МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А. В. Самохин, Ю. И. Дементьев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

ПОСОБИЕ
по выполнению практических работ

для студентов I курса
направления 230100
дневного обучения

Москва – 2014

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

А. В. Самохин, Ю. И. Дементьев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

ПОСОБИЕ
по выполнению практических работ

для студентов I курса
направления 230100
дневного обучения

Москва – 2014

Введение

Пособие предназначено для студентов 1 курса направления 230100, изучающих дисциплину „Математическая логика и теория алгоритмов“.

В пособии содержатся материалы для проведения практических занятий по дисциплине, примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения и варианты контрольного домашнего задания.

В пособии отражены следующие темы: множества, отображения, алгебра высказываний, двойственность в алгебре высказываний, нормальные формы, функции алгебры логики, релейно-контактные схемы, схемы из функциональных элементов, предикаты, кванторы, вычислимые функции, машины Тьюринга, нечёткая логика, нечёткие множества и смежные задачи.

Материалы пособия полностью соответствуют направленности и содержанию учебной рабочей программы по дисциплине „Математическая логика и теория алгоритмов“, читаемой студентам первого курса направления 230100 очной формы обучения.

Задачи и примеры решения

Множества.

Основными задачами этого пункта являются задачи на доказательства типа „Доказать равенство множеств, заданных формулами алгебры множеств“. Для их решения рекомендуется перейти к формулам алгебры предикатов, определяющим эти множества, и выяснить, равносильны ли они, или, оставаясь в формулах алгебры множеств, перейти к булевым формулам алгебры множеств и воспользоваться основными равенствами булевой алгебры множеств.

Пример 1. Доказать, что $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Решение. Перейдём к булевым формулам алгебры множеств

$$A\setminus(B\cup C)=A\cap\overline{(B\cup C)}=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})= \\ =(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$$

Особое внимание следует уделить решению примеров, содержащих семейства множеств, так как операции над семействами множеств вводятся с помощью кванторов.

Пример 2. Доказать, что

$$A\cap\Big(\bigcup_{i\in I}B_i\Big)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$

Решение.

$$x\in A\cap\Big(\bigcup_{i\in I}B_i\Big)\equiv(x\in A)\wedge\Big(x\in\bigcup_{i\in I}B_i\Big)\equiv(x\in A)\wedge(\exists i(x\in B_i))\equiv \\ \equiv\exists i((x\in A)\wedge(x\in B_i))\equiv\exists i(x\in(A\cap B_i))\equiv x\in\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i).$$

1. Доказать, что множество A всех чётных чисел равно множеству B целых чисел, представимых в виде суммы двух нечётных целых чисел.

2. Доказать, что множество $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z},\ x \text{ делится на } 6\}$ равно множеству $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z},\ x \text{ делится на } 2,\ x \text{ делится на } 3\}$.

3. Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ целых чисел представимо в виде $\mathbb{Z}=\{x\mid\exists m\,\exists n\in\mathbb{Z}(x=3m+5n)\}$.

4. Привести пример таких множеств A, B, C, что $A\in B$, $B\in C$, но $A\notin C$.

5. Привести пример множеств A, B, таких, что $A\in B$ и $A\subset B$.

6. Доказать, что если $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_n\subset A_1$, то $A_1=A_2=\ldots=A_n$.

7. Доказать, что $A\subset B$ тогда и только тогда, когда $A\setminus B=\varnothing$.

8. Доказать, что $A=B$ тогда и только тогда, когда $A\bigtriangleup B=\varnothing$.

Доказать равенства:

9. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; **10.** $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
11. $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$; **12.** $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\setminus(B\setminus C)$; **13.** $A\bigtriangleup B=B\bigtriangleup A$;

14. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$; **15.** $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$; **16.** $A \triangle (A \triangle B) = B$.

17. Выразить операции $\cup$, $\setminus$ через $\triangle$, $\cap$.

18. Выразить операции $\cap$, $\setminus$ через $\triangle$, $\cup$.

19. Выразить операции $\cup$, $\cap$, через $\triangle$, $\setminus$.

20. Доказать, что нельзя выразить $\setminus$ через $\cup$ и $\cap$.

21. Доказать, что нельзя выразить $\cup$ через $\cap$ и $\setminus$.

22. Пусть $A = \{1; 4; 5\}$, $B = \{2; 4; 6\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.

23. Перечислить все подмножества множества $\{1; 2; 3\}$, все собственные подмножества.

24. Доказать, что $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$, где 2^A — множество всех подмножеств множества A.

25. Пусть имеется последовательность множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n \supset \ldots$ Доказать, что $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n_k \in \mathbb{N}} A_{n_k}$ для любой неограниченной последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть $n\mathbb{Z}$ есть множество всех целых чисел, делящихся на n. Найти:

26. $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$; **27.** $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} n\mathbb{Z}$; **28.** $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} n\mathbb{Z}$; **29.** $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{P}} p\mathbb{Z}$, где $\mathbb{P}$ — множество простых чисел; **30.** $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n}\right]$; **31.** $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right]$.

32. Пусть $C([a; b])$ — множество всех непрерывных функций, определённых на отрезке $[a; b]$,

$$C_x^3([a; b]) = \{f \in C([a; b]) \mid f(x) = 3\}.$$

Найти $\bigcup\limits_{x \in [a;b]} C_x^3([a; b])$, $\bigcap\limits_{x \in [a;b]} C_x^3([a; b])$.

Доказать:

33. $B \cap \Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup\limits_{i \in I} \Big(B \cap A_i\Big)$; **34.** $B \cup \Big(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap\limits_{i \in I} \Big(B \cup A_i\Big)$.

Отображения.

Напомним, что отображение (функция) f действующее из X в Y, это тройка (X, Y, f), где X, Y — непустые множества, а f — правило, сопоставляющее каждому элементу x из множества X элемент $f(x)$ из множества Y. Равенство отображений — это равенство троек.

Наибольшую сложность вызывают примеры на нахождение композиции отображений, заданных правилами, содержащими разветвления.

Пример 3. Пусть отображения $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ действуют по правилам:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } |x| > 1, \\ -x & \text{при } |x| \leqslant 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{при } x > 8, \\ 2 - x & \text{при } |x| \leqslant 8, \\ 2 + x & \text{при } x < -8. \end{cases}$$

Найти $g \circ f$.

Решение. Композиция — это последовательное применение отображений. В нашем примере первым действует отображение f, вторым — g. Поэтому, нужно представить, что получится из области определения под действием отображения f, то есть множество $f(X)$. Полученное множество заданием g разбивается на части, область определения отображения f тоже разбивается на части.

Перепишем отображение f, убрав знак модуля:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x > 1, \\ -x & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^3 & \text{при } x < -1. \end{cases}$$

Если $x \in (1;\infty)$, то отображение f действует по правилу x^3 и множество $(1;\infty)$ отображается во множество $(1;\infty)$. На полученном множестве действие отображения g определяется как верхней, так и средней строкой. Чтобы чётко определить, когда какая строка действует, исходное множество разобьём точкой $x = 2$ на два подмножества: $(1;2]$ и $(2;\infty)$. Тогда $f((1;2]) = (1;8]$ и $(1;8]$ целиком попадает в среднюю строку определения отображения g, а $f((2;\infty)) = (8;\infty)$, что соответствует верхней строке определения g. Таким образом, мы получили, что

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \in (2;\infty), \\ 2 - x^3 & \text{при } x \in (1;2]. \end{cases}$$

Если $x \in [-1;1]$, то $f([-1;1]) = [-1;1]$, а это множество целиком попадает в среднюю строку определения g. Значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 - (-x) = 2 + x \text{ при } x \in [-1;1].$$

Если $x \in (-\infty;-1]$, то $f((-\infty;-1)) = (-\infty;-1)$. На этом множестве отображение g определяется как своей средней, так и нижней строкой. Разобьём множество $(-\infty;-1)$ на две части: $(-\infty;-2)$ и $[-2;-1)$. Рассмотрим каждую из этих частей отдельно.

$f((-\infty;-2)) = (-\infty;-8)$. На этом множестве отображение g определяется своей нижней строкой, значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 + x^3 \text{ при } x \in (-\infty;-2).$$

$f([-2;-1)) = [-8;-1)$. На этом множестве отображение g определяется своей средней строкой, значит,

$$(g \circ f)(x) = 2 - x^3 \text{ при } x \in [-2;-1).$$

Окончательно получаем

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \in (2;\infty), \\ 2 - x^3 & \text{при } x \in [-2;-1) \cup (1;2], \\ 2 + x & \text{при } x \in [-1;1], \\ 2 + x^3 & \text{при } x \in (-\infty;-2). \end{cases}$$

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, B, B_1, B_2 — произвольные подмножества множества Y. Доказать, что:

35. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; **36.** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
37. $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$; **38.** $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$;
39. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

40. Привести пример, показывающий, что импликация

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \ \Rightarrow\ B_1 \subset B_2,$$

вообще говоря, не имеет места.

41. Доказать, что если $f : X \to Y$ и $A \subset X$, то

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x (\in X)\ (x \in A) \wedge (y = f(x))\}.$$

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, A_1, A_2 — произвольные подмножества множества X. Доказать, что:

42. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; **43.** $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

44. Привести пример, показывающий, что включение

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

45. Доказать, что

$$f(A_1) \backslash f(A_2) \subset f(A_1 \backslash A_2).$$

46. Привести пример, показывающий, что включение

$$f(A_1 \backslash A_2) \subset f(A_1) \backslash f(A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

47. Доказать, что

$$(A_1 \subset A_2) \ \Rightarrow\ (f(A_1) \subset f(A_2)).$$

48. Привести пример, показывающий, что включение

$$(f(A_1) \subset f(A_2)) \ \Rightarrow\ (A_1 \subset A_2),$$

вообще говоря, не имеет места.

Доказать, что для произвольного подмножества B области значений Y отображения $f : X \to Y$ выполняются соотношения:

49. $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$; **50.** $f^{-1}(B) = \varnothing \Leftrightarrow B \cap f(X) = \varnothing$.

51. Доказать, что для произвольного подмножества A области определения X отображения $f : X \to Y$ имеет место соотношение $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Доказать, что:

52. $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$; **53.** $f(A) \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$;
54. $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $A \subset X$, $C \subset Z$. Доказать, что:
55. $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$; **56.** $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

57. Доказать, что если $A \subset X$, $B \subset X$, $i_A : A \to X$ — отображение включения, то $i_A^{-1}(B) = A \cap B$.

58. Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$, $g = f|_A$: $A \to Y$ — сужение отображения f на A. Доказать, что $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$.

Доказать, что если $f : X \to Y$ — инъективное отображение, то для любых подмножеств A, A_1, A_2 его области определения X имеют место соотношения:
59. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; **60.** $f(A_1 \backslash A_2) = f(A_1) \backslash f(A_2)$;
61. $A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$; **62.** $f^{-1}(f(A)) = A$.

63. Пусть для отображения $f : X \to X$ и для некоторого натурального числа n выполнено $f^n = Id_X$. Доказать, что отображение f биективно.

64. Доказать, что если отображение $f \circ g$ инъективно, то g также инъективно.

65. Доказать, что если отображение $f \circ g$ сюръективно. то f также сюръективно.

66. Пусть заданы множества A, B, C, D и отображения $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Доказать, что если отображения $g \circ f$ и $h \circ g$ биективны, то и отображения f, g, h биективны.

67. Пусть заданы множества A, B, C и отображения $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to A$. Доказать, что если среди отображений $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ два являются инъективными (сюръективными), а третье сюръективно (инъективно), то отображения f, g, h биективны.

Для следующих отображений $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ найти композиции $f \circ g$, $g \circ f$:
68.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{при } x \geqslant 0, \\ 1 - x & \text{при } x < 0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{при } x \geqslant 1, \\ 2x & \text{при } x < 1; \end{cases}$$

69.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geqslant 1, \\ x & \text{при } x < 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{при } x < 2, \\ 4 - x & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$$

70. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ действует по правилу

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{при } x \geqslant 0, \\ 1 - x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти $f([0;1])$, $f([-1;2])$, $f^{-1}([0;1])$, $f^{-1}([-1;2])$.

71. Пусть задано отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \sin x$. Найти $f((0;\pi))$, $f\left(\left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right)\right)$, $f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right)$, $f^{-1}([0;2])$.

72. Является ли отображение

$$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f_n(k) = \begin{cases} n - k & \text{при } k < n, \\ n + k & \text{при } k \geqslant n \end{cases}$$

инъективным, сюръективным, биективным?

Пусть $C(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных непрерывных функций. Проверить, являются ли следующие отображения $F : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ инъективным, сюръективным, биективным. Найти обратные к ним с соответствующей стороны:

73. $[F(f)](x) = f(e^x)$; **74.** $[F(f)](x) = e^{f(x)}$; **75.** $[F(f)](x) = (x^2-1)f(x)$; **76.** $[F(f)](x) = (x^2+1)f(x)$; **77.** $[F(f)](x) = f(2x-1)$; **78.** $[F(f)](x) = f^3(x)$; **79.** $[F(f)](x) = f(x^{\frac{1}{3}})$.

80. Найти композицию отображений из задач 75, 76, 78 и 79.

Алгебра высказываний.

Таблицы истинности.

Каждая формула алгебры высказываний обладает свойством превращаться в высказывание при фиксации в ней значений всех высказывательных переменных, то есть, если мы зафиксируем в формуле значения всех высказывательных переменных, то, пользуясь определениями логических операций, мы можем вычислить значение истинности формулы.

Таблица истинности формулы алгебры высказываний содержит столько строк, сколько всевозможных наборов значений истинности переменных можно образовать. Каждая высказывательная переменная может принимать только два значения (0 и 1), поэтому в случае n переменных таблица истинности содержит 2^n строк.

При построении таблицы истинности наборы значений переменных располагают сверху вниз в лексикографическом порядке (каждый набор понимают как двоичную запись неотрицательного целого числа и располагают в порядке возрастания от $(000\ldots0)$ до $(111\ldots1)$.

Пример 4. Построить таблицу истинности формулы:

$$x_1\overline{x}_2 \to (x_1 \vee x_2)\overline{x}_3.$$

Решение. 1. Определим порядок действий в формуле:

$$x_1 \overset{2}{\cdot} \overset{1}{\overline{x}_2} \overset{6}{\to} (x_1 \overset{3}{\vee} x_2) \overset{5}{\cdot} \overset{4}{\overline{x}_3}.$$

2. Пользуясь определениями операций $\neg$, $\cdot$, $\vee$ и $\to$, заполним таблицу:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_2$	$x_1 \cdot \overline{x}_2$	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x}_3$	$(x_1 \vee x_2)\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2 \to (x_1 \vee x_2)\overline{x}_3$
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Составить таблицы истинности для следующих формул:
81. $x \vee \overline{y}$; **82.** $x \wedge \overline{y}$; **83.** $x \to (y \vee x)$; **84.** $x \to (x \wedge y)$; **85.** $(x \vee y) \to (\overline{x} \vee \overline{y})$; **86.** $x \to ((x \vee y) \vee z)$; **87.** $x \to (y \to z)$; **88.** $(x \to y) \to z$; **89.** $x \sim (y \sim z)$; **90.** $(x \sim y) \sim z$; **91.** $(x \vee (y \vee z)) \to (\overline{x} \wedge (\overline{y} \wedge \overline{z}))$;

92. $(x \to (y \wedge z)) \to (x \to (y \wedge z))$; **93.** $\left(x \sim \overline{(y \vee z)}\right) \sim (x \sim (y \vee z))$;

94. $(x \vee \overline{y}) \to ((y \wedge \overline{z}) \to (x \vee (y \sim z)))$; **95.** $((x \sim y) \sim ((z \to (\overline{x} \vee \overline{y})) \to$ $\to \overline{z})) \sim (x \vee y)$; **96.** $(x \sim y) \to (((y \sim z) \to (z \sim x)) \to (x \sim z))$.

Пусть x_i $(i = 1, 2, 3)$ — символы булевых переменных (то есть принимающих два значения: $0, 1$). Построить таблицы истинности:
97. $(x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3)$; **98.** $(x_1 > x_2) \to (x_2 = x_3)$; **99.** $(x_1 \neq x_2) \vee (x_2 \neq x_3)$; **100.** $((x_1 > x_2) \wedge (x_2 = x_3)) \to (x_1 > x_3)$.

Применяя таблицы истинности, доказать тождественную истинность формул:
101. $x \sim x$; **102.** $x \vee \overline{x}$; **103.** $\overline{(x \wedge \overline{x})}$; **104.** $\overline{\overline{x}} \sim x$; **105.** $x \to (y \to x)$; **106.** $\overline{x} \to (x \to y)$; **107.** $((x \to y) \wedge x) \to y$; **108.** $((x \to y) \wedge \overline{y}) \to \overline{x}$; **109.** $((x \vee y) \wedge \overline{x}) \to y$; **110.** $((x \sim y) \wedge \overline{x}) \to \overline{y}$; **111.** $(x \to y) \sim (\overline{y} \to \overline{x})$; **112.** $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$; **113.** $(x \to (y \to z)) \to ((x \wedge y) \to z)$; **114.** $((x \to z) \wedge (y \to z)) \to ((x \vee y) \to z)$; **115.** $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Применяя таблицы истинности, доказать равносильность формул:
116. $x \vee y \equiv y \vee x$; **117.** $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$; **118.** $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$; **119.** $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$; **120.** $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; **121.** $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

122. $\overline{(x \vee y)} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$
123. $\overline{(x \wedge y)} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$
— законы де Моргана;

124. $x \vee x \equiv x$
125. $x \wedge x \equiv x$
— законы идемпотентности;

126. $x \vee 0 \equiv x$; **127.** $x \wedge 1 \equiv x$; **128.** $\overline{\overline{x}} \equiv x$; **129.** $x \sim y \equiv y \sim x$; **130.** $x \sim (y \sim z) \equiv (x \sim y) \sim z$; **131.** $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$; **132.** $x \sim y \equiv (x \to$ $\to y) \wedge (y \to x)$.

Порядок действий и упрощённая запись формул.

Учитывая соглашения о порядке выполнения операций, опустить "лишние" скобки и знак "$\wedge$" в формулах:
133. $x \wedge (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}))$; **134.** $(x \wedge y) \vee ((y \wedge z) \vee ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{z})))$; **135.** $((x \vee y) \vee z) \to ((x \wedge \overline{y}) \vee z)$; **136.** $((x \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge z))) \to ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \to \overline{z})$; **137.** $((x \vee y) \vee (x \vee ((y \wedge (x \vee z)) \wedge (y \to z))) \sim \overline{z})$; **138.** $((x \vee y) \to$ $\to (x \wedge y)) \vee ((\overline{x} \wedge y) \vee (\overline{x} \vee y))$; **139.** $((x \vee y) \wedge z) \to (((x \vee \overline{y}) \vee z) \sim (\overline{x} \vee y))$; **140.** $(x \wedge (y \vee z)) \wedge ((x \to (y \to z)) \sim (x \wedge y))$.

Восстановить скобки и знак "$\wedge$" в формулах:
141. $x \vee y \to z$; **142.** $x \vee y \to xy$; **143.** $\overline{xy} \vee x\overline{y}\overline{(y \vee z)}$; **144.** $x \vee y(xy \vee z)$; **145.** $xy \vee x\overline{yz} \to \overline{x} \vee yz$; **146.** $(x \to x \vee yz) \sim (x \vee y \to z)$;

147. $(x \vee y)\overline{z} \to (xy \sim \overline{y} \vee \overline{z})$; **148.** $x \vee y \to x \vee y(x \to z) \vee x(y \sim z)$;
149. $xyz \to (x \sim yz) \vee x \vee y(x \to (y \sim z))$; **150.** $xy \sim x(y \to z)(x \sim y) \vee xz \vee yz$.

Равносильные преобразования и упрощение формул.

Методом решения примеров на равносильные преобразования и упрощение формул является использование 19 основных равносильностей булевой алгебры высказываний, поэтому первым шагом при решении таких примеров является переход к булевым операциям с помощью формул:

$$a \to b \equiv \overline{a} \vee b,$$
$$a \sim b \equiv (a \to b)(b \to a) \equiv ab \vee \overline{a}\overline{b} \equiv (\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{b}).$$

Следует иметь в виду, что буквы, использованные при записи основных равносильностей, могут означать как символы высказывательных переменных, так и формулы алгебры высказываний, то есть основная равносильность

$$a \vee \overline{a} \equiv 1$$

означает, в частности, что

$$x_1 \vee \overline{x}_1 \equiv 1,$$
$$1 \vee \overline{1} \equiv 1,$$
$$(x_1 \to x_2)\overline{x}_3 \vee \overline{(x_1 \to x_2)\overline{x}_3} \equiv 1.$$

Полезными при решении примеров на упрощение формул являются законы полупоглощения:

$$\begin{array}{llll} 1) & a \vee \overline{a}b \equiv a \vee b; & 1') & \overline{a} \vee ab \equiv \overline{a} \vee b; \\ 2) & a \cdot (\overline{a} \vee b) \equiv ab; & 2') & \overline{a}(a \vee b) \equiv \overline{a}b, \end{array}$$

которые доказываются при помощи дистрибутивного закона:

$$a \vee \overline{a} \cdot b \equiv (a \vee \overline{a})(a \vee b) \equiv 1(a \vee b) \equiv a \vee b;$$
$$a(\overline{a} \vee b) \equiv a \cdot \overline{a} \vee a \cdot b \equiv 0 \vee ab \equiv ab.$$

Пример 5. С помощью равносильных преобразований упростить формулу

$$x_1\overline{x}_2 \to (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3.$$

Решение.

$$x_1\overline{x}_2 \to (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \underset{\text{булевым операциям}}{\overset{\text{переход к}}{\equiv}} \overline{x_1\overline{x}_2} \vee (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \equiv$$
$$\underset{\text{дистрибутивный закон}}{\overset{\text{закон де Моргана}}{\equiv}} \overline{x}_1 \vee \overline{\overline{x}}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \underset{\text{двойного отрицания}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}}$$
$$\equiv \underbrace{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_1 x_3}_{\text{закон поглощения}} \vee \underbrace{x_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3}_{\text{закон поглощения}} \equiv$$

$$\equiv \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \equiv \begin{cases} \text{а)} & \overline{x}_1 \vee (x_2 \vee \overline{x}_3) \equiv x_1 \to (x_2 \vee \overline{x}_3), \\ \text{б)} & \overline{x}_3 \vee (\overline{x}_1 \vee x_2) \equiv x_3 \to (x_1 \vee x_2), \\ \text{в)} & x_2 \vee \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 \equiv x_2 \vee \overline{x_1 x_3}, \\ \text{г)} & \overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 \vee x_2 \equiv \overline{x_1 x_3} \vee x_2 \equiv x_1 x_3 \to x_2, \\ \text{д)} & \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \equiv \overline{x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3}. \end{cases}$$

Замечание. Любую запись а) — д) можно считать ответом.

Следующий тип примеров — доказательство равносильности двух заданных формул с помощью равносильных преобразований. Существуют три основные схемы решения таких примеров. Каждая из них предполагает выполнение перехода к булевым операциям в исходных формулах.

Далее, по первой схеме предполагается, начиная с левой формулы, провести цепочку равносильных преобразований, завершив её на правой формуле.

Вторая схема — зеркальное отражение первой.

Третья схема предполагает проведение параллельных цепочек равносильных преобразований левой и правой формул до тех пор, пока в этих цепочках не обнаружится совпадение каких-то звеньев (одного звена левой цепочки с одним звеном правой).

Пример 6. Доказать, что

$$(x_1 \to x_3)(x_2 \to x_3) \equiv (x_1 \vee x_2) \to x_3.$$

Решение. Перейдём к булевым операциям

$$(\overline{x}_1 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee x_3) \equiv \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3.$$

1-я схема:

$$(\overline{x}_1 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee x_3) \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистрибутивный}}{\equiv}} \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overbrace{x_3\overline{x}_2 \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_3 \vee x_3}_{\text{закон поглощения}}}^{\text{закон поглощения}} \equiv$$

$$\equiv \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3 \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}} \overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3.$$

2-я схема:

$$\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}} \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \vee x_3 \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистрибутивный}}{\equiv}} (\overline{x}_1 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee x_3).$$

3-я схема:

$$(\overline{x}_1 \vee x_2)(\overline{x}_2 \vee x_3) \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистрибутивный}}{\equiv}} \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_3 \equiv \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3;$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \underset{\text{де Моргана}}{\overset{\text{закон}}{\equiv}} \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3.$$

Замечание. Следует иметь в виду, что среди примеров на доказательство равносильности формул есть примеры с отрицательным ответом. В этом случае ни одна из схем не приводит к получению ответа. Однако, неудача при использовании схем 1 — 3 может говорить и о недостаточно высокой технике равносильных преобразований. В случае неудачных попыток применения схем 1 — 3 следует для обеих формул построить таблицы истинности. Совпадение столбцов значений формул будет означать их равносильность, а несовпадение — неравносильность.

Применяя равносильные преобразования, доказать следующие соотношения:
151. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$; **152.** $\overline{xy} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$; **153.** $x \to y \equiv \overline{x \cdot \overline{y}}$; **154.** $x \to y \equiv \overline{y} \to \overline{x}$;
155. $xy \vee x\overline{y} \equiv x$; **156.** $x \vee xy \equiv x$; **157.** $x(x \vee y) \equiv x$; **158.** $x \vee \overline{x}y \equiv x \vee y$;
159. $x(\overline{x} \vee y) \equiv xy$; **160.** $(x \to y) \to y \equiv x \vee y$; **161.** $(x \vee y)(x \vee \overline{y}) \equiv x$;
162. $\overline{x} \vee \overline{y} \equiv y \to \overline{x}$; **163.** $x \sim y \equiv \overline{x} \sim \overline{y}$; **164.** $xy \vee \overline{x}y \vee \overline{xy} \equiv x \to y$;
165. $x \to (y \to z) \equiv (x \vee z)(y \vee z)$; **166.** $x \to (y \to z) \equiv y \to (x \to z)$;
167. $\overline{x} \vee xy \vee xz \vee \overline{x}y \vee \overline{x}z \equiv x \to y \vee z$.

Применяя равносильные преобразования, доказать тождественную истинность формул:
168. $x \to x \vee y$; **169.** $xy \to x$; **170.** $\overline{x} \to (x \to y)$; **171.** $(x \to y) \to (\overline{x} \vee y)$;
172. $(x \vee \overline{x}y) \sim (x \vee y)$; **173.** $(\overline{x} \to y) \to (\overline{y} \to x)$; **174.** $(\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x)$;
175. $(x \to y) \vee (y \to x)$; **176.** $(x \to y) \vee (x \to \overline{y})$; **177.** $x \to (y \to xy)$;
178. $(x \to y)x \to y$; **179.** $(x \to y)\overline{y} \to \overline{x}$; **180.** $(x \vee y)\overline{x} \to y$;
181. $(x \vee\!\vee\, y)x \to \overline{y}$ ("$\vee\vee$" — альтернативная дизъюнкция: $(x \vee\!\vee\, y) \equiv \overline{x \sim y}$);
182. $(x \to y)(y \to z) \to (x \to z)$; **183.** $(x \to (y \to z)) \to (xy \to z)$;
184. $(x \to z)(y \to z) \to (x \vee y \to z)$; **185.** $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

Применяя равносильные преобразования, "упростить":
186. $\overline{\overline{xy}} \vee (x \to y)x$; **187.** $\left(\overline{\overline{x} \vee y} \to x \vee y\right) y$; **188.** $\overline{(x \to y)(y \to \overline{x})}$;
189. $(x \vee y)(x \sim y)$; **190.** $(x \to y)(y \to z) \to (z \to x)$; **191.** $xz \vee x\overline{z} \vee yz \vee \overline{x}yz$;
192. $\overline{xy(x \to y)}$; **193.** $xy(x \sim y)$; **194.** $(x \to \overline{y})(x \sim y)$; **195.** $(x \to \overline{y}) \vee \overline{(x \vee y)}$.

Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только "$\wedge$" и "$\neg$":
196. $x \vee y$; **197.** $x \to y$; **198.** $x \sim y$; **199.** $x \vee y \vee z$; **200.** $x \to (y \to z)$;
201. $x \vee (x \sim y)$; **202.** $\overline{x \to y} \vee (\overline{x} \to \overline{y})$; **203.** $x \vee\!\vee\, y$; **204.** $x\overline{y} \to (\overline{y} \to x)$;
205. $x \vee y \to (\overline{x} \to z)$.

Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только "$\vee$" и "$\neg$":
206. xy; **207.** xyz; **208.** $x \sim y$; **209.** $x \vee\!\vee\, y$; **210.** $x(y \sim z)$;
211. $x \sim y \sim z$; **212.** $(x \sim y)(y \sim z)$; **213.** $xy \sim xz$.

Преобразовать следующие формулы так, чтобы знак отрицания был отнесён только к символам высказывательных переменных:
214. $\overline{\overline{x} \vee y}$; **215.** $\overline{xy \vee z}$; **216.** $\overline{xy \vee \overline{z}} \to \overline{xyz}$; **217.** $\overline{x \to (y \to z)}$;
218. $\overline{x \to y \to (\overline{x} \to \overline{z})}$; **219.** $\overline{(x \sim y)(y \sim z)}$.

Преобразовать формулы так, чтобы они содержали только операции "$\vee$", "$\wedge$" и "$\neg$":
220. $x \sim y$; **221.** $(x \to y) \sim (y \to z)$; **222.** $(x \sim y) \to (y \to z)$;

223. $(x \sim y) \to (y \sim z)$; **224.** $(x \sim y)(y \sim z) \to (x \sim z)$; **225.** $(x \sim y) \vee (y \sim z) \to (x \sim y \sim z)$; **226.** $x \sim y \sim z \sim v$; **227.** $(x \to y) \sim (z \to (x \sim \overline{z}))$.

Двойственность в алгебре высказываний.

Построение двойственных формул основано на общем и булевом принципах двойственности.

Общий принцип двойственности состоит в следующем: если исходная формула представляет собой подстановку формул в формулу, то двойственная формула — аналогичная подстановка двойственных формул в двойственную формулу.

Пример 7. Пусть

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to \overline{x}_2 x_3) \vee (x_1 \sim x_3).$$

Найти двойственную формулу F^*.

Решение. Обозначим $y_1 = x_1 \to \overline{x}_2 x_3$, $y_2 = x_1 \sim x_3$, тогда $F = y_1 \vee y_2$. Найдём двойственные формулы для подставляемых формул (y_1, y_2) и для формулы, в которую осуществляется подстановка (F):

$$(y_1 \vee y_2)^* \equiv \overline{\overline{y}_1 \vee \overline{y}_2} \equiv \overline{\overline{y}}_1 \cdot \overline{\overline{y}}_2 \equiv y_1 \cdot y_2;$$

$$(x_1 \to \overline{x}_2 x_3)^* \equiv \overline{\overline{x}_1 \to \overline{\overline{x}}_2 \overline{x}_3} \equiv \overline{\overline{\overline{x}}_1 \vee x_2 \overline{x}_3} \equiv$$

$$\equiv \overline{x_1 \vee x_2 \overline{x}_3} \equiv \overline{x}_1 \cdot \overline{x_2 \cdot \overline{x}_3} \equiv \overline{x}_1(\overline{x}_2 \vee x_3) \equiv \overline{x}_1(x_2 \to x_3);$$

$$(x_1 \sim x_3)^* \equiv \overline{\overline{x}_1 \sim \overline{x}_3} \equiv \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{\overline{x}}_1 \cdot \overline{\overline{x}}_3} \equiv \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_3 \vee x_1 x_3} \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_3} \cdot \overline{x_1 \cdot x_3} \equiv (x_1 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \equiv \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3 \equiv x_1 \sim \overline{x}_3.$$

Применим теперь общий принцип двойственности:

$$F^* \equiv y_1 \cdot y_2 \equiv \overline{x}_1(x_2 \to x_3)(x_1 \sim \overline{x}_3).$$

Булев принцип двойственности состоит в следующем: формула, двойственная к булевой формуле, получается заменой $\vee$ на $\wedge$, $\wedge$ на $\vee$, 0 на 1, 1 на 0 и сохранением структуры формулы.

Пример 8. Найти формулу, двойственную к формуле

$$(x_1 \to \overline{x}_2 x_3) \vee (x_1 \sim x_3),$$

пользуясь булевым принципом двойственности.

Решение.

$$((x_1 \to \overline{x}_2 x_3) \vee (x_1 \sim x_3))^* \equiv ((\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 x_3) \vee (x_1 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3))^* \underset{\text{двойственности}}{\overset{\text{булев принцип}}{\equiv}}$$

$$\equiv \overline{x}_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \cdot ((x_1 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3)) \underset{\text{закон}}{\overset{\text{дистрибутивный}}{\equiv}}$$

$$\equiv \overline{x}_1(x_2 \to x_3)(x_1 \overline{x}_3 \vee x_3 \overline{x}_1) \equiv \overline{x}_1(x_2 \to x_3)(x_1 \sim \overline{x}_3).$$

Найти двойственные формулы:

228. $x(\overline{y} \vee z)$; **229.** $xy \vee xz$; **230.** $\overline{(x \vee y)}(x \vee \overline{yz})$; **231.** $(xy \vee yz \vee zv)\overline{(x \vee y \vee z)}$;

232. $x\left(y \vee z\overline{(x \vee y)}\right)$; **233.** $\overline{xyz} \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz$; **234.** $\left((x \vee y)\overline{(x \vee z)} \vee xy\right) \vee$ $\vee \left(\overline{(x \vee y)z} \vee x\right)$; **235.** $xy\left(\overline{yz} \vee xyz\overline{(xz \vee yz)} \vee \overline{xy}\right)(x \vee y \vee z)$.

Применить закон двойственности к следующим равносильностям:
236. $xx \equiv x$; **237.** $x \vee 0 \equiv x$; **238.** $xy \equiv yx$; **239.** $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;
240. $\overline{xy} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$; **241.** $x(x \vee y) \equiv x$; **242.** $x \vee \overline{x}y \equiv x \vee y$;
243. $x \vee xy \vee yz \vee \overline{x}z \equiv x \vee z$.

Нормальные формы: ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

Нормальные формы формул алгебры высказываний бывают двух типов: дизъюнктивные и конъюнктивные, в каждом из этих типов выделен класс совершенных форм.

Алгоритм построения дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ):

1. Перейти к булевым операциям.
2. Перейти к формуле с тесными отрицаниями, то есть к формуле, в которой отрицания находятся не выше, чем над переменными.
3. Раскрыть скобки.
4. Повторяющиеся слагаемые взять по одному разу.
5. Применить законы поглощения и полупоглощения.

Пример 9. Найти ДНФ формулы

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3).$$

Решение.

$$\begin{aligned}(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3) &\equiv \overline{\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3} \vee (x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3) \equiv \\ &\equiv x_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \equiv x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \equiv \\ &\equiv x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3.\end{aligned}$$

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) — двойственное для ДНФ понятие, поэтому её можно построить по схеме:

$$f \equiv (f^*)^* \equiv (\text{ДНФ}(f^*))^* \equiv \text{КНФ}(f).$$

Пример 10. Найти КНФ формулы

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_1 \sim x_3).$$

Решение.

$$\begin{aligned}(x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_1 \sim x_3) &\equiv (((x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_1 \sim x_3))^*)^* \equiv \\ &\equiv (((\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3)(x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3))^*)^* \equiv \\ &\equiv (\overline{x}_1 \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3) \vee (x_1 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3))^* \equiv \\ &\equiv (\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3)^* \equiv (\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3)^* \equiv \\ &\equiv (\overline{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_3).\end{aligned}$$

Совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) можно построить, используя следующий алгоритм:

1. Перейти к булевым операциям.
2. Перейти к формуле с тесными отрицаниями, то есть к формуле, в которой отрицания находятся не выше, чем над переменными.
3. Раскрыть скобки.
4. Повторяющиеся слагаемые взять по одному разу.
5. Опустить тождественно ложные слагаемые, то есть слагаемые вида: $\ldots \cdot x_i \cdot \overline{x}_i \cdot \ldots$
6. Пополнить оставшиеся слагаемые недостающими переменными. (Пример на пополнение (переменные x_1, x_2, x_3): $\ldots \vee x_1\overline{x}_3 \vee \ldots \equiv \ldots x_1(x_2 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \ldots \equiv \ldots \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \ldots$)
7. Повторяющиеся слагаемые взять по одному разу.

Пример 11. Найти СДНФ формулы

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3).$$

Решение. В решении числа над знаком $\equiv$ соответствуют пунктам алгоритма построения СДНФ.

$$\begin{aligned}
(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3) &\overset{1}{\equiv} \overline{\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3} \vee (x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3) \overset{2}{\equiv} \\
&\equiv x_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \overset{3}{\equiv} \\
&\equiv x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \overset{4}{\equiv} x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \overset{6}{\equiv} \\
&\equiv x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \overset{7}{\equiv} \\
&\equiv x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3.
\end{aligned}$$

Совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ) можно построить по следующей схеме:

$$f \equiv (f^*)^* \equiv (\text{СДНФ}(f^*))^* \underset{\text{двойственности}}{\overset{\text{принцип}}{\equiv}} \text{СКНФ}(f).$$

Пример 12. Найти СКНФ формулы

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
(x_1 \to x_2\overline{x}_3) \to (x_1 \sim x_3) &\equiv \left(\left(\overline{(\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3)} \vee (x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3)\right)^*\right)^* \equiv \\
&\equiv (x_1(\overline{x}_2 \vee x_3) \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3)^*)^* \equiv ((x_1 \vee \overline{x}_2x_3) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3))^* \equiv \\
&\equiv ((x_1 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3))^* \equiv (\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3)^* \equiv \\
&\equiv (\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3)^* \equiv (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3).
\end{aligned}$$

Известно, что СДНФ и СКНФ определены формулой однозначно и, значит, их можно строить по таблице истинности формулы.

Схема построения СДНФ и СКНФ по таблице истинности приведена ниже для формулы $(x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_1 \sim x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$(x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_1 \sim x_3)$
0	0	0	$1 \quad \to \quad \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
0	0	1	$0 \quad \to \quad x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
0	1	0	$1 \quad \to \quad \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3$
0	1	1	$0 \quad \to \quad x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$
1	0	0	$1 \quad \to \quad x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
1	0	1	$1 \quad \to \quad x_1\overline{x}_2 x_3$
1	1	0	$0 \quad \to \quad \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
1	1	1	$1 \quad \to \quad x_1 x_2 x_3$

СДНФ: $\quad \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$;

СКНФ: $\quad (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$.

Привести к дизъюнктивной нормальной форме (к ДНФ):

244. $x \to (y \to z)$; **245.** $\overline{xy} \vee (x \to y)$; **246.** $(x \vee y \vee z)(x \to y)$; **247.** $(x \vee y)(y \vee z) \to (x \vee z)$; **248.** $x \sim y$; **249.** $x \vee\vee y$; **250.** $x \sim y \sim z$; **251.** $(x \to y) \sim \overline{(x \to (y \to z))}$; **252.** $(x \sim y)(y \sim z) \to (x \sim z)$; **253.** $(x \sim y)(y \sim z)(z \sim x)$.

Привести к конъюнктивной нормальной форме (к КНФ):

254. $x \vee yz$; **255.** $xy \vee yz \vee \overline{z}$; **256.** $x \vee yz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$; **257.** $x \to yz$; **258.** $x \to yzv$; **259.** $x \sim yz$; **260.** $xy \sim \overline{x}\,\overline{y}$; **261.** $x \sim y \sim z$; **262.** $x \vee y \sim x \sim z$; **263.** $x \vee\vee (y \vee\vee z)$.

Приведением к нормальной форме выяснить, какие из формул являются тождественно истинными, тождественно ложными, выполнимыми:

264. $xy \to x \vee y$; **265.** $x \vee y \to xy$; **266.** $\overline{x}y \to x\overline{y}$; **267.** $(x \to y)x \to x \vee y \vee z$; **268.** $x \vee y \to x \vee z$; **269.** $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$; **270.** $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$; **271.** $\overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$; **272.** $xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \sim (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$.

Для каждой из следующих формул найти дизъюнктивное и конъюнктивное разложение:

273. $x \vee y$; **274.** xy; **275.** $x \to y$; **276.** $x \sim y$; **277.** $x \vee\vee y$; **278.** $x \to (y \to x)$; **279.** $\overline{x}y\overline{(x \to y)}$; **280.** $x \vee y \to z$; **281.** $xy \to z$.

Привести к совершенной ДНФ (к СДНФ) следующие формулы:

282. $\overline{x} \vee \overline{y}$; **283.** $(\overline{x} \to y) \to x$; **284.** $x \to (y \to x)$; **285.** $x \to (y \to z)$; **286.** $(x \to y)(y \to z) \to (x \to z)$; **287.** $(x \to y)(y \to z)(z \to x)$; **288.** $(x \vee y)(y \vee z)(z \sim x)$; **289.** $(x \to y)(y \to z)(z \to v)$.

Привести к совершенной КНФ (к СКНФ) следующие формулы:

290. $(x \to y) \to x \vee \overline{y}$; **291.** $x\overline{x} \cdot \overline{y}$; **292.** $x\overline{y}(x \to y)$; **293.** $x \to yz$; **294.** xyz; **295.** $(x \vee y)(y \to z)(z \sim x)$; **296.** $x \vee y \to (x \to z)$; **297.** $((x \to y) \sim (y \to \overline{x}))z$; **298.** $x \vee y \vee z \to (x \vee y)z$; **299.** $xy \to zv$.

Приведением к совершенным нормальным формам доказать неравносильность следующих формул:
300. $x \vee y$ и $x \to y$; **301.** $x \to y$ и $x \sim y$; **302.** $x \vee y$ и $x \oplus y$; **303.** $x \to (y \to z)$ и $(x \to y) \to z$; **304.** $xy \vee z$ и $x(y \vee z)$; **305.** $(x \to y) \vee z$ и $x \vee y \to z$; **306.** $(x \to y)z$ и $x \to yz$; **307.** $(x \to y) \sim z$ и $(x \sim y) \to z$; **308.** $(x \vee y) \sim z$ и $(x \sim y) \vee z$; **309.** $xy \sim z$ и $(x \sim y)z$.

Следующие формулы разложить по переменным x, y, z:
310. xy; **311.** $x \vee y$; **312.** x; **313.** $(x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$; **314.** $xy \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y}$.

Определение. Формула F называется логическим следствием формул (посылок) $f_1, \ldots, f_n$, если $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \to F \equiv 1$.

Выяснить, является ли первая формула логическим следствием остальных:
315. y; $x \to y$, x; **316.** x; $x \to y$, y; **317.** $\overline{x}$; $x \to y$, $\overline{y}$; **318.** $\overline{y}$; $x \to y$, $\overline{x}$; **319.** y; $x \vee y$, $\overline{x}$; **320.** y; $x \vee\vee y$, x; **321.** $x \to z$; $x \to y$, $y \to z$; **322.** $x \vee y \to z$; $x \to z$, $y \to z$; **323.** $z \to x$; $x \to y$, $\overline{y} \to \overline{z}$; **324.** $x \vee y$; $x \to y$, $\overline{y} \to \overline{x}$, $\overline{x} \vee \overline{y}$; **325.** $\overline{x}$; $x \sim y$, $y \vee \overline{z}$, z; **326.** z; $x \to y$, $\overline{y} \vee z$, x; **327.** $\overline{y} \vee \overline{z}$; $x \vee \overline{z}$, $y \to x \cdot z$, x; **328.** $z \to y$; $x \to y$, $\overline{x}$, z; **329.** $\overline{z} \to \overline{x}$; $x \to y$, xy, $\overline{z} \to \overline{y}$; **330.** $x \vee t$; $x \to y$, $y \to \overline{z}$, $x \vee z \to yt$; **331.** xt; $x \to z$, $\overline{y} \vee z$, $z \to y \vee t$, $z \vee t$.

Найти все (с точностью до равносильности) логические следствия из посылок:
332. x, $x \to y$; **333.** $\overline{x}$, $x \sim y$; **334.** x, $\overline{y}$, $x \vee y$; **335.** $x \to (y \to z)$, $y \to z$; **336.** $x \to (y \to z)$, $y \to \overline{z}$; **337.** $x \to y$, $y \to z$; **338.** $x \vee y$, $y \vee z$, $z \vee x$; **339.** x, $x \vee y$, $x \vee y \vee z$; **340.** $x \to (y \to (z \to t))$, $x \to (y \to z)$; **341.** $x \to (y \to z)$, $y \to (z \to t)$.

Найти все (с точностью до равносильности) посылки, логическим следствием которых являются формулы:
342. $x \cdot y$; **343.** $x \sim y$; **344.** $x \vee y$; **345.** $x \to y$; **346.** $x \vee y \to x \cdot y$; **347.** $x \cdot y \cdot z$; **348.** $(x \vee y) \cdot z$; **349.** $(x \to y) \cdot z$; **350.** $x \to y \cdot z$; **351.** $x \to (y \to \overline{z})$.

Определение. Вывод $f_1, \ldots, f_n \vdash F$ называется правильным, если формула F является логическим следствием формул $f_1, \ldots, f_n$.

Докажите правильность выводов:
352. $a \to b, a \vdash b$; **353.** $a \to b, \overline{b} \vdash \overline{a}$; **354.** $a \vee b, \overline{a} \vdash b$; **355.** $a \vee\vee b, a \vdash \overline{b}$; **356.** $a \vee\vee b, \overline{a} \vdash b$; **357.** $a \to b, b \to c \vdash a \to c$; **358.** $a \vee b, a \to b \vdash b$; **359.** $a \to b, b \to c, \overline{c} \vdash \overline{a}$; **360.** $a \to b, b \to c, a \vdash b$; **361.** $a \vee\vee b, a \to b \vdash b$; **362.** $a \vee\vee b, b \vee\vee c \vdash a \to c$; **363.** $a \to b, b \to c, c \to a \vdash a \to bc$.

Выяснить, правильны ли следующие выводы:
364. $a \to b, b \vdash a$; **365.** $a \to b, \overline{a} \vdash \overline{b}$; **366.** $a \to b, \overline{a} \to \overline{b} \vdash a \sim b$; **367.** $a \to b, \overline{b} \to \overline{a} \vdash a \sim b$; **368.** $a \to b, a \vee b \vdash a$; **369.** $a \to b$, $b \to a, a \vee b \vdash a \cdot b$; **370.** $a \to (b \to c), (a \to b) \to c \vdash b \to c$; **371.** $a \to (b \to c), (a \to b) \to c \vdash a \to c$; **372.** $a \to bc, b \to ac$,

$c \to ab, a \vee b \vee c \vdash a \cdot b \cdot c$; **373.** $a \vee b \to c, a \vee c \to b, b \vee c \to a, a \vee b \vee c \vdash a \cdot b \cdot c$.

Функции алгебры логики.

Напомним, что булевы операции $\neg, \wedge, \vee$ образуют полную систему функций. Это означает, что любая функция алгебры логики ($\equiv$ булева функция) может быть задана формулой над $\neg, \wedge, \vee$.

В частности, $x \mid y \equiv \overline{x \cdot y}$, $x \uparrow y \equiv \overline{x \vee y}$, $x \oplus y \equiv x\overline{y} \vee \overline{x}y$.

Ещё одной полной системой функций является $\{0, 1, \oplus, \wedge\}$. Формулы над $\{0, 1, \oplus, \wedge\}$ называют многочленами Жегалкина.

Каноническим многочленом Жегалкина называют многочлен Жегалкина, в котором раскрыты скобки и приведены подобные члены.

Ниже используются следующие обозначения:

P_2 — все булевы функции;

P_0 — булевы функции, сохраняющие 0;

P_1 — булевы функции, сохраняющие 1;

S — самодвойственные булевы функции.

Если K — один из этих классов, то $K(n)$ обозначает булевы функции этого класса от n аргументов.

Переменная x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется фиктивной, если

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Переменная x_i в функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ фиктивна тогда и только тогда, когда канонический многочлен Жегалкина функции f не содержит переменной x_i.

374. Найти канонические многочлены Жегалкина следующих булевых функций:
а) всех булевых функций из $P_2(1)$, $P_2(2)$; **б)** $(x_1 \to x_2) \sim (x_2 \sim x_3)$; **в)** $(x_1 \to x_3) \cdot (x_2 \oplus x_3)$; **г)** $\overline{x_1 \cdot x_3} \vee x_2 \cdot \overline{x}_4$; **д)** $(x_1 \sim x_2) \to x_3$; **е)** (10101100) — столбец значений функции f в её таблице; **ж)** (11000100); **з)** $(\overline{x}_1 \mid x_2) \uparrow x_3$.

375. Найти все фиктивные переменные следующих булевых функций:
а) $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2$; **б)** $x_1\overline{x}_2 \vee x_2$; **в)** $x_1\overline{x}_2 \vee x_1$; **г)** $(x_1 \to (x_2 \to \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3))$; **д)** $(x_1 \to x_2)((x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3))$; **е)** $(x_1 \to x_2) \to (\overline{x}_2 \to \overline{x}_1)$; **ж)** $(x_1 \to x_2) \to x_1$.

376. Сколько функций содержится во множестве:
а) $P_0(n) \cap P_1(n)$; **б)** $P_0(n) \cup P_1(n)$; **в)** $P_0(n) \backslash P_1(n)$; **г)** $P_0(n) \cap S(n)$; **д)** $P_0(n) \cup S(n)$; **е)** $P_0(n) \backslash S(n)$; **ж)** $S(n) \backslash P_0(n)$?

377. Среди функций примеров 374 и 375 найти все функции, входящие:
а) в P_0; **б)** в P_1.

378. Какие из следующих функций самодвойственны:
а) $(x_1 \to x_2) \to x_1x_3$; **б)** $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_1)x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$; **в)** $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$; **г)** (0001001001100111); **д)** $f(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{2m+1} \oplus \delta$, $\delta \in \{0, 1\}$; **е)** $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$; **ж)** $(x_1 \mid \overline{x}_1) \uparrow x_2$?

379. Из несамодвойственной функции f с помощью отождествления переменных и операции $\neg$ получить константу:

а) (00111001); **б)** $(x_1 \mid x_2) \to (x_1 \oplus x_3)$; **в)** $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \oplus \overline{x}_1 x_2 x_3$; **г)** $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$.

380. Какие из функций примеров 374, 375, 378 монотонны?

381. Из немонотонных функций примеров 378 и 379 с помощью подстановки констант получить $\neg x$.

382. Какие из следующих функций монотонны:
а) $x_1 \to (x_2 \to x_3)$; **б)** (00110111); **в)** $x_1x_3 \cdot (x_2 \oplus x_3)$; **г)** $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1$; **д)** (01100111)?

383. Какие из функций примеров 374, 375, 378, 382 линейны?

384. Из нелинейных функций примера 383 с помощью констант 0, 1 и операции $\neg$ получить $\wedge$.

385. Выразить с помощью суперпозиций:
а) $\wedge$ и $\to$ через $\neg, \vee$; **б)** $\vee$ и $\to$ через $\neg, \wedge$; **в)** $\wedge$ и $\vee$ через $\neg, \to$; **г)** $\neg$ через $0, \to$; **д)** $\neg$ через $1, \oplus$; **е)** $\vee$ через $\to$; **ж)** $\neg, \vee, \wedge, \to, \sim$ через $\uparrow$; **з)** $\neg, \vee, \wedge, \to, \oplus$ через $|$; **и)** $\uparrow$ через $|$; **к)** $|$ через $\uparrow$.

386. Доказать полноту следующих систем функций сведением к заведомо полным системам:
а) $\{x_1 \uparrow x_2\}$; **б)** $\{x_1 \mid x_2\}$; **в)** $\{x_1 \to x_2, \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}\}$; **г)** $\{(1011), (1100001100111100)\}$.

387. С помощью теоремы Поста проверить на полноту следующие системы функций:
а) x_1x_2, $x_1 \vee x_2$; **б)** $x_1 \to x_2$, $x_1 \to \overline{x}_2x_3$; **в)** $x_1\overline{x}_2$, $\overline{x}_1 \sim x_2x_3$; **г)** 0, 1, $x_1(x_2 \sim x_3) \vee \overline{x}_1(x_2 \oplus x_3)$; **д)** $\neg x$, (0010), (0101110011100011); **е)** 1, $x_1 \oplus x_2$, $(x_1 \to x_2) \uparrow (x_2 \sim x_3)$, $(x_3 \mid (x_1 \cdot x_2)) \to \overline{x}_3$; **ж)** $x_1 \to x_2$, $\overline{x}_1$; **з)** x_1x_2, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2$; **и)** $x_1 \sim x_2$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_1 \to \overline{x}_2$; **к)** $x_1 \to x_2$, 0, $x_1 \sim x_2$; **л)** $x_1 \oplus x_2$, $\overline{x}_1$; **м)** $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, 0, 1; **н)** $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_1 \to x_2$;

388. Из полных систем примера 387 выделить все возможные базисы, то есть такие полные подсистемы, у которых ни одна собственная подсистема не является полной.

389. Доказать, что если система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ полна, то и система функций $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*\}$ также полна.

390. Какие из следующих систем функций являются замкнутыми:
а) $P_2(1)$; **б)** $P_2(2)$; **в)** P_2; **г)** $P_0 \cap P_1$; **д)** $P_0 \cup P_1$; **е)** $P_0 \backslash P_1$?

391. Доказать, что пересечение функционально замкнутых классов является функционально замкнутым классом.

392. Доказать, что если множество $\mathcal{M}$ — функционально замкнутый класс, то множество $\mathcal{M}^*$, состоящее из функций, двойственных к функциям из $\mathcal{M}$, также является функционально замкнутым классом.

393. Доказать, что если $\mathcal{M} \neq \varnothing$, $\mathcal{M} \neq P_2$ и $[\mathcal{M}] = \mathcal{M}$, то $P_2 \backslash \mathcal{M}$ незамкнуто.

394. Обозначим через M^- множество монотонно убывающих булевых функций. Доказать, что множества M^- и $M \cup M^-$ незамкнуты.

395. Доказать, что для монотонности функции, отличной от константы, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде суперпозиции конъюнкций и дизъюнкций ($\Leftrightarrow f \in [\vee, \wedge]$).

396. Доказать, что $f \in M \Leftrightarrow f^* \in M$.

397. Найти $M \cap (P_2 \backslash P_0)$, $M \cap (P_2 \backslash P_1)$.

398. К какому наименьшему числу переменных можно свести немонотонную функцию с сохранением немонотонности, отождествляя её переменные?

399. Найти $P_2(2) \backslash (P_0 \cup P_1 \cup L \cup S \cup M)$.

400. Найти все функции, которые можно получить, отождествляя переменные, из следующих функций: **а)** (10010110); **б)** (11111101); **в)** $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$; **г)** $x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

Релейно-контактные схемы и схемы из функциональных элементов.

Задачи синтеза.

Пример 13. Построить схему машины экзаменатора, в которой студенту предлагается вопрос и четыре варианта ответа на него, только один из которых правильный. В случае, когда ответ правильный, должно зажигаться табло “ответ верен”.

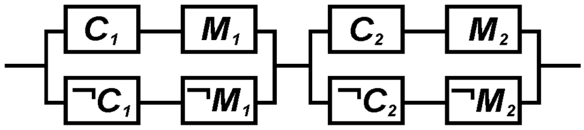
Решение. Закодируем номера ответов двухразрядными двоичными числами 00, 01, 10, 11. Студент и машина должны генерировать двухразрядные управляющие сигналы. Функция проводимости схемы задаётся таблицей

C_1	C_2	M_1	M_2	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Выпишем и упростим СДНФ функции f:

$$f \equiv \overline{C}_1\overline{C}_2\overline{M}_1\overline{M}_2 \vee \overline{C}_1C_2\overline{M}_1M_2 \vee C_1\overline{C}_2M_1\overline{M}_2 \vee C_1C_2M_1M_2 \equiv$$
$$\equiv \overline{C}_1\left(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2M_2\right)\overline{M}_1 \vee C_1\left(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2M_2\right)M_1 \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{C}_2\overline{M}_2 \vee C_2M_2\right)\left(\overline{C}_1\overline{M}_1 \vee C_1M_1\right).$$

Схема имеет вид: а)



или б)

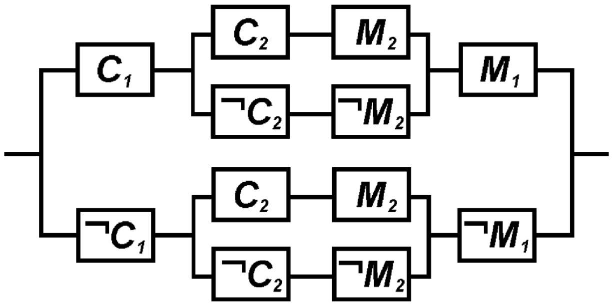
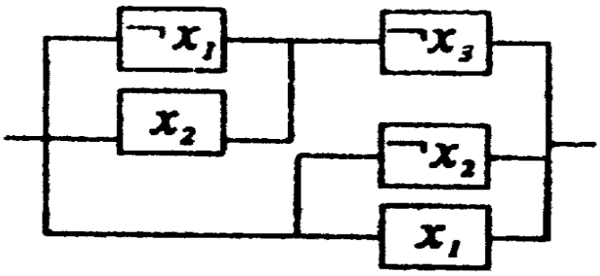


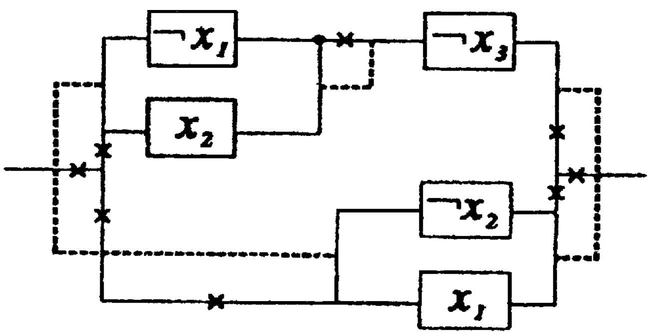
Схема а) предпочтительней схемы б).

Анализ схем.

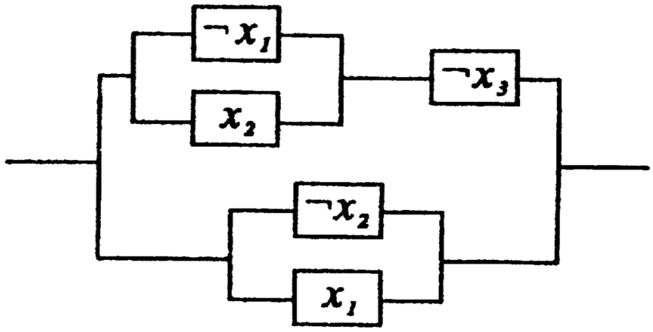
Пример 14. Найти функцию проводимости схемы



Решение. При решении задач такого типа следует помнить, что последовательное соединение реле соответствует конъюнкции, а параллельное — дизъюнкции. Полезным является умение преобразовать топологию схемы так, чтобы явно были видны последовательные и параллельные участки схемы. Преобразуем топологию схемы (добавленные участки обозначены пунктиром, удаляемые участки помечены "$\times$"):



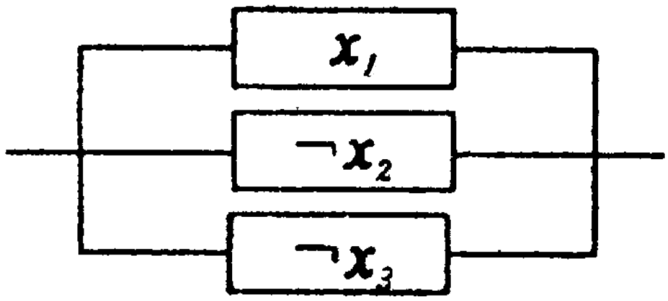
Получаем схему:



Её функция проводимости задаётся формулой

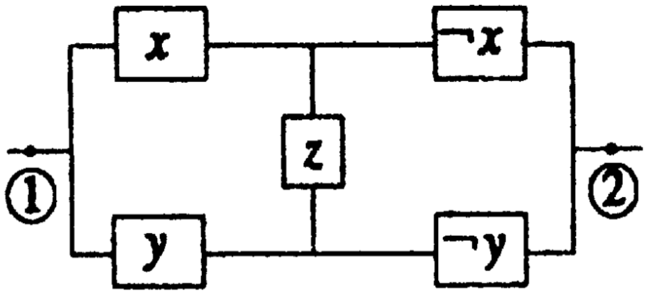
$$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee (\overline{x}_1 \vee x_2)\overline{x}_3 \equiv x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \equiv x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3.$$

Значит, более простая схема имеет вид:

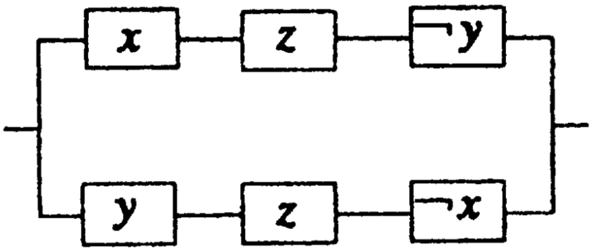


Замечание. Существуют схемы, в которых преобразование топологии не приводит к нужному результату (или такое преобразование трудно провести).

Например, рассмотрим схему:



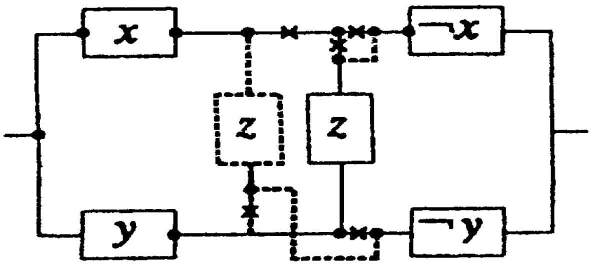
Анализ всевозможных путей прохождения по этой схеме от точки 1 до точки 2 показывает, что эквивалентная схема имеет следующий вид:



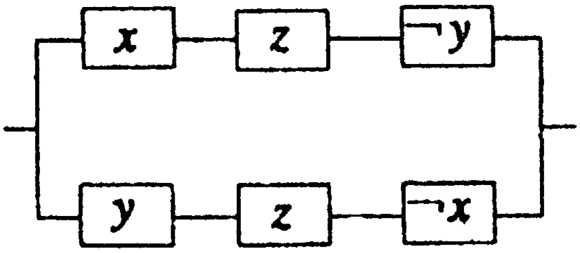
Функция проводимости исходной схемы задаётся формулой:

$$xz\overline{y} \vee \overline{x}yz.$$

Приведём теперь преобразование топологии схемы (здесь будут добавляться и удаляться не только проводники, но и реле):



Пересечение проводников, не отмеченное жирной точкой, означает их изоляцию друг от друга. Изобразим оставшееся на последней схеме.



Составить схемы, реализующие следующие функции:

401. $x \to y$; **402.** $x \sim y$; **403.** $x \vee\vee y$; **404.** $(x \to y)(y \to z)$;

405. $(x \to y) \to \overline{x}(y \vee z)$; **406.**

x	y	z	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

407. Имеется одна лампа в лестничном пролёте двухэтажного дома. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было гасить и зажигать лампу независимо от положения другого выключателя.

408. По установленному сигналу каждый игрок замыкает или размыкает выключатель, находящийся под его управлением. Если оба делают одно и то же, то выигрывает A, в противном случае — B. Построить схему так, чтобы в случае выигрыша A зажигалась лампочка.

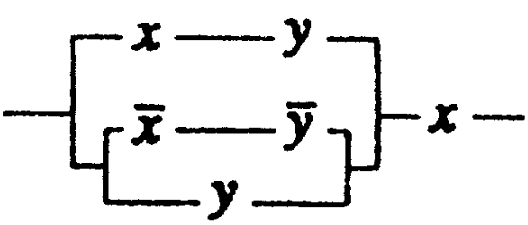
409. Комитет из 5 человек принимает решения большинством голосов. Председатель пользуется правом "вето". Построить схему так, чтобы голосование происходило нажатием кнопок и в случае принятия решения загоралась лампочка.

410. Построить схему, управляющую спуском лифта со второго этажа на первый. Условия, определяющие работу лифта, следующие:

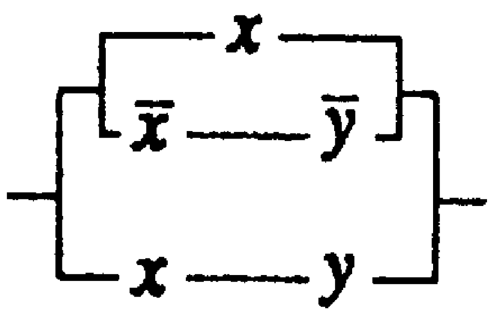
— дверь лифта на первом этаже закрыта,
— дверь лифта на втором этаже закрыта,
— пассажир находится в кабине лифта,
— кнопка вызова на первом этаже нажата,
— кнопка спуска на первый этаж в кабине нажата.

Найти функции проводимости следующих схем, если возможно, упростить схемы:

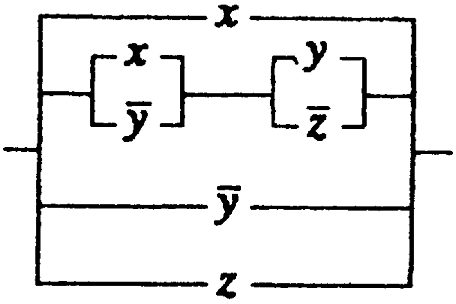
411.



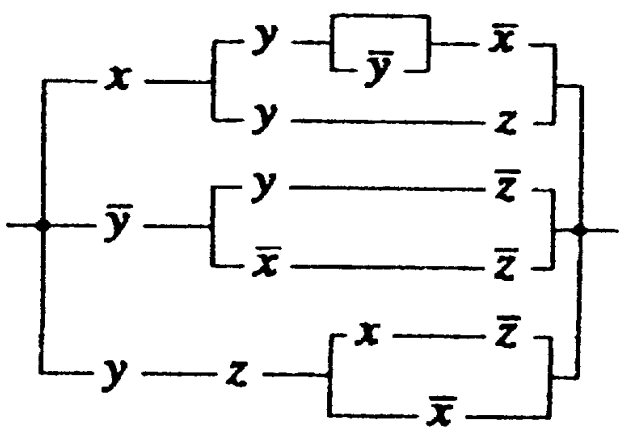
412.



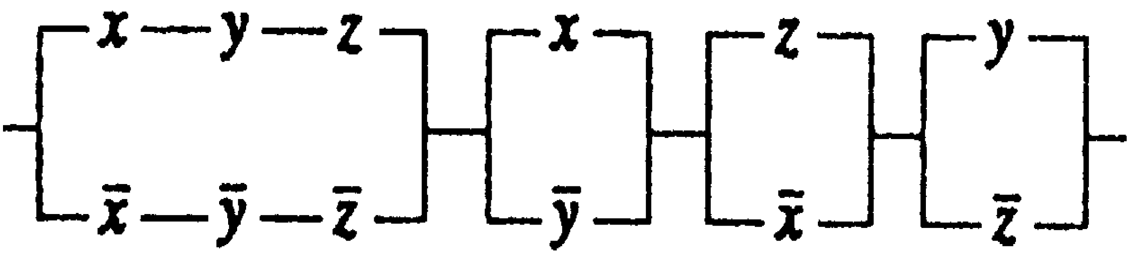
413.



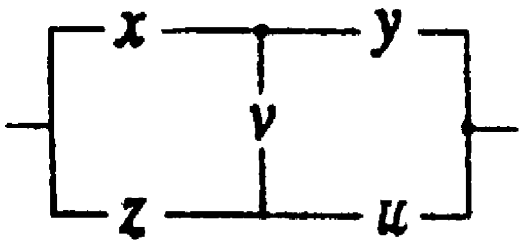
414.



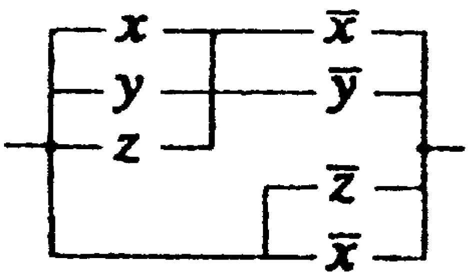
415.



416.



417.



Предикаты и кванторы.

При решении примеров на доказательство равносильности формул алгебры предикатов следует обращать внимание на следующее.

1. Области определения предикатов, стоящих слева и справа от знака $\equiv$, должны совпадать.

2. Связанная квантором переменная может обозначаться любой буквой, то есть

$$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y) \equiv \forall t P(t) \equiv \dots$$

Какие из следующих предложений являются предикатами:
418. x делится на 3 ($x \in \mathbb{N}$); **419.** x делится на 5; **420.** $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; **421.** $x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$; **422.** $x^2 + y^2 = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$; **423.** $x^2 + y^2 \geqslant 0$, $x, y \in \mathbb{R}$; **424.** $x^2 + y^2 = z$, $x, y, z \in \mathbb{R}$; **425.** $x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$; **426.** Для всякого $x \in \mathbb{R}$ найдётся $y \in \mathbb{R}$ такой, что $x = y + 1$. **427.** $x^2 + y^2 < -2$, $x, y \in \mathbb{R}$?

428. Какие из предикатов в примерах 418 — 427 тождественно истинны, тождественно ложны, нетривиально выполнимы?

Выделить свободные переменные следующих предикатов:
429. $\forall x(x - y \equiv x + (-y),\ x, y \in \mathbb{R})$; **430.** $(x < y,\ x, y \in \mathbb{R}) \to$ $\to \exists z((x < z) \wedge (z < y),\ z \in \mathbb{R}$; **431.** $\forall y((y \in \mathbb{R},\ y > 0) \to \exists z(x = yz,\ x, z \in$ $\in \mathbb{R}))$; **432.** $\forall x(\exists y P(x, y) \to Q(x, y, z))$; **433.** $\exists u \forall v \Phi(u, v) \to \exists t \Phi(t, u)$.

434. Из предикатов примеров 418 — 427 образовать высказывания с помощью кванторов и найти их значения истинности.

Доказать следующие равносильности:
435. $\overline{\forall xP(x,y)} \equiv \exists x\overline{P(x,y)}$; **436.** $\overline{\exists xP(x,y)} \equiv \forall x\overline{P(x,y)}$; **437.** $\forall x\forall yP(x,y,z) \equiv \forall y\forall xP(x,y,z)$; **438.** $\exists x\exists yP(x,y,z) \equiv \exists y\exists xP(x,y,z)$; **439.** $\forall x(P(x,y)\wedge Q(x,y)) \equiv \forall xP(x,y)\wedge\forall xQ(x,y)$; **440.** $\exists x(P(x,y)\vee Q(x,y)) \equiv$ $\equiv \exists xP(x,y) \vee \exists xQ(x,y)$; **441.** $\forall x(P(x,z) \vee Q(y,z)) \equiv \forall xP(x,z) \vee Q(y,z)$; **442.** $\exists x(P(x,z) \wedge Q(y,z)) \equiv \exists xP(x,z) \wedge Q(y,z)$; **443.** $\exists x\forall yP(x,y,z) \to$ $\to \forall y\exists xP(x,y,z) \equiv 1$.

Ввести предикаты и с помощью кванторов записать следующие определения, с помощью законов де Моргана получить их отрицания:
444. определение предела числовой последовательности; **445.** определение предела функции в точке; **446.** определение непрерывности функции в точке; **447.** определение непрерывной на интервале функции; **448.** определение равномерно непрерывной на интервале функции.

449. Почему из равномерной непрерывности функции на интервале (a,b) следует непрерывность функции на интервале (a,b)?

450. Доказать, что существуют предикаты Φ, Q и P такие, что

а) $\forall x(\Phi(x) \vee Q(x)) \neq \forall x\Phi(x) \vee \forall xQ(x)$;

б) $\exists x(\Phi(x) \wedge Q(x)) \neq \exists x\Phi(x) \wedge \exists xQ(x)$;

в) $\forall y\exists xP(x,y) \to \exists x\forall yP(x,y) \neq 1$.

451. Какие из следующих формул тождественно истинны:

а) $\forall x(\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\Phi(x) \to \forall xP(x)$;

б) $\forall x(\Phi(x) \to P(x)) \to (\exists x\Phi(x) \to \exists xP(x)$;

в) $\exists x(\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\Phi(x) \to \forall xP(x)$;

г) $\exists x(\Phi(x) \to P(x)) \to (\exists x\Phi(x) \to \exists xP(x)$;

д) $\forall x(\Phi(x) \to P(x)) \sim (\exists x\Phi(x) \to \forall xP(x)$?

Вычислимые функции.

Проверка вычислимости, перечислимости и разрешимости множества состоит в предъявлении вычислимой функции, т.е. алгоритма. Алгоритм может быть представлен в виде блок-схемы или написан на одном из распространённых языков программирования (C, Pascal и др.).

Проверить:
452. разрешимость множества простых чисел; **453.** перечислимость графика вычислимой функции; **454.** перечислимость множества простых чисел; **455.** разрешимость любого конечного множества; **456.** разрешимость множества $2\mathbb{N}$; **457.** перечислимость множества совершенных чисел; **458.** разрешимость множества всех рациональных

чисел, меньших 3; **459.** арифметичность предиката „$x = n$-тое по порядку простое число“.

Привести пример:
460. перечислимого неразрешимого множества; **461.** неразрешимого множества.

Доказать арифметичность предикатов в сигнатуре $(=, +)$ на множестве натуральных чисел:
462. $x < y$; **463.** $x = 0$; **464.** $x = 1$; **465.** x делится на y без остатка; **466.** x — простое число.

467. Изобразить соответствующее предикату $x < y$ арифметическое множество в $\mathbb{N}^2$.

Контрольное домашнее задание

Задание 1. Алгебра высказываний.

Даны выражения A, B и C, зависящие от трёх переменных a, b и c.

1. Записать выражения A, B и C в стандартных обозначениях.
2. С помощью таблицы истинности привести выражение A к СДНФ и СКНФ.
3. С помощью равносильных преобразований привести выражение B к ДНФ, КНФ, СДНФ и СКНФ.
4. Проверить, эквивалентны ли выражения A и B.
5. Проверить, является ли выражение B тавтологией.
6. Указать, при каких значениях переменных выражение B истинно.
7. Написать двойственное к C выражение в виде многочлена Жегалкина.
8. Проверить выражение C на самосопряжённость.
9. Проверить выражение A на линейность и монотонность.
10. С помощью теоремы Поста проверить на полноту систему функций $\{A, B\}$.

Вариант 1

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(a, not(b), not(c)), or(a, c, not(b)), or(c, b, not(a)), \\ & or(b, not(a), not(c))) \\ B = \ & and(not(a), not(b), not(c)) \\ C = \ & cb \oplus b \oplus ab \oplus 1 \oplus a \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(a, c, not(b)), or(c, not(a), not(b)), or(b, not(a), not(c))) \\ B = \ & or(and(a, b, not(c)), and(a, c, b), and(a, not(b), not(c)), \\ & and(a, c, not(b)), and(c, b, not(a)), and(c, not(a), not(b))) \\ C = \ & cb \oplus acb \oplus b \oplus ab \oplus 1 \oplus a \end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(a, c, b), or(a, c, not(b)), or(b, not(a), not(c))) \\ B = \ & or(and(a, b, not(c)), and(a, not(b), not(c)), and(a, c, not(b)), \\ & and(c, not(a), not(b))) \\ C = \ & cb \oplus ac \end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned} A = \ & or(a, c, not(b)) \\ B = \ & or(and(a, not(b), not(c)), and(c, not(a), not(b)), \\ & and(not(a), not(b), not(c))) \\ C = \ & c \oplus 1 \oplus ac \end{aligned}$$

Вариант 5

$$\begin{aligned} A = \ & or(c, b, not(a)) \\ B = \ & or(and(a, b, not(c)), and(a, not(b), not(c)), and(a, c, not(b))) \\ C = \ & b \oplus 1 \oplus a \end{aligned}$$

Вариант 6

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(a,b,not(c)),or(a,c,b),or(a,not(b),not(c)),\\
& or(c,not(a),not(b)),or(b,not(a),not(c)),or(not(a),not(b),not(c)))\\
B = \;& (and(a,c,b))or(and(b,not(a),not(c)))\\
C = \;& b \oplus ab \oplus ac
\end{aligned}$$

Вариант 7

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(a,c,b),or(a,not(b),not(c)),or(a,c,not(b)),or(c,b,not(a)),\\
& or(c,not(a),not(b)),or(not(a),not(b),not(c)))\\
B = \;& (and(c,not(a),not(b)))or(and(b,not(a),not(c)))\\
C = \;& c \oplus b \oplus 1 \oplus a
\end{aligned}$$

Вариант 8

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(c,b,not(a)),or(c,not(a),not(b)),or(not(a),not(b),not(c)))\\
B = \;& or(and(a,b,not(c)),and(a,c,b),and(a,not(b),not(c)),and(c,b,not(a)))\\
C = \;& cb \oplus 1 \oplus a
\end{aligned}$$

Вариант 9

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(a,b,not(c)),or(a,c,b),or(c,b,not(a)),or(b,not(a),not(c)),\\
& or(not(a),not(b),not(c)))\\
B = \;& or(and(a,b,not(c)),and(a,c,b),and(a,c,not(b)),and(c,not(a),not(b)),\\
& and(b,not(a),not(c)))\\
C = \;& cb \oplus ac
\end{aligned}$$

Вариант 10

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(a,b,not(c)),or(a,c,b),or(c,not(a),not(b)))\\
B = \;& or(and(a,not(b),not(c)),and(a,c,not(b)),and(c,b,not(a)),\\
& and(c,not(a),not(b)))\\
C = \;& cb \oplus c \oplus ab \oplus 1
\end{aligned}$$

Вариант 11

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(a,b,not(c)),or(a,not(b),not(c)),or(c,b,not(a)),\\
& or(not(a),not(b),not(c)))\\
B = \;& or(and(a,b,not(c)),and(a,c,b),and(c,b,not(a)),and(c,not(a),not(b)),\\
& and(b,not(a),not(c)))\\
C = \;& c \oplus ab \oplus 1 \oplus ac
\end{aligned}$$

Вариант 12

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(a,b,not(c)),or(a,c,b),or(a,not(b),not(c)),or(c,not(a),not(b)),\\
& or(not(a),not(b),not(c)))\\
B = \;& or(and(a,c,b),and(a,c,not(b)),and(c,not(a),not(b)))\\
C = \;& acb \oplus c \oplus 1 \oplus ac
\end{aligned}$$

Вариант 13

$$\begin{aligned}A = {} & and(or(a,b,not(c)), or(a,c,not(b)), or(c,b,not(a)), or(c,not(a),not(b)),\\ & or(b,not(a),not(c)))\\ B = {} & or(and(a,c,b), and(a,c,not(b)), and(c,not(a),not(b)))\\ C = {} & acb \oplus b \oplus 1 \oplus ac \oplus a\end{aligned}$$

Вариант 14

$$\begin{aligned}A = {} & and(or(a,c,b), or(c,b,not(a)), or(c,not(a),not(b)), or(b,not(a),not(c)),\\ & or(not(a),not(b),not(c)))\\ B = {} & or(and(a,b,not(c)), and(a,c,b), and(a,not(b),not(c)), and(a,c,not(b)),\\ & and(not(a),not(b),not(c)))\\ C = {} & acb \oplus c \oplus b \oplus ab \oplus 1 \oplus ac \oplus a\end{aligned}$$

Вариант 15

$$\begin{aligned}A = {} & and(or(a,not(b),not(c)), or(c,not(a),not(b)), or(b,not(a),not(c)),\\ & or(not(a),not(b),not(c)))\\ B = {} & or(and(a,b,not(c)), and(a,not(b),not(c)), and(a,c,not(b)),\\ & and(c,not(a),not(b)))\\ C = {} & cb \oplus c \oplus 1 \oplus ac\end{aligned}$$

Вариант 16

$$\begin{aligned}A = {} & (or(a,b,not(c)))and(or(a,c,not(b)))\\ B = {} & or(and(a,b,not(c)), and(a,c,b), and(a,c,not(b)), and(c,b,not(a)),\\ & and(c,not(a),not(b)), and(b,not(a),not(c)), and(not(a),not(b),not(c)))\\ C = {} & b \oplus ab\end{aligned}$$

Вариант 17

$$\begin{aligned}A = {} & and(or(a,c,b), or(c,b,not(a)), or(not(a),not(b),not(c)))\\ B = {} & or(and(a,b,not(c)), and(a,c,b), and(a,not(b),not(c)), and(a,c,not(b)),\\ & and(c,b,not(a)))\\ C = {} & c \oplus ab \oplus 1 \oplus ac\end{aligned}$$

Вариант 18

$$\begin{aligned}A = {} & and(or(a,b,not(c)), or(a,c,b), or(c,b,not(a)), or(b,not(a),not(c)),\\ & or(not(a),not(b),not(c)))\\ B = {} & or(and(a,not(b),not(c)), and(a,c,not(b)), and(c,b,not(a)),\\ & and(not(a),not(b),not(c)))\\ C = {} & cb \oplus acb \oplus c \oplus b \oplus a\end{aligned}$$

Вариант 19

$$\begin{aligned}A = {} & and(or(a,c,b), or(a,not(b),not(c)), or(c,not(a),not(b)),\\ & or(not(a),not(b),not(c)))\\ B = {} & or(and(a,b,not(c)), and(a,c,b), and(c,b,not(a)), and(c,not(a),not(b)))\\ C = {} & cb \oplus acb \oplus c \oplus b\end{aligned}$$

Вариант 20

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(a,b,not(c)), or(a,c,b), or(a,c,not(b)), or(c,b,not(a)),\\ & or(c,not(a),not(b)))\\ B = \ & or(and(a,not(b),not(c)), and(c,b,not(a)), and(not(a),not(b),not(c)))\\ C = \ & cb \oplus acb \oplus b \oplus ab \oplus ac \oplus a \end{aligned}$$

Вариант 21

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(a,b,not(c)), or(a,not(b),not(c)), or(c,b,not(a)))\\ B = \ & (and(a,b,not(c)))or(and(a,c,not(b)))\\ C = \ & acb \oplus c \oplus ab \oplus a \end{aligned}$$

Вариант 22

$$\begin{aligned} A = \ & or(a,not(b),not(c))\\ B = \ & or(and(a,b,not(c)), and(a,c,b), and(a,c,not(b)), and(c,b,not(a)),\\ & and(c,not(a),not(b)), and(b,not(a),not(c)))\\ C = \ & cb \oplus acb \oplus c \oplus b \oplus ab \oplus 1 \oplus a \end{aligned}$$

Вариант 23

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(a,c,b), or(a,not(b),not(c)), or(a,c,not(b)), or(c,not(a),not(b)),\\ & or(not(a),not(b),not(c)))\\ B = \ & false\\ C = \ & cb \oplus acb \oplus ac \end{aligned}$$

Вариант 24

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(a,b,not(c)), or(a,c,not(b)), or(c,b,not(a)))\\ B = \ & or(and(a,c,b), and(a,c,not(b)), and(c,not(a),not(b)),\\ & and(b,not(a),not(c)))\\ C = \ & c \oplus 1 \end{aligned}$$

Задание 2. Релейно-контактные схемы и схемы из функциональных элементов.

Даны выражения A, B и C, зависящие от трёх переменных x, y и z.

1. Нарисовать релейно-контактные схемы, соответствующие выражениям A, B и C.

2. Упростить выражение A и изобразить соответствующую упрощённую схему.

3. Нарисовать схему для B, используя только элементы „и“ и „не“.

4. Нарисовать схему для C, используя только элементы „или“ и „не“.

Вариант 1

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(x,y,z), or(x,z,not(y)), or(x,not(y),not(z)), or(y,z,not(x)),\\ & or(y,not(x),not(z)), or(z,not(x),not(y)), or(not(x),not(y),not(z)))\\ B = \ & or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(y,z,not(x)),\\ & and(z,not(x),not(y)), and(not(x),not(y),not(z)))\\ C = \ & xyz \oplus xz \oplus yz \oplus y \oplus 1 \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(x,z,not(y)),\\ & or(y,not(x),not(z)), or(not(x),not(y),not(z)))\\ B = \ & (and(x,z,not(y)))or(and(z,not(x),not(y)))\\ C = \ & xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus 1 \end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(x,y,z), or(y,z,not(x)), or(y,not(x),not(z)),\\ & or(z,not(x),not(y)), or(not(x),not(y),not(z)))\\ B = \ & or(and(x,not(y),not(z)), and(y,z,not(x)), and(z,not(x),not(y)))\\ C = \ & xy \oplus xz \oplus yz \end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(x,z,not(y)), or(y,z,not(x)), or(y,not(x),not(z)),\\ & or(z,not(x),not(y)))\\ B = \ & or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(x,z,not(y)),\\ & and(x,not(y),not(z)), and(not(x),not(y),not(z)))\\ C = \ & xyz \oplus xz \end{aligned}$$

Вариант 5

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(x,not(y),not(z)), or(y,not(x),not(z)),\\ & or(not(x),not(y),not(z)))\\ B = \ & or(and(x,y,not(z)), and(y,not(x),not(z)),\\ & and(z,not(x),not(y)), and(not(x),not(y),not(z)))\\ C = \ & xyz \oplus xz \oplus yz \oplus y \end{aligned}$$

Вариант 6

$$\begin{aligned} A &= (or(x,y,z))and(or(not(x),not(y),not(z)))\\ B &= or(and(x,y,not(z)), and(x,not(y),not(z)), and(y,z,not(x)))\\ C &= xyz \oplus xz \oplus yz \oplus y \oplus 1 \end{aligned}$$

Вариант 7

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(x,y,not(z)), or(y,z,not(x)), or(y,not(x),not(z)),\\ & or(z,not(x),not(y)))\\ B = \ & or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(x,z,not(y)),\\ & and(y,z,not(x)), and(z,not(x),not(y)),\\ & and(not(x),not(y),not(z)))\\ C = \ & xy \oplus x \oplus z \oplus 1 \end{aligned}$$

Вариант 8

$$\begin{aligned} A = \ & and(or(x,y,z), or(x,not(y),not(z)), or(y,z,not(x)),\\ & or(y,not(x),not(z)), or(z,not(x),not(y)),\\ & or(not(x),not(y),not(z)))\\ B = \ & or(and(x,y,not(z)), and(x,not(y),not(z)),\\ & and(y,z,not(x)), and(y,not(x),not(z)), and(z,not(x),not(y)))\\ C = \ & xyz \oplus x \oplus yz \oplus y \end{aligned}$$

Вариант 9

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(x,not(y),not(z)),\\
& or(y,z,not(x)), or(y,not(x),not(z)), or(not(x),not(y),not(z)))\\
B = \;& or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(x,z,not(y)),\\
& and(x,not(y),not(z)), and(y,not(x),not(z)),\\
& and(z,not(x),not(y)), and(not(x),not(y),not(z)))\\
C = \;& xyz \oplus xz \oplus x \oplus yz \oplus y \oplus z \oplus 1
\end{aligned}$$

Вариант 10

$$\begin{aligned}
A = \;& (or(x,z,not(y)))and(or(y,z,not(x)))\\
B = \;& or(and(x,not(y),not(z)), and(y,z,not(x)),\\
& and(y,not(x),not(z)), and(z,not(x),not(y)))\\
C = \;& xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus y \oplus 1
\end{aligned}$$

Вариант 11

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(x,not(y),not(z)),\\
& or(not(x),not(y),not(z)))\\
B = \;& (and(x,y,z))or(and(not(x),not(y),not(z)))\\
C = \;& xyz \oplus x
\end{aligned}$$

Вариант 12

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(x,z,not(y)),\\
& or(y,z,not(x)), or(not(x),not(y),not(z)))\\
B = \;& or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(y,z,not(x)),\\
& and(z,not(x),not(y)))\\
C = \;& x \oplus y
\end{aligned}$$

Вариант 13

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(x,z,not(y)),\\
& or(y,z,not(x)), or(y,not(x),not(z)))\\
B = \;& or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(x,z,not(y)),\\
& and(y,z,not(x)), and(z,not(x),not(y)))\\
C = \;& xy \oplus xz \oplus yz \oplus y \oplus 1
\end{aligned}$$

Вариант 14

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(z,not(x),not(y)))\\
B = \;& or(and(x,y,z), and(x,not(y),not(z)), and(y,z,not(x)),\\
& and(y,not(x),not(z)))\\
C = \;& xyz \oplus xy \oplus x \oplus yz \oplus z
\end{aligned}$$

Вариант 15

$$\begin{aligned}
A = \;& and(or(x,z,not(y)), or(x,not(y),not(z)), or(y,z,not(x)),\\
& or(y,not(x),not(z)), or(not(x),not(y),not(z)))\\
B = \;& or(and(x,y,not(z)), and(x,z,not(y)), and(y,z,not(x)),\\
& and(y,not(x),not(z)), and(z,not(x),not(y)))\\
C = \;& xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z
\end{aligned}$$

Вариант 16

$$\begin{aligned} A = \; & and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(x,z,not(y)), \\ & or(y,z,not(x)), or(y,not(x),not(z)), or(z,not(x),not(y))) \\ B = \; & or(and(x,y,not(z)), and(x,not(y),not(z)), \\ & and(y,z,not(x)), and(y,not(x),not(z)), and(z,not(x),not(y))) \\ C = \; & xz \oplus x \oplus yz \end{aligned}$$

Вариант 17

$$\begin{aligned} A = \; & and(or(x,z,not(y)), or(y,z,not(x)), or(not(x),not(y),not(z))) \\ B = \; & or(and(x,y,not(z)), and(x,z,not(y)), and(x,not(y),not(z))) \\ C = \; & xz \oplus yz \oplus 1 \end{aligned}$$

Вариант 18

$$\begin{aligned} A = \; & and(or(x,y,z), or(x,z,not(y)), or(y,not(x),not(z)), \\ & or(z,not(x),not(y)), or(not(x),not(y),not(z))) \\ B = \; & or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(y,not(x),not(z)), \\ & and(not(x),not(y),not(z))) \\ C = \; & xyz \oplus xz \oplus z \oplus 1 \end{aligned}$$

Вариант 19

$$\begin{aligned} A = \; & and(or(x,z,not(y)), or(x,not(y),not(z)), or(y,z,not(x)), \\ & or(y,not(x),not(z)), or(z,not(x),not(y)), or(not(x),not(y),not(z))) \\ B = \; & or(and(x,y,z), and(x,y,not(z)), and(x,not(y),not(z)), \\ & and(y,z,not(x)), and(y,not(x),not(z)), and(z,not(x),not(y))) \\ C = \; & x \oplus yz \oplus y \oplus z \end{aligned}$$

Вариант 20

$$\begin{aligned} A = \; & and(or(x,y,not(z)), or(y,z,not(x)), or(y,not(x),not(z)), \\ & or(z,not(x),not(y))) \\ B = \; & or(and(x,z,not(y)), and(x,not(y),not(z)), and(y,z,not(x)), \\ & and(y,not(x),not(z)), and(not(x),not(y),not(z))) \\ C = \; & xy \oplus xz \oplus x \oplus yz \oplus z \end{aligned}$$

Вариант 21

$$\begin{aligned} A = \; & and(or(x,not(y),not(z)), or(x,z,not(y)), or(y,not(x),z), \\ & or(z,x,not(y)), or(not(x),y,not(z))) \\ B = \; & or(and(x,y,z), and(x,z,not(y)), and(x,not(y),not(z)), \\ & and(z,not(x),not(y))) \\ C = \; & x \oplus z \end{aligned}$$

Вариант 22

$$\begin{aligned} A = \; & and(or(x,y,z), or(x,y,not(z)), or(x,not(y),not(z)), \\ & or(y,z,not(x)), or(z,not(x),not(y)), or(not(x),not(y),not(z))) \\ B = \; & (and(y,z,not(x)))or(and(y,not(x),not(z))) \\ C = \; & xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus yz \oplus y \oplus z \oplus 1 \end{aligned}$$

Вариант 23

$$\begin{aligned}
A =\ & or(x, z, not(y)) \\
B =\ & or(and(x, y, z), and(x, y, not(z)), and(y, not(x), not(z)), \\
& and(z, not(x), not(y))) \\
C =\ & xy \oplus yz \oplus y \oplus 1
\end{aligned}$$

Вариант 24

$$\begin{aligned}
A =\ & true \\
B =\ & or(and(x, y, z), and(x, y, not(z)), and(y, z, not(x)), \\
& and(z, not(x), not(y)), and(not(x), not(y), not(z))) \\
C =\ & xyz \oplus xz \oplus x \oplus yz \oplus y
\end{aligned}$$

Задание 3. Машины Тьюринга.

В этом разделе содержатся задачи двух типов:

— по заданной машине Тьюринга найти результат её применения к заданному слову u, то есть найти $T(u)$;

— построить машину, решающую данный класс задач.

При решении задач второго типа рекомендуется до составления программы машины, то есть до заполнения таблицы, задающей программу, тщательно продумать алгоритм, который должен быть реализован программой. В конце решения (когда программа составлена) не забудьте применить её к тестовому примеру.

Вариант 1

По заданной машине T с внешним алфавитом $A = \{|, \wedge\}$ и слову u найти слово $T(u)$.

	q_1	q_2
$\vert$	$\wedge q_2 + 1$	$\vert\, q_2 - 1$
$\wedge$	$\vert\, q_0\, 0$	$\wedge q_1 + 1$

$u_1 = ||||$
$u_2 = |\wedge\wedge|$

Вариант 2

По заданной машине T с внешним алфавитом $A = \{|, \wedge\}$ и слову u найти слово $T(u)$.

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$\vert\, q_3 + 1$	$\vert\, q_2\, 0$	$\vert\, q_1 + 1$
$\wedge$	$\vert\, q_2 + 1$	$\vert\, q_3 + 1$	$\vert\, q_0\, 0$

$u_1 = |||$
$u_2 = |\wedge\wedge|$
$u_3 = ||\wedge\wedge\wedge|$

Вариант 3

Выяснить, применима ли машина T с внешним алфавитом $\{|, \wedge\}$ к слову u, и в случае применимости найти результат.

	$q_1 4$	q_2
$\vert$	$\wedge q_1 + 1$	$\wedge q_2 - 1$
$\wedge$	$\wedge q_2 - 1$	$\vert\, q_0 + 1$

$u_1 = |||$
$u_2 = ||\wedge|$

Вариант 4

Выяснить, применима ли машина T с внешним алфавитом $\{|, \wedge\}$ к слову u, и в случае применимости найти результат.

	q_1	q_2	q_3
$\vert$	$\wedge q_1 + 1$	$\vert\, q_1 - 1$	$\vert\, q_2 + 1$
$\wedge$	$\wedge q_2 + 1$	$\wedge q_3 + 1$	$\wedge q_0\, 0$

$u_1 = || \wedge |$
$u_2 = | \wedge ||||$

Вариант 5

Какую функцию натурального аргумента вычисляет машина, заданная программой? Упростить эту машину.

	q_1	q_2
$\vert$	$\vert\, q_2 + 1$	$\vert\, q_2 + 1$
$\wedge$	$\vert\, q_0\, 0$	$\vert\, q_0\, 0$

Вариант 6

Построить машину, распознающую чётность натурального числа.

Вариант 7

Построить машину, вычисляющую остаток от деления натурального числа на m.

Вариант 8

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $x + y$, заданную на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Вариант 9

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $x + 2y$, заданную на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Вариант 10

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $x \cdot y$, заданную на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Вариант 11

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $x^2 + 3y$, заданную на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Вариант 12

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $3x$, определённую на множестве $\mathbb{N}$.

Вариант 13

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию x^2, определённую на множестве $\mathbb{N}$.

Вариант 14

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию

$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x = 2n, \\ 2x & \text{при } x = 2n + 1, \end{cases}$ определённую на множестве $\mathbb{N}$.

Вариант 15

Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину T, работающую по правилу $T(1^n) = 1^n01^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{aa\ldots a}_{n}$.

Вариант 16

Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину T, работающую по правилу $T(0^n1^n) = (01)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{aa\ldots a}_{n}$.

Вариант 17

Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину T, работающую по правилу $T(1^n) = 1^n01^{2n}01^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{aa\ldots a}_{n}$.

Вариант 18

Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину T, работающую по правилу $T(1^n01^m) = 1^m01^n$, $n, m \in \mathbb{N}$, $a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{aa\ldots a}_{n}$.

Вариант 19

Начиная с последней единицы массива из единиц, машина “сдвигает” его на одну ячейку влево и останавливается на первой единице.

Вариант 20

При заданном $l \geqslant 1$ машина, начав с произвольной ячейки, заполненной единицей, движется вправо, не меняя содержимого ячеек, до тех пор пока не пройдёт массив из $l+1$ нуля, машина останавливается на следующей ячейке, поместив туда единицу.

Вариант 21

При заданном $l \geqslant 1$ машина, начав с произвольной ячейки и двигаясь вправо, проставляет подряд l единиц и останавливается на последней из них.

Вариант 22

Машина начинает работу с крайней слева непустой ячейки произвольного слова, при заданном $l \geqslant 1$ отыскивает в слове первый слева массив из $l + 1$ нуля и останавливается на последнем из них (содержимое ячеек не меняется).

Вариант 23

Начав работу с самой левой непустой ячейки, машина отыскивает единицу, примыкающую слева к первому слева массиву из трёх нулей, “окаймлённому” единицами, СЗУ останавливается на найденной единице (содержимое ячеек не меняется).

Вариант 24

Машина сдвигается на две ячейки вправо от начальной, машина останавливается в состоянии q_0, если эта ячейка содержит нуль, в состоянии q_0', если эта ячейка содержит единицу.

Задание 4. Нечёткая логика и нечёткие множества.

В вариантах данного задания числа n и m — две последние цифры студенческого билета. Для создания нечётких множеств следует использовать стандартные конструкторы таким образом, чтобы множества A, B и C попарно пересекались. Все решения представить в графической форме.

Выполнить пункты:

1. Задать нечёткое множество $A \cong 25 + n$;
2. Задать нечёткое множество $B \cong 20 \pm (n + 2)$;
3. Задать нечёткое множество $C \gtrsim m$;
4. Изобразить функции принадлежности μ_A, μ_B, μ_C к нечётким множествам A, B, C;
5. Найти нечёткие множества

а) $B \cap C$;	б) $A \cap B \cap C$;
в) $A \cup C$;	г) $A \cup B \cup C$;
д) $A \cup B \cap C$;	е) $A \cap B \setminus C$;
ж) $B \Rightarrow C$;	з) $C \setminus B$.

Рекомендуемая литература

1) Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 1999. 128 с.

2) Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — М.: МЦНМО, 2000. 288 с.

3) Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — М.: МЦНМО, 1999. 176 с.

4) Я. М. Ерусалимский, Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 4-е издание. — М.: Вузовская книга, 2001. 280 с.

5) Ю. И. Манин. Доказуемое и недоказуемое. — М.: Советское радио, 1979. 168 с.

6) Ю. И. Манин. Вычислимое и невычислимое. — М.: Советское радио, 1980. 128 с.

7) А. В. Самохин. Математическая логика и теория алгоритмов. — М.: МГТУ ГА, 2003. 236 с.

Содержание