	-0.24
-Z	**-7.85**	0	0	0	1.07	0.66	0.50

Z_{min}^*=7.85 при x_1^*=0.30; x_2^*=0.96; x_3^*=0.48.

Таблица 8.5.

Исходные данные вариантов задачи 8

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$Z= x_1 +3x_2 +2x_3 \to \min$ **$-1x_1 +2x_2 +0x_3 \le -2;$** **$2x_1 -3x_2 -1x_3 \le -3;$** **$3x_1 +1x_2 -1x_3 \le -1;$**	**$Z= 3x_1 +2x_2 +7x_3 \to \min$** **$3x_1 -3x_2 -1x_3 \le -1$** **$-6x_1 +3x_2 +2x_3 \le -5$** **$1x_1 -3x_2 +1x_3 \le -3$**	**$Z= 2x_1 -1x_2 +3x_3 \to \min$** **$1x_1 -2x_2 -1x_3 \le 3$** **$-3x_1 +0x_2 -2x_3 \le -4$** **$-2x_1 +3x_2 -1x_3 \le -5$**
Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
$Z= 4x_1 -2x_2 +4x_3 \to \min$ **$2x_1 -4x_2 -1x_3 \le -5;$** **$1x_1 +0x_2 -3x_3 \le -2;$** **$2x_1 +2x_2 -2x_3 \le 1;$**	**$Z= 7x_1 +4x_2 +3x_3 \to \min$** **$1x_1 -4x_2 -1x_3 \le -7$** **$-3x_1 +1x_2 -2x_3 \le -4$** **$2x_1 +0x_2 -1x_3 \le -3$**	**$Z= 3x_1 -1x_2 +2x_3 \to \min$** **$2x_1 -3x_2 -2x_3 \le -5$** **$-2x_1 +0x_2 +1x_3 \le -4$** **$3x_1 +1x_2 -2x_3 \le 2$**

Практическое занятие 9

Оптимизация УР об использовании ресурсов Full- симплекс-методом

Постановка задачи

Найти число рейсов x_j (j=1,n) m ВС по n ВЛ, если ***известны:*** b_i - запасы ресурсов i=1,m; p_j - прибыль от выполнения рейса по j-й ВЛ; a_{ij} - нормы расхода i-го ресурса за рейс по j-й ВЛ j=1,n. Множество x_j j=1,n должно дать max прибыли Z.

Модель задачи имеет вид $Z= 2x_1 +5x_2 +7x_3 \to \max$ (9.1)

при

$$3x_1 +2x_2 + 3x_3 = 31;$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 22; \quad (9.2)$$
$$3x_1 +3x_2 + x_3 \le 44; \quad x_{1,2,3} \ge 0 \text{ – целые.} \quad (9.3)$$

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Вводим x_4, $x_{5'}$, $x_{6'}$ >= 0 в ограничения и в Z (9.4-9.6)

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 +0(x_4 +x_{5'} + x_{6'}) \text{ ---> } \max; \quad (9.4)$$

при

$$3x_1 +2x_2 + 3x_3 + x_{5'} = 31;$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_{6'} = 22; \quad (9.5)$$
$$x_1 +7x_2 + x_3 + x_4 = 44;$$
$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0; \ x_3 \ge 0; \ x_4 \ge 0; \ x_{5'} \ge 0; \ x_{6'} \ge 0. \quad (9.6)$$

Шаг 2. Преобразуем $Z - 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 0(x_4 + x_{5'} + x_{6'}) = 0$.

Шаг 3. Заполняем симплекс-таблицу (табл.9.1).

Таблица 9.1.

Опорный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{5'}$	$x_{6'}$
(=)$x_{5'}$	31.00	3.00	2.00	3.00	0	1	0
(=)$x_{6'}$	22.00	1.00	1.00	3.00	0	0	1
x_4	44.00	1.00	7.00	1.00	1	0	0
z	0	-2.00	-5.00	-7.00	0	0	0

Шаг 4. Формируем строку–$W_j = -\sum a_{ij}$, суммируя a_{ij} строк со знаками (≥) и (=) 1(31+22)=-53; -1(3+1)=-4; -1(2+1)=-2; -1(3+3)=-6. Опорный столбец ищем по –W.

Таблица 9.2.

Формирование строки –W

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{5'}$	$x_{6'}$	Θi
(=)$x_{5'}$	31.00	3.00	2.00	3.00	0	1	0	10.33
(=)$x_{6'}$	22.00	1.00	1.00	**[3.00]**	0	0	1	7.33 $_{min}$
x_4	44.00	1.00	7.00	1.00	1	0	0	44.00
z	0	-2.00	-5.00	-7.00	0	0	0	
-W	-53.00	-4.00	-3.00	**-6.00**	0	0	0	

Шаг 5. В W ищем min элемент <0=(-6) в опорном столбце.

Шаг 6. По $\min\Theta_i = a_{i0}/a_{j=p} = 22/3 = 7.33$ находим опорную строку i=2. На пересечении i=2 и j=3 опорный элемент x[2,3]=3.0 (табл.9.2).

Шаг 7. Далее процедура Жордана-Гаусса. Строку -W формируем из x_5 (табл.9.3).

Таблица 9.3.

Итерация 1

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{5'}$	$x_{6'}$	Θi
(=)$x_{5'}$	9.00	**[2.00]**	1.00	0	0	1	-1.00	4.50 min
x_3	7.33	0.33	0.33	1	0	0	0.33	22.21
x_4	36.67	0.67	6.67	0	1	0	-0.33	54.73
Z	51.33	0.33	-2.67	0	0	0	2.33	
-W	-9.00	***-2.00***	-1.00	0	0	0	2.00	

Шаг 8. По min $\boldsymbol{a_{io}=-2.00}$ в строке –W находим опорный столбец j=1, а по Θ_i=4.5 опорную строку i=1. На пересечении j=1 и i=1 опорный элемент x[1,1] =2.

Таблица 9.4.

Итерация 2

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_{5'}$	$x_{6'}$	Θi
x_1	4.50	1	0.50	0	0	0.50	-0.50	4.50 min
x_3	5.83	0	0.17	1	0	-0.17	0.50	22.21
x_4	33.67	0	6.33	0	1	-0.33	0.00	54.73
Z	49.83	0	-2.83	0	0	-0.17	2.50	

В базисе нет x_i со знаками (=) и (≥). $x_{5'}$ и $x_{6'}$ удаляем из симплекс-таблицы. Так как ***-2.83*** в Z <0, - план не оптимален. Опорный столбец ищем в Z.

Таблица 9.5.

Удаление векторов x_5 и x_6

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	Θi
x_1	4.50	1	0.50	0	0	9.00
x_3	5.83	0	0.17	1	0	34.29
x_4	33.67	0	**[6.33]**	0	1	5.31 min
z	49.83	0	***-2.83***	0	0	

Находим по Z опорный столбец j=2 и по $\min Q_i$=33.67/6.33=5.31 и опорную строку i=3. По опорному элементу $\mathbf{x_{(2,3)}=6.33}$ вычисляем новый план. В Z нет a_{ij}<0– план оптимален $Z^*_{max}=64.69$ при $x_1^*=1.84$; $x_2^*=5.32$; $x_3^*=4.95$.

Таблица 9.6.

Дробный оптимальный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1.84	1	0	0	-0.08
x_3	4.95	0	0	1	-0.03
x_2	5.32	0	1	0	0.16
Z	64.89	0	0	0	0.45

Таблица 9.7.

Исходные данные вариантов задачи 9

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
Z x_1 $+3x_2$ $+2x_3$ -> max	**Z $2x_1$ $+3x_2+3x_3$ -> max**	**Z= $2x_1$ $+4x_2$ $+3x_3$ -> max**
$2x_1$ $+2x_2$ $+x_3$ = 5	**$2x_1$ $+x_2+x_3$ = 6**	**$3x_1$ $+x_2$ $+x_3$ = 9**
$2x_1$ $+0x_2$ $+2x_3$ ≤ 8	**x_1 $+3x_2+x_3$ ≤ 11**	**$2x_1$ $+4x_2$ $+x_3$ ≤ 11**
x_1 $+3x_2$ $+4x_3$ ≤ 12	**$2x_1$ $+x_2$ $+2x_3$ ≤ 8**	**x_1 $+x_2$ $+0x_3$ ≤ 9**

Продолжение табл.9.7.

Вариант 4				*Вариант 5*			*Вариант 6*	
Z	$x_1 \; +5x_2 \; +3x_3$ ->	max		Z= $2x_1 \; +4x_2-4x_3$ -> max			Z= $2x_1 \; +5x_2 \; +2x_3$ ->	max
	$x_1 \; + \; x_2 \; +0x_3 \; =$	11		$2x_1 \; + x_2+2x_3 \; = \; 8$			$x_1 \; +0x_2 \; + \; x_3 \; \geq$	10
	$x_1 \; +0x_2 \; + \; x_3 \; \leq$	8		$2x_1 \; +0x_2+ x_3 \; \leq \; 10$			$x_1 \; +2x_2 \; + \; x_3 \; =$	16
	$0x_1 \; +2x_2 \; + \; x_3 \; \leq$	10		$4x_1 \; +3x_2+ x_3 \; \leq \; 11$			$2x_1 \; +3x_2 \; - 4x_3 \; \leq$	13

Практическое занятие 10

Оптимизация УР об использовании ресурсов алгоритмом Гомори

Постановка задачи

Дробный оптимальный план (9.6) надо преобразовать в целочисленный.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. В столбце a_{i0}, ищем первое дробное a(1,1)=1.84. Преобразуем строку i=1, вычитая из исходного ближайшее целое число, стоящее слева на оси чисел:

Св.член $\quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4$

1.84-1=0.84; 1-1=0; 0-0=0; 0-0=0; -0.08-(-1)=0.92.

Шаг 2. Формируем неравенство $0.92x_4 - 0.84 \geq 0$. (10.1)

Умножаем (10.1) на -1 $-0.92x_4 + 0.84 \leq 0$. (10.2)

Вводим $x5 \geq 0$ $-0.92x_4+0.84+x_5=0$. (10.3)

Переносим вправо $0.84 -0.92x_4 + x_5=-0.84$. (10.4)

Включаем (10.4) в табл.10.1. Так как $a_{4,0}$=-0.84, используем двойственный симплекс-метод. Опорная строка i=4. Опорный элемент $a_{4,4}$<0=-0.92.

Таблица 10.1.

Ввод дополнительного ограничения

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1.84	1	0	0	-0.08	0.00
x_3	4.95	0	0	1	-0.03	0.00
x_2	5.32	0	1	0	0.16	0.00
x_5	**-0.84**	0	0	0	**-0.92**	1.00
Z	64.89	0	0	0	0.45	0.00

Шаг 3. Процедура Жордана-Гаусса вновь дала дробный оптимальный план.

Таблица 10.2.

Дробный оптимальный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1.91	1	0	0	0	-0.09
x_3	4.97	0	0	1	0	-0.03
x_2	5.17	0	1	0	0	0.17
x_5	0.91	0	0	0	1	-1.09
Z	64.89	0	0	0	0	0.00

Шаг 4. Вводим дополнительное ограничение (табл.10.3).

Таблица 10.3.

Целочисленная оптимизация задачи ЛП

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Итерация	x_1	1.91	1	0	0	0	-0.09	0
	x_3	4.97	0	0	1	0	-0.03	0
	x_2	5.17	0	1	0	0	0.17	0
	x_4	0.91	0	0	0	1	-1.09	0
	x_6	**-0.91**	0	0	0	0	**-0.91**	1
	Z	64.89	0	0	0	0	0.00	0

Продолжение табл.10.3								
Целочисленный оптимальный план	x_1	2.00	1	0	0	0	0	-0.09
	x_3	5.00	0	0	1	0	0	-0.03
	x_2	5.00	0	1	0	0	0	0.19
	x_4	2.00	0	0	0	1	0	-1.19
	x_6	1.00	0	0	0	0	1	-1.09
	Z	64.00	0	0	0	0	0	0.53

$Zopt^*$=64 при x^*_1=2; x_2^*=5; x_3^*=5; x_4^*=2; x_5^*=1; x_6^*=0.В табл.10.4 все x_i>0.

Таблица 10.4.

Исходные данные вариантов задачи 10

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
Z $1x_1$ $+3x_2$ $+2x_3$ -> max	**Z $2x_1$ $+3x_2$ $+3x_3$ -> max**	**Z $2x_1$ $+4x_2$ $+3x_3$ -> max**
$2x_1$ $+2x_2$ $+1x_3$ = 5;	**$2x_1$ $+1x_2$ $+1x_3$ = 6;**	**$3x_1$ $+1x_2$ $+1x_3$ = 9;**
$2x_1$ $+0x_2$ $+2x_3$ ≤ 8;	**$1x_1$ $+3x_2$ $+1x_3$ ≤ 11;**	**$2x_1$ $+4x_2$ $+1x_3$ ≤ 11;**
$1x_1$ $+3x_2$ $+4x_3$ ≤ 12;	**$2x_1$ $+1x_2$ $+2x_3$ ≤ 8;**	**$1x_1$ $+1x_2$ $+0x_3$ ≤ 9;**
Вариант 4	***Вариант 5***	***Вариант 6***
Z $1x_1$ $+5x_2$ $+3x_3$ -> max	**Z $2x_1$ $+4x_2$ $-4x_3$ -> max**	**Z $2x_1$ $+5x_2$ $+2x_3$ -> max**
$1x_1$ $+1x_2$ $+0x_3$ = 11;	**$2x_1$ $+1x_2$ $+2x_3$ = 8;**	**$1x_1$ $+0x_2$ $+1x_3$ ≥ 10;**
$1x_1$ $+0x_2$ $+1x_3$ ≤ 8;	**$2x_1$ $+0x_2$ $+1x_3$ ≤ 10;**	**$1x_1$ $+2x_2$ $+1x_3$ = 16;**
$0x_1$ $+2x_2$ $+1x_3$ ≤ 10;	**$4x_1$ $+3x_2$ $+1x_3$ ≤ 11;**	**$2x_1$ $+3x_2$ $-4x_3$ ≤ 13 ;**

Практическое занятие 11

Расстановка парка ВС по критерию min себестоимости перевозок

Постановка задачи

АК летает по m ВЛ на n типах ВС. ***Известны:*** c_{ij} - расходы на 1 ткм на i-м типе ВС по j-й ВЛ (руб./ткм.); a_i - потенциал i-го типа ВС (млн.ткм./год); b_j - прогноз спроса по j-й ВЛ (млн.ткм.).

Таблица 11.1.

Исходные данные примера 11

Типы ВС	***Воздушные линии***						***a_i***
1	c_{ij} =14	9	8	7	12	14	**31**
2	6	13	11	9	14	9	**36**
3	10	8	13	14	11	11	**32**
4	10	10	6	8	14	6	**24**
b_j	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	123

Надо найти x_{ij} (i=1,n;j=1,m;) - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ (млн.ткм), дащие min расходы $C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \to \min / ден.ед./ (i=1,n;\ j=1,m;)$ (11.1)

при 1. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$ (11.2) 2. $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (11.3) 3. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ (11.4) 4. $x_{ij} \ge 0.$ (11.5)

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Проверяем выполнение условия (11.4). Поскольку $\sum a_i = \sum b_j$ =123 - задача "закрытая" и можно строить опорный план.

Шаг 2. Строим опорный план методом ***минимальной стоимости***. В ***строке 1 ищем клетку с min $c_{i=1\ j=4}$*** =7 и пишем в нее max ***$x_{i=1\ j=4}$=22***, остаток a_i=31-22=9 пишем в клетку с min ***$c_{i=1\ j=}$*** =8→***$x_{i=1\ j=3}$*** =9. ***В строке 2***, находим min

$c_{i=2\ j=1}$=6 и из a2=36 и b1=22 пишем $\boldsymbol{x_{i=2\ j=1}=22}$. Остаток $a_{i=2}$=36-22=14 пишем в клетку с min $\boldsymbol{c_{i=2\ j=6}=9}$ $\boldsymbol{x_{i=2\ j=6}=14}$. В ***строке 3***, находим min $c_{i=3\ j=2}$=8 и исходя из a3=32 и b_2=23 пишем $\boldsymbol{x_{i=3\ j=2}=23}$. Остаток $a_{i=3}$=32-23=9 пишем в клетку с min $\boldsymbol{c_{i=3\ j=6}=11}$ $\boldsymbol{x_{i=3\ j=6}=9}$. ***В строке 4***, находим min $c_{i=4\ j=3}$=6 и исходя из a_4=24 и b_3=17 и $\boldsymbol{x_{i=1\ j=3}}$ =9 пишем $\boldsymbol{x_{i=4\ j=3}=8}$. Остаток $a_{i=4}$=24-8=16 пишем в клетку с min $\boldsymbol{c_{i=4\ j=6}=6}$ ***исходя из*** b_3=***24***, $\boldsymbol{x_{i=2\ j=6}=14}$, $\boldsymbol{x_{i=3\ j=6}=9}$, ***ищем*** $\boldsymbol{x_{i=4\ j=6}=1}$. Остаток $a_{i=4}$=15 пишем в $\boldsymbol{x_{i=4\ j=5}=15}$.

Таблица 11.2.

Опорный план

Типы ВС	***Воздушные линии***						a_i	K_i
1	14	9	8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12	14	**33**	9*8+22*7= ***226***
2	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14	9 $x_{26}=14$	**36**	22*6+14*9= ***258***
3	10	8 $x_{32}=23$	13	14	11	11 $x_{36}=9$	**32**	23*8+9*11= ***283***
4	10	10	6 $x_{43}=8$	8	14 $x_{45}=15$	6 $x_{46}=1$	**24**	8*6*15*14+1*6 ***264***
b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**	1031

Шаг 3. Вычисляем критерий *опорного плана.*

$$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}=8*9+7*22+6*22+9*14+8*23+11*9+6*8+14*15+6*1=1031$$

План оптимален при: ***1)*** $\boldsymbol{u_i+v_j=c_{ij}}$; *для "занятых" клеток* (11.6)

2) $\boldsymbol{u_i+v_j\le c_{ij}}$ *- для "незанятых" клеток* (11.7)

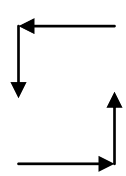
где $U=(u_1, ..., u_n)$ - потенциалы столбцов; $V=(v_1,..., v_m)$ - потенциалы строк.

Шаг 4. Строим систему потенциалов S_{UV} = (U,V) *по занятым клеткам с* (x_{ij}>0), *исходя из* условия (11.6). Вводим в табл. 11.3 столбец u_i и строку v_j. Находим строку с max числом "занятых" клеток (x_{ij}>0) и задаем u_4=0. Из (11.6) и u_4=0 находим $\boldsymbol{v_{i3}=6; v_{i5}=14; v_{i6}=6}$. Из $\boldsymbol{v_{i3}=6}$ и $\boldsymbol{c_{13}=8}$ находим $\boldsymbol{u_{i1}=2}$. Зная $\boldsymbol{u_{i1}=2}$ и $\boldsymbol{c_{14}=7}$, находим $\boldsymbol{v_{i4}=5}$. Из $\boldsymbol{v_{i6}=6}$ $\boldsymbol{c_{26}=9}$ находим $\boldsymbol{u_{i2}=3}$, так как $\boldsymbol{(u_{i2}=3)+(v_{i6}=6)=(c_{26}=9)}$. Из $\boldsymbol{v_{i6}=6}$ $\boldsymbol{c_{36}=11}$ находим $\boldsymbol{u_{i3}=5}$, Из $\boldsymbol{u_{i2}=3}$ ***и*** $\boldsymbol{c_{21}=6}$ находим $\boldsymbol{v_{i1}=3}$, так как $\boldsymbol{(u_{i2}=3)+(v_{i1}=3)=(c_{21}=6)}$. Из $\boldsymbol{u_{i3}=5}$ и $\boldsymbol{c_{32}=8}$ находим $\boldsymbol{v_{i2}=3}$, так как $\boldsymbol{(u_{i3}=5)+(v_{i3}=3)=(c_{32}=8)}$.

Таблица 11.3.

Построение системы потенциалов (итерация 1)

Типы ВС		$v_{i1}=6$	$v_{i2}=8$	$v_{i3}=6$	$v_{i4}=5$	$v_{i5}=14$	$v_{i6}=6$	a_i
1	$u_{i1}=2$	14	9 $\delta_{12}=1$	8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12 $\delta_{15}=2$	14	**33**
2	$u_{i2}=3$	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14 $\delta_{25}=3$	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=5$	10 $\delta_{31}=1$	8 $x_{32}=23$	13	14	(+) 11 $\delta_{35}=8$	(-) 11 $x_{36}=9$	**32**
4	$u_{i4}=0$	10	10	6 $x_{43}=8$	8	(-) 14 $x_{45}=15$	(+) 6 $x_{46}=1$	**24**
	b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**



Строим *по занятым клеткам* ***систему потенциалов***, выполняя условия *(11.6)*. План оптимален, если в незанятых клетках выполняется условие (11.7).

Шаг 5. Проверяем условие (11.7). При невыполнении условия в клетку пишем $\delta_{ij}=\{(u_i+v_j)-c_{ij}\}$. Находим max δ_{15}***=8 и помечаем эту клетку знаком (+).***

Шаг 6. Строим замкнутый контур от клетки (+), поворачивая в занятых клетках на 90^0, стремясь вернутся в ***(+)***. ***Помечаем вершины { (-); (+); (-); (+)}.***

Шаг 7. Находим на вершинах *(-)* $\Delta=min\ x_{ij}=9$. Вычитаем Δ из x_{ij} в клетках (-) и прибавляем к x_{ij} на вершинах (+). Повторяем шаги 4-6, до тех пор, пока (11.6) и (11.7) не будут выполнены. Результаты в табл.11.4.

Таблица 11.4.

План после изменения x_{ij} на **вершинах контура**

Типы ВС		$v_{i1}=6$	$v_{i2}=8$	$v_{i3}=6$	$v_{i4}=5$	$v_{i5}=14$	$v_{i6}=6$	a_i
1	$u_{i1}=2$	14	9 $\delta_{12}=1$	8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12 $\delta_{15}=4$	14	**33**
2	$u_{i2}=3$	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14 $\delta_{25}=3$	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=5$	10 $\delta_{31}=1$	8 $x_{32}=23$	13	14	11 $x_{35}=9$	11	**32**
4	$u_{i4}=0$	10	10	6 $x_{43}=8$	8	14 $x_{45}=6$	6 $x_{46}=10$	**24**
b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**	b_i

В табл.11.5 находим на вершинах (-) $\Delta=\min x_{45}=6$. Вычитаем Δ на вершинах с (-) и прибавляем на вершинах с (+). В табл.11.6 оптимальный план.

Таблица 11.5.

Оптимизация плана (итерация 2)

Типы ВС		$v_{i1}=3$	$v_{i2}=11$	$v_{i3}=6$	$v_{i4}=5$	$v_{i5}=14$	$v_{i6}=6$	a_i
1	$u_{i1}=2$	14	(+) 9 $\delta_{12}=4$	(-) 8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12 $\delta_{15}=4$	14	**33**
2	$u_{i2}=3$	6 $x_{21}=22$	13 $\delta_{22}=1$	11	9	14 $\delta_{25}=3$	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=-3$	10	(-) 8 $x_{32}=23$	13	14	(+) 11 $x_{35}=9$	11	**32**
4	$u_{i4}=0$	10	10 $\delta_{42}=1$	(+) 6 $x_{43}=8$	8	(-) 14 $x_{45}=6$	6 $x_{46}=10$	**24**
	b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**

Таблица 11.6.

Оптимальный план (1)

Типы ВС		$v_{i1}=5$	$v_{i2}=9$	$v_{i3}=8$	$v_{i4}=7$	$v_{i5}=12$	$v_{i6}=8$	a_i
1	$u_{i1}=0$	14	9 $x_{13}=6$	8 $x_{13}=3$	7 $x_{14}=22$	12	14	**33**
2	$u_{i2}=1$	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=-1$	10	8 $x_{32}=17$	13	14	11 $x_{35}=15$	11	**32**
4	$u_{i4}=-2$	10	10	6 $x_{43}=14$	8	14	6 $x_{46}=10$	**24**
	b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**

2-й оптимальный план в табл.11.7. У обеих планов С=935 ден.ед.

Таблица 11.7.

Оптимальный план (2)

Типы ВС		$v_{i1}=5$	$v_{i2}=9$	$v_{i3}=8$	$v_{i4}=7$	$v_{i5}=12$	$v_{i6}=8$	a_i
1	$u_{i1}=0$	14	9	8 $x_{13}=3$	7 $x_{14}=22$	12 $x_{15}=6$	14	**33**
2	$u_{i2}=1$	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=-1$	10	8 $x_{32}=23$	13	14	11 $x_{35}=9$	11	**32**
4	$u_{i4}=-2$	10	10	6 $x_{43}=14$	8	14	6 $x_{46}=10$	**24**
	b_j	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**

Таблица 11.8.

Исходные данные вариантов задачи 11

Вариант 1								*Вариант 2*								*Вариант 3*						
5	8	5	4	10	7	24		14	3	11	8	13	7	36		13	8	10	14	8	8	32
13	12	14	13	3	9	28		10	10	7	5	13	13	39		8	12	13	6	8	9	28
8	3	12	4	9	14	39		12	5	3	5	6	5	27		12	6	4	9	5	10	38
12	8	7	6	11	13	31		9	10	12	14	7	5	23		7	4	11	5	11	12	30
21	22	21	23	23	17			18	17	18	24	17	26			25	29	23	15	20	21	
Вариант 4								*Вариант 5*								*Вариант 6*						
3	3	14	4	9	8	27		14	11	3	10	12	5	37		5	9	4	11	8	8	28
13	9	10	6	12	3	30		7	7	4	12	4	3	38		13	6	11	3	14	8	36
7	5	11	9	5	7	33		6	6	11	11	6	13	28		9	9	14	13	8	7	28
13	5	6	11	9	14	26		10	8	11	9	4	9	27		9	13	10	9	11	11	31
26	22	18	21	19	15			21	25	23	18	15	23			13	25	24	18	14	34	

Практическое занятие 12
Расстановка парка ВС на сети ВЛ с запретными аэропортами
Постановка задачи

АК летает по m ВЛ на n типах ВС. ***Известны :*** c_{ij} - расходы на 1 ткм на i-м типе ВС по j-й ВЛ (руб./ткм.); a_i - потенциал i-го типа ВС (млн.ткм.); b_j- прогноз спроса по j-й ВЛ (млн.ткм.). ВЛ, на которых нельзя использовать i-й тип c_{ij}=100.

Таблица.12.1.

Исходные данные примера

Типы ВС	*Воздушные линии*						a_i
	1	2	3	4	5	6	
1	c_{ij} =1	9	10	3	8	1	**40**
2	3	1	100	4	6	1	**30**
3	9	5	1	6	1	3	**40**
4	3	100	3	1	100	1	**40**
b_j	20	20	40	20	20	20	140/150

Надо найти x_{ij} (i=1,n;j=1,m;) - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ, дающие min расходы $$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j-1}^{m}C_{ij}X_{ij}\to\min,\ (i=1,n;\ j=1,m)\qquad(12.1)$$

при : 1. $\sum x_{ij}=a_i$; 2. $\sum x_{ij}=b_j$; 3. $\sum a_i=\sum b_j$; 4. $x_{ij}>=0$; (12.2)

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Преобразуем "открытую" задачу *в "закрытую"*, вводя столбец с $b_{доп}$=10 (табл.12.2) и уравнивая суммы a_i и b_j.

Таблица.12.2.

Преобразование "открытой" задачи в "закрытую"

Типы ВС	***Воздушные линии***							$\boldsymbol{a_i}$
	0	1	2	3	4	5	6	
1	0	c_{ij} =1	9	10	3	8	1	**40**
2	0	3	1	***100***	4	6	1	**30**
3	0	9	5	1	6	1	3	**40**
4	0	3	***100***	3	1	***100***	1	**40**
$\boldsymbol{b_j}$	***10***	20	20	40	20	20	20	140/150

Шаг 2. В табл.12.2 ищем min c_{ij} в строке с max "запретных" клеток c_{ij}=100

Задаем max x_{40}=10. Остаток пишем в клетку с min c_{ij}: x_{44}=20 и x_{46}=10. Сумма x_{ij} 4-й строки $\sum x_{ij}$=10+20+10=40=a_4. Клетки x_{ij}>0 называются "занятыми", а клетки x_{ij}=0 - "незанятыми".

Шаг 3. Ищем строку с "запретными" клетками и записываем в клетку с c_{21}min=1 max x_{22}=20, а также x_{26}=10 Сумма x_{ij} во 2-й строке равна a_2=30.

Таблица.12.3.

Построение опорного плана

Тип	0	1	2	3	4	5	6	$\boldsymbol{a_i}$
1	0	1	9	10	3	8	1	**40**
2	0	2	1 x_{22}=**20**	***100***	4	6	***1*** x_{26}=**10**	**30**
3	0	9	5	1	6	1	***3***	**40**
4	c_{40}=***0*** x_{40}=**10**	3	***100***	3	***1*** x_{44}=**20**	***100***	***1*** x_{46}=**10**	**40**
$\boldsymbol{b_j}$	**10**	**20**	**20**	**40**	**20**	**20**	**20**	

Шаг 4. Переходим на первую строку*, находим клетку c_{ij}min=1* и пишем в неё max x_{11}=20, так как строк с "запретными" клетками больше нет.

Остаток 20 записываем в клетку с c_{ij}min =8 - x_{15}=20. Сумма x_{ij} 1-й строки равна a_1=40.

Шаг 5. Записываем в клетку *с c_{ij}min=1 max x_{33}=40,* заполняя 3-ю строку.

Шаг 6. Вычисляем критерий *опорного плана*

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = 1*20 + 8*20 + 1*20 + 1*10 + 1*40 + 0*10 + 1*20 + 1*20 = 290 \text{ } руб.$$

***План оптимален при*:**

1)$u_i + v_j = c_{ij}$; - для "занятых" клеток; (12.3)

2) $u_i + v_j \le c_{ij}$ - для "незанятых" клеток; (12.4)

где $U=(u_1, ..., u_n)$ - потенциалы столбцов;

$V=(v_1,..., v_m)$ - потенциалы строк.

Таблица.12.4.

Построение опорного плана

Тип	0	1	2	3	4	5	6	a_i
1	0	1 x_{11}=**20**	9	10	3	8 x_{15}=**20**	1	**40**
2	0	2	1 x_{22}=**20**	***100***	4	6	1 x_{26}=**10**	**30**
3	0	9	***5***	1 x_{33}=**40**	6	1	3	**40**
4	0 x_{40}=**10**	3	***100***	3	1 x_{44}=**20**	***100***	1 x_{46}=**10**	**40**
b_i	**10**	**20**	**20**	**40**	**20**	**20**	**20**	

Шаг 7. Строим систему потенциалов S_{UV} = (U,V). Находим строку с max числом "занятых" клеток (x_{ij}>0) и задаем u_4=0. По (12.3) находим $v_0=c_{40}-u_4=0-0=0$; $v_4= c_{44}-u_4=1-0=1$; $v_6=c_{46}-u_4=1-0=1$.

Шаг 8. Продолжаем цепочку потенциалов, используя потенциалы и (6.3), из $u_2+v_6=c_{26}$ $u_2=c_{26}-v_6=1-1=0$, а из $u_2+v_2=c_{22}$ $v_2=c_{22}-u_2=1-0=1$.

Шаг 9. Вводим (m+n-1)-$n_з$=2 *фиктивно занятые клетки*, поскольку расчеты прервались ("занятых" клеток $n_з$=8 меньше, чем m+n-1=4+7-1=10):

а) помечаем & и зачеркиваем столбцы с потенциалом и строки без него;

б) на пересечениях &-линий ищем клетку с c_{ij}=min;

в) считаем клетку (1,0) фиктивно-занятой и x_{10}=0.

Шаг 10. Продолжаем строить систему потенциалов (табл.12.6):

Таблица.12.5.

Построение системы потенциалов (шаги 7а,7б и 7в)

		v_0=0	***v_1=***	***v_2 = 1***	***v_3=***	***v_4=1***	***v_5=***	***v_6=1***	a_i
1	***U_1=***	0	1 x_{11}=**20**	9	10	3	8 x_{15}=**20**	1	**40**
2	***u_2=0***	0	2	1 x_{22}=**20**	***100***	4	6	1 x_{26}=**10**	**30**
3	***u_3=***	0	9	***5***	1 x_{33}=**40**	6	1	3	**40**
4	***u_4=0***	0 x_{40}=**10**	3	***100***	3	1 x_{44}=**20**	***100***	1 x_{46}=**10**	**40**
b_i		**10**	**20**	**20**	**40**	**20**	**20**	**20**	

$v_0+u_1=c_{10}$; $u_1=c_{10}-v_0=0-0=0$; $u_1+v_1=c_{11}$;$v_1=c_{11}-u_1=1-0=1$; $u_1+v_5=c_{15}$; $v_5=c_{15}-u_1=8-0=8$.

Таблица.12.6.

Ввод фиктивно-занятой клетки

		& *v_0=0*	***v_1=1***	**& *v_2 = 1***	***v_3=***	**& *v_4=1***	***v_5=8***	**& *v_6=1***	***a_i***
1&	***u_1=0***	0 x_{10}=**0**	1 x_{11}=**20**	9	10	3	8 x_{15}=**20**	1	40
2	***u_2=0***	0	2	1 x_{22}=**20**	***100***	4	6	1 x_{26}=**10**	30
3&	***u_3=***	0	9	***5***	1 x_{33}=**40**	6	1	3	40
4	***u_4=0***	0 x_{40}=**10**	*3*	***100***	3 x_{43}=**0**	1 x_{44}=**20**	***100***	1 x_{46}=**10**	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

Расчеты прервались. Надо ввести ещё одну "фиктивно-занятую" клетку

***Шаг 11. Помечаем (&) и** зачеркиваем строки с u_i и столбцы без v_j.* Пишем в зачеркнутую клетку с min c_{ij} x_{43}=0. табл.12.6.

Таблица. 12.7.

Построение замкнутого контура

		v_1=0	v_2=1	v_3 =1	v_4=3	v_5=1	v_6=8	v_7=1	a_i
1	u_1=0	(+) 0 x_{10}=**0**	1 x_{11}=**20**	9	10	3	(-)8 x_{15}=**20**	1	40
2	u_2=0	0	2	1 x_{22}=**20**	100	4	6 δ =2	1 x_{26}=**10**	30
3	u_3=-2	0	9	5	(-) 1 x_{33}=**40**	6	(+)1 **δ =5**	3	40
4	u_4=0	(-) 0 x_{40}=**10**	3	100	(+) 3 x_{43}=**0**	1 x_{44}=**20**	***100***	1 x_{46}=**10**	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

Шаг 12. Продолжаем систему потенциалов:

из $u_4+v_3=c_{43}$ $v_3=c_{43}-u_4=3$, из $u_3+v_3=c_{33}$ $u_3=c_{33}-v_3=1-3=-2$.

Шаг 13. Отмечаем незанятые клетки с $u_i+v_j>c_{ij}$. В табл. 12.7 $\delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$.
Критерий C=1*20+8*10+1*20+1*10+1*30+1*10+3*10+1*20+1*10=**230**.

Шаг 14. Помечаем клетку с δ_{ij} max=5 (+). Строим из нее контур, двигаясь по занятым клеткам и поворачивая в них на 90^o, вплоть до клетки (δ=5).

Шаг 15. Помечаем вершины контура (-),(+). В (+) добавляем, а в (-) вычитаем min x_{ij}={20,10,40}=10, из стоящих на вершинах (-).

Таблица.12.8.

Оптимизация плана (Итерация 2)

		v_1=-5	v_2=-4	v_3 =1	v_4=3	v_5=1	v_6=3	v_7=1	a_i
1	**u1=5**	0 x_{10}=**10**	1 x_{11}=**20**	9	10	3	(-)8 x_{15}=**10**	(+)1 **δ =5**	40
2	**u2=0**	0	2	1 x_{23}=**20**	***100***	4	6	1 x_{26}=**10**	30
3	**u3=-2**	0	9	5	(-) 1 x_{33}=**30**	6	(+) 1 x_{35}=**10**	3	40
4	**u4=0**	0	3	***100***	(+)3 x_{43}=**10**	1 x_{44}=**20**	***100***	(-)1 x_{46}=**10**	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

Шаг 16. Вводим u4=0 и строим систему потенциалов.

Шаг 17. План не оптимален, так как (12.3) в клетке (δ=5) не выполнено.

Шаг 18. Находим потенциалы, клетку (3,6) с δ=5 max. Строим из клетки (3,6) контур, маркируем вершины, ищем на вершинах с (-) x_{ijmin}=10, вычитаем x_{ijmin} в (-) и прибавляем в (+). План табл.12.9 оптимален. Критерий К = **180**.

Таблица.12.9.

Оптимальный план

		v_1=-0	v_2=1	v_3 =1	v_4=5	v_5=3	v_6=5	v_7=1	a_i
1	u_1=0	0 x_{10}=10	1 x_{11}=20	9	10	3	8	1 x_{16}=10	40
2	u_2=0	0	2	1 x_{22}=20	100	4	6	1 x_{26}=10	30
3	u_3=-4	0	9	5	1 x_{33}=20	6	1 x_{35}=20	3	40
4	u_4=-2	0	3	100	3 x_{43}=20	1 x_{44}=20	100	1	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

Таблица 12.10.

Исходные данные вариантов задачи 12

Вариант 1							***Вариант 2***							***Вариант 3***						
2	9	10	3	8	1	45	1	9	10	3	8	1	40	1	9	10	3	8	1	40
2	7	100	4	6	4	35	2	1	100	4	6	1	30	2	7	100	4	6	1	30
9	5	2	6	2	3	40	9	5	1	6	1	3	30	9	1	1	6	1	3	40
3	100	3	3	100	1	30	3	100	3	1	100	1	30	3	100	3	1	100	1	40
20	10	50	20	20	20		20	20	40	20	30	20		20	20	40	20	20	20	
Вариант							***Вариант 5***							***Вариант 6***						
3	9	10	3	5	4	40	3	9	10	3	5	4	45	5	9	10	4	7	8	42
2	7	100	4	4	3	40	2	7	100	4	4	3	44	4	7	100	3	5	5	43
1	1	1	6	2	2	40	1	1	1	6	2	2	45	3	1	1	6	1	3	44
3	100	3	1	100	1	30	3	100	3	1	100	1	36	2	100	3	1	100	1	35
20	30	40	20	30	20		23	20	44	20	35	26		24	20	43	20	34	25	

Практическое занятие 13

Расстановка парка ВС по критерию max прибыли

Постановка задачи

АК летает по m ВЛ на n типах ВС. ***Известны*** : 1) c_{ij} - расходы на 1 ткм на i-м типе ВС по j-й ВЛ (руб./ткм.); 2) a_i - потенциал i-го типа ВС (млн.ткм.); 3) b_j - прогноз спроса по j-й ВЛ (млн.ткм.). Исходные данные примера в табл.13.1.

Таблица.13.1.

Исходные данные примера задачи 13

Типы ВС	***Воздушные линии***						
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	a_i
1	12	2	-6	8	-5	5	***25***
2	4	-5	5	-4	5	-4	***27***
3	-5	3	-5	8	-3	-6	***27***
4	-7	4	1	1	-4	1	***30***
b_i	***16***	***13***	***13***	***12***	***14***	***36***	***104/109***

Надо оценить x_{ij}(i=1,n;j=1,m;) - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ (млн.ткм) , дающие $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \to \max$ или $-\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} - p_{ij}x_{ij} \to \min$ /ден.ед/, (13.1)

при ограничениях: 1. $\sum_{i=1} x_{ij}=a_i$; 2. $\sum_{j=1} x_{ij}=b_j$; 3. $\sum_{i=1} a_i= \sum_{j=1} b_j$; 4. $x_{ij}>=0$; (13.2)

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Преобразуем "открытую" задачу в "закрытую" - вводим столбец с $b_{доп}$ =5 (табл.13.2), уравнивая суммы a_i и b_j.

Таблица.13.2.

Преобразование «открытой» задачи в «закрытую»

Типы ВС	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	a_i
1	12	2	-6	8	-5	5	*0*	***25***
2	4	-5	5	-4	5	-4	*0*	***27***
3	-5	3	-5	8	-3	-6	*0*	***27***
4	-7	4	1	1	-4	1	*0*	***30***
b_i	***16***	***13***	***13***	***12***	***14***	***36***	***5***	***109/109***

Шаг 2. **Строим опорный план** *методом минимальной стоимости.*

Таблица.13.3.

Опорный план

		v_{i1}=-7	v_{i2}=-9	v_{i3}=-5	v_{i4}=1	v_{i5}=-4	v_{i6}=-8	v_{i7}=0	
Типы ВС		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	a_i
1	u_{i1}=-1	12	2	-6 ***13***	8	-5 ***12***	5	*0*	***25***
2	u_{i2}=4	4	-5 ***13***	5	(+)-4 δ_{24}=9	5	(-) -4 ***14***	*0* δ_{27}=1	***27***
3	u_{i3}=2	(-) -5 ***5***	3	-5 δ_{31}=2	8	-3 δ_{35}=1	(+)-6 ***22***	*0* δ_{37}=2	***27***
4	u_{i4}=0	((+)-7 ***11***	4	1	(-) 1 ***12***	-4 ***2***	1	*0* ***5***	***30***
b_i		***16***	***13***	***13***	***12***	***14***	***36***	***5***	***109***

При невыполнении (12.4) в клетку пишем $\delta_{ij}=\{(u_i+v_j)-c_{ij}\}$. Находим клетку с max δ_{24}***=9 и помечаем ее знаком (+). Маркируем вершины контура.***

Находим min x_{ij} на вершинах, помеченных (-). Δ=min x_{ij}=5. Отнимаем Δ из x_{ij} на вершинах (-) и прибавляем к x_{ij} на вершинах со знаком (+).

Шаг 4. Строим систему потенциалов *и проверяем выполнение условий* 12.3-12.4. Условия оптимальности выполнены и план табл.13.4 оптимален.

Таблица.13.4.

Оптимальный план (1)

		v_{i1}=-7	v_{i2}=0	v_{i3}=-5	v_{i4}=1	v_{i5}=-4	v_{i6}=1	v_{i7}=0	
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	a_i
1	u_{i1}=-1	12	2	-6 ***13***	8	-5 ***12***	5	*0*	***25***
2	u_{i2}=-5	4	-5 ***13***	5	-4 ***5***	5	-4 ***9***	*0*	***27***
3	u_{i3}=-7	-5	3	-5	8	-3	-6 ***27***	*0*	***27***
4	u_{i4}=0	-7 ***16***	4	1	1 ***7***	-4 ***2***	1	*0* ***5***	***30***
		16	***13***	***13***	***12***	***14***	***36***	***5***	

Для оценки max прибыли умножаем ответ на минус 1. Задача имеет еще один оптимальный план (табл.13.4). Критерий планов равен – Р=-534 ден.ед.

Таблица.13.4.

Оптимальный план (2)

		v_{i1}=-7	v_{i2}=0	v_{i3}=-5	v_{i4}=1	v_{i5}=-4	v_{i6}=1	v_{i7}=0	
Типы ВС		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	a_i
1	u_{i1}=-1	12	2	−6 **13**	8	−5 **12**	5	0	**25**
2	u_{i2}=-5	4	−5 **13**	5	−4 **12**	5	−4 **2**	0	**27**
3	u_{i3}=-7	−5	3	−5	8	−3	−6 **27**	0	**27**
4	u_{i4}=0	−7 **16**	4	1	1	−4 **2**	1 **7**	0 **5**	**30**
b_i		**16**	**13**	**13**	**12**	**14**	**36**	**5**	**109**

Таблица 13.11.

Исходные данные вариантов задачи 13

Вариант 1							***Вариант 2***							***Вариант 3***						
-5	-8	-5	4	-10	7	34	3	-3	-1	3	7	3	34	-7	7	-6	10	-9	8	28
13	-2	-7	-8	3	-9	38	-2	-5	12	-1	-1	-4	26	3	3	3	-5	7	-8	36
-8	7	-9	4	-9	-9	29	3	7	4	3	4	-1	32	-7	-2	-2	3	-4	3	33
-2	-8	7	-8	-3	-3	31	-8	-8	-1	-7	-9	8	34	-9	-5	7	-2	6	-3	32
23	22	24	15	23	27		23	24	26	20	18	28		23	25	21	19	14	22	
Вариант 4							***Вариант 5***							***Вариант 6***						
-5	14	13	7	4	8	33	-8	6	6	11	-7	9	35	-8	-4	-2	-5	4	9	31
5	-6	-1	-4	-4	-5	31	-5	1	-5	-3	5	-9	28	14	2	-3	11	-3	-1	33
14	-3	4	-9	1	7	33	6	-7	4	-6	-5	9	35	3	12	5	-13	9	3	31
-9	-5	-1	3	-4	-7	29	-4	-3	14	6	10	-7	26	-4	-3	-4	-4	-3	-2	39
25	12	15	16	19	22		24	29	21	25	16	21		22	18	18	13	21	25	

Практическое занятие 14

Принятие УР "о назначениях" и оптимальном графике оборота ВС

Постановка задачи 14.1

АК выполняет n рейсов на n ВС. Задана матрица C={c_{ij}} себестоимостей j-го рейса на i-м ВС (i,j=1,n) (табл.14.1). Надо найти матрицу назначений X=x_{ij} n ВС на n рейсов, минимизируя

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (14.1)$$

при: 1) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$; (14.2) 2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$; (14.3) 3) x_{ij} =0 или 1; при i,j=1,n. (14.4)

Таблица 14.1.

Исходные данные задачи 14.1

ВС	*ВЛ1*	*ВЛ 2*	*ВЛ 3*	*ВЛ 4*	*m=5*
1	7	4	11	8	9
2	14	13	15	5	16
3	9	4	5	8	12
4	8	5	7	7	11
n=5	3	6	6	23	3

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Находим в каждой строке *min c_{ij} и вычитаем его из c_{ij} i-й строки.*

Шаг 2. Находим в каждом столбце *min c_{ij} и вычитаем его из c_{ij}.*

7	4	11	8	9	**4**
14	12	15	5	16	**5**
9	4	5	8	12	**4**
8	5	7	7	11	**5**
3	6	6	23	3	**3**
Шаг 1					

3	0	7	4	5
9	8	10	0	11
5	0	1	4	8
3	0	2	2	6
0	3	3	20	0
0	**0**	**1**	**0**	**0**
Шаг 2				

3	0	6	4	5
9	8	9	0	11
5	0	0	4	8
3	0	1	2	6
0	3	2	20	0
Матрица C_1 Шаг 3				

Рис.14.1. Построение опорного плана (Шаги 1-3)

В каждой строке и каждом столбце матрицы С должен быть 0 (рис.14.1).

Шаг 3. Идем сверху вниз *по строкам* матрицы C_1. Встретив в строке 0 без пометок, помечаем его знаком *, а остальные 0 вправо до конца строки и вниз до конца столбца помечаем ^. 0* называется *помеченным,*а 0^– *непомеченным*.

►	3	**0***	6	4	5
	9	8	9	0	11
	5	**0**^	0	4	8
	3	**0**^	1	2	6
1	0	3	2	20	0

	3	**0***	6	4	5
►	9	8	9	**0***	11
	5	**0**^	0	4	8
	3	**0**^	1	2	6
2	0	3	2	20	0

	3	**0***	6	4	5
	9	8	9	**0***	11
►	5	**0**^	**0***	4	8
	3	**0**^	1	2	6
3	0	3	2	20	0

	3	**0***	6	4	5
	9	8	9	**0***	11
	5	**0**^	**0***	4	8
5	3	**0**^	1	2	6
►	**0***	3	2	20	**0**^

Рис.14.2. Пометки 0* и 0^ (Шаг 4)

Шаг 4. Помечаем знаком # строки с 0^ (без 0*) (рис.14.3). В строках со знаком #, помечаем столбцы знаком # и строки, в которых стоят 0* (рис.14.3).

	3	**0***	6	4	5
	9	8	9	**0***	11
	5	**0**^	**0***	4	8
#	3	**0**^	1	2	6
	0*	3	2	20	**0**^

		#			
	3	**0***	6	4	5
	9	8	9	**0***	11
	5	**0**^	**0***	4	8
#	3	**0**^	1	2	6
	0*	3	2	20	**0**^

		#			
#	3	**0***	6	4	5
	9	8	9	**0***	11
	5	**0**^	**0***	4	8
#	3	**0**^	1	2	6
	0*	3	2	20	**0**^

Рис.14.3. Пометки строк и столбцов #

Шаг 5. Помечаем знаком & столбцы со знаком # и строки без знака #. ***Зачеркиваем*** *все нули min числом прямых линий* **(**рис.14.4).

Шаг 6. Ищем Δ=min не зачеркнутое c_{ij}. ***Вычитаем*** Δ *из не зачеркнутых* c_{ij}. ***Прибавляем*** Δ к зачеркнутым 2 раза c_{ij} (рис.14.4). Не меняем c_{ij} зачеркнутые 1 раз.

1		&#			
#	**3**	0	**6**	**4**	**5**
&	9	8	9	0	11
&	5	0	0	4	8
#	**3**	0	**Δ=1**	**2**	**6**
&	0	3	2	20	0
Зачеркиваем 0					

2				
2	0	**5**	**3**	**4**
9	8	9	0	11
5	0	0	4	8
2	0	0	1	5
0	3	2	20	0
Вычитаем Δ				

3				
2	0	**5**	**3**	**4**
9	9	9	0	11
5	1	0	4	8
2	0	0	1	5
0	4	2	20	0
Прибавляем Δ				

Рис.14.4. Зачеркивание строк и столбцов, изменение c_{ij}

Идем на Шаг 3 и, повторяя шаги 3–6, выполняем итерацию II. Помечаем 0* и 0^. Помечаем столбцы и строки #, столбцы и строки &,зачеркиваем 0,меняем план.

	1						**2**	#	#				**3**	#	#		
	2	0*	5	3	4		2	0*	5	3	4	#	2	0*	5	3	4
	9	9	9	0*	11		9	9	9	0*	11		9	9	9	0*	11
	5	1	0*	4	8		5	1	0*	4	8	#	5	1	0*	4	8
#	2	0^	0^	1	5	#	2	0^	0^	1	5	#	2	0^	0^	1	5
	0*	4	2	20	0^		0*	4	2	20	0^		0*	4	2	20	0^
4		&#	&#									6					
#	2	0*	5	3	4	5	1	0	5	2	3		1	0	5	2	3
&	9	9	9	0*	11		9	9	9	0	11		9	10	10	0	11
&	5	1	0*	4	8		4	1	0	3	7		4	1	0	3	7
#	2	0^	0^	Δ=1	5		1	0	0	0	4		1	0	0	0	4
&	0*	4	2	20	0^		0	4	2	20	0		0	5	3	20	0
	Зачеркиваем 0						Вычитаем Δ						Прибавляем Δ				

Рис.14.5. Итерация II

План рис.14.5 не оптимален. Идем на шаг 3 и выполняем итерацию III (рис.14.6)

						2		&#	&#	&#	3
1	0*	5	2	3		#	1	0*	5	2	11
9	10	10	0*	11		#	9	10	10	0*	7
4	1	0*	3	7		#	4	1	0*	3	4
1	0^	0^	0^	4		#	1	0^	0^	0^	3
0*	5	3	20	0^		&	0*	5	3	20	0
Δ=1	0*	5	2	11			0*	0^	5	2	10
9	10	10	0*	7			8	10	10	0*	6
4	1	0*	3	4			3	1	0*	3	3
1	0^	0^	0^	3			0^	0*	0^	0^	2
0*	5	3	20	0^			0^	6	4	21	0*

Рис.14.6. Итерация III

Шаг 9. Формируем матрицу назначений X, меняя 0* на 1 и 0^ на 0. Суммируем c_{ij} стоящие в клетках с 1 в X и находим оптимальный план и Z.

1	0	0	0	0		7	4	11	8	9
0	0	0	**1**	0		14	12	15	5	16
0	0	**1**	0	0		9	4	5	8	12
0	**1**	0	0	0		8	5	7	7	11
0	0	0	0	**1**		3	6	6	23	3

Рис.14.7. Оптимальный план **Z=7+5+5+5+3=25 .**

Постановка задачи 14.2.

Задано расписание полетов (табл.14.1). Надо сформировать оптимальный график оборота и найти min число ВС, необходимое для выполнения расписания. Время нахождения ВС на земле $T_{min} \le 1$ час. Число рейсов в сутки nr_{SU}=10.

Алгоритм решения задачи 14.2

Шаг 1. Находим T_{ij} нахождения ВС на земле *каждой пары рейсов.* ВС из А, улетающее в 10.00, сможет улететь из В рейсом 1 в 10.00 только через сутки через (24.00-12.00)+10.00=22 ч. Ищем T_{ij} для каждой пары рейсов.

Таблица 14.1.

Расписание полетов между А и В

Рейс	Вылет из А	Прилет в В	Рейс	Вылет из В	Прилет в А
1	10.00	12.00	11	10.00	12.00
2	11.00	13.00	12	13.00	15.00
3	13.00	15.00	13	20.00	22.00
4	15.00	17.00	14	21.00	23.00
5	21.00	23.00	15	22.00	24.00

Шаг 2. Решаем дважды задачу "о назначениях" *по правой и левой частям* табл.14.2. Цифры со знаком # - оптимальные x_{ij}. ∑T нахождения ВС на земле для левой матрицы Z=1+7+6+5+1=30,а для правой Z=12+12+13+3+6=46.

Таблица 14.2.

Т нахождения ВС на земле для любой пары рейсов

В Пр.\Уб.	11	12	13	14	15	А Пр./Уб.	1	2	3	4	5
11	22	**1**#	8	9	10	11	22	23	1	**3**#	9
2	21	24	**7**#	8	9	12	19	20	22	24	**6**#
3	19	22	5	**6**#	7	13	**12**#	13	15	17	23
4	17	20	3	4	**5**#	14	11	**12**#	14	16	22
5	**11**#	14	21	22	23	15	10	11	**3**#	15	21

Шаг 3. По матрицам назначений находим пары оптимально спариваемых рейсов: а) 1-12;2-13;3-14;4-15;5-11; в)11-4;12-5;13-1;14-2;15-3.

Таблица 14.3.

Результаты решения задачи "о назначениях"

В Пр.\Уб.	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***А Пр./Уб.***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
1	0	1	0	0	0	11	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	12	0	0	0	0	1
3	0	0	0	1	0	13	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	14	0	1	0	0	0
5	1	0	0	0	0	15	0	0	1	0	0

Шаг 4. Используя шага 3, находим цепочку (1) рейсов, дающую min сумму t нахождения каждого ВС на земле: 1-12-5-11-4-15- 3-14-2-13-1.

Шаг 5. ВС, вылетающее из А в понедельник в 9.00 выполнит все рейсы цепочки за 4 дня в четверг в 22.00. В пятницу ВС может начать новую цепочку.

Шаг 6. Определяем число ВС Nbc=Nr_{SU}*ntc/ Nr_{SU} =10*4/10 = 4 ВС.

Таблица 14.4.

Исходные данные вариантов задачи 14.1.

Вариант 1						***Вариант 2***						***Вариант 3***				
10	**5**	**9**	**18**	**11**		**23**	**24**	**5**	**15**	**10**		**21**	**22**	**3**	**19**	**10**
13	**19**	**6**	**12**	**4**		**22**	**23**	**4**	**18**	**19**		**20**	**21**	**2**	**18**	**19**
3	**2**	**4**	**4**	**5**		**17**	**18**	**23**	**3**	**4**		**15**	**16**	**21**	**3**	**4**
18	**9**	**12**	**17**	**15**		**11**	**12**	**17**	**21**	**22**		**11**	**12**	**17**	**23**	**23**
11	**6**	**14**	**19**	**10**		**23**	**24**	**5**	**15**	**10**		**10**	**11**	**16**	**22**	**23**
Вариант 4						***Вариант 5***						***Вариант 6***				
5	**6**	**11**	**9**	**11**		**12**	**3**	**11**	**15**	**21**		**7**	**5**	**12**	**9**	**3**
11	**7**	**3**	**10**	**3**		**11**	**13**	**3**	**10**	**3**		**10**	**4**	**6**	**3**	**17**
7	**11**	**11**	**8**	**9**		**7**	**11**	**15**	**15**	**10**		**7**	**2**	**13**	**6**	**6**

Таблица 14.5.

Исходные данные вариантов задачи 14.2.

Вариант 1						***Вариант 2***					
Рейс	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**
1	**8.00**	**11.00**	**11**	**8.00**	**11.00**	**1**	**8.00**	**11.00**	**11**	**8.00**	**11.00**
2	**9.00**	**12.00**	**12**	**17.00**	**20.00**	**2**	**10.00**	**13.00**	**12**	**9.00**	**12.00**
3	**11.00**	**14.00**	**13**	**18.00**	**21.00**	**3**	**15.00**	**18.00**	**13**	**14.00**	**17.00**
4	**19.00**	**22.00**	**14**	**19.00**	**22.00**	**4**	**19.00**	**22.00**	**14**	**20.00**	**23.00**
5	**20.00**	**23.00**	**15**	**20.00**	**23.00**	**5**	**20.00**	**23.00**	**15**	**21.00**	**24.00**
Вариант 3						***Вариант 4***					
Рейс	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**
1	**8.00**	**10.00**	**11**	**11.00**	**13.00**	**1**	**6.00**	**8.00**	**11**	**8.00**	**10.00**
2	**12.00**	**14.00**	**12**	**12.00**	**14.00**	**2**	**8.00**	**10.00**	**12**	**9.00**	**11.00**
3	**15.00**	**17.00**	**13**	**14.00**	**16.00**	**3**	**10.00**	**12.00**	**13**	**14.00**	**16.00**
4	**17.00**	**19.00**	**14**	**18.00**	**20.00**	**4**	**14.00**	**16.00**	**14**	**20.00**	**22.00**
5	**18.00**	**20.00**	**15**	**19.00**	**21.00**	**5**	**16.00**	**18.00**	**15**	**21.00**	**23.00**
Вариант 5						***Вариант 6***					
Рейс	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**	**Рейс**	**Вылет из А**	**Прилет в В**
1	**8.00**	**12.00**	**11**	**7.00**	**11.00**	**1**	**8.00**	**11.00**	**11**	**17.00**	**20.00**
2	**10.00**	**14.00**	**12**	**9.00**	**13.00**	**2**	**10.00**	**13.00**	**12**	**18.00**	**21.00**
3	**11.00**	**15.00**	**13**	**11.00**	**15.00**	**3**	**15.00**	**18.00**	**13**	**19.00**	**22.00**
4	**13.00**	**17.00**	**14**	**14.00**	**18.00**	**4**	**17.00**	**20.00**	**14**	**20.00**	**23.00**
5	**15.00**	**19.00**	**15**	**16.00**	**20.00**	**5**	**20.00**	**23.00**	**15**	**21.00**	**24.00**

10	**8**	**12**	**15**	**13**		**10**	**11**	**5**	**5**	**9**		**6**	**13**	**5**	**15**	**9**
2	**9**	**6**	**11**	**3**		**2**	**11**	**10**	**11**	**3**		**11**	**7**	**4**	**21**	**3**

Практическое занятие 15
Экономическая оценка и принятие управленческого решения
Постановка задачи

Оценить, компенсируют ли будущие доходы от инвестиций Inv начальные и будущие издержки от реализации УР, вычислив:

1) ЧДД - чистый дисконтированный доход;

2) $T_{ок}$ - время окупаемости УР;

3) $IRR^{\&}$ - внутреннюю норму рентабельности УР;

Исходные данные примера: Инвестиции Inv=992 тыс.руб. процент платы за кредит – $K^{\%}$=10%. Прогноз инфляции - 7%, 7%, 6%. Срок возврата кредита – 3 года. Эксплуатационные расходы: а) базовые $C_t^{б}$ – 210 тыс.руб. б) проектные $C_t^{пр}$ – 180 тыс.руб. Денежная экономия по годам:{415; 425; 425}(тыс.руб.). ***Источники экономии:*** сокращение расходов за счет повышения точности расчетов. снижение расхода ресурсов, трудоемкости, заработной платы, численности работников и т.д. Доход от продажи оборудования - $C_{t=1}^{пр}$=10 тыс.руб.

Решение задачи

Шаг 1. Формируем номинальный поток *денежных поступлений* по годам

$$CF_t = (C_t^{б} - C_t^{n}) + Э_t + C_t^{пр} = \qquad (15.1)$$

= { (210-180)+ 415+10, (210-180)+425; (210-180)+425} =

= {30+415+10; 30+425 , 30+425)} = {455; 455; 455} тыс.руб.

Шаг 2. Вычисляем поток *денежных поступлений* CF_t с учетом инфляции по годам t=1 : 1.000*1.070 = 1.070; 455.0*1.070 = 486.9 тыс.руб.;

t=2 : 1.070*1.070 = 1.145; 455.0*1.145 = 520.9 тыс.руб.;

t=3 : 1.145*1.060 = 1.214; 455.0*1.214 = 552.2 тыс.руб..

Шаг 3. Вычисляем дисконтированный денежный *поток поступлений* DCF_t с учетом инфляции при E = {0%; 10%; 20%; 30%} по модели

$$DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} \qquad (15.2)$$

при E= 0.00% и t= 1 $DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} = \frac{486.850}{(1+0.0)^1} = 486.850$ тыс.руб.

при E= 10.00% и t= 1 $DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} = \frac{486.850}{(1+0.10)^1} = 442.6$ тыс.руб.

при E= 20.00% и t= 1 $DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} = \frac{486.850}{(1+0.20)^1} = 405.7$ тыс.руб. и т.д.

Варьируем t=1,3 и E ={0%; 10%; 20%; 30%}. Итоги в табл.15.1.

Таблица 15.1.

Поток DCF(t) с учетом инфляции

Год		E%=0%	E%=10%	E%=20%	E%=30%

1	455	486.9	442.6	405.7	374.5
2	455	520.9	430.5	361.8	308.2
3	455	552.2	414.9	319.6	251.3

Норма дисконта E(%) оценивает относительную стоимость денежных потоков в моменты t. При E(%) ≥ K УР окупается.

Шаг 4. Вычисляем поток *дисконтированных денежных платежей с* учетом инфляции при E = {0%; 10%; 20%; 30%} и пишем ответы в табл.15.2

Таблица 15.2.

Поток DCF(t) и DPF(t)c учетом инфляции

Год		E%=0%	E%=10%	E%=20%	E%=30%
	Inv	-992.0	-992.0	-992.0	-992.0
1	DCF_1	486.9	442.6	405.7	374.5
	DPF_1	-505.1	-549.4	-586.3	-617.5
2	DCF_2	520.9	430.5	361.8	308.2
	DPF_2	0.0	-118.9	-224.5	-309.3
3	DCF_3	552.2	414.9	319.6	251.3
	DPF_3	0.0	0.0	0.0	-58.0

При реализации УР осуществляются платежи в счет покрытия долга за кредит, образующие дисконтированный поток платежей

$$DPF^-_{t+1} = DCF^+_t - DPF^-_t \qquad (15.3)$$

При E=10% и t=1 $DPF^-_{t+1} = DCF^+_t - DPF^-_t$ = 442.9-992.0= -549.4 тыс.руб.

При E=10% и t=2 $DPF^-_{t+1} = DCF^+_t - DPF^-_t$ = -549.4 +430.5= -118.9 тыс.руб.

При E=10% и t=3 $DPF^-_{t+1} = DCF^+_t - DPF^-_t$ =-118.9 +414.9= 0.0 тыс.руб.

Сумма $DPF^-_{t+1} = DCF^+_t - DPF^-_t$ при t=3 и E=10% больше 0, однако, в табл.15.2 вместо этого записано 0.0 тыс.руб., так долг равен 0.

Шаг 5. Вычисляем *чистый дисконтированный доход* $ЧДД_t = DPF^-_t + DCF^+_t$ (15.4)

Таблица 15.3.

Поток ЧДД(t) = F(E)

Год		E%=0%	**E%=10%**	E%=20%	E%=30%
0	Inv	-992.0	**-992.0**	-992.0	-992.0
1	$ЧДД_1$	-505.1	**-549.4**	-586.3	-617.5
2	$ЧДД_2$	15.8	**-118.9**	-224.5	-309.3
3	$ЧДД_3$	**568.0**	**296.0**	**95.0**	**-57.9**
	T_{ok}	1.97	**2.29**	2.70	>3

Шаг 6. Строим графики $ЧДД_t$ = f(t) и IRR$^{\&}$ = f(E$^{\%}$) по данным табл.15.3.

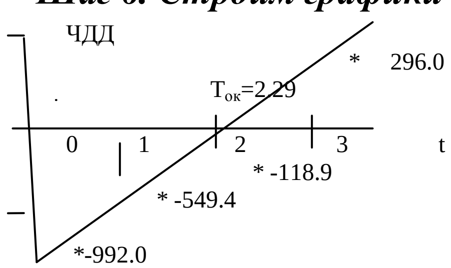


Рис.15.1. $ЧДД_t$ = f(t) при E=10%

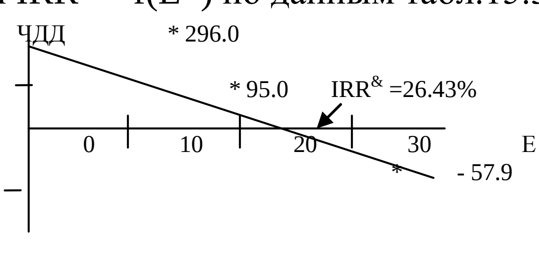


Рис.15.2. **IRR =F(E)**

Шаг 7. Определяем срок *окупаемости* УР T_{ok} при Е ={0%;10%;20%; 30%}. T_{ok} находится в точке пересечения графика ЧДД(t) с осью t. Данные для оценки T_{ok} при Е%={0%;10%;20%;30%} находятся в столбце (Е=10%) табл.15.3.

при t=1 $ЧДД_1$= -549.4 < 0 и Ток = Ток + 1 = 1;
при t=2 $ЧДД_2$= -118.9 < 0 и Ток = 1 + 1 = 2;
при t=3 $ЧДД_3$= 296.0 > 0 и Ток = 2 + ΔТок.

По данным выделенного столбца $ЧДД_t$ при Е=10% табл. 15.3 вычисляем срок окупаемости $Т_{ок} = Т_{ок'} + ΔТ_{ок}$ (Е%=12%) инвестиций как:

1) поскольку в табл.8.3 ЧДД (Е=10%) становится положительным между t=2 и t=3, то целая часть срока окупаемости равна $Т_{ок'}$ =2;

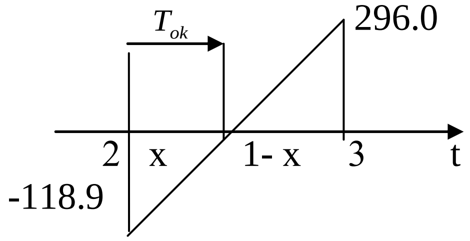


Рис.15.3. **Оценка x=ΔТ$_{ок}$**

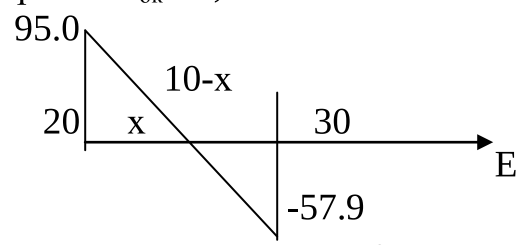


Рис.15.4. **Оценка x=** IRR$^{\&}$

2) дробная часть x=$ΔТ_{ок}$ находится из геометрически из рис.15.3.

путем вычисления x из соотношения $\frac{118.9}{x} = \frac{296}{1-x}$, образованного из равенства отношений сторон двух подобных треугольников. Величина x = $ΔТ_{ок}$ находим из этого соотношения:

а) 118.9 * (1-x) = 296.0 * x; б) 118.9 -118.9 * x = 296.0 * x;
в) 118.9 =118.9 * x +296.0 * x = x * (414.9); г) $ΔТ_{ок}$ = x = 118./414.9 = 0.29

Таким образом, $Т_{ок} = Т_{ок'} + ΔТ_{ок}$ = 2+0.29=2.29 г. Все Ток в табл.15.3.

Шаг 8. Находим внутреннюю *норму рентабельности УР* IRR$^{\&}$,

$$\sum CF_t (1+\frac{IRR^{9}}{100})^t - Inv = 0. \qquad (15.4)$$

по данным выделенной строки (t=3) табл.15.3 IRR$^{\&}$ находится в точке пересечения графика ЧДД(Е=10%) с осью Е. Как видно из табл.15.3 и рис.15.4, величина IRR$^{\&}$ находится в интервале между 20% и 30% и равно IRR$^{\&}$ =20% +x. Величину x=6.21 находим из соотношения рис.15.4 $\frac{95}{x} = \frac{57.9}{10-x}$. Внутренняя рентабельность УР равна IRR$^{\&}$ =20+6.21=26.21% . В табл.15.5 показаны итоги экономической оценки УР. Поскольку IRR$^{\&}$=26.1%>К%=10% и Tok=2.29<Тв=3, можно сделать вывод о принятии УР.

Таблица 15.4.

Результаты оценки УР

	Показатель эффективности	-	Усл.об.		Сумма

1.	Чистый дисконтированный доход на конец Ток	*ден.ед.*	ЧДД	=	295.98
2.	Чистый дисконтированный доход в конце проекта	*ден.ед.*	ЧДД	=	295.98
3.	Срок возврата кредита	*лет*	Твк	=	3.00
4.	Прогноз срока окупаемости инвестиций ……	*лет*	Ток=	=	2.29
5.	Процуент платы за кредит	*%*	Е%	=	10.00
6.	Внутренняя норма рентабельности УР…………	*%*	IRR&	=	26.21

В табл.15.5 во всех вариантах инфляция % по годам: 6, 6, 5 и Тв=3г. К%=10% .

Таблица 15.5.

Исходные данные вариантов задачи 15

N	***Параметры УР***	***Вариант***				
		1	***2***	***3***	***4***	***5***
1.	Объем инвестиций	**50000**	**12609**	**28000**	**50000**	**16100**
	Эксплуатационные расходы:					
2.	базовые	**15000**	**45628**	**10000**	**20000**	**4000**
3.	проектные	**10000**	**40814**	**10000**	**10000**	**3000**
4.	Ежегодная экономия	**13500**	**0**	**17000**	**10800**	**9000**
5.	Продажа оборудования	**0**	**2500**	**0**	**5000**	**0**
		6	**7**	**8**	**9**	**10**
1.	Объем инвестиций	**9920**	**999**	**16**	**210**	**40000**
	Эксплуатационные расходы :					
2.	базовые	**3000**	**350**	**19**	**50**	**13000**
3.	проектные	**2000**	**200**	**14**	**50**	**9000**
4.	Ежегодная экономия	**5000**	**400**	**0**	**135**	**11400**
5.	Продажа оборудования	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**

Приложение I.

Таблица 2.1.

Квантили функции Ф(Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

0.0	0.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239 .5	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.6026	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5909	.5948	.5987	.6406	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6333	.6368	.6772	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.7123	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7454	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7356	.7389	.7421	.7764	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.8051	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8315	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8554	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8437	.8461	.8485	.8508	.8531	.8770	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8962	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8906	.8925	.8943	.9131	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9279	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9406	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9515	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9485	.9505	.9608	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9686	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9750	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9803	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9776	.9783	.9788	.9798	.9798	.9846	.9807	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9881	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9909	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9930	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9924	.9927	.9929	.9948	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9961	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9958	.9960	.9971	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9980	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9985	.9980	.9981	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9986	.9985	.9986	.9986
3.0	.9986	.9983	.9983	.9984	.9985	.9985	.9992	.9986	.9987	.9987
3.1	.9990	.9990	.9991	.9991	.9991	.9991	.9994	.9992	.9992	.9992
3.2	.9993	.9993	.9993	.9993	.9994	.9994	.9996	.9994	.9994	.9994
3.3	.9995	.9995	.9995	.9995	.9995	.9996	.9997	.9996	.9996	.9996
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9997	.9997	.9997
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9999	.9998	.9998	.9998
4.0	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999		.9999	.9999	.9999

Таблица 2.2.

Квантили распределения χ^2

v\p	0.975	0.95	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.001	0.004	0.016	2.710	3.840	5.020	6.630
2	0.051	0.103	0.211	4.610	5.990	7.380	9.210
3	0.216	0.352	0.584	6.250	7.810	9.350	11.340
4	0.484	0.711	1.064	7.780	9.490	11.140	13.280
5	0.831	1.150	1.610	9.240	11.070	12.380	15.090
6	1.240	1.640	2.200	10.640	12.590	14.450	16.810
7	1.690	2.170	2.830	12.020	**14.070**	16.010	18.480
8	2.180	2.730	3.490	13.360	**15.510**	17.530	20.090
9	2.700	3.330	4.170	14.680	16.920	19.020	21.670
10	3.250	3.940	4.870	15.990	18.310	20.480	23.210
11	3.820	4.570	5.580	17.280	19.680	21.920	24.730
12	4.400	5.230	6.300	18.550	21.030	23.340	26.220
13	5.010	5.890	7.040	19.810	22.360	24.740	27.690
14	5.630	6.570	7.790	21.060	23.680	26.120	29.140
15	6.260	7.260	8.550	22.310	25.000	27.490	30.580
16	6.910	7.960	9.310	23.540	26.300	28.850	32.000
17	7.560	8.670	10.080	24.770	27.590	30.190	33.410
18	8.230	9.390	10.860	25.990	28.870	31.530	34.810
19	8.910	10.120	11.650	27.200	30.140	32.580	36.190
20	9.590	10.850	12.440	28.410	31.410	34.170	37.570
22	10.980	12.340	14.040	30.810	33.920	36.780	40.290
24	12.400	13.850	15.660	33.200	36.420	39.360	42.980
26	13.840	15.380	17.290	35.560	38.880	41.920	45.640
28	15.310	16.930	18.940	37.920	41.340	44.460	48.280
30	16.790	18.490	20.600	40.260	43.770	46.980	50.890
35	20.570	22.460	24.800	46.060	49.800	53.200	57.340
40	24.430	26.510	29.050	51.810	55.760	59.340	63.690
45	28.520	29.420	33.770	57.320	61.250	65.350	69.560
50	32.360	34.760	37.690	63.170	67.500	71.420	76.160
60	40.480	43.190	46.460	74.400	79.080	83.300	88.380
80	57.150	60.390	64.280	96.580	101.880	106.630	112.330
100	74.220	77.930	82.360	118.500	124.340	129.560	135.810
120	91.570	95.700	100.620	140.230	146.570	152.210	158.950
150	118.700	122.700	128.300	172.600	179.600	185.800	193.200
200	162.700	168.300	174.800	226.000	234.000	241.100	249.400

Таблица 2.3.

Значения функции e^{-x}

\	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

0.0	1.000	0.990	0.980	0.970	0.961	0.951	0.942	0.932	0.923	0.914
0.1	.905	.896	.887	.978	.869	.861	.852	.844	.835	.827
0.2	.819	.811	.803	.795	.787	.779	.771	.763	.756	.748
0.3	.741	.733	.726	.719	.712	.705	.698	.601	.694	.677
0.4	.670	.664	.657	.651	.644	.638	.631	.625	.619	.613
0.5	.606	.601	.595	.589	.583	.577	.571	.565	.560	.554
0.6	.549	.543	.538	.533	.527	.522	.517	.512	.507	.502
0.7	.497	.492	.487	.482	.477	.472	.468	.463	.458	.454
0.8	.449	.445	.440	.436	.432	.427	.423	.419	.415	.411
0.9	.407	.403	.399	.395	.391	.387	.383	.379	.375	.372
1.0	.368	.364	.360	.357	.354	.350	.347	.343	.340	.337
1.1	.333	.330	.326	.323	.320	.317	.314	.310	.307	.304
1.2	.301	.298	.295	.292	.289	.287	.287	.281	.278	.275
1.3	.273	.270	.267	.265	.262	.259	.257	.254	.252	.249
1.4	.247	.244	.242	.239	.237	.235	.232	.230	.228	.225
1.5	.223	.221	.219	.217	.214	.212	.210	.208	.206	.204
1.6	.202	.200	.198	.196	.194	.192	.190	.188	.186	.185
1.7	.183	.181	.179	.177	.176	.174	.172	.170	.169	.167
1.8	.165	.164	.162	.160	.159	.157	.156	.154	.153	.151
1.9	.150	.148	.147	.145	.144	.142	.141	.140	.138	.137
2.0	.135	.134	.133	.131	.130	.129	.128	.126	.125	.124
2.1	.123	.121	.120	.119	.118	.117	.115	.114	.113	.112
2.2	.111	.110	.109	.108	.107	.105	.104	.103	.102	.102
2.3	.100	.099	.098	.097	.096	.095	.094	.093	.092	.091
2.4	.091	.090	.089	.088	.087	.086	.085	.085	.084	.083
2.5	.082	.081	.081	.080	.078	.078	.077	.077	.076	.075
2.6	.074	.074	.073	.072	.071	.071	.070	.069	.069	.068
2.7	.067	.067	.066	.065	.065	.064	.063	.063	.062	.061
2.8	.061	.060	.060	.059	.058	.058	.057	.057	.056	.056
2.9	.055	.055	.054	.053	.053	.052	.052	.051	.051	.050
3.0	.050	.049	.049	.048	.048	.047	.047	.046	.046	.046
3.1	.045	.045	.044	.044	.043	.043	.042	.042	.042	.041
3.2	.041	.040	.040	.040	.039	.039	.038	.038	.038	.037
3.3	.038	.037	.036	.036	.035	.035	.035	.034	.034	.034
3.4	.033	.033	.033	.032	.032	.032	.031	.031	.031	.031
3.5	.030	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028
3.6	.027	.027	.027	.027	.026	.026	.026	.026	.025	.025
3.7	.025	.025	.024	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.022
3.8	.022	.022	.022	.022	.022	.021	.021	.021	.021	.021
3.9	.020	.020	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.019
\	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
4.0	.018	.017	.015	.014	.012	.011	.010	.009	.008	.008
5.0	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003
6.0	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001
7.0	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000

Таблица 2.4.

Квантили t-распределения Стьюдента

v\p	0.300	0.200	0.100	0.050	0.020	0.01	0.001
1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.130	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
35	1.053	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
45	1.049	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.520
50	1.048	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
55	1.047	1.297	1.673	2.004	2.396	2.669	3.478
60	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70	1.045	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80	1.044	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90	1.043	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Часть I: учеб. пособие.- М.: МГТУ ГА, 1993.- 137 с.

2. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Часть II. Компьютерная реализация: учеб. пособие. – М.: МГТУ ГА, 1998. -104 с.

3. Андрианов В.В.Алгоритмы методов разработки управленческих решений: учеб. издание.- М.: МГТУ ГА, 2001. - 124с.

СОДЕРЖАНИЕ