Введение

Начертательная геометрия относится к числу базовых общетехнических дисциплин. Этот раздел геометрии изучает пространственные формы объектов по их изображениям (по чертежам).

Общеизвестна роль чертежа в технике и на производстве. Самое подробное описание конструкции механизма или прибора не может заменить по емкости информации ее чертеж. Поэтому этот документ является международным языком инженера.

Основные задачи начертательной геометрии:

- изучение способов построения изображений (чертежей) объектов на плоскости;
- изучение геометрических свойств объектов по заданным изображениям (чтение чертежа);
- решение геометрических и конструктивных задач на чертежах.

В результате изучения дисциплины студенты должны уметь выполнять и читать чертежи различного назначения и решать инженерно-геометрические задачи.

При выполнении контрольных работ (КР) студентам необходимо использовать обозначения, термины, понятия, символы и определения начертательной геометрии, рекомендуемые учебниками и учебными пособиями. Графическая часть КР должна полностью соответствовать требованиям стандартов Единой системы конструкторской документации (ЕСКД).

1. Оформление контрольных работ

Контрольная работа (КР) по дисциплине «Начертательная геометрия» состоит из графической и текстовой частей.

Графическая часть включает в себя чертежи, которые выполняются по мере изучения тем курса.

Текстовая часть включает пояснительную записку (ПЗ), в которой приводятся условия задач, их исходные данные (параметры, координаты точек и т.д.), планы решения задач и краткое описание их решения.

Варианты задания на КР должны соответствовать последней цифре учебного шифра (кода) студента.

Параметры заданий указаны согласно варианту задания (последняя цифра шифра).

Чертежи выполняются на формате А3 (297х420) (рис. 1) в карандаше при помощи чертежных инструментов в соответствии с требованиями ГОСТ, ЕСКД и должны отличаться четким и точным выполнением всех построений.

Согласно ГОСТ 2.301-68 формат снабжается общей рамкой на расстоянии 5 мм от всех линий обреза формата, кроме левой линии обреза. Слева для подшивки чертежей рамка выполняется на расстоянии 20 мм от границы формата. В правом нижнем углу формата вплотную к рамке размещают основную надпись по ГОСТ 2.104-2006, форма 1. Пример оформления чертежа показан на рис. 1. Форма, размеры основной надписи и всех ее граф приведены на рис. 2.

Пояснительная записка выполняется на листах бумаги формата А4.

В ГОСТ 2.104-2006 описано назначение всех граф основной надписи и указан порядок их заполнения в производственных условиях. На рис. 3 приведено рекомендуемое заполнение граф основной надписи в учебных целях. Надписи, цифры и обозначения на чертеже должны быть выполнены чертежным шрифтом по ГОСТ 2.304-81 размером 3,5 и 5, а некоторые графы основной надписи – размером 7 или 10 (рис. 3). Все решения выполняются карандашом с помощью чертежных инструментов. Серьезное внимание должно быть обращено на тщательность графических построений. Небрежное выполнение построений неизбежно приводит к ошибочным результатам и к необходимости выполнения повторных решений задачи.

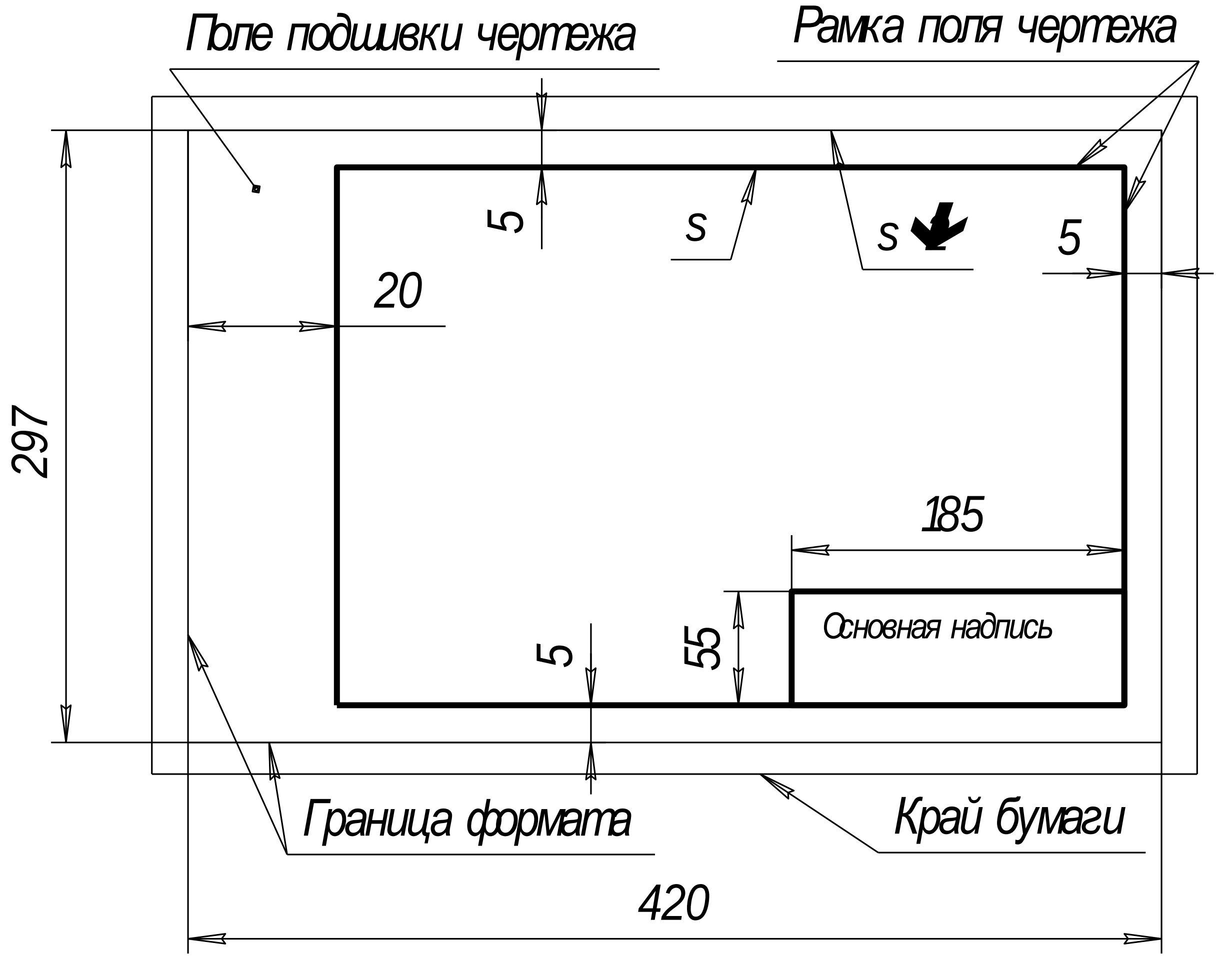


Рис. 1

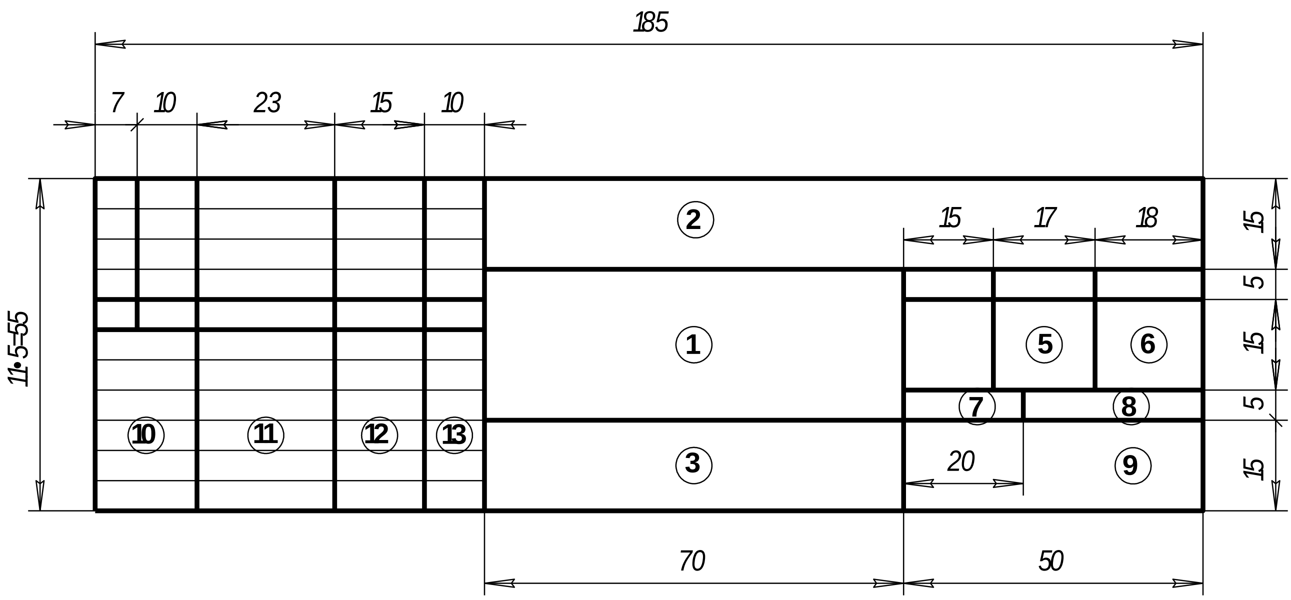


Рис. 2

Для большей точности вначале необходимо выполнить построения тонкими линиями твердым чертежным карандашом, а затем обвести более мягким. Начертание и толщина линий должны соответствовать требованиям ЕСКД. Рекомендуется толщина основных линий 0,8…1 мм, а линий связи и линий построений – 0,4…0,5 мм. Надписи, обозначения точек и цифровые индексы выполнять чертежным шрифтом с наклоном 75° в соответствии с ГОСТ 2.304-81 [1].

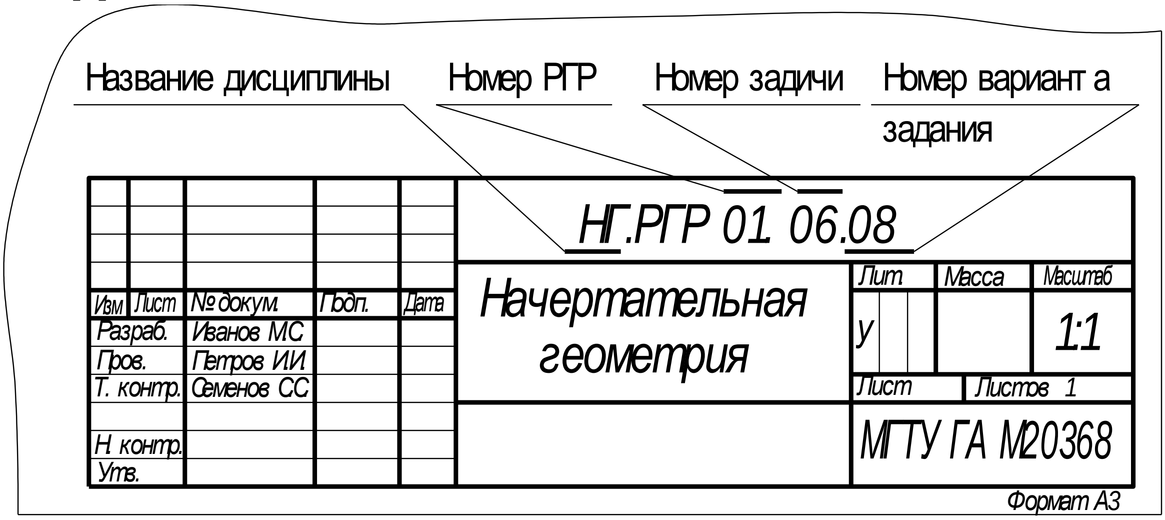


Рис. 3

На чертеже ***основные построения должны быть сохранены***. Все перечисленные требования по оформлению задач выдержаны в приведенных ниже примерах.

При решении задач студент должен использовать терминологию, определения, обозначения, символы и понятия, рекомендуемые на лекциях и в учебной литературе [2, 3].

Обозначения

1. Точки пространства обозначают прописными буквами латинского алфавита: *A, B, C, D*… или цифрами 1, 2, 3, 4,…
2. Прямые и кривые линии пространства – строчными буквами латинского алфавита: *a, b, c, d*, …
3. Плоскости и поверхности (оригиналы) – прописными буквами греческого алфавита: A(альфа), B(бэта), Γ(гамма), Θ(тэта), Λ(ламбда), Σ(сигма), Φ(фи), Ψ(пси), Ω (омега), T(тау).
4. Углы обозначают строчными греческими буквами: α(альфа), β(бэта), γ(гамма), φ(фи), θ(тэта), λ(ламбда), ω(о мега), τ(тау), δ(дельта).
5. Плоскости проекций обозначают буквой Π (пи) – прописной буквой греческого алфавита с добавлением подстрочного индекса *1, 2, 3, 4, 5*…, при этом:
   - горизонтальная плоскость проекций обозначается – Π_1;
   - фронтальная плоскость проекций – Π_2;
   - профильная плоскость проекций – Π_3;
   - новую плоскость проекций, отличную от указанных выше, обозначают: $\Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \ldots$
6. Проекции точек, линий и поверхностей обозначают теми же буквами, какими обозначены сами оригиналы с добавлением индекса плоскости проекций, на которую спроецирован объект.

Так, проекции точки A, прямой a и плоскости Θ соответственно обозначают:

- на плоскости Π_1 – A_1, a_1, Θ_1;
- на плоскости Π_2 – A_2, a_2, Θ_2;
- на плоскости Π_3 – A_3, a_3, Θ_3;

7. Рекомендуется обозначать:

- линию горизонтального уровня (горизонталь) – *h*;
- линию фронтального уровня (фронталь) – *f*;
- линию профильного уровня (профильная прямая) – *p*;
- плоскость горизонтального уровня –*Г*;
- плоскость фронтального уровня – *Ф*;
- плоскость профильного уровня – *Ψ*.

8. Последовательность точек, прямых, плоскостей и поверхностей обозначают верхним индексом *1, 2, 3, …*
9. Действительную длину отрезка обозначают – *dd*.
10. Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами:

≡ - совпадают. Например, (*AB*) ≡ (*CD*) – прямая, проходящая через точки *A* и *B* совпадает с прямой, проходящей через точки *C* и *D*.

~ - подобны. Например, *Δ BAC* ~ *Δ MNK* – треугольники *ABC* и *MNK* подобны.

|| – параллельны. Например, *A* || *B* - плоскость *A* параллельна плоскости *B*.

⊥ - перпендикулярны. Например, *a* ⊥ *b* – прямые *a* и *b* перпендикулярны.

° / скрещиваются. Например, *c* ⊕ / *d* – прямые *c* и *d* скрещиваются

⊂ - включает, содержит. Например, *a* ⊂ *A* - прямая *a* принадлежит плоскости *A*, т.е. множество точек прямой *a* является подмножеством точек плоскости *A*.

∩ - пересечение множеств. Например, *a* = *A* ∩ *B* - прямая *a* является результатом пересечения плоскостей *A* и *B*.

/ - отрицание знака. Например, $a \nparallel b$ – линия *a* не параллельна линии *b*.

2. Объем и содержание контрольных работ

В процессе изучения дисциплины студент – заочник выполняет контрольные работы в количестве, предусмотренном учебной программой для каждой специальности. Объем и содержание контрольных работ с указанием номеров задач и видов итоговой проверки знаний приведены в табл. 1.

Таблица 1

Специальность	Семестр	№ контр работы	№№ задач	Форма контроля
162300	1	1	1,4	Экзамен
162500	1	1	1,4	Экзамен
210700	1	1	3	Экзамен
190700	1	1	3	Зачет

3. Условия и порядок решения задач

Задача № 1

Построить линию пересечения треугольников *ABC* и *DEF*. Указать видимость их сторон, считая плоскости треугольников непрозрачными. Построить геометрическое место точек, удаленных от плоскости треугольника *DEF* на расстояние 30 мм. Определить относительную видимость плоскостей треугольников.

Данные для своего варианта взять в табл. 2.

Пример приведен на рис. 8.

Таблица 2

Точки	Координаты	№ варианта									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	X	70	75	68	67	64	65	68	67	70	70
	Y	115	85	110	0	105	80	85	20	85	85
	Z	85	110	85	20	80	110	110	0	110	110
B	X	135	0	135	0	130	130	135	0	135	0
	Y	20	30	19	48	18	38	36	111	35	35
	Z	32	15	36	111	35	20	19	48	20	20
C	X	10	120	14	121	12	15	14	121	15	120
	Y	50	0	52	86	50	0	0	78	0	0
	Z	0	50	0	78	0	52	52	86	50	52
D	X	120	16	117	18	115	120	117	18	115	20
	Y	92	12	90	75	90	10	9	40	10	12
	Z	10	88	9	40	10	90	90	75	92	92
E	X	50	85	52	83	52	48	52	83	50	85
	Y	20	80	25	6	25	82	79	117	80	90
	Z	75	25	79	107	80	20	25	6	25	25
F	X	0	130	0	135	0	0	0	135	0	135
	Y	80	50	83	38	80	52	48	47	50	50
	Z	46	80	48	47	45	82	83	38	85	85

Порядок решения

1. ***Построить по две проекции точек A, B, C, D, E, F.***
   Построения провести аналогично примеру 1 приложений (рис. П1 и П2, приложения), выполнив их в масштабе 1:1.
2. ***Построить линию пересечения (КМ) треугольников.***

Линия пересечения *КМ* треугольников строится по точкам пересечения сторон одного треугольника с плоскостью другого треугольника (рис.5, а также пример 6, приложений). Такую точку можно построить, используя вспомогательные секущие, проецирующие плоскости – посредники. [1-4]. Для этого необходимо:

- поместить, например, сторону *DE* во вспомогательную плоскость – посредник *Г*. На рис. 4 плоскость *Г* – фронтально проецирующая;
- построить линию пересечения плоскости – посредника *Г* с плоскостью $\Delta\ ABC$. На рис. 4 это линия *1- 2*;
- определить точку пересечения *К* построенной линии *1- 2* с прямой *DE*.

Точку *М* определить, повторяя эти построения еще раз, поместив сторону *АС* во вспомогательную плоскость $Г^{*}\perp П_2$ (рис. 5).

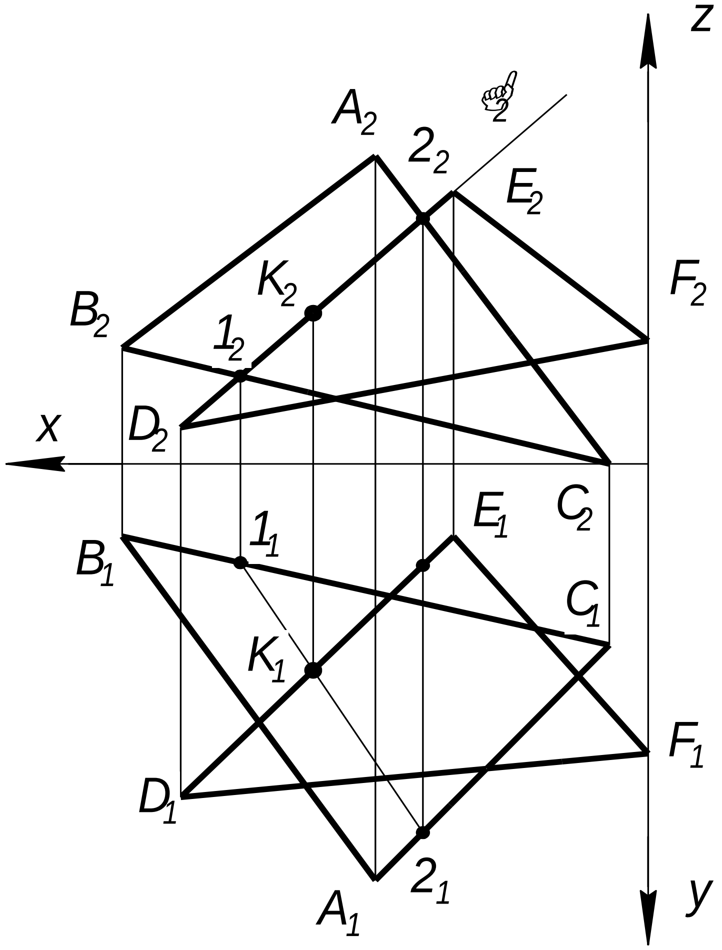


Рис. 4

3. ***Определить относительную видимость плоскостей треугольников***

Относительную видимость плоскостей треугольников определяют способом конкурирующих точек (пример 6 приложений), после чего видимые отрезки сторон треугольников необходимо выделить сплошными основными линиями *S*, а невидимые отрезки сторон показать штриховыми линиями невидимого контура, толщиной *S/2* (рис. 5,7).

4. Построить геометрическое место точек, удаленных от плоскости треугольника DEF на расстояние 30 мм

Искомым геометрическим местом точек являются две плоскости, параллельные плоскости ΔDEF и расположенные по обе стороны от него на расстоянии 30 мм. На рис. 8 показана одна из таких плоскостей - Σ. Для построения этой плоскости необходимо провести из любой точки плоскости, например *F*, перпендикуляр к заданной плоскости ΔDEF (пример 5 приложений). Построенный перпендикуляр – прямая общего положения. На перпендикуляре определить точку *R*, удаленную от точки *F* на расстояние 30 мм. Этот фрагмент решения задачи изложен в примере 8 приложений. Через точку *R* (R_1, R_2) провести плоскость, параллельную заданной (пример 7 приложений).

Плоскость Σ задать пересекающимися прямыми, параллельными двум прямым, принадлежащим плоскости *DEF*, например, *FD* и *FE*. Можно ограничить решение задачи построением только одной из двух искомых плоскостей. В данной задаче можно считать новую плоскость прозрачной.

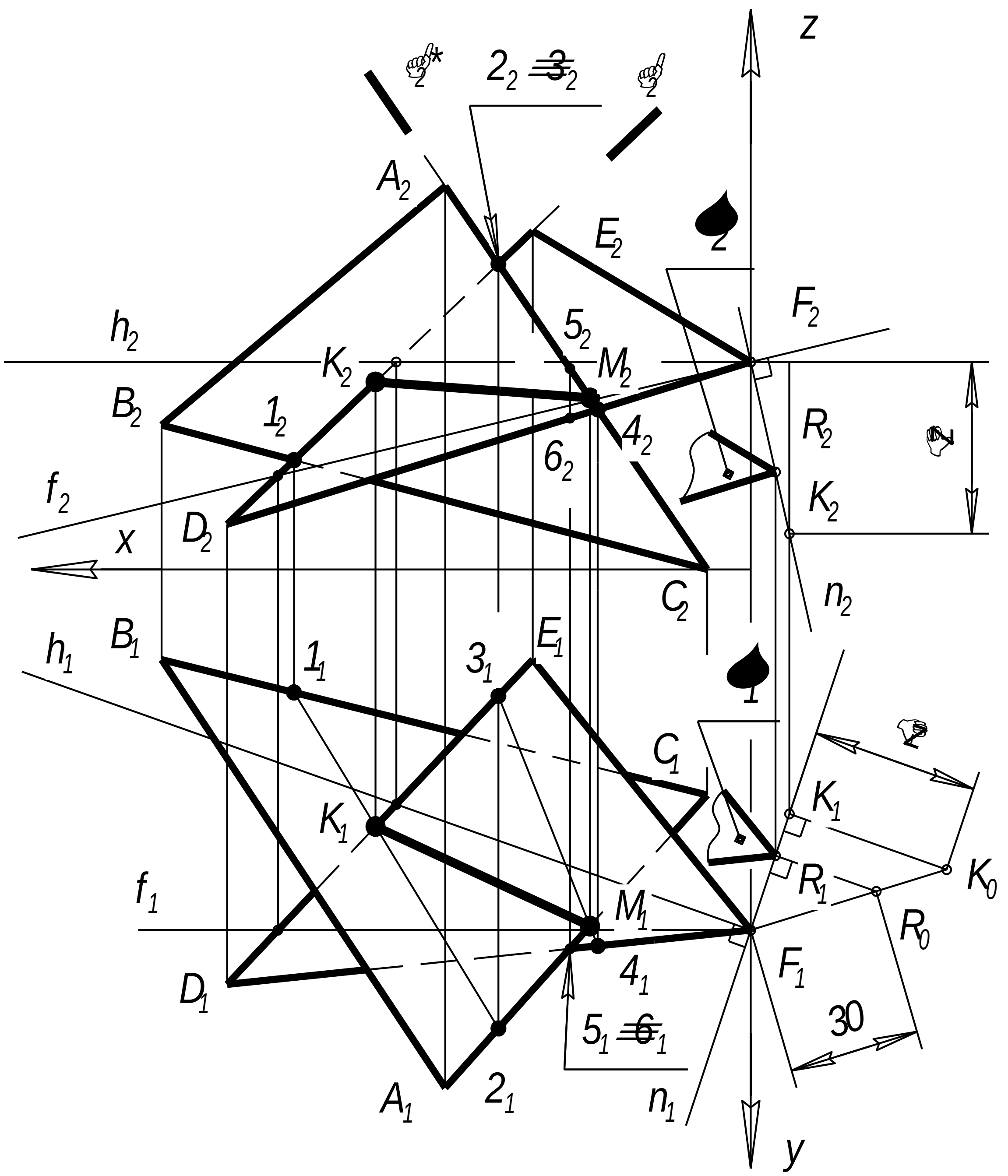


Рис. 5

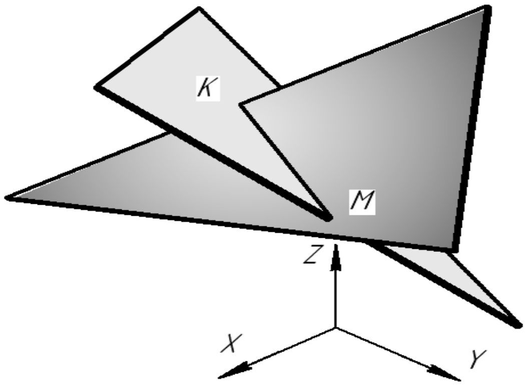

K
M
Z
X
Y

Рис. 6

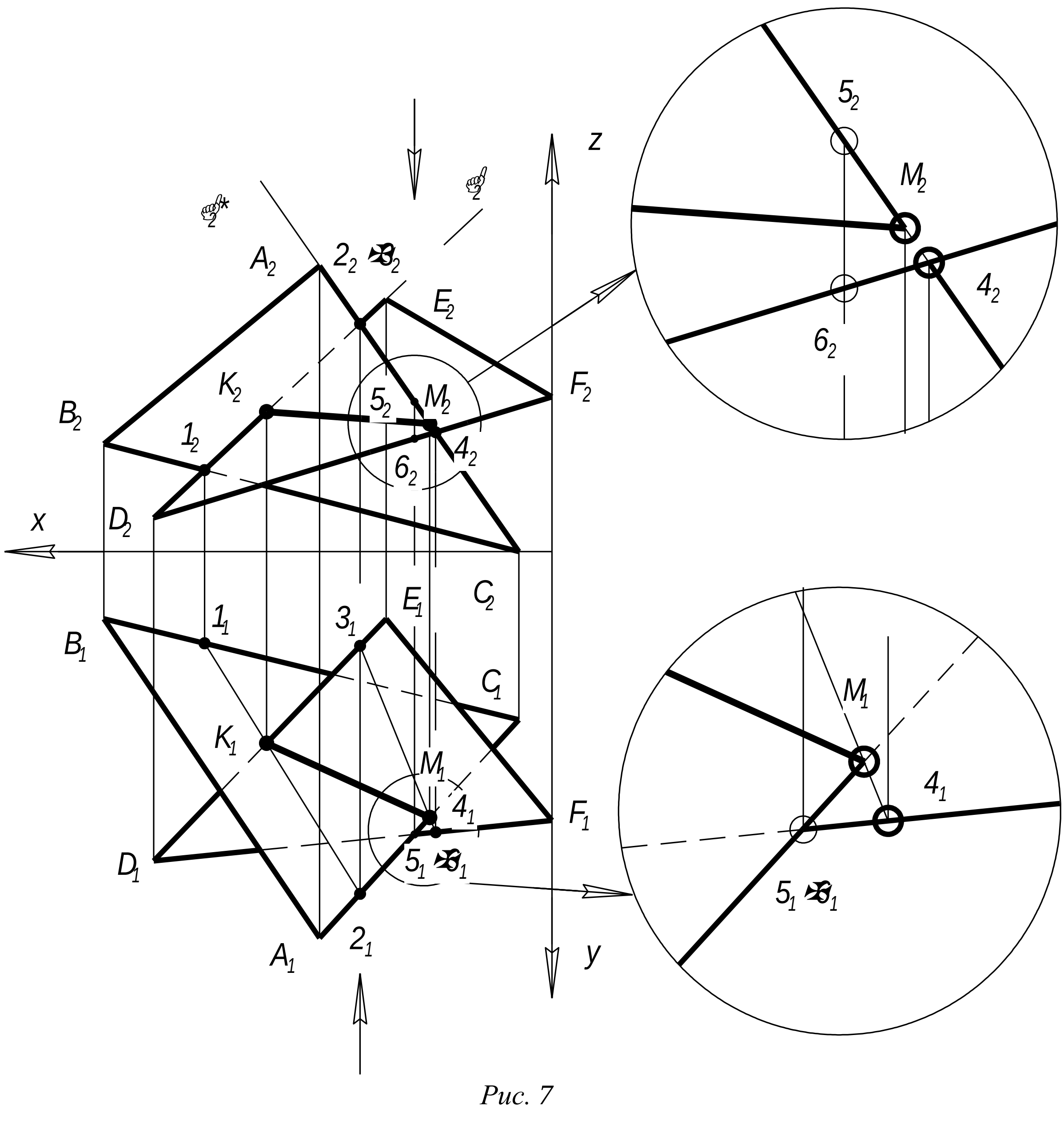

z
x
y
A_2
B_2
D_2
E_2
F_2
K_2
M_2
C_2
1_2
2_2
4_2
5_2
6_2
A_1
B_1
C_1
D_1
E_1
F_1
K_1
M_1
1_1
2_1
3_1
4_1
5_1

Рис. 7

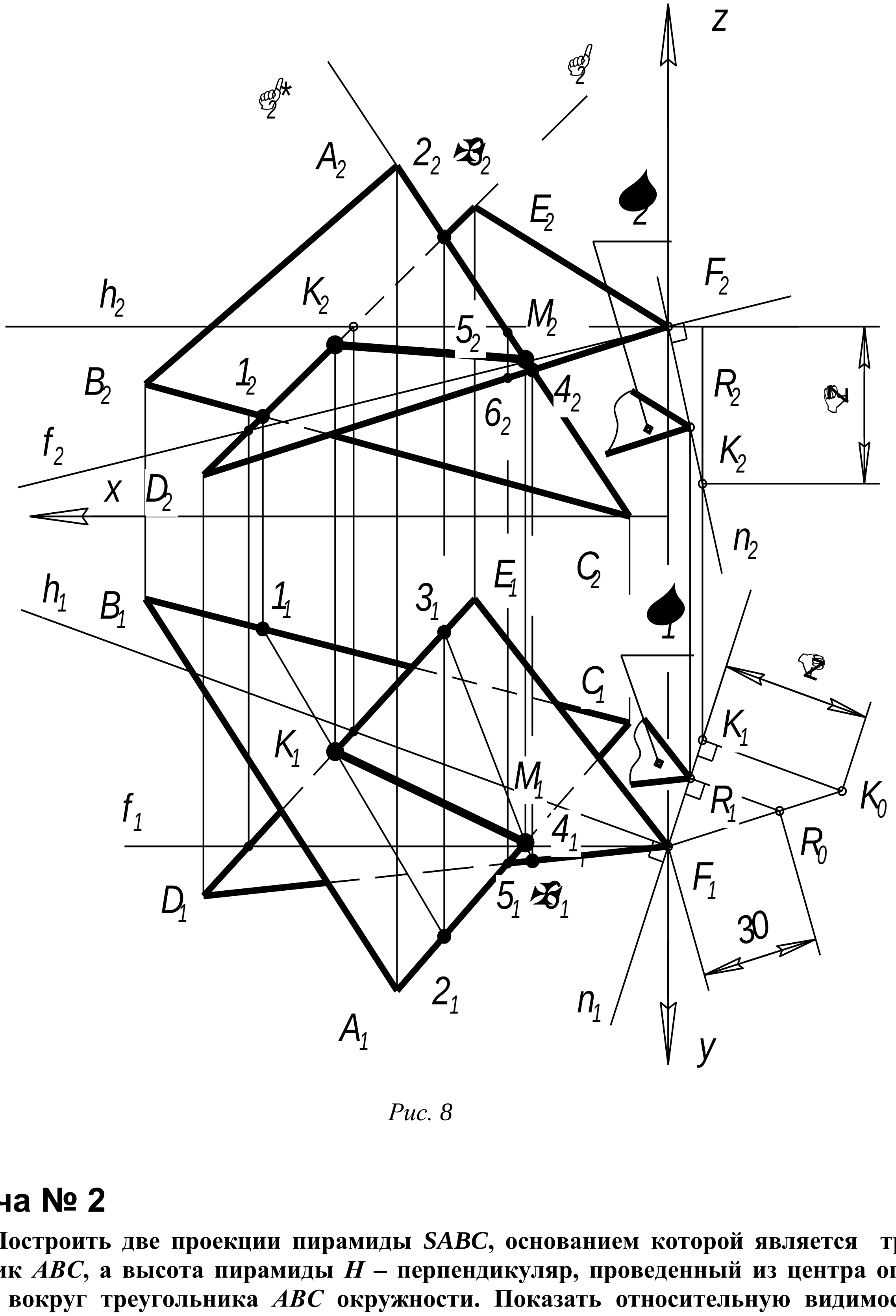


Рис. 8

Задача № 2

Построить две проекции пирамиды *SABC*, основанием которой является треугольник *ABC*, а высота пирамиды *H* – перпендикуляр, проведенный из центра описанной вокруг треугольника *ABC* окружности. Показать относительную видимость элементов пирамиды. Данные для каждого варианта приведены в табл. 3, а решение на рис. 9.

Таблица 3

Точки	Координаты	Номер варианта									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	X	18	117	18	15	117	18	116	20	16	120
	Y	10	9	90	10	90	75	8	12	12	90
	Z	90	90	10	85	9	40	88	92	88	10
B	X	135	0	135	130	0	135	0	85	130	0
	Y	48	48	83	50	83	38	46	80	50	85
	Z	83	83	48	80	48	47	80	25	80	50
C	X	83	52	83	80	52	83	50	135	85	50
	Y	79	79	25	80	25	6	78	50	80	25
	Z	25	25	79	20	79	107	25	85	25	80
Высота H		55	65	70	60	55	60	70	65	60	50

Порядок решения

1. ***В соответствии с Вашим вариантом по координатам, указанным в табл. 3, построить две проекции заданного треугольника ABC.***
2. ***Преобразовать плоскость общего положения, заданную треугольником ABC, в плоскость уровня для определения центра описанной вокруг треугольника окружности.***

   Центр описанной около треугольника окружности располагается на пересечении его медиан. Чтобы выполнить эти построения, необходимо для определения его натуральной величины преобразовать треугольник *ABC,* являющийся плоскостью общего положения, в плоскость уровня. Эти преобразования можно выполнить методом замены плоскостей проекций [1-4].

   Для такого преобразования требуются две замены систем плоскостей проекций:

   - преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость(прим. 9 приложений). Проецирующие плоскости приведены в табл. П2 приложений;
   - преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня (пример 10 приложений). Плоскости уровня приведены в табл. П2 приложений.

   После выполненных преобразований на построенном в натуральную величину треугольнике $A_5B_5C_5$ можно построить центр описанной окружности.
3. ***Построить проекции пирамиды в системе плоскостей Π_5/Π_4.***

   На плоскости Π_5 высота пирамиды проецируется в точку, совпадающую с центром описанной вокруг треугольника окружности. На Π_4 выполнить построения центра O_4 ($O \in \Delta\ ABC$), по линии связи высота пирамиды располагается перпендикулярно основанию и проецируется на Π_4 без искажения, так как перпендикуляр к проецирующей плоскости является линией уровня ($H \parallel \Pi_4$). Отложив на построенном перпендикуляре значение $H = O_4S_4$, можно определить S_4 (рис. 9).
4. ***Построить проекции пирамиды в системе плоскостей Π_1/Π_2.***

   Выполнить построения O_1S_1 (O_1 и S_1 определяются одним расстоянием s, так как $OS \parallel \Pi_4$. Далее выполните построение O_2S_2 (S_2 определяется расстоянием s^*, а O_2 – расстоянием *a*). Построить ребра пирамиды (рис. 9).
5. ***Определить относительную видимость ребер пирамиды (рис. 9).***

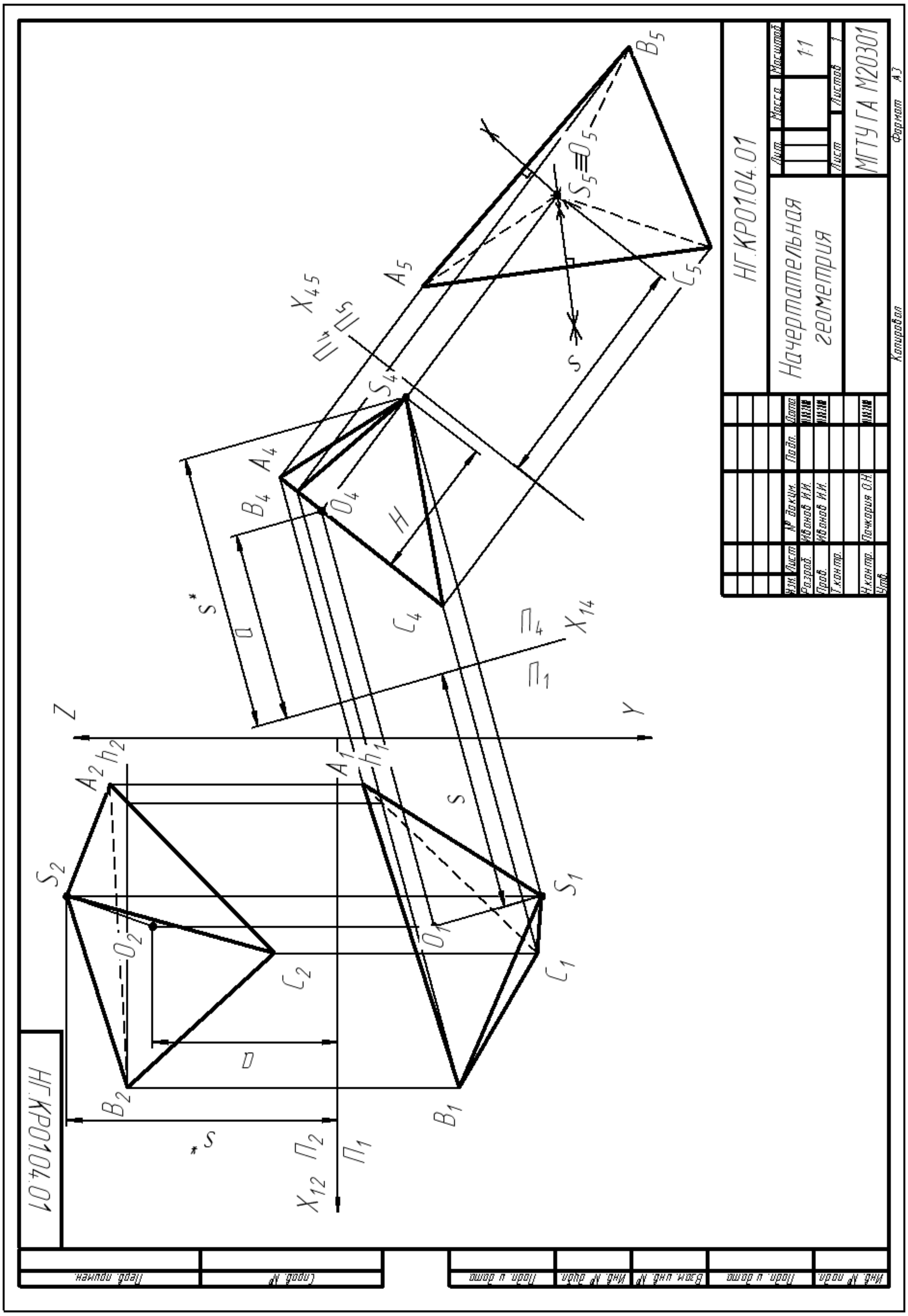

НГ.КР0104.01
Начертательная геометрия
МГТУ ГА М20301
НГ.КР0104.01

Рис. 9

Задача № 3

Построить три проекции сквозного отверстия в сфере диаметром 100 мм с центром в точке *K* (60, 60, 60). На виде спереди (на фронтальной проекции) сквозное отверстие представлено вырожденной проекцией фронтально проецирующей четырехгранной призмы *ABCD*, координаты ребер которой заданы в табл. 4. Показать относительную видимость элементов сферы (рис. 11).

Таблица 4

Координаты Точек / № варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	X	135	25	20	30	120	65	25	90	75	75
	Z	25	45	100	75	30	10	100	110	15	20
B	X	135	60	95	30	75	20	95	0	120	100
	Z	100	95	100	20	130	95	100	65	65	105
C	X	30	90	120	100	25	100	60	60	105	30
	Z	60	95	85	20	80	95	10	35	100	75
D	X	30	90	90	120	25	100	25	110	0	30
	Z	100	20	30	110	30	60	60	35	100	20

Порядок решения

1. ***Построить три проекции сферы и по заданным координатам точек A, B, C, D – проекции четырехугольника – сквозного отверстия в сфере на $П_2$ (рис.10, 11).***

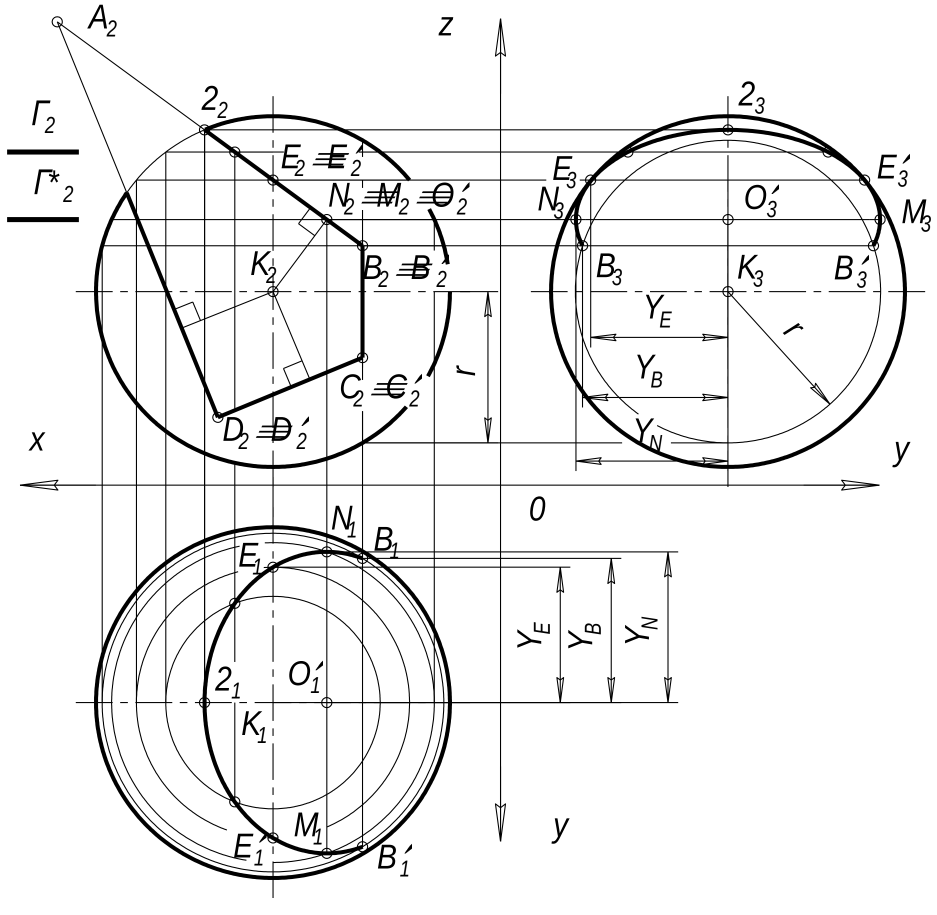


Рис. 10

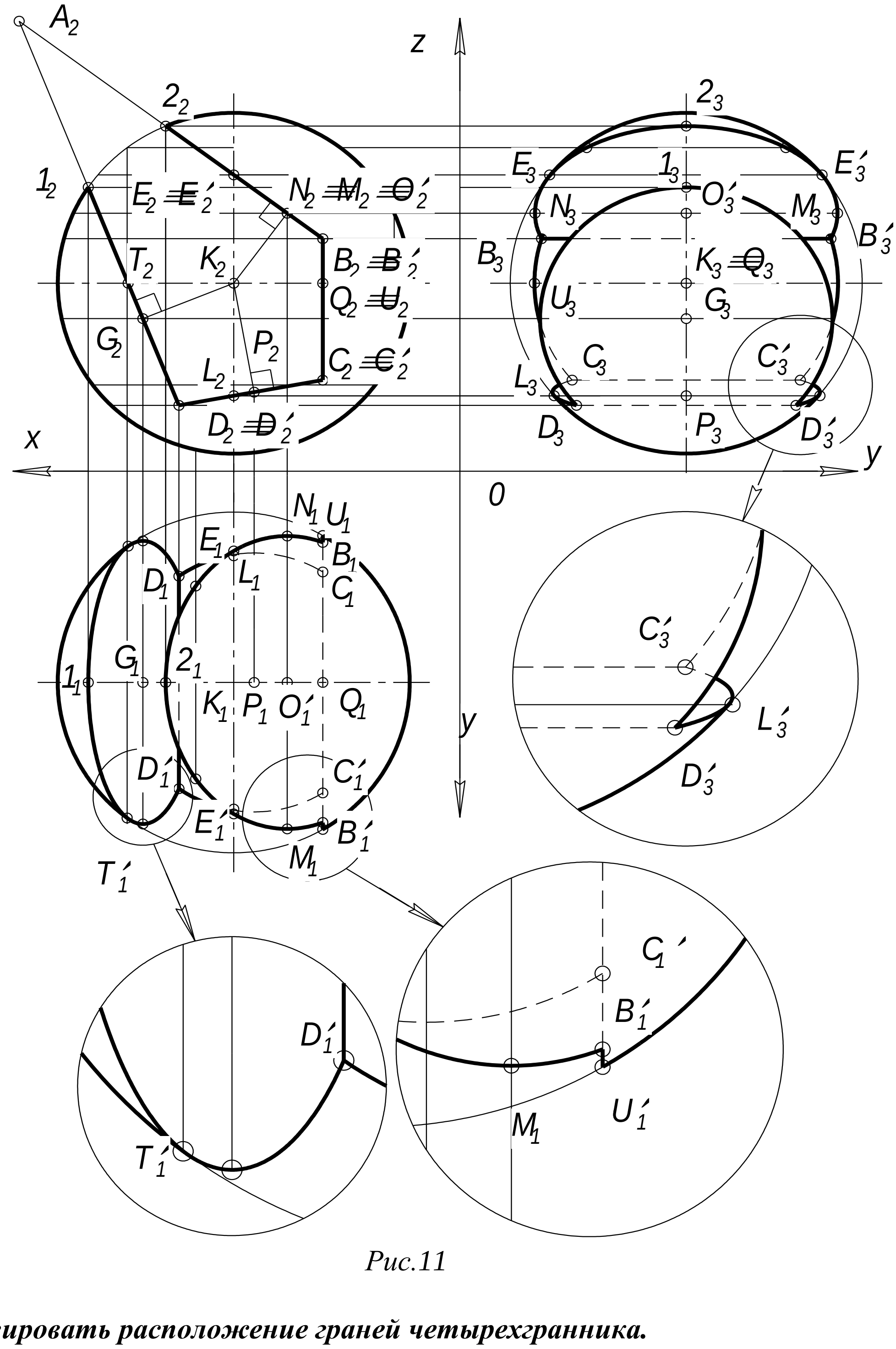


Рис.11

2. *Проанализировать расположение граней четырехгранника.*

Грани могут являться фронтально проецирующими плоскостями и плоскостями уровня по отношению к горизонтальной и профильной плоскостям проекций (пример 12 приложений).

Проекции линии пересечения сферы с призматическим отверстием строят по точкам (пример 11 приложений).

3. *Построить проекции линии пересечения сквозного отверстия со сферой.*

Построение линии пересечения сферы с плоскостями уровня и проецирующей плоскостью рассмотрены подробно в примере 12 приложений. На рис. 10 приведен пример построения линии пересечения сферы с одной из проецирующих граней четырехгранника - AB.

В процессе построения необходимо выделить характерные точки линии пересечения (рис. 11):

- точки на экваторе – *T, U* (необходимы для определения видимости элементов на горизонтальной плоскости проекций);
- точки на главном меридиане – *1, 2;*
- точки, лежащие на меридиане, определяющем профильный очерк – *E, L* (необходимы для определения видимости элементов на профильной плоскости проекций);
- самые высокие точки – *2;*
- самые низкие точки - *D;*
- точки, определяющие центры эллипсов – *G, P, O′.*

Промежуточные точки для каждого эллипса строят, используя плоскости *Г* и *Г** (рис. 10), параллельные горизонтальной плоскости проекций.

После всех построений полученные проекции точек необходимо соединить плавной кривой по лекалу с учетом видимости элементов сферы, выполнить обводку и проставить обозначения (рис. 11).

Задача № 4

Построить линию пересечения конуса вращения (ось конуса перпендикулярна $П_1$) и цилиндра вращения (ось цилиндра перпендикулярна плоскости $П_2$). Конус имеет высоту 100 мм и диаметр окружности основания 90 мм с центром в точке *O. Радиус основания цилиндра *R*, а его центр находится в точке *N*. Длина образующей цилиндра 100 мм. Определить относительную видимость линии их пересечения (рис. 12, 13, 14, 15, 16). Данные для каждого варианта приведены в табл. 5.**

Таблица 5

Координаты точек / № вар.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O*	X	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
	Y	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
	Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	X	70	85	90	73	80	80	85	90	70	75
	Y	50	65	60	55	50	50	60	60	55	65
	Z	40	35	30	30	45	35	35	35	35	25
	R	35	40	30	35	40	30	35	40	40	40

Построение линии пересечения двух поверхностей заключается в определении общих элементов – точек или линий, принадлежащих одновременно двум пересекающимся фигурам.

При решении подобных задач пользуются следующим алгоритмом:

- проводят вспомогательную плоскость-посредник *Г*. В данном случае рационально выбрать плоскость $Г \parallel П_1$ (плоскость должна пересекать поверхности по простым линиям – прямым или окружностям) (рис. 13, 16);
- строят линии пересечения плоскости *Г* с каждой из пересекающихся поверхностей.

(В данном примере плоскость $Г$ пересекает цилиндр по двум прямолинейным образующим, а конус – по окружности радиуса r).

Ось конической поверхности перпендикулярна $П_1$. Следовательно, вспомогательные плоскости – посредники – $Г, Г`, Г''$ и т.д. параллельные горизонтальной плоскости проекций, будут пересекать эту поверхность по параллелям, окружности которых на $П_1$ проецируются в натуральную величину без искажения. На $П_2$ их проекции совпадают со следом секущей плоскости $Г_2$, т.е. проецируются в отрезки прямых, перпендикулярных оси вращения этих поверхностей;

- определяют точки пересечения построенных линий (двух образующих и окружности). Эти точки принадлежат линии пресечения двух поверхностей.

Порядок решения

1. ***Построить по данным табл. 5 фронтальную и горизонтальную проекции конуса и цилиндра. Их оси вращения – взаимно перпендикулярные проецирующие скрещивающиеся прямые.***

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 12.

Цилиндр – фронтально-проецирующая поверхность, поэтому на фронтальной плоскости проекций линия его пересечения с конусом совпадает с фронтальным очерком цилиндра (точки A_2, 1_2, 2_2, C_2, 3_2, D_2, B_2), (рис. 13) .

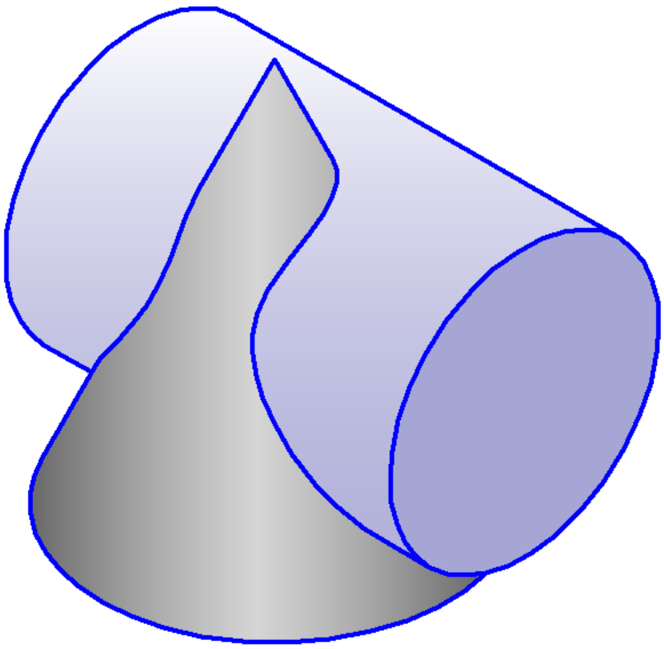


Рис. 12

2. ***Определить недостающие проекции точек, причем начать построения с характерных точек:***
   - точки, лежащие в главной меридиональной плоскости $\Lambda_{сим}$ – A и B. Эти точки принадлежат очерковой образующей SK. Строятся с помощью линий связи;
   - самая высокая точка в данном случае – точка A;
   - самые низкие точки – D, D' – это точки пересечения конуса с самой нижней образующей цилиндра. Для определения горизонтальных проекции точек D, D' проводим вспомогательную плоскость Γ'_2, которая пересекает конус по окружности радиуса R'', а цилиндр по образующей DD' (образующая совпадает с линией связи);
   - точки, определяющие границу видимости линии пересечения на горизонтальной плоскости проекции, - C, C'. Они являются также самыми левыми точками. Для построения горизонтальных проекций данных точек проводим плоскость Q_2, которая пересекает конус по окружности радиуса r, а цилиндр по очерковым образующим, (рис. 14). Точки, расположенные выше плоскости Q, на горизонтальной плоскости проекций – видимы, а точки, расположенные ниже плоскости Q – невидимы.
3. ***Построить промежуточные точки с помощью вспомогательных плоскостей Γ, Γ', Γ'', Γ''' и т.д..***

   Рассмотрим случай, изображенный на рис. 15, 16. Здесь в дополнение к только что рассмотренной задаче торцевая часть цилиндра, являющаяся фронтальной плоскостью уровня Σ, пересекает коническую поверхность (рис. 15,16). Результатом пересечения данной плоскости Σ с конической поверхностью будет гипербола. Построение гиперболы рассмотрено в примере 13 приложений. Поэтому помимо построения линии пересечения конической поверхности с цилиндрической (рис. 12, 13) необходимо построить гиперболу $L - 5 - E - 6 - 4 - M$, определив вершину гиперболы (E) и точки пересечения фронтальной проекции гиперболы с фронтальной проекцией цилиндра – F, G, (рис. 16).

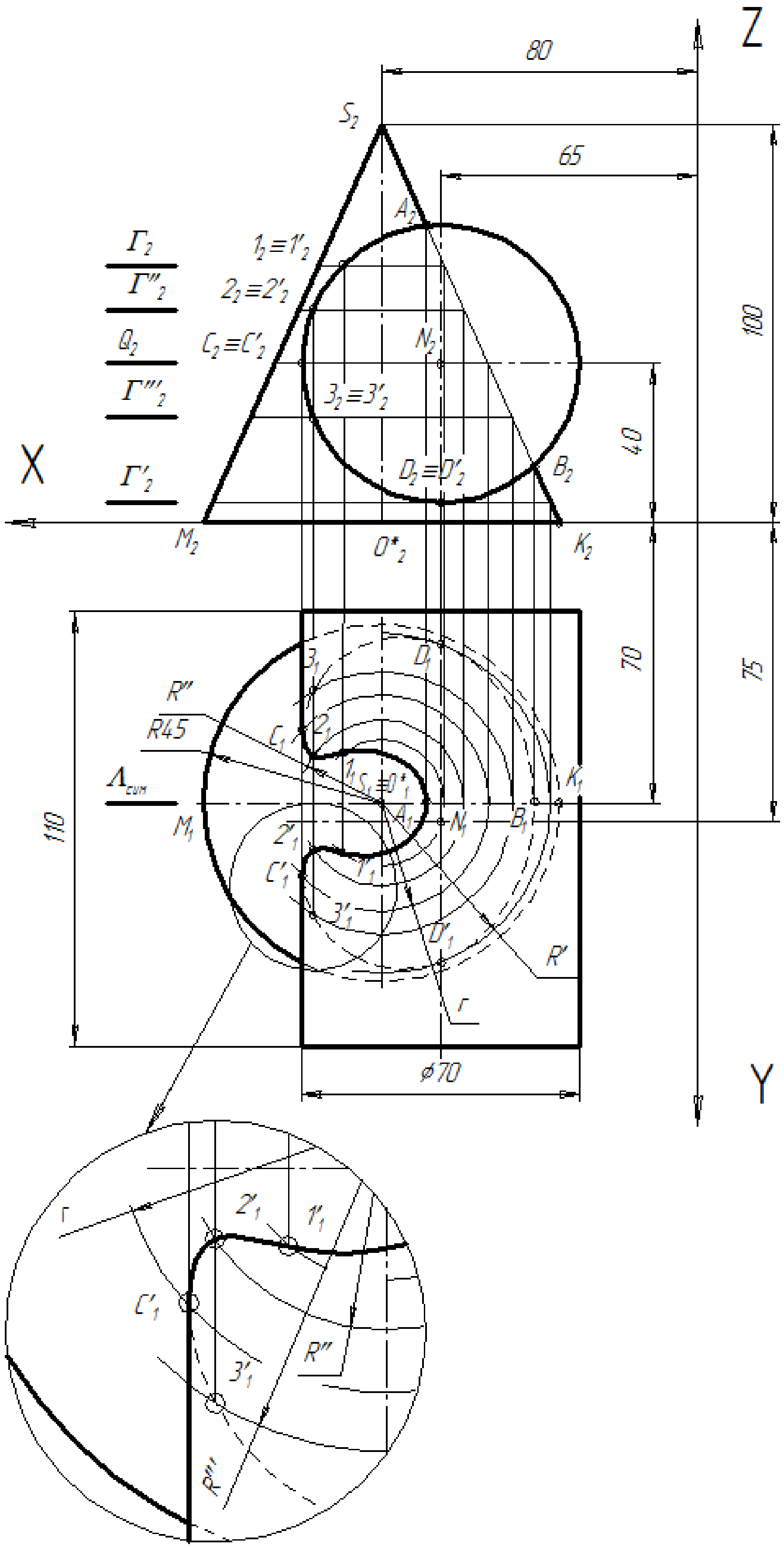

Z
80
S_2
65
A_2
$Г_2$
$1_2 \equiv 1'_2$
$Г''_2$
$2_2 \equiv 2'_2$
Q_2
$C_2 \equiv C'_2$
N_2
100
$Г'''_2$
$3_2 \equiv 3'_2$
40
X
$Г'_2$
$D_2 \equiv D'_2$
B_2
M_2
O^*_2
K_2
70
75
3_1
D_1
R''
R45
C_1
2_1
$Λ_{сим}$
$1_1 S_1 \equiv 0^*_1$
K_1
M_1
A_1
N_1
B_1
110
$2'_1$
C'_1
$1'_1$
$3'_1$
D'_1
R'
r
ϕ70
Y
r
$2'_1$
$1'_1$
C'_1
R''
$3'_1$
R'''

Рис.13

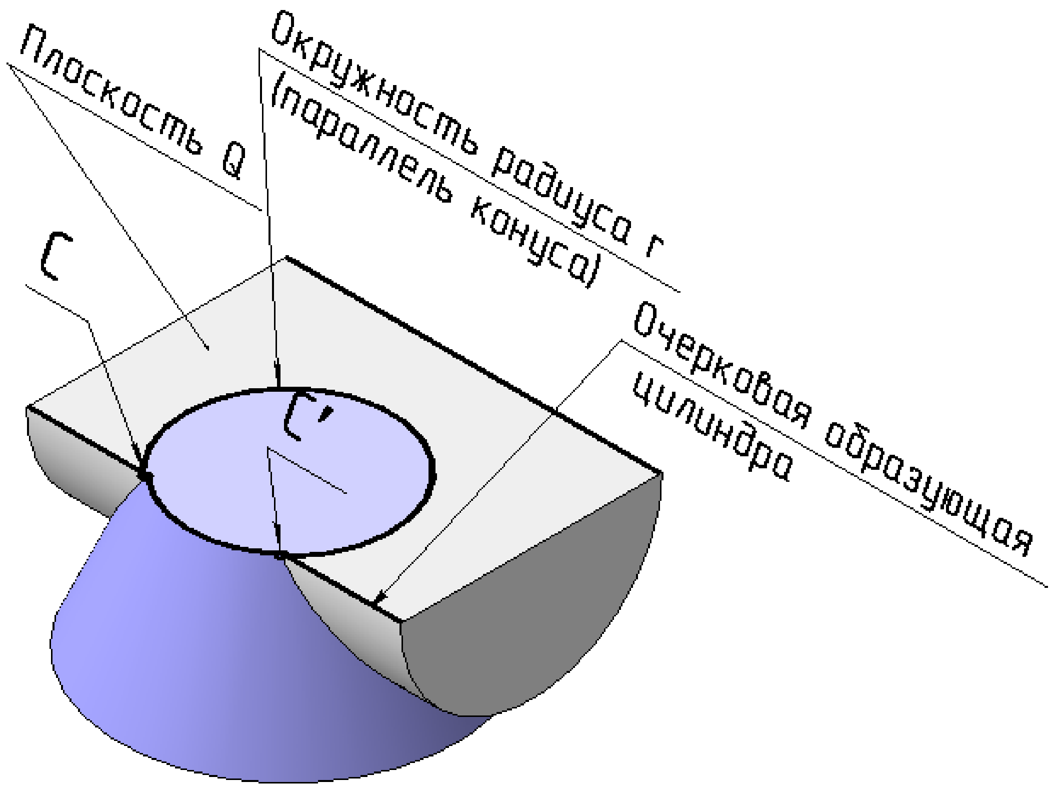

Плоскость Q
Окружность радиуса r
(параллель конуса)
C
C'
Очерковая образующая
цилиндра

Рис. 14

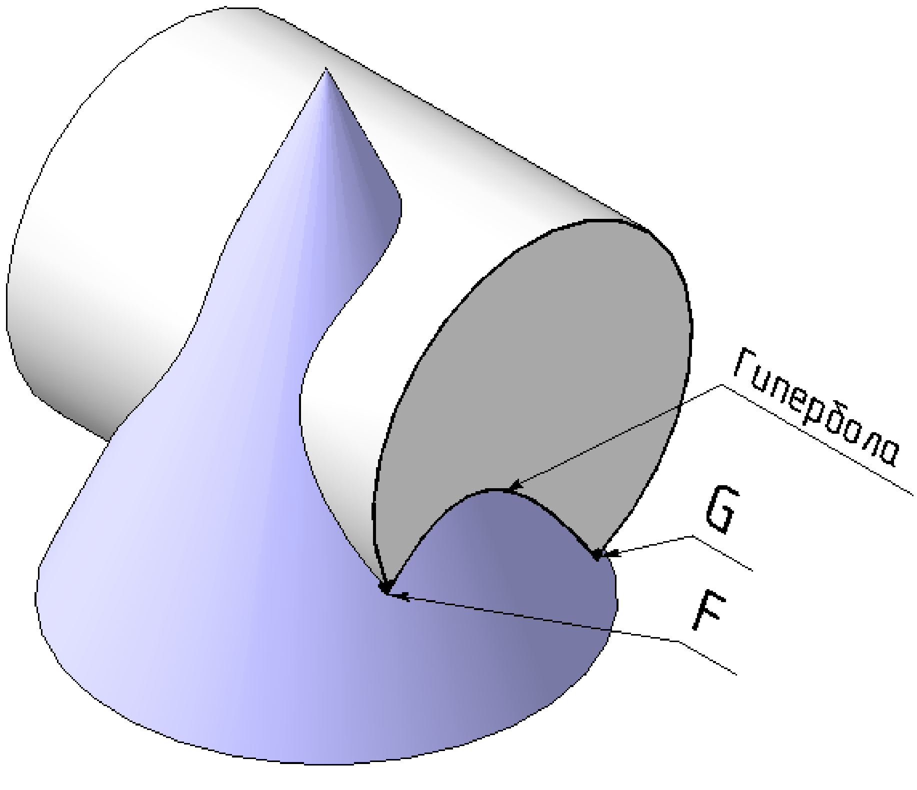

Гипербола
G
F

Рис. 15

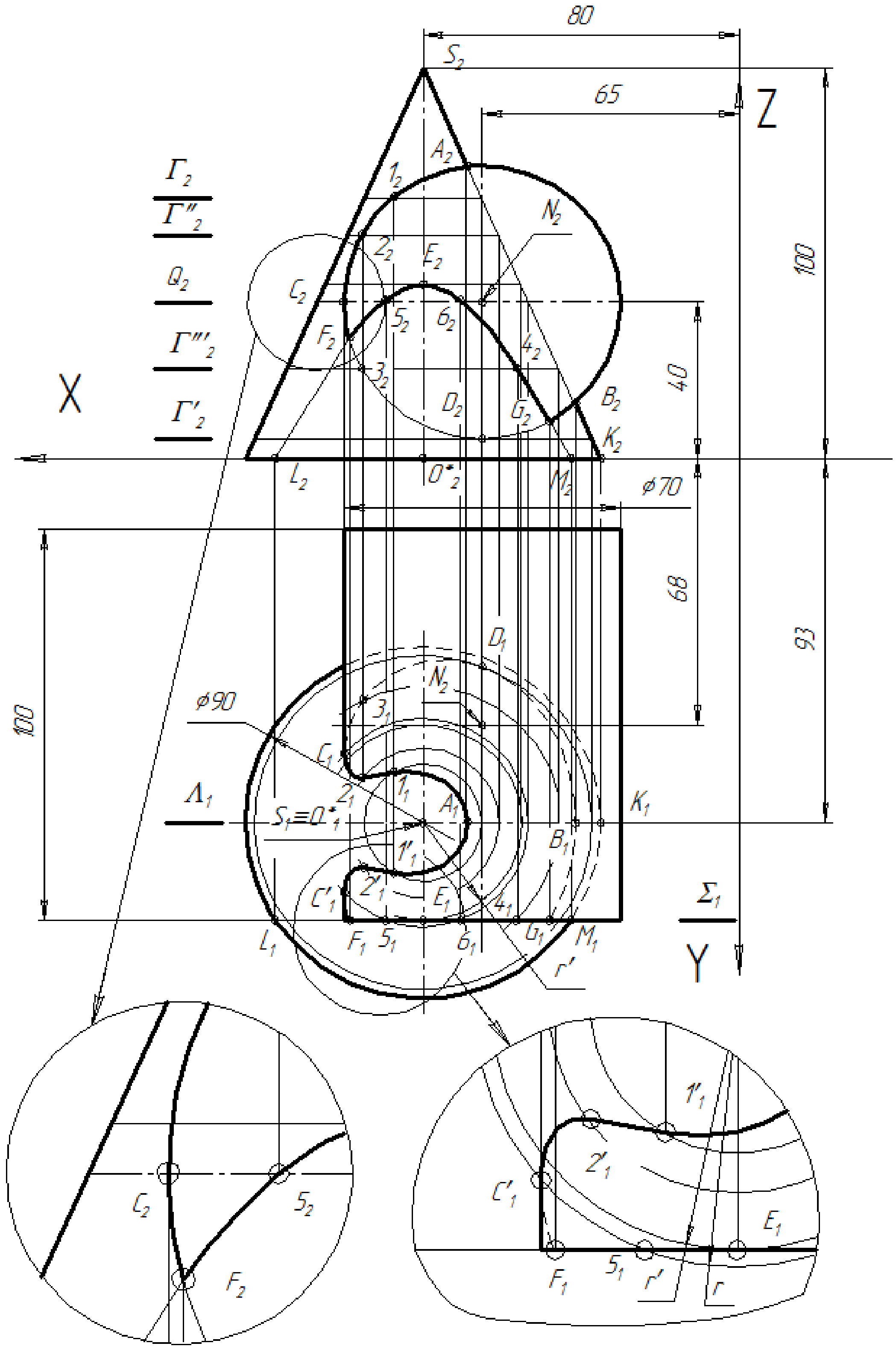


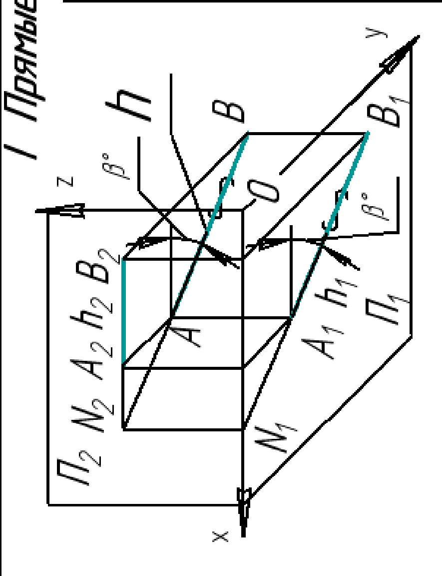
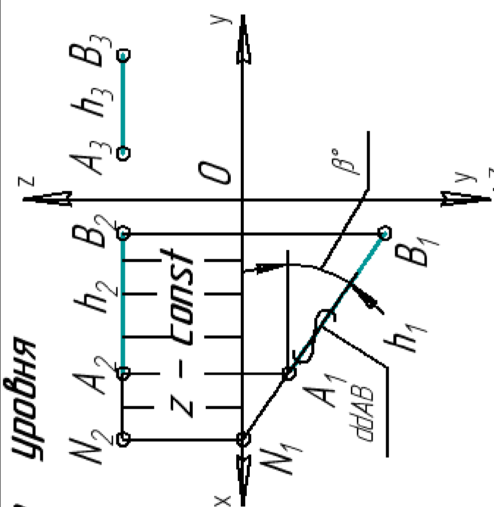
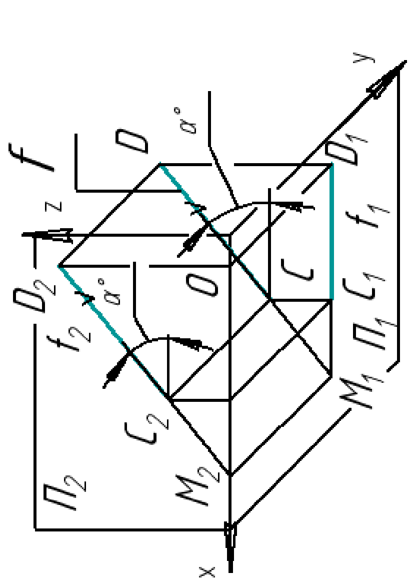
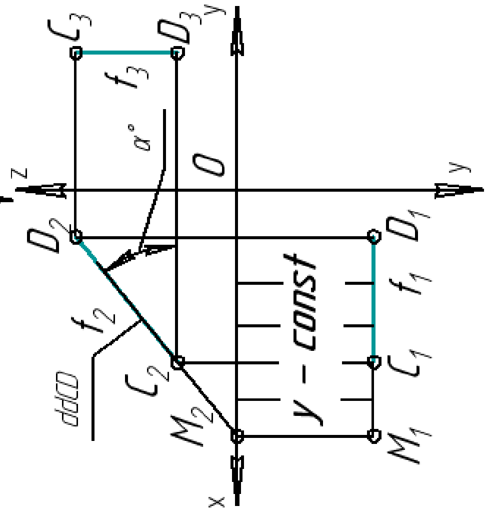
Рис. 16

Ниже приведены приложения, в которых для облегчения понимания студентами основных положений о точке, прямой и плоскости в виде таблиц излагаются исходные сведения о них, а также рассмотрены примеры решения некоторых задач, связанных с их применением при черчении.

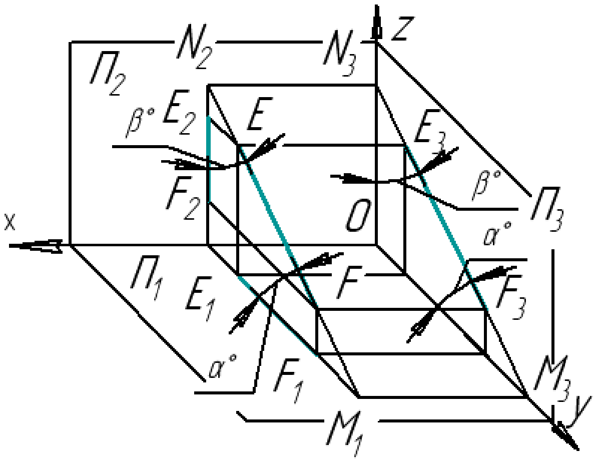
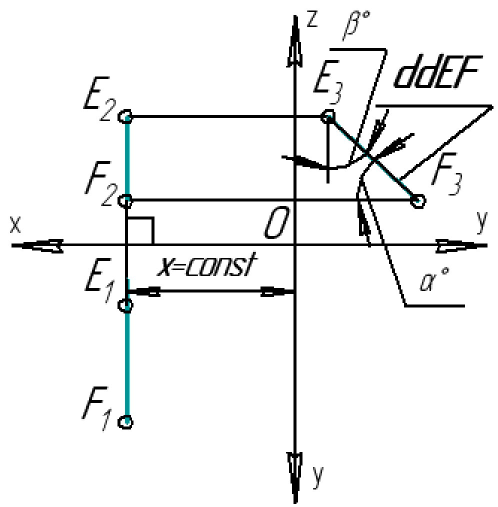
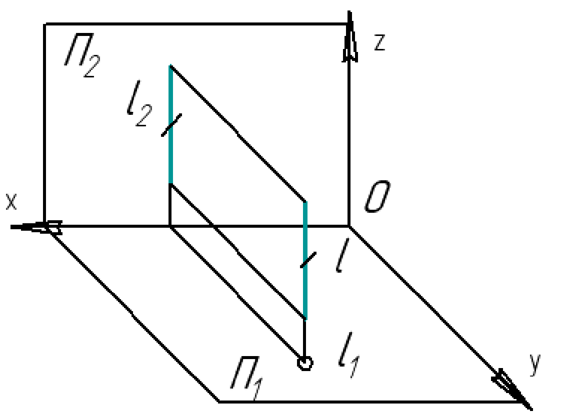
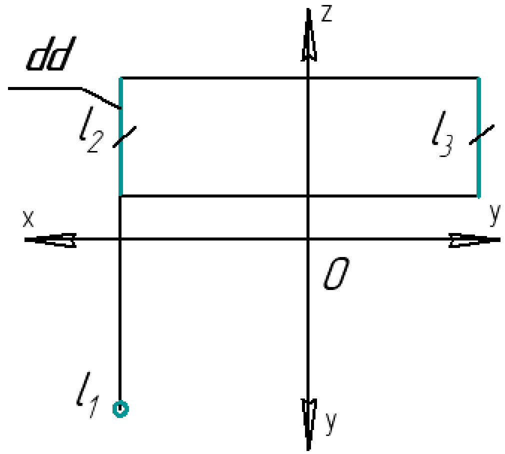
Приложения

Прямые частного положения

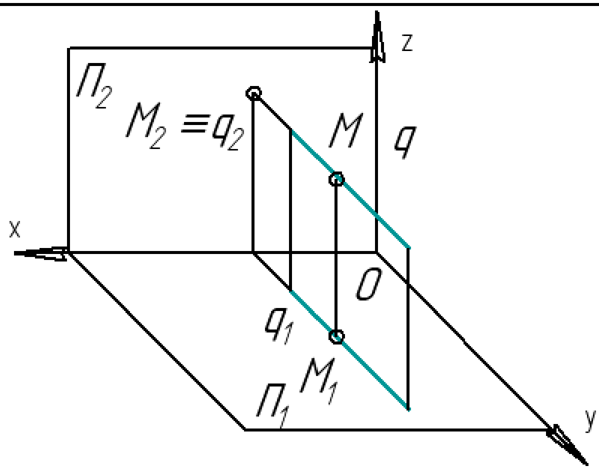
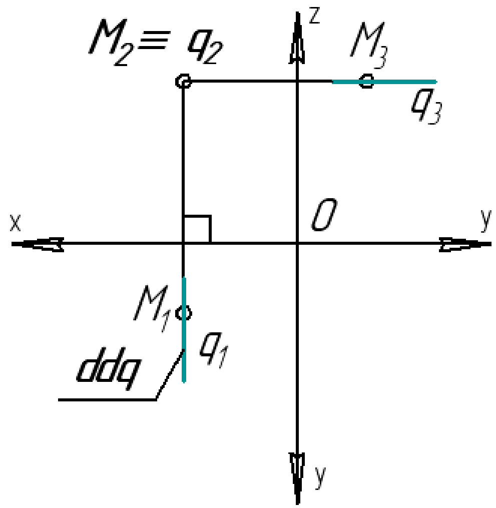
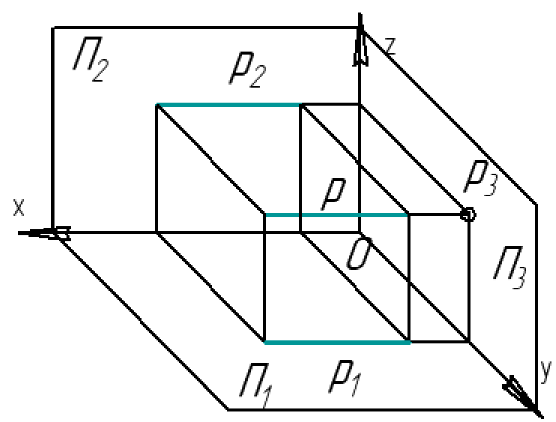
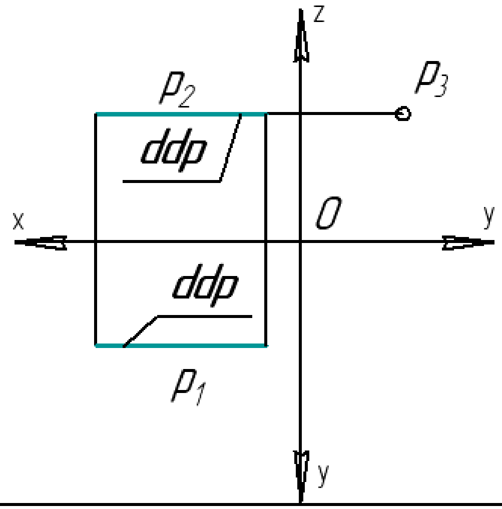
Таблица П1

Наименование и расположение	Наглядное изображение	Комплексный чертеж	Особенности на чертеже
1	2	3	4
I Прямые уровня			
1. $AB \parallel \Pi_1$ – прямая горизонтального уровня AB – горизонталь *h*			$h_2 \parallel ox$ h_1 – ddAB $\beta°$ – н.в. угла z – const
2. $CD \parallel \Pi_2$ – прямая фронтального уровня CD–фронталь *f*			$f_1 \parallel ox$ f_2 – ddCD $\alpha°$ – н.в. угла y=const

Продолжение таблицы П1

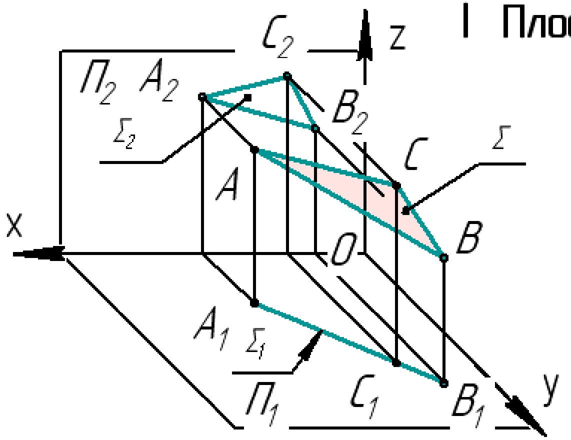
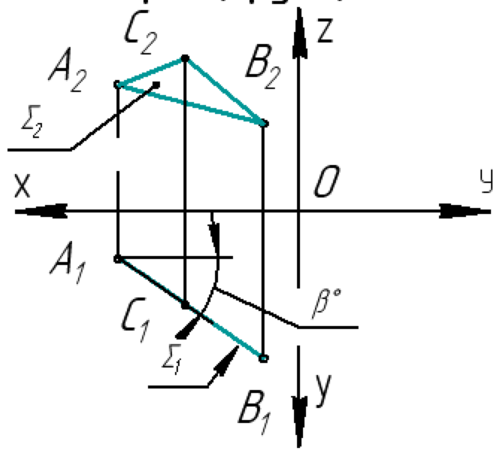
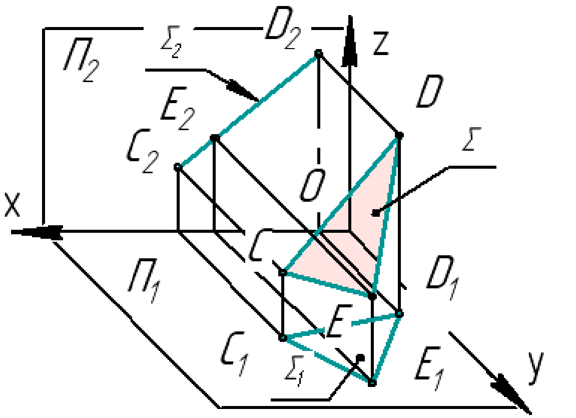
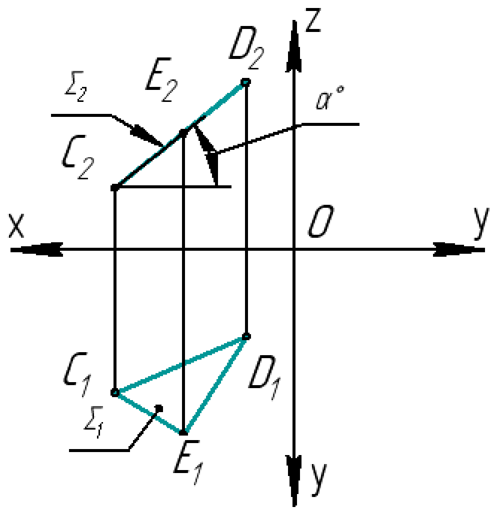
1	2	3	4
3. $EF \parallel \Pi_3$ – прямая профильного уровня			$EF \parallel \Pi_3$ $E_2F_2 \perp x$ $E_1F_1 \perp x$ $x = const$ E_3F_3 – ddEF $\alpha°$, $\beta°$ – н.в. углов
II Проецирующие прямые			
1. $l \perp \Pi_1$ l – горизонтально проецирующая прямая			l_1 – точка – вырожденная проекция прямой на Π_1 l_2 – ddl $\alpha°$ – 90° $\beta°$ – 0°

Продолжение таблицы П1

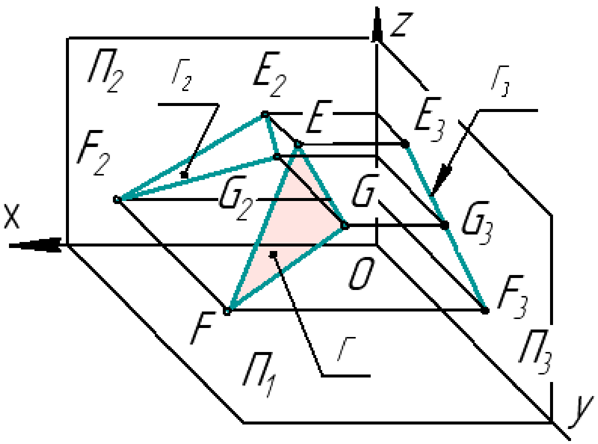
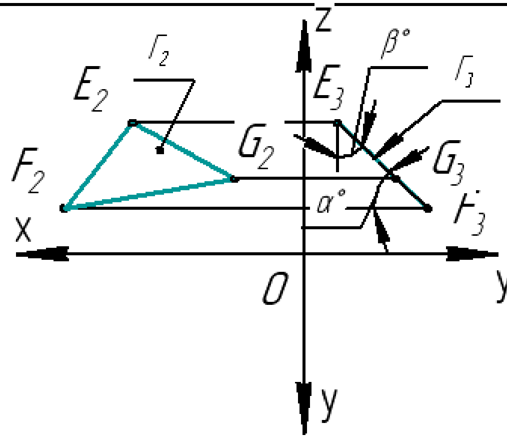
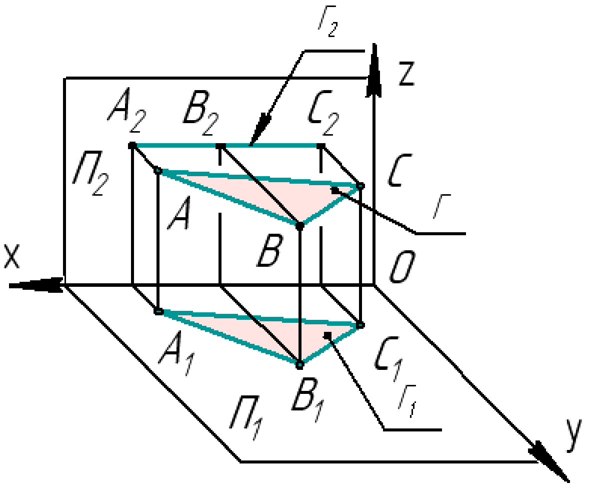
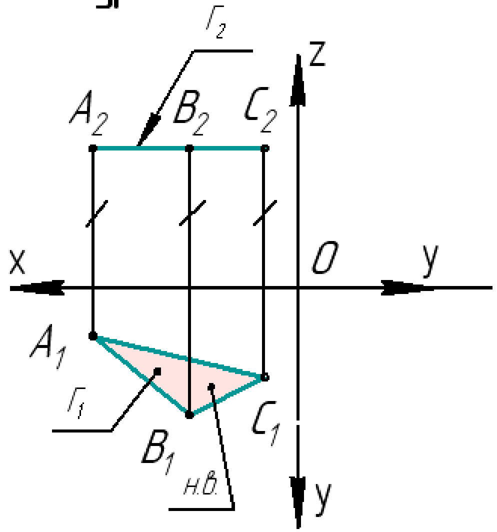
1	2	3	4
2. $q \perp \Pi_2$ q–фронтально проецирующая прямая			q_2 – точка вырожденная проекция прямой на Π_2 q_1 – ddq $\alpha° = 0°$ $\beta° = 90°$
$p \perp \Pi_3$ p–профильно проецирующая прямая			p_3 – точка вырожденная проекция прямой p на Π_3 $P_2 = P_1 = ddp$ $\alpha° = 0$ $\beta° = 0°$ $\gamma° = 90°$

Плоскости частного положения

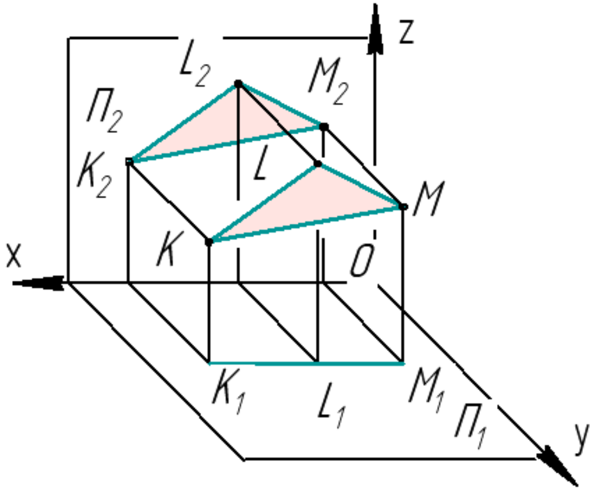
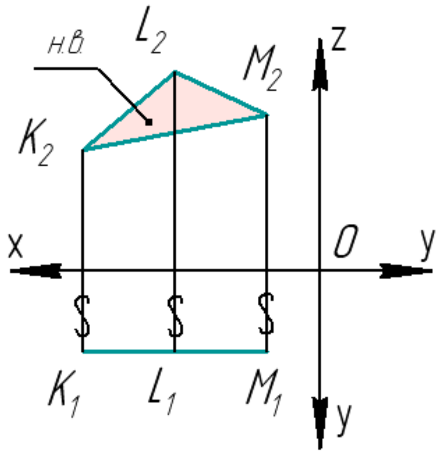
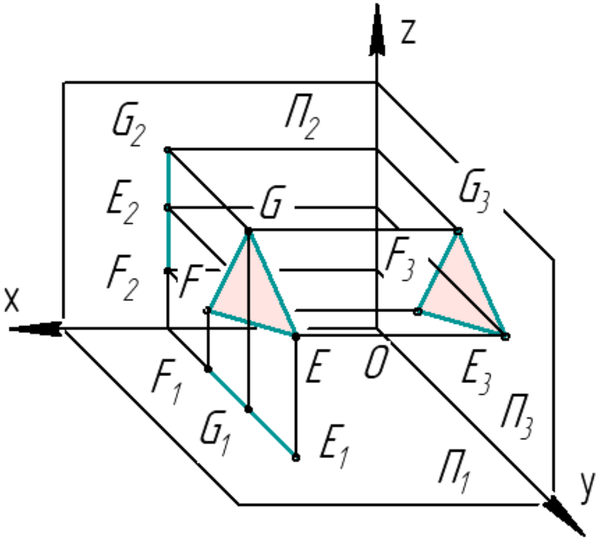
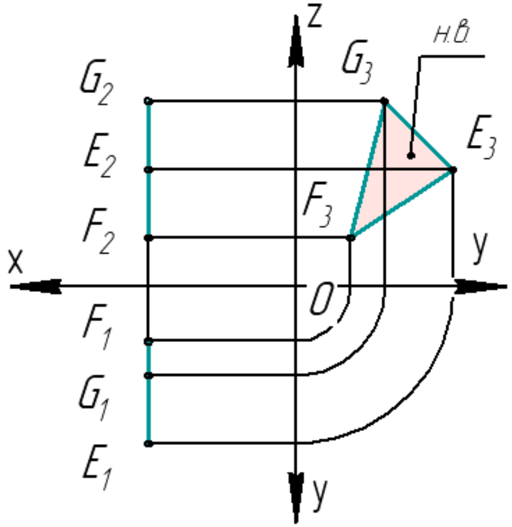
Таблица П2

Наименование и расположение	Наглядное изображение	Комплексный чертеж	Особенности на чертеже
1	2	3	4
I Плоскости проецирующие			
Горизонтально-проецирующая плоскость $\Sigma \perp \Pi_1$			Σ_1 – вырожденная проекция
Фронтально-проецирующая плоскость $\Sigma \perp \Pi_2$			Σ_2 - вырожденная проекция

Продолжение таблицы П2

1	2	3	4
Профильно-проецирующая плоскость Г(ΔEFG) ⊥ $П_3$			$Г_3$ – вырожденная проекция
	II Плоскости уровня		
Плоскость горизонталь-ного уровня Г(ΔABC)‖$П_1$			$A_2B_2C_2$‖x $A_1B_1C_1$ – н.в. ΔABC z_{ABC}=conct

Продолжение таблицы П2

1	2	3	4
Плоскость фронтального уровня **$\Delta KLM \parallel П_2$**			$K_1L_1M_1 \parallel x$ $\Delta K_2L_2M_2$ – н.в. Y_{KML}=const
Плоскость профильного уровня **$\Delta EFG \parallel П_3$**			$E_3F_3G_3$ – н.в. X_{EFG}=const

Пример 1. Построение проекций точки по координатам

Комплексным *называют чертеж двух или более связанных ортогональных проекций объекта.*

Трехмерные пространственные объекты удобно ориентировать относительно общепринятой прямоугольной декартовой системы координат.

В этой системе оси проекций *x, z* и *y* являются линиями пересечения фронтальной и горизонтальной плоскостей проекций, профильной плоскости проекций с фронтальной и горизонтальной. Точка *O* – начало координат – точка пересечения всех трех осей проекций (рис. П1,а).

На рис. П1,а представлены положительные направления осей проекций *x, y, z*. Обратные направления координатных осей, как указывалось ранее, считаются отрицательными.

Схема совмещения трех плоскостей проекций в одну плоскость чертежа показана на рис. П1,б. При этом ось *y* как бы “режется” на две части. Комплексный чертеж трех проекций точки *A* показан на рис. П1,г.

Если известны две проекции точки *A*, всегда можно построить ее третью проекцию (рис. П1,г). Для этого из фронтальной проекции A_2 проводят линию связи перпендикулярно оси z и от оси z вправо откладывают отрезок, равный координате y_A.

$A_{23}A_3 = y_A = A_{12}A_1$

Точка на чертеже определяется двумя проекциями (третью всегда можно построить) или тремя координатами, что равнозначно.

$A\ (A_1, A_2) \Leftrightarrow A(x, y, x)$

Координата *– число, определяющее положение точки в пространстве, которое измеряется в миллиметрах (мм) по соответствующей оси и* *<u>равно расстоянию от точки до соответствующей плоскости проекций.</u>*

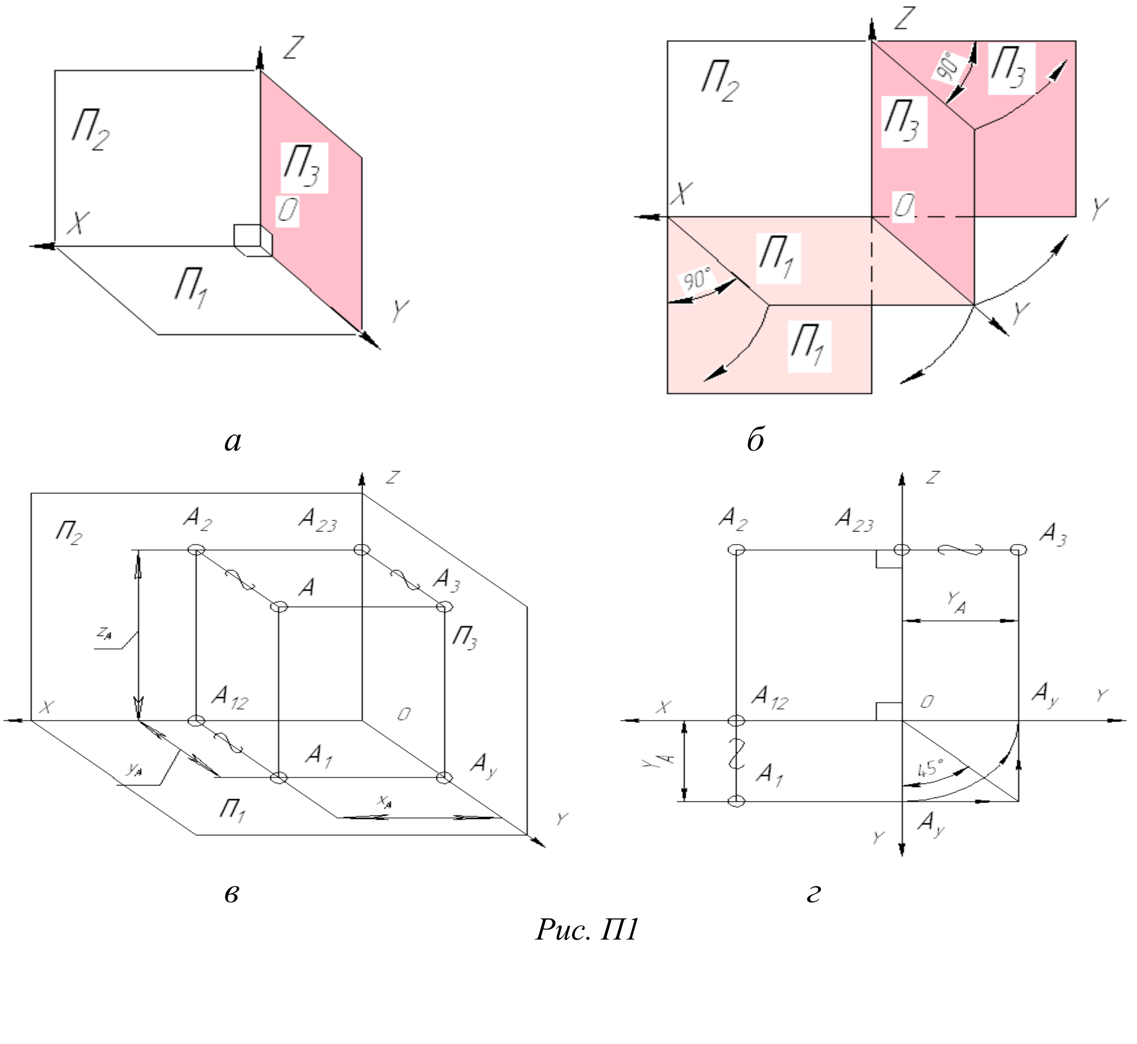


Рис. П1

Числовые величины, выражающие координаты точки A, например, x = 35 мм, y = 25 мм, z = 40 мм, записываются так: A(35, 25, 40)

Построить три проекции точки A (рис. П2). Для этого по оси x_{12} от начала координат (0) отложим значение x = 35 мм влево. Проведем линию связи перпендикулярно оси x_{12}, на которой вниз по направлению оси y отложим его значение y_A = 25 мм и получим горизонтальную проекцию точки A_1, а вверх – координату z_A = 40 мм и получим фронтальную проекцию точки A_2.

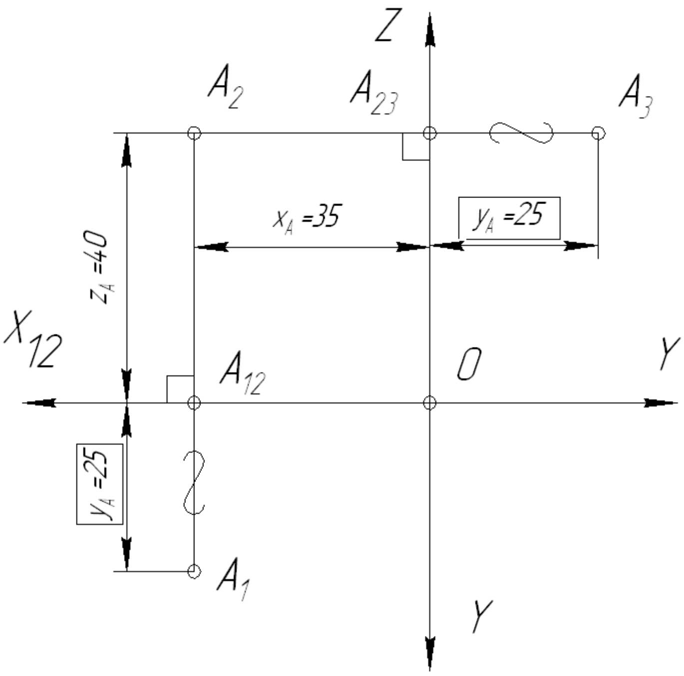


Рис. П2

Из A_2 проведем линию связи перпендикулярно оси z и от оси z вправо отложим значение y_A = 25 мм, т.к. $A_{12}A_1 = A_{23}A_3 = y_A$ и обозначим полученную профильную проекцию точки A_3.

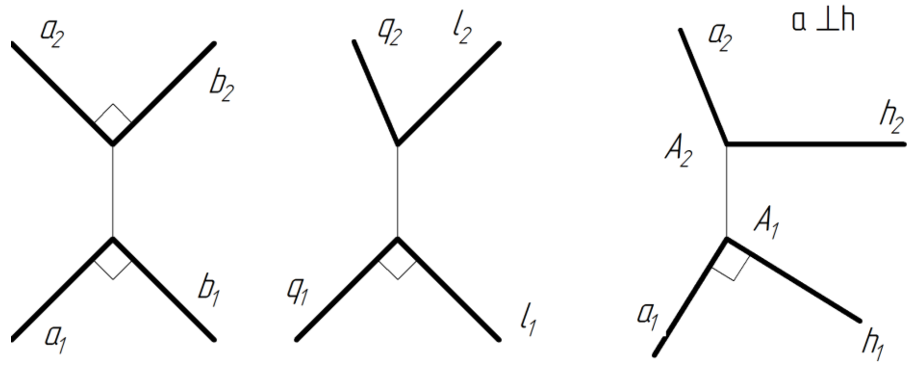
На каком расстоянии от горизонтальной плоскости проекций находится точка A? Это высота точки – координата $z_A = A_2A_{12}$ = 40 мм (рис. П2).

Как определить, на каком расстоянии находится точка A от фронтальной плоскости проекций? Это глубина точки – координата $y_A = A_1A_{12}$ = 25 мм (рис. П2).

Во всех задачах условия заданы координатами точек.

Пример 2. Проецирование прямого угла

Прямой угол между пересекающимися прямыми проецируется в натуральную величину только в том случае, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая данной плоскости не перпендикулярна. Прямая, параллельная плоскости проекций, является линией уровня (табл. П2 приложение).



а *б* *в*

Рис. П3

На рис. П3 на горизонтальных проекциях $a_1 \perp b_1$, $q_1 \perp l_1$, $a_1 \perp h_1$.

Какой из этих углов и в пространстве прямой? Согласно теореме о проецировании прямого угла, угол в пространстве равен 90°, если одна его сторона на комплексном чертеже – линия уровня. Этому условию соответствует только угол на рис. П3 *в*.

Пример 3. Построение перпендикуляра к прямой общего положения

Провести перпендикуляр из точки A к прямой l – общего положения. На рис. П4 приведены два варианта решения задачи. На рис. П4 *а* проведен перпендикуляр к l_2, а на рис. П4*б* – к l_1. Чтобы угол 90° проецировался в натуральную величину, необходимо, чтобы одна его сторона была бы линией уровня. Так как l –-прямая общего положения, то линией уровня обязан быть проведенный перпендикуляр.

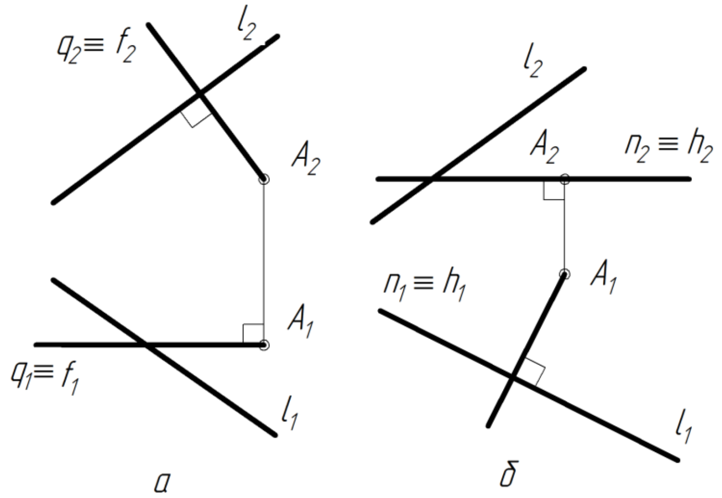


Рис. П4

Если $q_2 \perp l_2$, то q – фронталь, а следовательно, строим $f_1 \parallel x$. Если $n_1 \perp l_1$, то n – горизонталь, поэтому строим $h_2 \parallel x$.

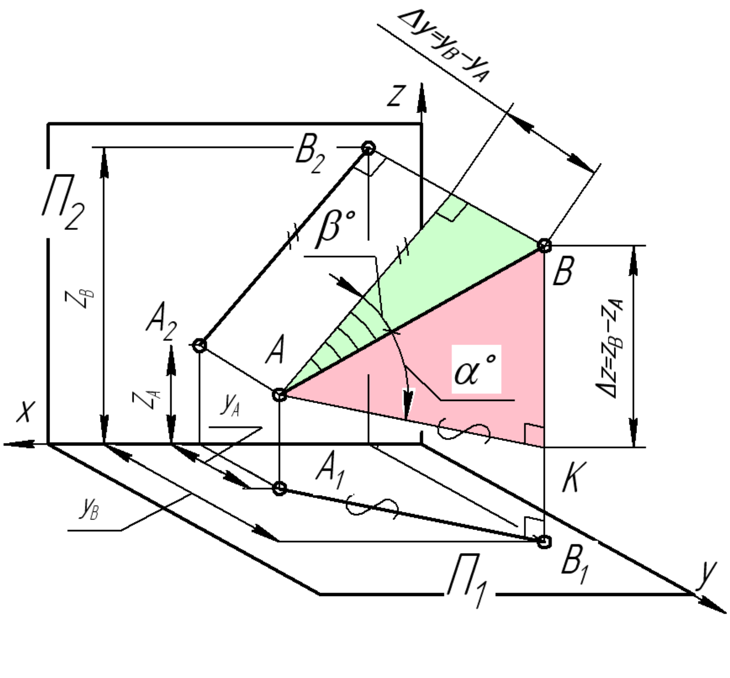
Пример 4. Определение длины отрезка прямой общего положения и углов его наклона к плоскостям проекций

Действительная длина отрезка прямой общего положения *– гипотенуза прямоугольного треугольника, первый катет которого равен одной из проекций отрезка, а второй катет равен разности расстояний от концов отрезка до той плоскости проекций, на которой взят первый катет.*

На рис. П5*а* и *б* указаны разности соответствующих координат (Δz, Δy), а в табл. П3 показано решение задач на определение по приведенному правилу действительной величины прямой АВ и углов α°, β° ее наклона к Π_1 и Π_2.

Примем горизонтальную проекцию отрезка АВ за первый катет. Тогда второй катет равен Δz. Постройте его направление под углом 90° к A_1B_1 и отложите на нем величину Δz, измеренную на фронтальной (на другой) проекции отрезка. Угол наклона прямой АВ к горизонтальной плоскости проекций (α°) – это угол между действительной длиной прямой АВ (гипотенузой) и ее горизонтальной проекцией.

Если за первый катет взять фронтальную проекцию отрезка A_2B_2 (табл. П1 приложения), то второй катет - Δy, величину которого измеряют на горизонтальной (на другой) проекции и откладывают на перпендикуляре к A_2B_2. Угол наклона прямой АВ к фронтальной плоскости проекций (β°) – это угол между действительной длиной прямой АВ (гипотенузой) и ее фронтальной проекцией.



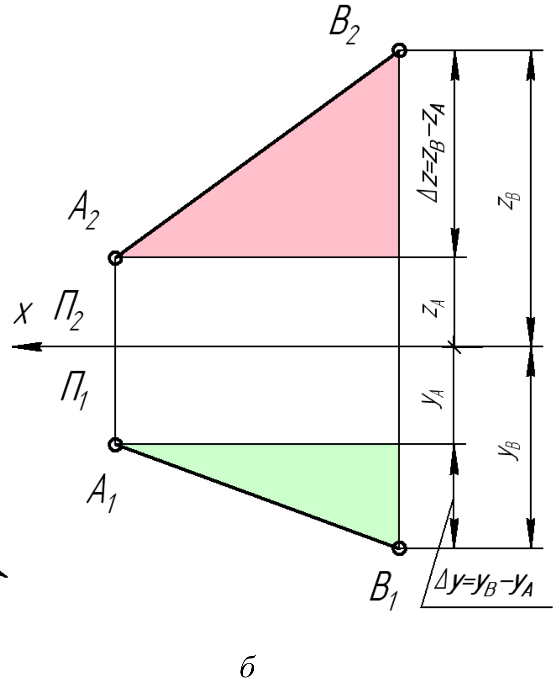


Рис. П5

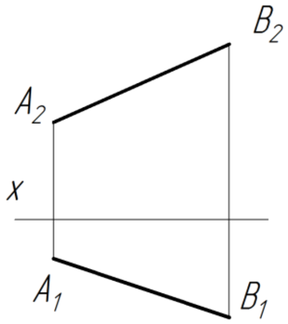
Согласно рассмотренному правилу решаются три типичные задачи:

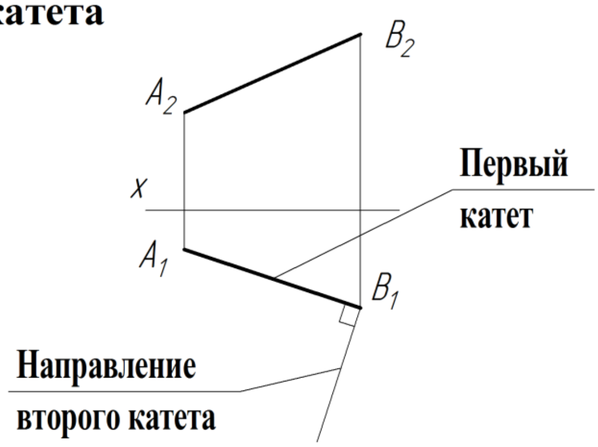
1. Определить действительную длину отрезка АВ и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций (α°).
2. Определить действительную длину отрезка АВ и угол его наклона к фронтальной плоскости проекций (β°).
3. От точки А на прямой l отложить отрезок АВ заданной длины.

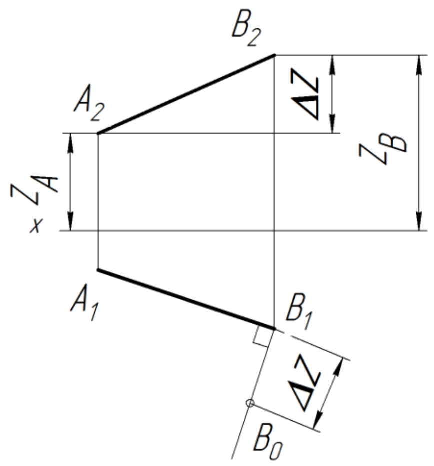
Поэтапное решение этих задач приводится в табл. П3 приложений.

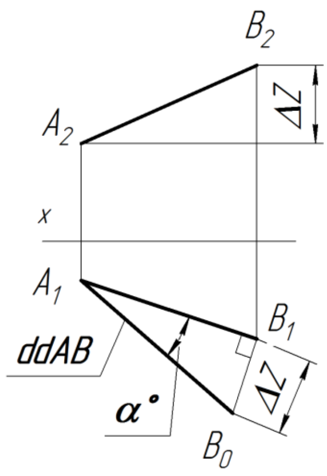
Таблица П3

<table>
<tr><th colspan="2">Первая задача</th></tr>
<tr><th>Исходный чертеж</th><th>1 шаг</th></tr>
<tr>
<td>Определите действительную длину отрезка AB и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций $П_1$

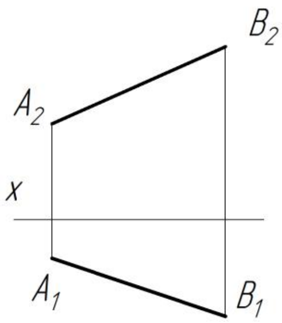
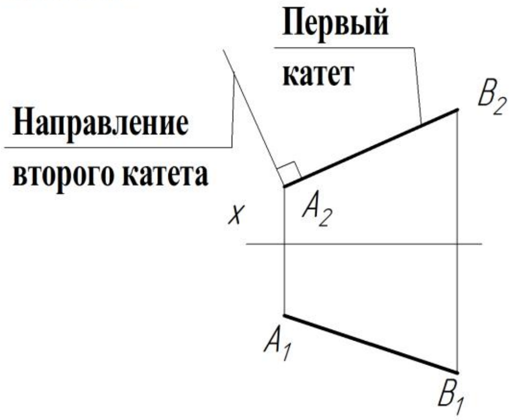
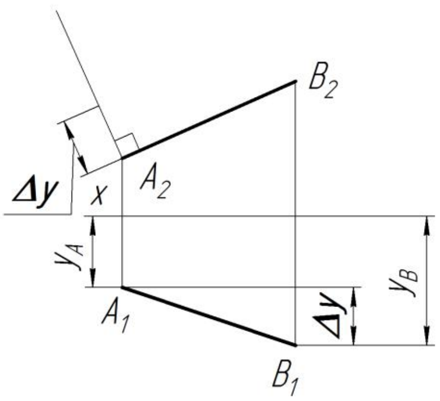
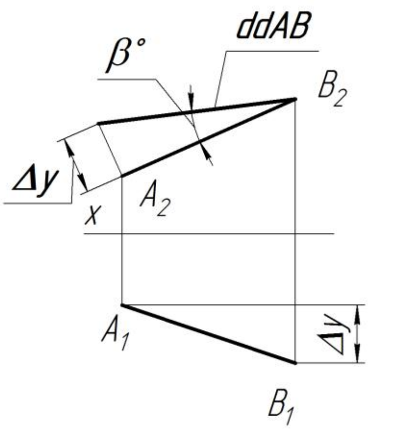

</td>
<td>Для определения угла наклона прямой AB к плоскости $П_1$ первый катет - $A_1 B_1$. Из точки B_1 проведите перпендикулярную прямую - направление второго катета


</td>
</tr>
<tr><th>2 шаг</th><th>3 шаг</th></tr>
<tr>
<td>Измерьте разность координат точек A и B:)$Z=Z_B - Z_A$ и отложите полученную величину на направлении второго катета

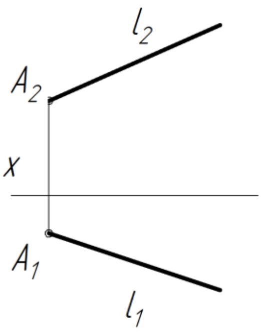
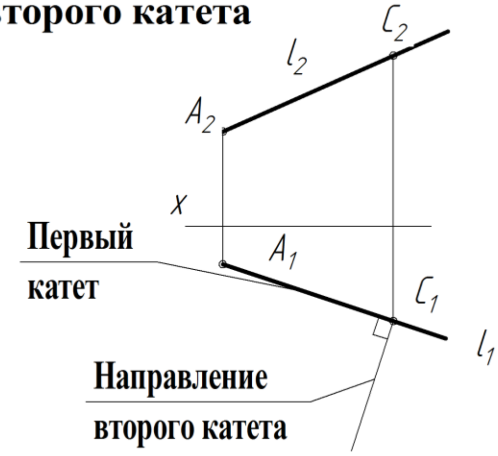
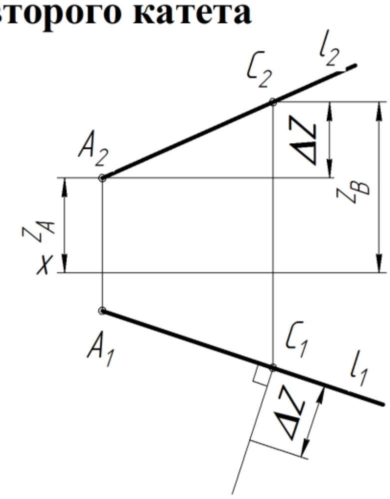
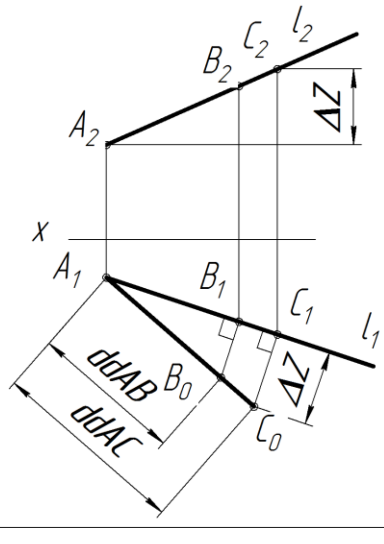

</td>
<td>Обозначьте гипотенузу прямоугольного треугольника ddAB и угол наклона α° к плоскости $П_1$


</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы П3

<table>
<tr><th colspan="2">Вторая задача</th></tr>
<tr><th>Исходный чертеж</th><th>1 шаг</th></tr>
<tr><td>Определите действительную длину отрезка AB и угол его наклона к фронтальной плоскости проекций $П_2$
</td><td>Для определения угла наклона прямой AB к плоскости $П_2$ первый катет - A_2B_2. Из точки A_2 проведите перпендикулярную прямую - направление второго катета
</td></tr>
<tr><th>2 шаг</th><th>3 шаг</th></tr>
<tr><td>Измерьте разность координат точек A и B: $)Y=Y_B - Y_A$ и отложите полученную величину на направлении второго катета
</td><td>Обозначьте гипотенузу прямоугольного треугольника ddAB и угол наклона $° к плоскости $П_2$
</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы П3

Третья задача	
Исходный чертеж	**1 шаг**
От точки *A* на прямой *l* отложить отрезок *AB*, заданной длины.  	**На прямой *l* отметьте произвольную точку *C*. Первый катет - $A_1 C_1$. Из точки C_1 проведите перпендикулярную прямую - направление второго катета** 
2 шаг	**3 шаг**
Измерьте разность координат точек *A* и *C*: $\Delta Z = Z_C - Z_A$ и отложите полученную величину на направлении второго катета  	**На действительной длине отрезка $A_1 C_0$ отложите заданную величину $A_1 B_0$. Проведите $B_0 B_1$ ll $C_0 C_1$ для построения B_1. С помощью линии связи определите фронтальную проекцию точки *B*** 

Пример 5. Построение перпендикуляра к плоскости общего положения

Через точку *K* провести прямую $l \perp \Delta ABC$ (рис. П9).

Из элементарной геометрии известно, что прямая *l* перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости. По теореме о проецировании прямого угла угол 90° проецируется без искажения, если одна его сторона – линия уровня. Следовательно, в качестве пересекающихся прямых в плоскости *Г* можно использовать только линии уровня *h* и *f* (рис. П6). При помощи горизонтали и фронтали всегда можно определить направление проекций перпендикуляра на комплексном чертеже, что следует из рис. П7. При этом пересекающимися в одной точке *A* линиями уровня задают плоскость $Г(h \cap f = A)$. На рис. П7 проиллюстрировано правило:

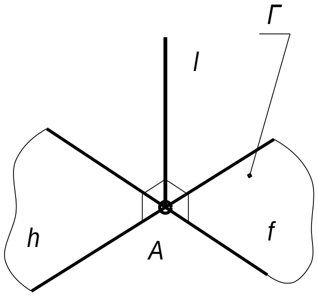


Рис. П6

Прямая l перпендикулярна плоскости Г в пространстве, если на комплексном чертеже $l_1 \perp h_1$, а $l_2 \perp f_2$ этой плоскости.

Таким образом, для построения перпендикуляра к плоскости необходимо провести в ней линии уровня – горизонталь (*h*) и фронталь (*f*). На рис. П4 показаны примеры построения проекций *h* и *f* в плоскости ΔABC. Построение *h* (рис. П8 *а*) начинают с ее известной фронтальной проекции (h_2).

При этом можно h_2 провести в любом месте плоскости, например $3_2 2_2$, но рациональнее провести h_2 через вершину треугольника – точку *A* для сокращения числа построений. При этом нужно по линии связи построить только одну точку 1_1, и горизонтальная проекция горизонтали (h_1) построена.

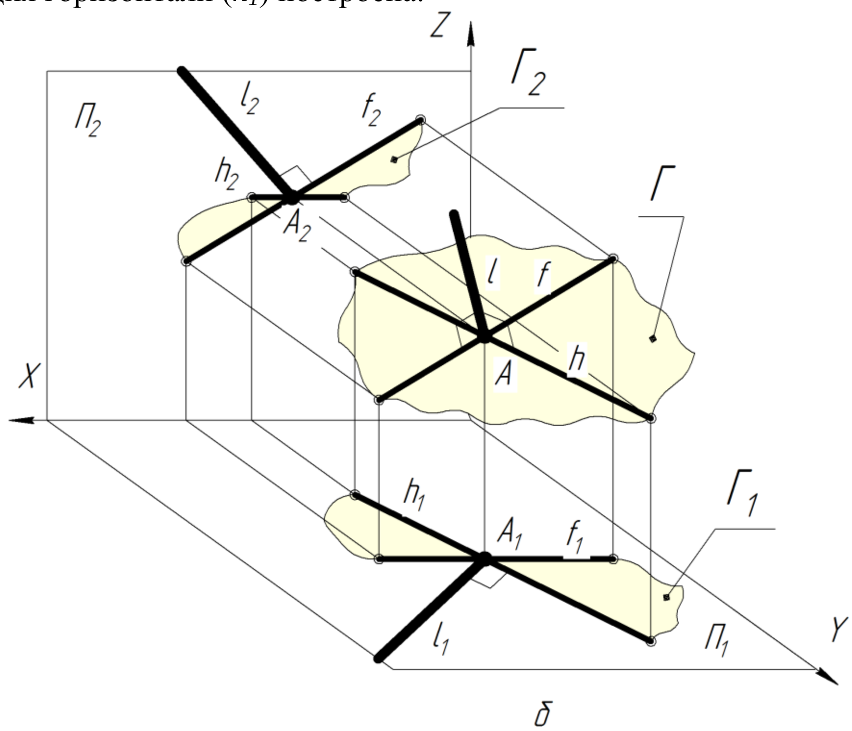


Рис. П7

На рис. П8 *б* показано построение проекции *f* в ΔABC, которое начинают с проведения известной горизонтальной проекции фронтали f_1 ($f_1 \| OX$). Проводим f_1 через вершину

C. Отметим 1_1 и по линии связи перестроим 1_2 на A_2B_2, через C_2 и 1_2 проводим фронтальную проекцию фронтали (f_2).

Необходимо иметь в виду, что h и f лежат в одной плоскости и поэтому пересекаются. Следовательно, проекции точки пересечения их проекций F_1 и F_2 должны располагаться на общей линии связи, что показано на рис. П8 *в*.

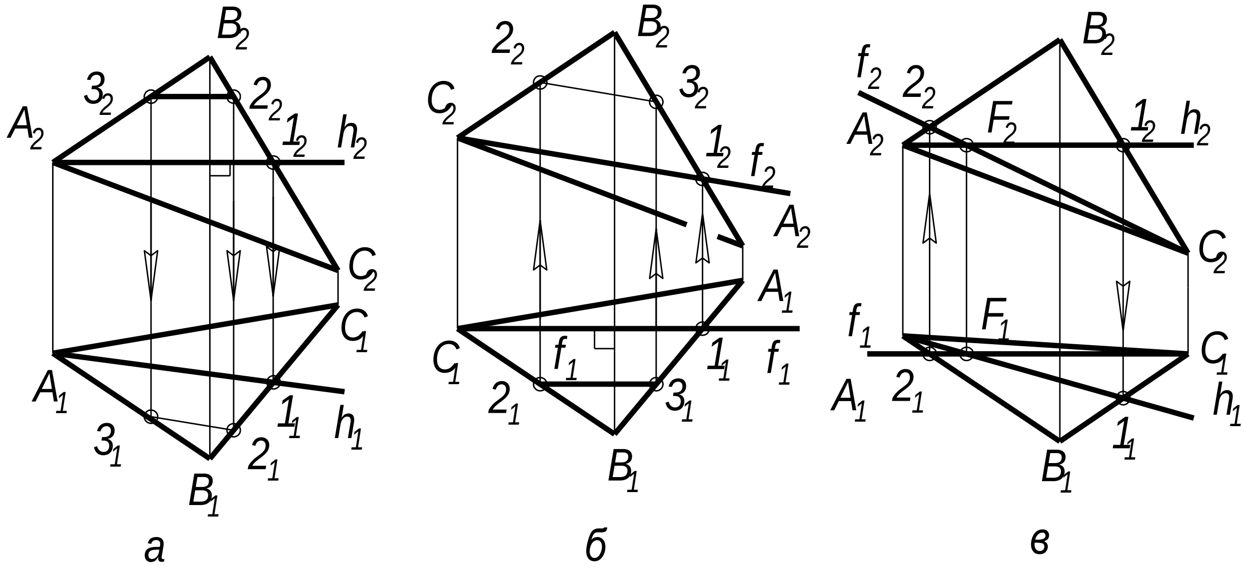


Рис. П8

Для решения задачи, приведенной на рис. П9, проводим в ΔABC проекции горизонтали (h) и фронтали (f). Через точку K проводим прямую l:

$$l \perp \Delta ABC \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} l_1 \perp h_1 \\ l_2 \perp f_2 \end{matrix} \right\}$$

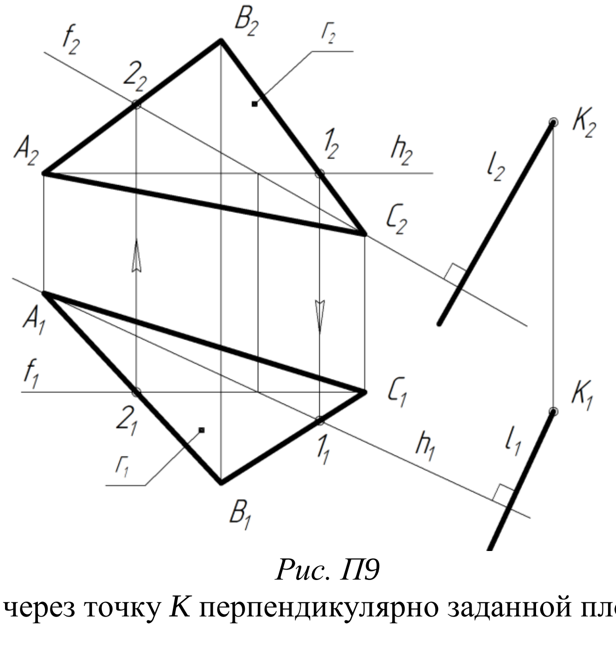


Рис. П9

Прямая, проведенная через точку K перпендикулярно заданной плоскости, построена.

Пример 6. Определение точки пересечения прямой с плоскостью

Определить точку пересечения прямой l с плоскостью ABC.

На рис. П10 приведен пример решения этой задачи на наглядном, а на рис. П11 - на комплексном чертеже.

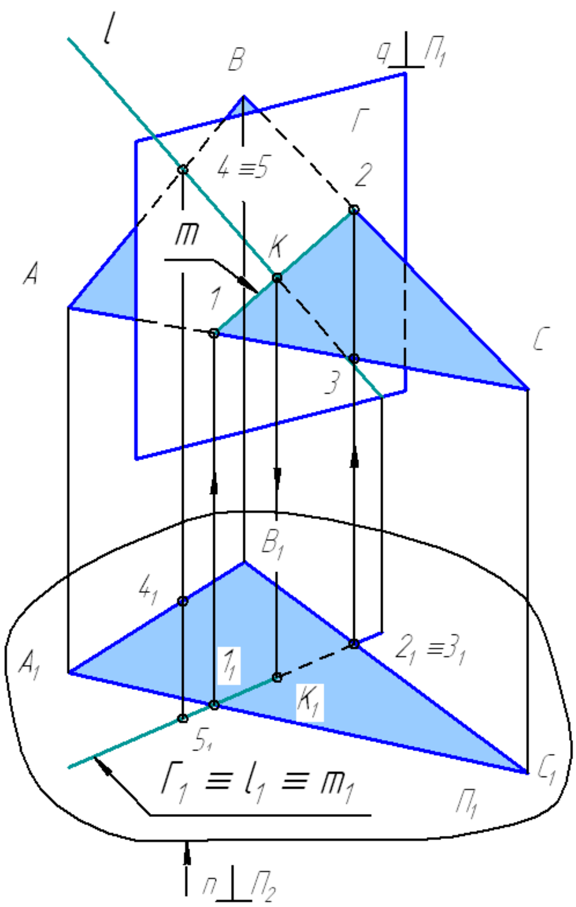


Рис. П10

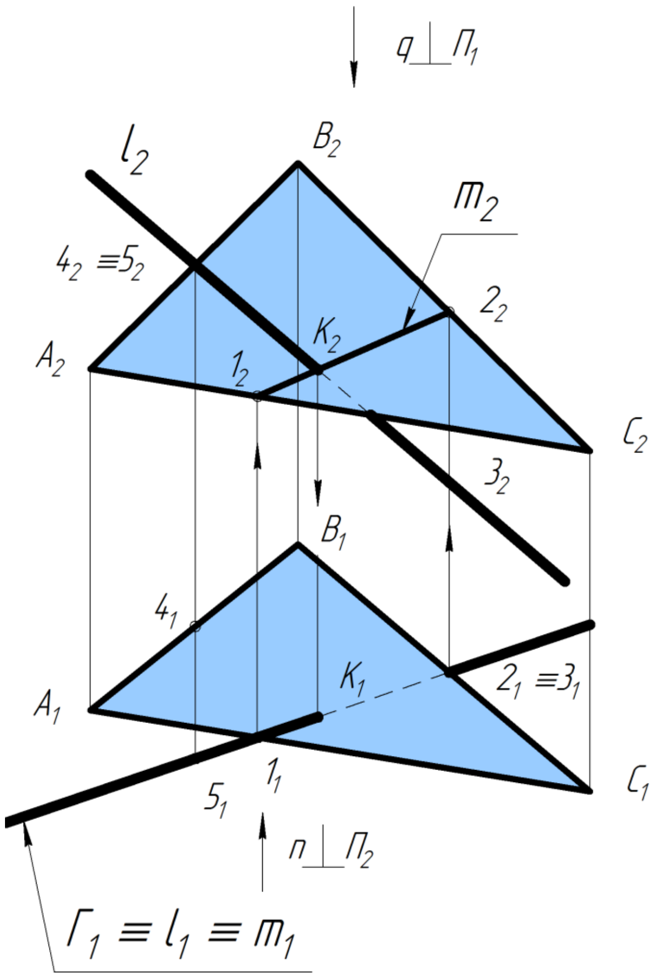


Рис. П11

Последовательность решения задачи

1. Заключаем прямую l во вспомогательную плоскость – посредник $Г$ (в данном примере горизонтально-проецирующую). Так как $Г \perp П_1$ на рис. П7 строим только ее вырожденную проекцию, которая совпадает с горизонтальной проекцией прямой ($Г_1 \equiv l_1$).
2. Строим линию пересечения двух плоскостей $Г \cap \Delta ABC = 1\text{-}2$. Так как $Г \perp П_1$, проекция линии $1_1 2_1$ определяется сразу, поскольку $Г_1 \equiv 1_1 2_1$, а $1_2 2_2$ строится при помощи линий связи.
3. Построенная линия пересекается с заданной прямой l в общей точке K. $1\text{-}2 \cap l = K$ ($1_2 2_2 \cap l_2 = K_2$; $K_2 \rightarrow K_1$).

В заключение определяем видимость прямой l и плоскости ΔABC. Видимость определяют с помощью конкурирующих точек.

«Конкурирующими» называют точки, у которых одна проекция совпадает, так как *эти точки располагаются на общем проецирующем луче (на одной линии связи).* На рис. П12 *а* это точки A и B, у которых совпадают их фронтальные проекции, а также точки C и D, у которых совпадают горизонтальные проекции (рис. П12*б*).На рис. П12 *а* видно, что точка A расположена впереди и закрывает точку B на виде спереди, следовательно, и прямая b, которая проходит через точку B, будет располагаться дальше от наблюдателя, чем прямая *a*. Аналогично точка *C* расположена выше и закрывает точку *D*, через которую проходит прямая *b*, расположенная ниже прямой *a*.

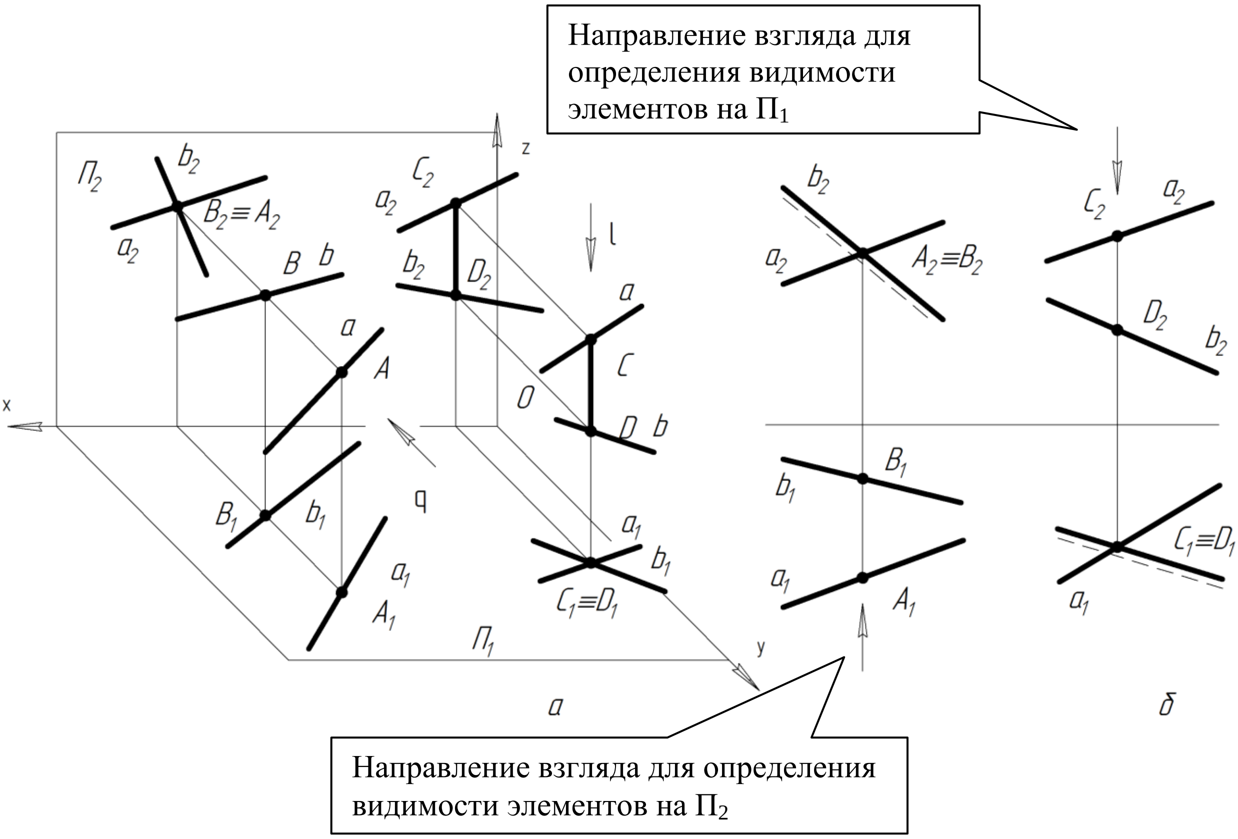


Рис. П12

На рис. П11 горизонтально-конкурирующими точками являются точки *2* и *3*. По ним определяют видимость на горизонтальной проекции (на виде сверху). По фронтально-конкурирующим точкам *4* и *5* определяют видимость на фронтальной проекции (на виде спереди).

Точка *2* принадлежит ΔABC, расположена выше точки *3*, принадлежащей прямой *l*, а поэтому на Π_1 участок $K_1 3_1$ проекции l_1 будет невидимым.

Аналогично точка *5*, принадлежащая прямой *l*, расположена ближе к наблюдателю, чем точка *4*, лежащая в плоскости ΔABC. Это видно на Π_1. Поэтому на Π_2 участок $5_2 K_2$ проекции l_2 будет видимым.

Пример 7. Построение прямой и плоскости, параллельных плоскости общего положения

Через точку *E* провести прямую $l \,||\, \Delta ABC$, а через точку *N* провести плоскость $\Omega \,||\, \Delta ABC$.

Известно, *что прямая параллельна плоскости, если она параллельна хотя бы одной прямой, лежащей в этой плоскости* (рис. П14*а*).

$$l\,//a;\ a\subset\Gamma \Rightarrow l\,//\Gamma$$

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис.П13*б*).

- $a\subset\Gamma;\ l\subset\Gamma;\ a\cap l = K;$
- $m\subset\Omega;\ q\subset\Omega;\ m\cap q = N;$
- $a\,||\,q;\ m\,||\,l \Rightarrow \Gamma\,||\,\Omega$

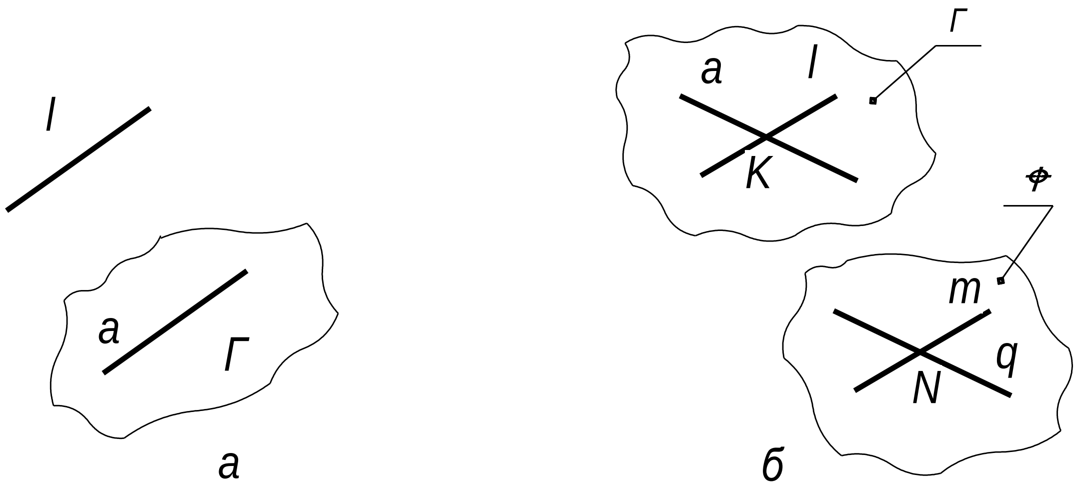


Рис. П13

На рис. П14 показаны примеры построения на комплексном чертеже прямой l и плоскости Ω, параллельных заданной плоскости ΔABC. При этом на комплексном чертеже должно быть выполнено условие параллельности одноименных проекций пересекающихся линий в двух соответствующих плоскостях [1].

Плоскость Ω задана двумя пересекающимися прямыми $m \cap q = N$; при этом $m \,||\, AB$, а $q \,||\, AC$.

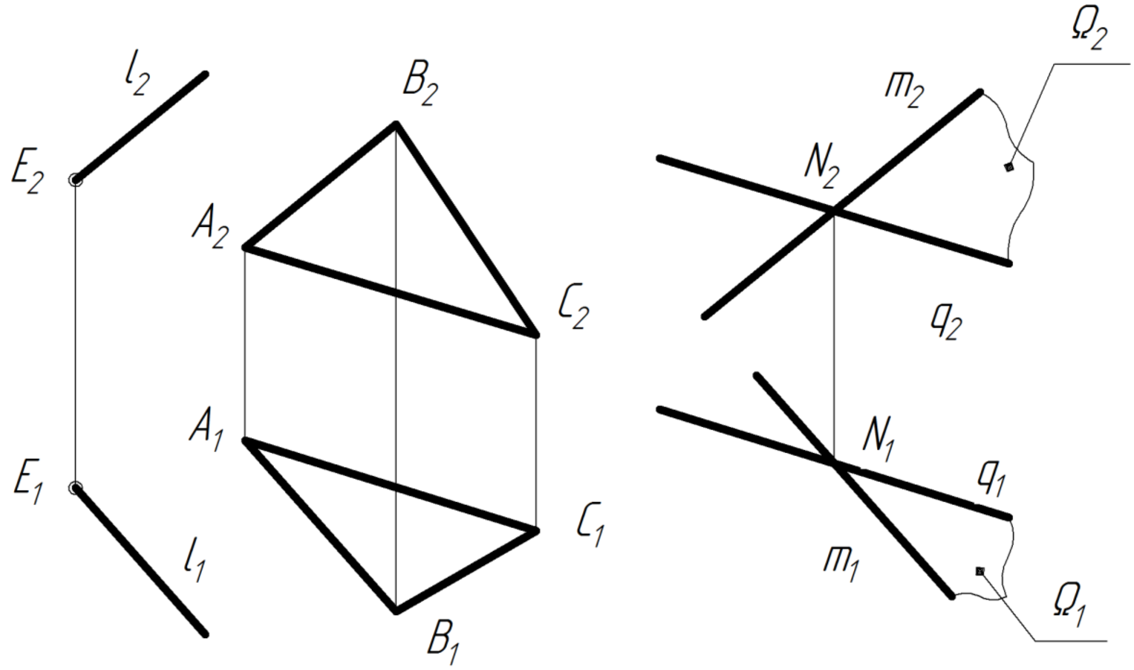


Рис. П14

Пример 8. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую

Преобразовать плоскость общего положения (ΔABC) в проецирующую (в данном случае преобразование выполнено методом замены плоскостей проекций), рис. П15.

Для этого необходимо выбрать новую плоскость Π_4 перпендикулярно плоскости треугольника и одной из имеющихся плоскостей проекций (в данном случае горизонтальной). Согласно теореме о проецировании прямого угла ориентиром для преобразования может быть только линия уровня, рис. П12.

На рис. П15 новая плоскость $П_4$ выбрана перпендикулярно горизонтали плоскости. Графически это выполняется проведением новой оси x_{14} перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1. Таким образом система плоскостей $П_2/П_1$ с осью проекций x_{12} преобразовывается в систему плоскостей $П_1/П_4$ с новой осью проекций x_{14}. Для построения проекций точек на новой плоскости используются имеющиеся на чертеже их расстояния до $П_1$ (координата z).

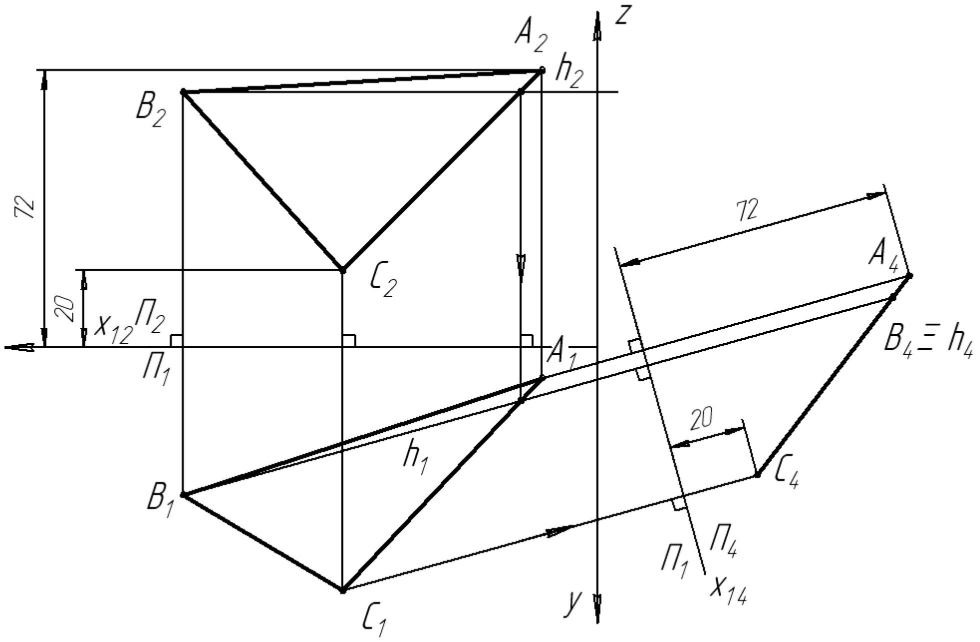


Рис. П15

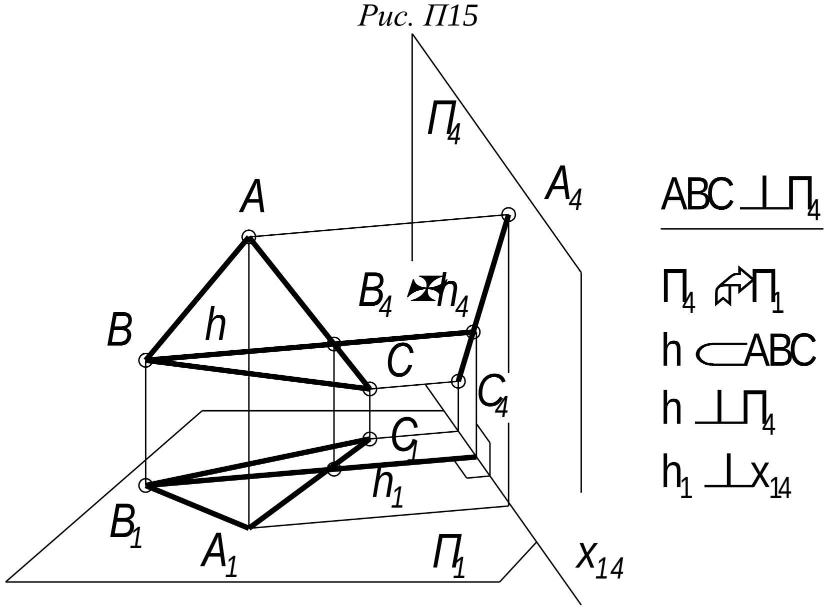


Рис. П16

Пример 9. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня

Преобразовать проецирующую плоскость $A_4B_4C_4$ в плоскость уровня (рис. П17).

В предыдущем примере мы выбрали плоскость $П_4 \perp \Delta\, ABC$. Теперь необходимо выбрать новую плоскость ($П_5$) параллельно проецирующей плоскости. Плоскость $П_5$ обязательно должна быть перпендикулярна плоскости $П_4$ (плоскости проекций взаимно перпендикулярны). Так как $П_5 \parallel \Delta\, ABC$ и $П_4 \perp \Delta\, ABC$, следовательно, $П_5 \perp П_4$. На чертеже проводим $x_{45} \parallel A_4B_4C_4$. На плоскости $П_5$ определяем проекции точек ABC, измеряя их расстояния до плоскости $П_4$ (расстояния b, c и т.д.).

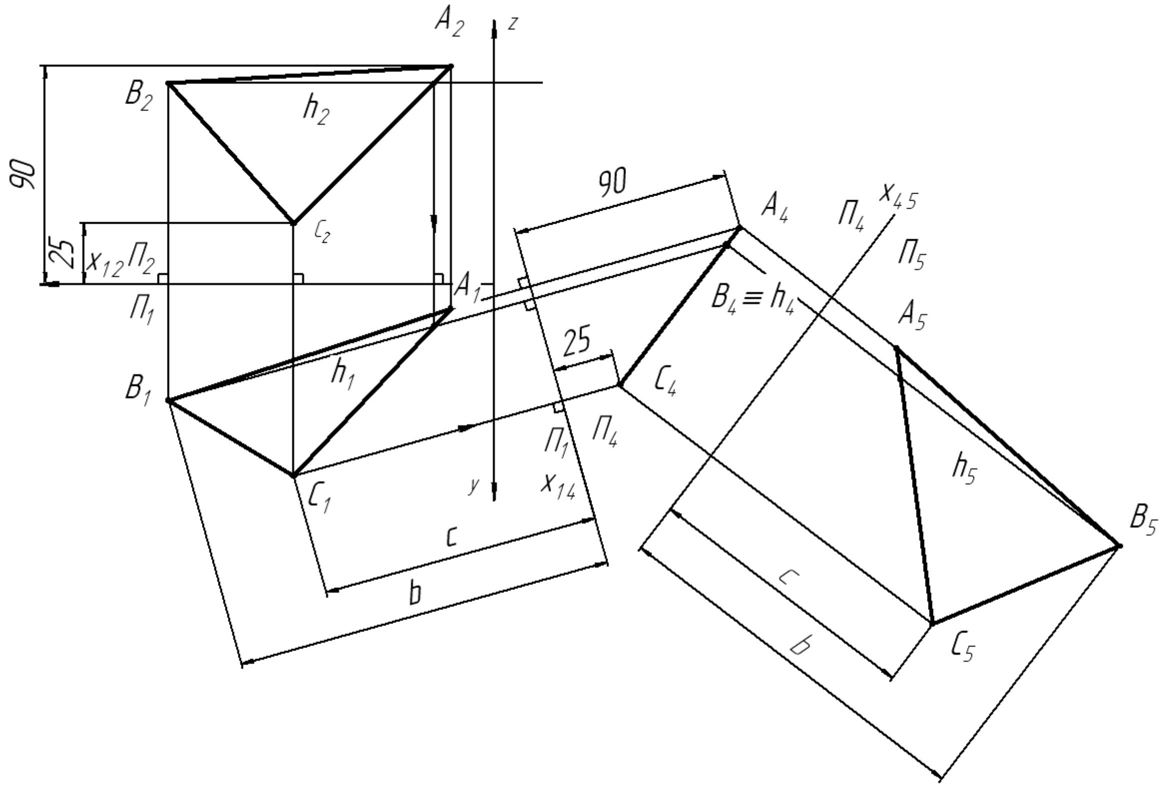


Рис. П17

Пример 10. Построение проекций точек на поверхности прямого кругового конуса

По заданным проекциям точек A_2, D_2, C_2, M_2, B_2 на поверхности прямого кругового конуса определить недостающие проекции (рис. П18).

На рис. П18 построены три проекции конуса – три его очерка. Точка A принадлежит фронтальному очерку – образующей SM. Точка B принадлежит основанию конуса, т.е. его горизонтальному очерку, а точка C принадлежит профильному очерку – образующей SN. На рис. П18 заданы фронтальные проекции этих точек, показаны построения проекций A_1, A_3, B_1, B_3. Горизонтальную проекцию точки C (C_1) строят либо через C_3, используя равенство координат y, либо через параллель-окружность радиуса R, которая получается при сечении плоскостью $Г \parallel П_1$. При этом плоскость $Г_2$ проводят через C_2, затем строят окружность радиуса R до пересечения с образующей S_1N_1 – это и есть искомая проекция C_1.

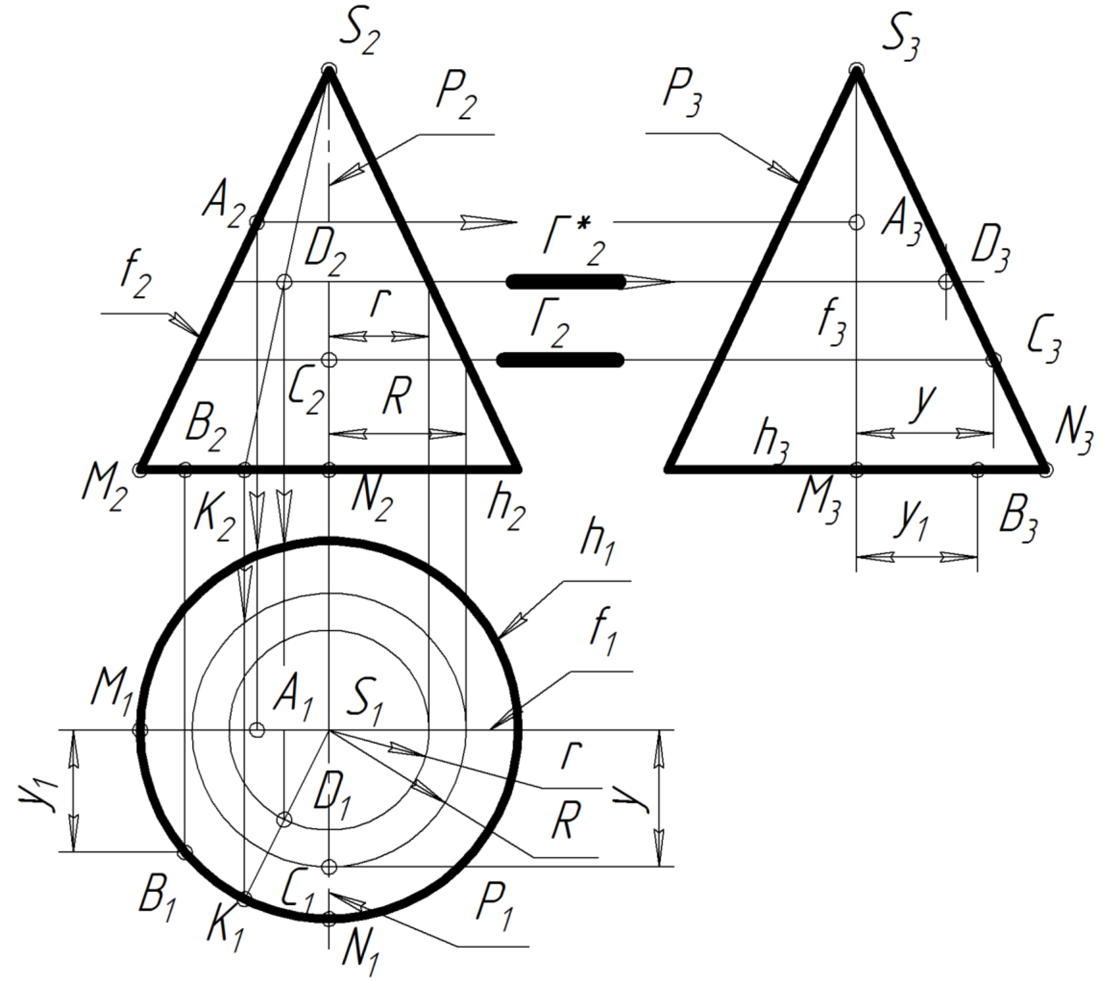


Рис. П18

Аналогично построены недостающие проекции точки *D*, которая не принадлежит ни одной из заданных на рисунке линий. Следовательно, чтобы построить проекции D_1 и D_3, необходимо через D_2 провести вспомогательную линию. Это может быть либо образующая *SK* (конус – это и линейчатая поверхность, и поверхность вращения в зависимости от способа образования), либо параллель (окружность радиуса *r*), которая получается при сечении конуса плоскостью – посредником $Г^* \parallel П_1$. Эта окружность на $П_1$ проецируется в натуральную величину и на ней определяется положение D_1 по линии связи. После чего можно строить D_3.

Пример 11. Построение проекций точек на поверхности сферы

По заданным проекциям точек A_2, D_2, C_2, B_2, F_1 на поверхности сферы построить недостающие проекции точек *A, B, C, D, F* (рис. П19).

Точки *A, B, C* принадлежат очеркам сферы, поэтому легко построить их недостающие проекции. В качестве вспомогательных линий для построения D_1 используют параллель радиуса *r*. При построении фронтальной проекции точки *F* (F_2) по заданной F_1 приходится использовать меридиан радиуса *R*, который получается в пересечении плоскости $Г^* \parallel П_2$ со сферой. Плоскость $Г^*_1$ проводят через F_1.

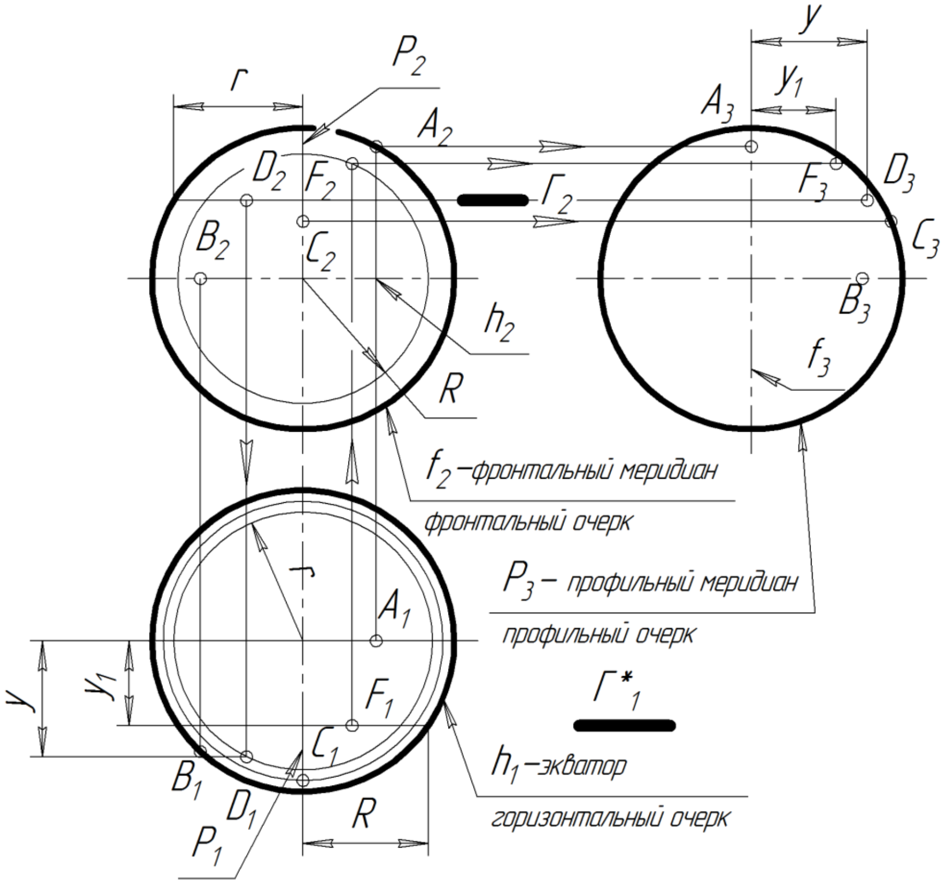


Рис. П19

Пример 12. Построение проекций сквозного призматического отверстия в сфере

Построить проекции сквозного отверстия в сфере, которое проецируется на $П_2$ в форме прямоугольника. Величина и положение отверстия на рис. П20 определяется размерами «a» и «b».

Итак, проекции точек A_2, B_2, C_2, D_2 на чертеже заданы. Чтобы найти их горизонтальные проекции, необходимо построить параллели, которые проходят через эти точки. Для этого пересечем сферу вспомогательными плоскостями-посредниками $Г$ и $Г^*$, параллельными горизонтальной плоскости проекций. В пересечении со сферой получим параллели одинаковых радиусов R. Строим их горизонтальные проекции – окружности и на них по линиям связи определяем искомые проекции точек.

Между боковыми гранями сквозного отверстия экватор отсутствует, поэтому убираем его несуществующую часть. Границей отверстия на виде сверху будут параллели радиуса R.

Для построения $A_3B_3C_3D_3$ необходимо провести плоскости-посредники $\Sigma \parallel П_3$ и построить профильные меридианы радиуса r, а на них по линиям связи определить искомые проекции точек (рис. П20).

Между боковыми гранями сквозного отверстия главный профильный меридиан отсутствует, поэтому его на $П_3$ убирают, а границей отверстия будет меридиан радиуса r.

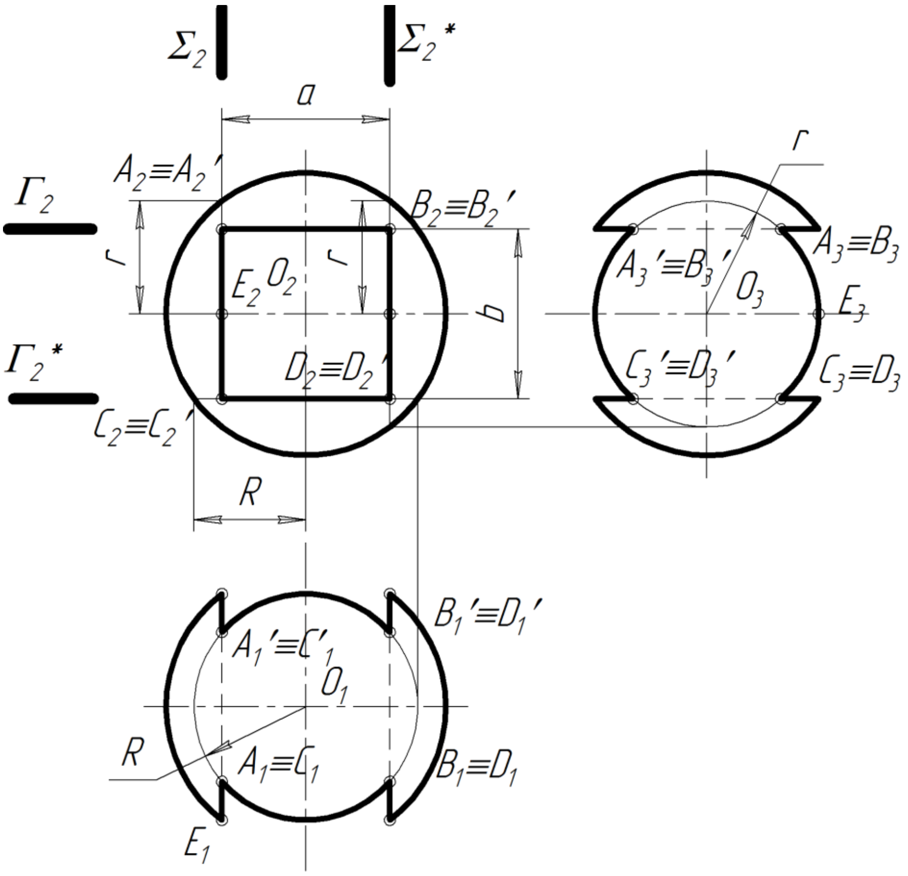


Рис. П20

Пример 13. Построение гиперболы по точкам.

Построить линию пересечения прямого кругового конуса горизонтально проецирующей плоскостью.

На рис. П21 показано построение гиперболы ($\Omega \| \Pi_2$) по точкам (*B, 5, A, 4, C*). Вершина гиперболы – точка *A,* расположена на образующей *S3* - линии профильного уровня. Чтобы не строить третью проекцию, фронтальную проекцию точки *A* находят, построив параллель радиуса *r* (Γ_2). Промежуточные точки *4* и *5* определяют с помощью плоскости $\Gamma^* \| \Pi_1$, которая расположена между экстремальными точками *A, B, C*. Точки *4* и *5* находят, построив параллель радиуса R.

В заключение следует отметить, что при обводке всех чертежей сначала следует провести все линии одного типа (например, линии связи), желательно начинать с тонких линий одного направления, - например, горизонтальных, затем – вертикальных; после этого все контурные линии одного направления на чертеже и т.д.

Заключительной частью работы должно быть нанесение (обводка) всех обозначений и надписей на чертеже. Такая последовательность позволяет уменьшить количество перемещений чертежного инструмента по полю чертежа, что ускоряет работу и улучшает качество чертежей.

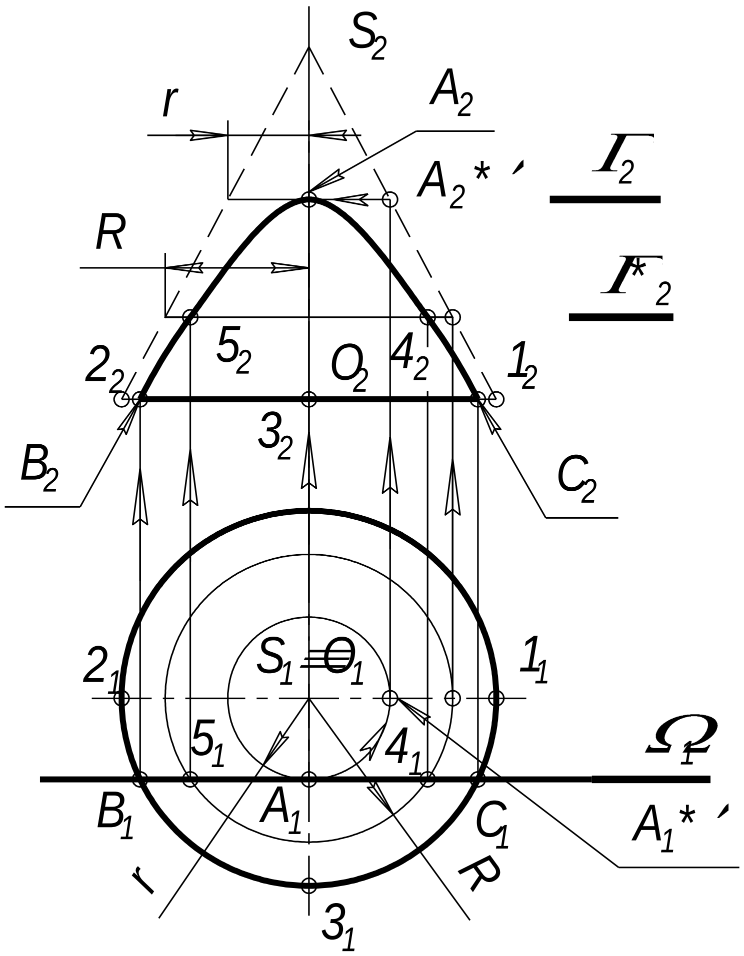


Рис. П21

Литература

1. Михненков Л.В. Основы начертательной геометрии: учебное пособие для студентов всех специальностей всех форм обучения. М. МГТУ ГА, 2004
2. Левицкий В.С. Машиностроительное черчение: - М.: Высшая школа, 1988
3. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М. : Машиностроение, 1978
4. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А.Курс начертательной геометрии.– М.: Наука, 1988

Содержание

Введение 3
1. Оформление контрольных работ 3
2. Объем и содержание контрольных работ 6
3. Условия и порядок решения задач 6
Задача № 1 6
Задача № 2 11
Задача № 3 14
Задача № 4 16
Приложения 22
Прямые частного положения 22
Плоскости частного положения 25
Пример 1. Построение проекций точки по координатам 28
Пример 2. Проецирование прямого угла 29
Пример 3. Построение перпендикуляра к прямой общего положения 30
Пример 4. Определение длины отрезка прямой общего положения и углов его наклона к плоскостям проекций 30
Пример 5. Построение перпендикуляра к плоскости общего положения 35
Пример 6. Определение точки пересечения прямой с плоскостью 36
Пример 7. Построение прямой и плоскости, параллельных плоскости общего положения 38
Пример 8. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую 39
Пример 9. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня 40
Пример 10. Построение проекций точек на поверхности прямого кругового конуса .. 41
Пример 11. Построение проекций точек на поверхности сферы 42
Пример 12. Построение проекций сквозного призматического отверстия в сфере .. 43
Пример 13. Построение гиперболы по точкам. 44
Литература 45