1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1.1. Линейное пространство

Определение 1. Говорят, что на множестве R определена операция сложения элементов, если каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in R$ ставится в соответствие вполне определенный элемент $z \in R$. Указанный элемент z называется суммой элементов x и y и обозначается $x + y$.

Определение 2. Говорят, что на множестве R определена операция умножения элемента на число, если каждому элементу $x \in R$ и каждому числу α ставится в соответствие вполне определенный элемент$z \in R$. Указанный элемент z называется произведением элемента x на число α и обозначается αx.

Определение 3. Множество R называется линейным пространством, если на нем определены операции сложения элементов и умножения элемента на число, причем для любых $x, y, z \in R$ и любых чисел α, β имеют место следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $\exists\theta \in R : \forall x \in R \Rightarrow x + \theta = x$;
4. $\forall x \in R \exists -x \in R : x + (-x) = \theta$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
8. $1 \cdot x = x$.

Элементы линейного пространства называются векторами. Вектор θ, упомянутый в аксиоме 3, называется нулевым вектором или нулем. Вектор $-x$, упомянутый в аксиоме 4, называется противоположным вектору x.

Следствия из аксиом линейного пространства

1. Линейное пространство имеет только один нуль.
2. Для каждого вектора существует только один противоположный.
3. $\forall x \in R \Rightarrow 0 \cdot x = \theta$.
4. $\forall x \in R \Rightarrow (-1) \cdot x = -x$.
5. Для любого числа $\alpha \Rightarrow \alpha \cdot \theta = \theta$.
6. Если $\alpha x = \theta$, то либо $\alpha = 0$, либо$x = \theta$.

Следствие 2 дает нам возможность ввести

Определение 4. Сумма векторов y и $-x$ называется разностью векторов y и x и обозначается $y - x$.

Следует отметить, что операция вычитания векторов выражается через операции сложения векторов и умножения вектора на число

$$y - x = y + (-1)x \qquad \text{(см. следствие 4)}$$

Задачи

1. Образует ли линейное пространство множество многочленов степени n с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа?

Ответ. Нет, так как сумма двух многочленов степени n может иметь степень меньше n.

2. Образует ли линейное пространство множество многочленов степени $\leq n$ с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа?

Ответ. Да. Все аксиомы выполнены. Роль нуля играет многочлен, все коэффициенты которого равны нулю.

3. Доказать, что множество квадратных матриц второго порядка с обычными операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство.

Легко проверить, что все аксиомы линейного пространства выполнены. Нулем пространства является нулевая матрица второго порядка.

4. Образует ли линейное пространство множество всех действительных чисел, если операции сложения (обозначается $\oplus$) и умножения на число (обозначается $(\cdot)$) ввести следующим образом:

$$x \oplus y = x + y;\ \alpha(\cdot)x = |\alpha|x.$$

Ответ. Нет, так как не выполнена аксиома 6. Действительно, выполнимость этой аксиомы означала бы при любых α, β и x выполнимость следующего равенства:

$$|\alpha + \beta|x = |\alpha|x + |\beta|x = (|\alpha| + |\beta|)x,$$

что невозможно.

5. Доказать, что для любого вектора x линейного пространства R имеют место соотношения:

а) $-(-x) = x$; б) $0 \cdot x = \theta$.

Доказательство. а) Надо доказать, что элемент, противоположный $-x$, равен x, т.е. доказать справедливость равенства $(-x) + x = 0$. Применяя последовательно аксиомы 1 и 4, получаем: $(-x) + x = x + (-x) = \theta$.

б) $\forall x \Rightarrow 0\cdot x + x = 0\cdot x + 1\cdot x = (0 + 1)x = 1\cdot x = x,$ (1.1)

$x + (-x) = (0\cdot x + x) + (-x) = 0\cdot x + [x + (-x)] = 0\cdot x + \theta = 0\cdot x,$ (1.2)

$x + (-x) = \theta.$ (1.3)

Из равенств (1.1) – (1.3) получаем $0 \cdot x = \theta$.

1.2. Подпространство

Определение 5. Подмножество M линейного пространства R называется подпространством, если

1. $\forall x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$,
2. $\forall x \in M$ и $\forall \alpha \Rightarrow \alpha x \in M$.

Утверждение 1. Подпространство является линейным пространством.

Определение 6. Выражение вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$ называется линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Определение 7. Линейной оболочкой элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т.е. множество всех элементов вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – произвольные числа.

Линейную оболочку $x_1, x_2, \ldots, x_m$ элементов будем обозначать $L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Утверждение 2. Всякая линейная оболочка является подпространством основного линейного пространства.

Заметим, что линейная оболочка элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ является наименьшим подпространством, содержащим элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Задача

Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая их следующих совокупностей векторов: а) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат OX и OY? б) все векторы плоскости, начала и концы которых лежат на данной прямой?

Ответ. а) Нет, так как сумма двух ненулевых векторов лежащих на разных осях координат, не принадлежит этому множеству.

б) Да. Складывая и умножая на числа векторы, лежащие на данной прямой, мы получаем векторы, лежащие на этой прямой.Все аксиомы выполнены.

1.3. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Определение 8. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейного пространства R называются линейно зависимыми, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = \theta. \tag{1.4}$$

Определение 9. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейного пространства R называются линейно независимыми, если равенство (1.4) возможно лишь в одном случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

Подчеркнем, что какова бы ни была система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ при $\alpha_1 == \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ равенство (1.4) всегда имеет место. Но если система линейно независима, то (1.4) имеет место только в этом случае. Если же система линейно зависима, то найдется такой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ содержащий ненулевое число, что (1.4) также имеет место.

Теорема 1. (условие линейной зависимости векторов).

Для того, чтобы система векторов была линейно зависима необходимо и достаточно, чтобы один из векторов этой системы был линейной комбинацией остальных.

Задачи

1. Доказать утверждение: если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Доказательство вытекает из выполнимости равенства

$$1 \cdot \theta + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = \theta.$$

2. Доказать утверждение: если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то указанная система линейно зависима.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – линейно зависимые векторы. Тогда существуют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ не все равные нулю, для которых выполняется равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = \theta.$$

Поэтому для любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ справедливо равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m + 0 \cdot x_{m+1}, \ldots, 0 \cdot x_n = \theta.$$

Так как среди $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ есть отличные от нуля, то векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – линейно зависимы.

Задание

Доказать утверждение: каждая подсистема линейнонезависимой системы векторов линейно независима.

1.4. Размерность пространства. Базис. Координаты векторов. Линейные операции в координатной форме

Определение 10. Линейное пространство R называется n-мерным, если 1) в нем существует n линейно независимых векторов, 2) любые $n+1$ векторов линейно зависимы. При этом число n называется размерностью пространства R. Обозначение: $n = \dim R$.

Заметим, что размерность пространства – максимальное число линейно независимых векторов этого пространства.

Определение 11. Базисом n-мерного линейного пространства называется упорядоченная система из n линейно независимых векторов.

Другими словами, базисом n-мерного линейного пространства называется система векторов, удовлетворяющая следующим условиям: 1) она упорядочена; 2) линейно независима; 3) состоит из n векторов.

Определение 12. Разложить вектор x по векторам $e_1, e_2, \ldots, e_m$ означает найти такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, что $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m$.

Теорема 2. Каждый вектор x линейного n-мерного пространства R можно разложить по базису, притом единственным образом.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис. Тогда

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i. \qquad (1.5)$$

Определение 13. Коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ разложения (1.5) называются координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Равенство (1.5) часто записывают в виде $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Определение 14. Базисом линейного пространства называется упорядоченная система линейно независимых векторов, по которой можно разложить любой вектор пространства.

Другими словами, базисом линейного пространства называется система векторов, удовлетворяющая следующим условиям: 1) она упорядочена; 2) линейно независима; 3) по ней можно разложить любой вектор пространства.

Определения 11 и 14 эквивалентны. Это следует из определения 10 и условия линейной зависимости векторов (теорема 1).

Теорема 3. $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n) \Rightarrow x \pm y = (\xi_1 \pm \eta_1, \xi_2 \pm \eta_2, \ldots, \xi_n \pm \eta_n)$, $\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n)$.

Задачи

1. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заданы своими координатами в некотором базисе. Выяснить, являются ли они линейно зависимыми.

а) $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (1, 1, 2)$, $x_3 = (0, 1, 1)$, $x_4 = (1, 1, 1)$.

Ответ. Да, так как число векторов превосходит размерность пространства.

б) $x_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$, $x_3 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Решение. Составим матрицу, столбцами которой являются координаты данных векторов. Известно, что ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов. Поэтому, если ранг составленной матрицы меньше числа векторов, то система x_1, x_2, x_3, x_4 линейно зависима, если же ранг равен числу векторов, то система линейно независима.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что $Rang A = 4$, следовательно, векторы линейно независимы.

в) $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 3, 3)$, $x_3 = (3, 7, 1)$.

Решение. Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель этой матрицы. Он равен единице. Следовательно, $Rang\ A = 3$ и все ее столбцы линейно независимы, то есть векторы x_1, x_2, x_3 линейно независимы.

2. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 0)$ базис?

Решение. Используем определение 11. Данная система векторов упорядочена, число векторов равно размерности пространства. Остается проверить, являются ли они линейно независимыми. Легко видеть, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 4. Следовательно, векторы линейно независимы и образуют базис.

3. Найти координаты многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

а) в базисе 1, x, x^2, …, x^n

б) в базисе 1, $x-\alpha$, $(x-\alpha)^2$, …, $(x-\alpha)^n$, предварительно выяснив, что последние многочлены действительно образуют базис.

Решение. а) Докажем, что система векторов 1, x, x^2, …, x^n образует базис в пространстве многочленов M_n степени $\leq n$. Воспользуемся определением 14 1) система упорядочена, 2) линейно независима, так как тождество

$$\alpha_0\cdot 1 + \alpha_1\cdot x + \alpha_2\cdot x^2 + \ldots + \alpha_n\cdot x^n \equiv 0.$$

выполняется только при $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_n = 0$;

3) по этой системе можно разложить любой вектор пространства

$$f(x) = a_0\cdot 1 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + \ldots + a_n\cdot x^n. \tag{1.6}$$

Из равенства (1.6), в частности, следует, что координаты вектора $f(x)$ в этом базисе есть $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$;

б) Аналогично, система 1, $x-\alpha$, $(x-\alpha)^2$, …, $(x-\alpha)^n$ образует базис в M_n, так как,

$$\beta_0\cdot 1 + \beta_1(x-\alpha) + \beta_2(x-\alpha)^2 + \ldots + \beta_n(x-\alpha)^n \equiv 0 \Leftrightarrow \beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0.$$

3) по ней можно разложить любой вектор пространства. Действительно, пусть

$$f(x) = \beta_0\cdot 1 + \beta_1(x-\alpha) + \beta_2(x-\alpha)^2 + \ldots + \beta_n(x-\alpha)^n \tag{1.7}$$

Полагая, в (1.7) $x = \alpha$, получим $\beta_0 = f(\alpha)$.Дифференцируя (1.7) и полагая $x = \alpha$, получим $f'(\alpha) = \beta_1$и т.д. $f^{(k)}(\alpha) = k!\beta_k$, $0 \leq k \leq n$, отсюда

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{\,n}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

Координаты вектора $f(x)$ в базисе 1, $x-\alpha$, $(x-\alpha)^2$, …, $(x-\alpha)^n$ есть

$$\left(f(\alpha), \frac{f'(\alpha)}{1!}, \frac{f''(\alpha)}{2!}, \ldots, \frac{f^{\,n}(\alpha)}{n!} \right)$$

4. Доказать, что следующие системы векторов образуют линейные подпространства, и найти их базис и размерность:

а) все n-мерные векторы, у которых первая и последняя координаты равны между собой; б) все n-мерные векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$, где α, β – любые числа.

Решение. а) Очевидно, что сумма любых двух векторов заданной системы есть также вектор этой системы. Аналогично для произведения вектора на число. Значит, заданная система векторов является подпространством линейного пространства n-мерных векторов. Используя определение 14, покажем, что векторы

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 1),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots, e_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0).$$

образуют базис. Действительно,1) они упорядочены; 2) линейно независимы; 3) по ним можно разложить любой вектор подпространства.

По числу векторов базиса определяем размерность подпространства: $n - 1$.

б) Базис образуют векторы $(1, 0, 1, 0\ldots)$ и $(0, 1, 0, 1\ldots)$; размерность равна 2.

5. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного подпространства L n-мерного векторного пространства R_n, если L задано уравнением: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

Ответ. Базис образуют, например, векторы $(1, 0, 0, \ldots, -1)$ $(0, 1, 0, \ldots, -1)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1, -1)$. Размерность равна $n - 1$. Если R_3 интерпретировать как множество геометрических трехмерных векторов, подпространство L представляет собой множество векторов, лежащих в плоскости $x + y + z = 0$. Аналогично, подпространство $L \subset R_2$ является множеством векторов, лежащих на прямой $x + y = 0$.

6. Описать линейные оболочки следующих систем векторов:

1. $x_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $x_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $x_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

Решение. Согласно определению 7, линейная оболочка векторов x_1, x_2,x_3 – множество всех линейных комбинаций этих векторов, т.е. множество векторов вида $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ (α, β, γ – произвольные числа). Отсюда следует, что линейной оболочкой заданных векторов является множество векторов вида $(\alpha, 0, \beta, 0, \gamma)$.

2. $x_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $x_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$,$x_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

Ответ. Линейной оболочкой заданных векторов является множество векторов вида $(\alpha,\beta,\gamma, \beta,\alpha)$.

Задание

1. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заданы своими координатами в некотором базисе. Выяснить, являются ли они линейно зависимыми:

а) $x_1 = (0, 1, 3)$, $x_2 = (-5, 6, 3)$, $x_3 = (2, 0, -8)$, $x_4 = (3, 3, 3)$.

б) $x_1 = (0, 0, 3, 2, 5)$, $x_2 = (1, 0, 3, 7, 0)$, $x_3 = (2, 3, 0, 4, -3)$, $x_4 = (0, 1, 3, 4, -2)$.

в) $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 3, 3)$, $x_3 = (-3, -7, -2)$.

2. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, 0, -1)$, $e_2 = (2, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1, 1)$, $e_4 = (1, 2, 3, 4)$ базис?

2. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

2.1. Евклидово пространство

Определение 1. Говорят, что в действительном линейном пространстве Rопределено скалярное произведение, если каждой упорядоченной паре векторов x, $y \in R$ставится в соответствие определенное действительное число (обозначаемое (x, y)), причем для любых x, $y,z \in R$и любого числа α выполняются следующие аксиомы:

1. $(x, y) = (y,x)$;
2. $(x + y,z) = (x,z) + (y,z)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$;
4. $(x,x) > 0$ если $x \neq \theta$.

Следствия из аксиом:

1. $(x,\alpha y) = \alpha\ (x,y)$;
2. $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$;
3. $(x,\theta) = 0$.

Определение 2. Линейное пространство называется евклидовым, если в нем определенно скалярное произведение.

Задача

Можно ли в действительном линейном пространстве матриц второго порядка с обычными операциями сложения и умножения на число внести скалярное произведение матриц $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ равенством:

а) $(A, B) = a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 - d_1d_2$; б) $(A, B) = a_1a_2+d_1d_2$?

Ответ. а) Нет, так как не выполняется аксиома 4: если, например, $a_1 = b_1 \neq 0$, $c_1 = d_1$, то $(A, A) = a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 = 0$.

б) Нет, так как не выполняется аксиома 4: если, например, $a_1 = d_1 = 0$, $b_1,c_1 \neq 0$, то $(A, A) = a_1^2 + d_1^2 = 0$.

Определение 3. Длиной вектора x называется число $\sqrt{(x, x)}$. Обозначение: $|x|$.

Из аксиомы 4 следует, что $|x| > 0$ при $x \neq \theta$. Из следствия 3 получаем $|x| = 0$ при $x = \theta$.

Определение 4. Расстоянием между векторами x и y называется $|x - y|$.

Неравенство Коши – Буняковского: $\forall x, y \in R \Rightarrow |(x, y)| \leq |x||y|$.

Определение 5. Углом между ненулевыми векторами x и y называется число φ, для которого $\cos\varphi = \dfrac{x, y}{|x||y|}, 0 \le \varphi \le \pi$.

Из неравенства Коши – Буняковского следует корректность этого определения ($|\cos\varphi| \le 1$).

Определение 6. Векторы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Задача

Пусть $x = (\alpha_1, \alpha_2)$и $y = (\beta_1, \beta_2)$ произвольные векторы пространства R_2.Показать, что скалярное произведение в R_2можно определить следующими способами:

а) $(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 + 5\alpha_2\beta_2$;

б) $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2$.

Вычислить скалярное произведение векторов $x = (1, 1)$ и $y = (–3, 2)$, их длины и угол между ними в случаях а),б).

Решение. Нетрудно проверить выполнимость аксиом скалярного произведения в каждом из этих случаев. Требуемые вычисления проведем в случае б) $(x, y) = 1 \cdot(–3) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot(–3) + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 0$.

$$|x| = \sqrt{1+1+1+2} = \sqrt{5},\ |y| = \sqrt{9-6-6+8} = \sqrt{5}.$$

Так как $(x, y) = 0$, векторы x и yортогональны, угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Определение 7.Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называется ортонормированной, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}, i,j = 1, \ldots, m$.

Заметим, что в ортонормированной системе все векторы взаимно ортогональны (орто) и каждый вектор имеет единичную длину (нормировка).

Утверждение. Ортонормированная система линейно независима.

Теорема 1.В n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированных базис.

2.2. Метод ортогонализации Грамма – Шмидта

В евклидовом пространстве дана система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимых векторов. Требуется построить ортонормированную систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, каждый из которых есть линейная комбинация векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

(Другими словами: в линейной оболочке линейно-независимых векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ построить ортонормированный базис).

Построение системы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ проводим по индукции.

1. $e_1 = \dfrac{f_1}{|f_1|}$ ($|f_1| \neq 0$ так как система $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независима.)

2. а) $\widetilde{e}_2 = f_2 - \alpha_1 e_1$. Число α_1 выбираем так, чтобы $(e_1, \widetilde{e}_2) = 0$ (ортогонализация): отсюда $\alpha_1 = (e_1, f_2)$.

б) $e_2 = \dfrac{\widetilde{e}_2}{|\widetilde{e}_2|}$ (нормировка). Заметим, что в силу линейной независимости системы f_1, f_2, …, f_n, $|\widetilde{e}_2| \neq 0$ (в противном случае f_1, f_2 были бы линейно зависимыми).

3. а) $\widetilde{e}_3 = f_3 - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2$. Числа β_1 и β_2 выбираем из условий $(e_1, \widetilde{e}_3) = (e_2, \widetilde{e}_3) =$ $= 0$ (ортогонализация): $(e_1, \widetilde{e}_3) = (e_1, f_3) - \beta_1 = 0$, $(e_2, \widetilde{e}_3) = (e_2, f_3) - \beta_2 = 0$.

Отсюда $\beta_1 = (e_1, f_3)$, $\beta_2 = (e_2, f_3)$.

б) $e_3 = \dfrac{\widetilde{e}_3}{|\widetilde{e}_3|}$ (нормировка) и т.д.

В дальнейшем предполагается, что в пространстве R_n скалярное произведение векторов $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ задано формулой

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Задача

По данной системе линейно независимых векторов пространства R_3 построить ортонормированную систему: $x_1 = (1, -2, 2)$, $x_2 = (-1, 0, -1)$, $x_3 = (5, -3, -7)$.

Решение

1. $e_1 = \dfrac{x_1}{|x_1|} = \dfrac{1}{3}(1, -2, 2) = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

2. $\widetilde{e}_2 = x_2 - \alpha_1 e_1$. Число α_1 выбираем так, чтобы $(e_1, \widetilde{e}_2) = 0$, $(e_1, \widetilde{e}_2) = (e_1, x_2) - \alpha_1 =$ $= -1 - \alpha_1 = 0$, откуда $\alpha_1 = -1$. Получаем

$$\widetilde{e}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), |\widetilde{e}_2| = 1, e_2 = \widetilde{e}_2.$$

3. $\widetilde{e}_3 = x_3 - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2$. Числа β_1, β_2 находим из условий $(e_1, \widetilde{e}_3) = (e_2, \widetilde{e}_3) = 0$, $(e_1, \widetilde{e}_3) = (e_1, x_3) - \beta_1 = -1 - \beta_1 = 0$, откуда $\beta_1 = -1$. Далее $(e_2, \widetilde{e}_3) = (e_2, x_3) - \beta_2 = 1 - \beta_2 = 0$, откуда $\beta_2 = 1$. Соответственно $\widetilde{e}_3 = (6, -3, -6)$, $e_3 = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

Ответ. $e_1 = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $e_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, $e_3 = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

2.3. Скалярное произведение в ортонормированном базисе

Теорема 2. Для того, чтобы в данном базисе f_1, f_2, …, f_n евклидова пространства скалярное произведение двух любых векторов $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$,

$y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ было равно $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, необходимо и достаточно, чтобы базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ был ортонормированным.

Следствие. Если $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, то $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$.

Задачи

1. В некотором ортонормированном базисе заданы векторы x = (2, 1, –1, 2);y = (3, –1, –2, 1). Найти их скалярное произведение (x, y).

Ответ. $(x, y) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 9$.

2. Определить угол между векторами x и y:x = (1, 1, 1, 2);y = (3, 1, –1, 0). Найти их скалярное произведение (x, y).

Ответ. $(x, y) = 3$; $|x| = \sqrt{7}$; $|y| = \sqrt{11}$. Угол φ между векторами x и y находим из условий $\cos\varphi = \frac{x, y}{|x||y|} = \frac{3}{\sqrt{77}}, 0 \le \varphi \le \pi$. Таким образом:

$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$.

Задание

1. Пусть $x = (\alpha_1,\alpha_2)$ и $y = (\beta_1,\beta_2)$ – произвольные векторы арифметического пространства R_2. Показать, что скалярное произведение в R_2можно определить следующим способом:

$$(x, y) = 4\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2.$$

Вычислить скалярное произведение векторов x = (1, 2) иy = (–3, 4), их длины и угол между ними.

3. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР

3.1. Линейный оператор

Пусть V и W линейные пространства.

Определение 1. Оператором A, действующим из V в W называется соответствие между векторами этих пространств, которое каждому вектору $x \in V$ставит в соответствие некоторый вектор$y \in W$. При этом вектор y называется образом вектора x, а вектор x называется прообразом вектора y. Обозначение: $y = Ax$.

Определение 2. Оператор A, действующий из V в W называется линейным, если для любых векторов $x, y \in V$и любого числа λ выполняются соотношения

1. $A(x + y) = Ax + Ay$;

2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Замечание. Если $W = V$, то линейный оператор, действующий в этом случае из V в V, называют также линейным преобразованием пространства V. В нашем курсе изучаются только линейные преобразования.

Задачи

1. Для каждого из следующих операторов в трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов определить, является ли этот оператор линейным. Все операторы описываются своим действием на произвольный вектор x. При этом a обозначает фиксированный вектор пространства. а) $Ax = a$; б) $Ax = (x, a)a$; в) $Ax = (a, x)x$; г) $Ax = [x, a]$.

Решение этих задач сводится к проверке условий 1 и 2 определения 2. Оператор является линейным, если выполняются оба условия и не является – если не выполняется хотя бы одно из них.

а) Проверка условия 1:

$$A(x + y) = Ax + Ay \Leftrightarrow a = 2a. \tag{3.1}$$

Проверка условия 2:

$$A(\lambda x) = \lambda Ax \Leftrightarrow a = \lambda a. \tag{3.2}$$

Условия (3.1) и (3.2) одновременно выполняются только в случае $a = \theta$.

Ответ. A линеен только при $a = \theta$ (нулевой оператор).

в)

1. $A(x + y) = (a, x + y)(x + y) = [(a, x) + (a, y)]\,(x + y) = (a, x)x+(a, x)y+$
$+ (a, y)x +(a, y)y=Ax+ Ay+(a, x)y+ (a, y)x.$

$$A(x + y) = Ax+ Ay \Leftrightarrow Ax+ Ay + (a, x)y+(a, y)x= Ax+ Ay. \tag{3.3}$$

Для всех $x, y \in V$ условие (3.3) выполняется только при $a = \theta$.

2. $A(\lambda x) = \lambda Ax \Leftrightarrow \theta = \lambda\theta.$ (3.4)

Условие (3.4) имеет место при любых числахλ.Следовательно, условие 2, выполняется для всех $x \in V$ и всех чисел λ.

Ответ. A линеен только при $a = \theta$.

б) и г). Используя алгебраические свойства скалярного и векторного произведений соответственно, по определению 2 доказываем, что оба оператора являются линейными при любом фиксированном векторе a.

2.Выяснить, какие из следующих преобразований трехмерного пространства являются линейными. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$, при этом координаты вектора-образа заданы как функции координат вектора x.

а) $Ax = (x_1, x_2, x_3^2)$;

б) $Ax = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$.

Решение

а) 1. Обозначим $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Из условия имеем $A(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, (x_3 + y_3)^2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3^2 + 2x_3y_3 + y_3^2) = (x_1, x_2, x_3^2) + (y_1, y_2, y_3^2) + 2(0, 0, x_3y_3) = Ax + Ay + 2(0, 0, x_3y_3)$.

Равенство $A(x + y) = Ax + Ay$ выполняется не для всех $x, y \in V$.

2. Это условие не проверяем.

Ответ. A – нелинейный оператор.

Проверяя условия 1, 2 определения 2, доказываем линейность оператора из задачи б).

3. Найти, какие из приведенных ниже преобразований пространства M_n многочленов степени $\leq n$от действительного переменного t являются линейными операторами в этом пространстве. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный многочлен $f(t)$.

а) $Af(t) = f'(t)$. Этот оператор называется оператором дифференцирования.

б) $Af(t) = f(t + 1) - g(t)$, где $g(t)$ – фиксированный ненулевой многочлен.

Решение

а) Из свойства линейности производных:

1. $A[f_1(t) + f_2(t)] = [f_1(t) + f_2(t)]' = f_1'(t) + f_2'(t) = Af_1(t) + Af_2(t)$

для любых $f_1(t), f_2(t) \in M_n$.

2. $A[\lambda f(t)] = [\lambda f(t)]' = \lambda f'(t) = \lambda Af(t)$.

для любого $f(t) \in M_n$ и любого числа λ.

Отсюда в силу определения 2, оператор дифференцирования в M_n является линейным.

б) 1. $A[f_1(t) + f_2(t)] = [f_1(t+1) + f_2(t+1)] - g(t) = [f_1(t+1) - g(t)] + [f_2(t+1) - g(t)] + g(t) = Af_1(t) + Af_2(t) + g(t)$.

Условие 1 определения 2 не выполняется ни при каких $f_1, f_2 \in M_n$. Условие 2 не проверяем.

Ответ. A – нелинейный оператор.

3.2. Матрица линейного оператора в заданном базисе линейного пространства

Пусть V-n-мерное линейное пространство и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис.

Определение 3. Матрицей линейного оператора A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица, столбцами которой являются координаты образов базисных векторов.

Другими словами, матрица $A = (a_{ij})(i, j = 1, \ldots, n)$ оператора A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяется равенством

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,\ j = 1, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Обозначим $y = Ax$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Тогда из (3.5) и линейности оператора следует формула

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) дает разложение координат образа по координатам прообраза и показывает, что строками матрицы оператора A являются коэффициенты разложения (3.6). Если

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$ $\quad (i, j = 1, \ldots, n)$ –

матрица оператора A, то формулу (3.6) можно записать в матричном виде

$$\mathrm{Y} = A\mathrm{X}. \tag{3.7}$$

Подчеркнем, что в фиксированном базисе матрица однозначно определяет линейных оператор. Но один и тот же линейный оператор в различных базисах имеет, вообще говоря, различные матрицы.

Задачи

1. Найти матрицу линейного оператора $A\bar{x} = [\bar{x}, \bar{a}]$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ($\bar{a}$ – постоянный вектор).

Решение

1 способ. Обозначим через α, β, γ координаторы вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Для нахождения матрицы оператора A воспользуемся определением 3. Найдем образы базисных векторов и разложим их по базису:

$$A\bar{i} = [\bar{i}, \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -\gamma\bar{j} + \beta\bar{k} = 0 \cdot \bar{i} - \gamma\bar{j} + \beta\bar{k}, \tag{3.8}$$

$$A\bar{j} = [\bar{j}, \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma\bar{i} - \alpha\bar{k} = \gamma\bar{i} + 0\cdot\bar{j} - \alpha\bar{k}, \tag{3.9}$$

$$A\bar{k} = [\bar{k}, \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -\beta\bar{i} + \alpha\bar{j} = -\beta\bar{i} + \alpha\bar{j} + 0\cdot\bar{k}. \tag{3.10}$$

Столбцами матрицы оператора A в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ являются коэффициенты разложений (3.8) – (3.10)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

2 способ. Для нахождения матрицы оператора воспользуемся формулой (3.6). Пусть $\bar{x} = \ x_1, x_2, x_3\ ,\ \bar{a} = \ \alpha, \beta, \gamma\ ,\ A\bar{x} = \ \bar{x}, \bar{a}\ = \bar{y} = \ y_1, y_2, y_3\ .$

Тогда

$$\bar{y} = \ \bar{x}, \bar{a}\ = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \ \gamma x_2 - \beta x_3\ \bar{i} + \ -\gamma x_1 + \alpha x_3\ \bar{j} + \ \beta x_1 - \alpha x_2\ \bar{k} =$$

$$= y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} y_1 = 0\cdot x_1 + \gamma\cdot x_2 - \beta\cdot x_3, \\ y_2 = -\gamma\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \alpha\cdot x_3, \\ y_3 = \beta\cdot x_1 - \alpha\cdot x_2 + 0\cdot x_3. \end{cases} \tag{3.6*}$$

Коэффициенты разложения (3.6*) являются строками матрицы оператора A, то есть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу линейного оператора $A\bar{x} = \ \bar{x}, \bar{a}\ \ \bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ($\bar{a}$ – фиксированный вектор).

Решение

Образы базисных векторов:

$$A\bar{i} = \alpha^2\cdot\bar{i} + (\alpha\beta)\cdot\bar{j} + (\alpha\gamma)\cdot\bar{k}, \tag{3.12}$$

$$A\bar{j} = (\alpha\beta)\cdot\bar{i} + \beta^2\cdot\bar{j} + (\beta\gamma)\cdot\bar{k}, \tag{3.13}$$

Примечание [IG1]:

$$A\overline{k} = (\alpha\gamma)\cdot\overline{i} + (\beta\gamma)\cdot\overline{j} + \gamma^2\cdot\overline{k}\,. \qquad (3.14)$$

Столбцами матрицы оператора A в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ являются коэффициенты разложений (3.12) – (3.14).

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.15)$$

3. Для базиса 1, t, t^2, …, t^n пространства M_n многочленов степени $\le n$ записать матрицу оператора дифференцирования.

Решение

Образы базисных векторов

$$\frac{d}{dt}(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + \ldots + 0\cdot t^n$$

$$\frac{d}{dt}(t) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + \ldots + 0\cdot t^n$$

$$\frac{d}{dt}(t^2) = 2t = 0\cdot 1 + 2\cdot t + 0\cdot t^2 \ldots + 0\cdot t^n$$

....

$$\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1} = 0\cdot 1 + 0\cdot t + \ldots + 0\cdot t^{n-2} + n\cdot t^{n-1} + 0\cdot t^n$$

Отсюда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.16)$$

4. Найти матрицу линейного оператора $Ax = (x_1 + 2x_2 - 3x_3,\ 3x_1 - x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$ в базисе, в котором заданы координаты векторов x и Ax.

Решение

Обозначим $y = Ax$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Из условия имеем

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \qquad (3.17)$$

$$y_2 = 3x_1 - x_2 + 3x_3 \qquad (3.18)$$

$$y_3 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad (3.19)$$

Из формулы (3.6) следует, что строками матрицы оператора A являются коэффициенты разложений (3.17) – (3.19):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание

1. В трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов найти матрицы следующих линейных операторов в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ ($\overline{a}$ и $\overline{b}$ – фиксированные векторы).

1. $A\overline{x} = \ \overline{a}, \overline{x}\ \ \overline{b}$; 2. $A\overline{x} = \left[\overline{a}\left[\overline{x}, \overline{b}\right]\right]$.

Указание. Воспользоваться формулой

$$\left[\overline{a}, \left[\overline{b}, \overline{c}\right]\right] = \overline{b}\ \ \overline{a}, \overline{c}\ \ - \overline{c}\ \ \overline{a}, \overline{b}\ \ .$$

2. Найти матрицу линейного оператора $Ax = (x_3, x_1, x_2)$ в том базисе, в котором заданы векторы x и Ax.

3. В пространстве многочленов M_2 степени ≤ 2 от действительного переменного t найти матрицы следующих операторов в базисе 1, t, t^2 ($f(t)$ – обозначает многочлен степени ≤ 2).

1. $Af(t) = f(-t)$; 2. $Af(t) = f(t+1) - f(t)$.

3.3. Действия над операторами. Обратный оператор

Определение 4. Суммой линейных операторов A и B называется оператор C, действующий по формуле

$$Cx = Ax + Bx,$$

Обозначение: $C = A + B$.

Определение 5. Произведением линейного оператора A на число λ называется оператор B, действующий по формуле $Bx = \lambda Ax$. Обозначение: $B = \lambda A$.

Разность линейных операторов определяется аналогично их сумме. Следует отметить, что $A - B = A + (-1)B$.

Определение 6. Произведением линейных операторов Aи B называется оператор C, действующий по формуле $Cx = A(Bx)$. Обозначение: $C = AB$ (преобразование, которое делают первым, пишется справа). Отметим, что, вообще говоря, $AB \ne BA$.

Определение 7. ОператорB называется обратным оператору A, если $AB = BA = E$ (E – тождественный оператор). Обозначение: В = A^{-1}.

Легко проверить, что операторы $A + B$, λA, AB, BA, A^{-1} линейны.

В фиксированном базисе:

1. Матрица суммы (разности) операторов есть сумма (разность) матриц линейных операторов.

2. Матрица произведения оператора на число есть произведение матрицы данного оператора на это число.

3. Матрица оператора AB (произведения операторов A и B) есть произведение матриц операторов A и B.

4. Матрица обратного оператора есть обратная матрица данного оператора.

Теорема 1. Для того, чтобы оператор A имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы матрица этого оператора была невырожденной ($\det A \neq 0$).

Задача

Даны операторы $Ax = (3x_1 - 2x_2, 5x_1 - 4x_2)$, $Bx = (3x_1 + 4x_2, 2x_1 + 5x_2)$. Найти матрицы операторов $C = (A + 2B)(2A - B)$ и A^{-1} в том же базисе, в котором даны координаты векторов x, Ax, Bx. Векторы Cx и $A^{-1}x$ записать в координатной форме.

Решение

Матрицы операторов A и B есть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $2A - B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 8 & -13 \end{pmatrix}$, $C = (A + 2B)(2A - B) =$

$= 3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 8 & -13 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 25 & -50 \\ 25 & -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & -150 \\ 75 & -150 \end{pmatrix}$, $Cx = (75x_1 - 150x_2, 75x_1 - 150x_2)$.

Матрица обратного оператора

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}x = \left(2x_1 - x_2, \frac{5}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2\right).$$

Задание

Даны операторы $Ax = (2x_1+x_2, 3x_1+2x_2)$, $Bx = (x_1-x_2, x_1+x_2)$. Найти матрицы операторов $C = (3A - B)(-2A + 6B)$, A^{-1}, B^{-1} в том же базисе, в котором даны координаты векторов x, Ax, Bx. Векторы Cx, $A^{-1}x$, $B^{-1}x$ записать в координатной форме.

3.4. Образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора

Определение 8. Образом линейного оператора A называется множество всех векторов y, представимых в виде $y = Ax$ (x «пробегает» все пространство V, где определен оператор A). Обозначение: $\operatorname{im} A$.

Определение 9. Ядром линейного оператора A называется множество всех векторов $x \in V$, для которых $Ax = \theta$. Обозначение: $\ker A$.

Теорема 2. Для того, чтобы линейный оператор имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы $\ker A = \theta$.

Отметим, что $\operatorname{im} A = V \Leftrightarrow \ker A = \theta$.

Определение 10. Рангом линейного оператора называется размерность его образа $[\dim(\operatorname{im} A)]$.

Теорема 3. Каков бы ни был базис, ранг линейного оператора равен рангу его матрицы.

Определение 11. Дефектом линейного оператора называется размерность его ядра $[\dim(\ker A)]$.

Теорема 4. Сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности пространства, где определен этот оператор.

$$\dim(\operatorname{im} A) + \dim(\ker A) = \dim V. \tag{3.20}$$

Задачи

Найти образ, ядро, ранг и дефект линейных операторов $A\overline{x} = \ \overline{x}, \overline{a}\ \ \overline{a}$, $A\overline{x} = \ \overline{x}, \overline{a}\ $, $\overline{a} \neq \overline{0}$; $Af(t) = f'(t)$ в M_n.

1. $A\overline{x} = \ \overline{x}, \overline{a}\ \ \overline{a}$, $\overline{a} \neq 0$.

Ответ. $\operatorname{im} A$совпадает с множеством векторов, коллинеарных $\overline{a}$. Ранг оператора A равен 1. $\ker A$ совпадает с множеством векторов, лежащих в плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{a}$. Дефект оператора A равен 2. Равенство (3.20) выполняется.

2. $A\overline{x} = \ \overline{x}, \overline{a}\ $, $\overline{a} \neq 0$.

Ответ. $\operatorname{im} A$ совпадает с множеством векторов, лежащих в плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{a}$. Ранг оператора A равен 2. $\ker A$ совпадает с множеством векторов, коллинеарных $\overline{a}$. Дефект оператора A равен 1. Равенство (3.20) выполняется.

3. $Af(t) = f'(t)$ в M_n.

Ответ. $\operatorname{im} A$ совпадает с подпространством M_{n-1}. Ранг оператора дифференцирования равен n. $\ker A$ совпадает с подпространством M_0. Дефект оператора дифференцирования равен 1. Равенство (3.20) выполняется.

3.5. Линейные операторы в евклидовом пространстве

Рассматриваются линейные операторы в евклидовом пространстве V.

Определение 12. Линейный оператор A^* называется сопряженным линейному оператору A, если для любых $x, y \in V$

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

Теорема 5.Каждый линейный оператор Aимеет единственный сопряженный.

Свойства сопряженных операторов:

1. $E^* = E$.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

3. $(\lambda A)^{*} = \lambda A^{*}$ (λ – произвольное действительное число).

4. $(A^{*})^{*} = A$.

5. $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$.

6. Если $\exists A^{-1}$, то $(A^{-1})^{*} = (A^{*})^{-1}$.

Теорема 6. В ортонормированном базисе матрица сопряженного оператора A^{*} есть матрица, транспонированная матрице оператора A в том же базисе: $A^{*} = A^{T}$ (A^{*} – матрица сопряженного оператора, A – матрица исходного оператора).

Определение 13. Линейный оператор A называется самосопряженным, если $A^{*} = A$.

Другими словами,

Определение 13*. Линейный оператор A называется самосопряженным, если для любых $x, y \in V$ выполняется $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Из теоремы 6 и определения 13 следует

Теорема 7. В ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора совпадает со своей транспонированной: $A = A^{T}$.

Такие матрицы называются симметрическими.

Задачи

1. Доказать свойство 4 сопряженных операторов: $(A^{*})^{*} = A$.

Доказательство. Из определения сопряженного оператора имеем:

$$(Bx, y) = (x, B^{*}y). \tag{3.21}$$

В (3.21) положим $B = A^{*}$.

$$(A^{*}x, y) = (x, (A^{*})^{*}y). \tag{3.22}$$

Далее, по аксиоме 1 скалярного произведения и определению сопряженного оператора

$$(A^{*}x, y) = (y, A^{*}x) = (Ay, x) = (x, Ay). \tag{3.23}$$

Сравнивая (3.22) и (3.23), получим $(x, Ay) = (x, (A^{*})^{*}y)$. Отсюда, в силу произвольности $x, y \in V$, получаем $(A^{*})^{*} = A$.

2. Доказать свойство 5 сопряженных операторов $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$.

Доказательство. Из определения сопряженного оператора имеем:

$$((AB)\,x, y) = (x, (AB)^{*}y). \tag{3.24}$$

С другой стороны, дважды применяя указанное определение, получим

$$(AB\,x, y) = (Bx, A^{*}y) = (x, B^{*}A^{*}y). \tag{3.25}$$

Отсюда, в силу произвольности $x, y \in V$, получаем $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$.

3. Найти оператор, сопряженный оператору $A\overline{x} = \ \overline{x}, \overline{a}\ $.

Решение

По определению сопряженного оператора $\ A\overline{x}, \overline{y}\ = \ \overline{x}, A^{*}y\ $. С другой стороны, из условия имеем $\ A\overline{x}, \overline{y}\ = \ \ \overline{x}, \overline{a}\ , \overline{y}\ = \ \overline{x}, \ \overline{a}, \overline{y}\ \ = \ \overline{x}, - \ \overline{y}, \overline{a}\ \ =$

$= \ \bar{x}, -A\bar{y}$. Значит, $\bar{x}, A^{*}y \ = \ \bar{x}, -A\bar{y}$. Отсюда, в силу произвольности $x, y \in V$, получаем $A^{*} = -A$.

4. Найти оператор, сопряженный оператору $A\bar{x} = \ \bar{x}, \bar{a} \ \bar{a}$.

Решение

Матрицей оператора A в ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ является (см. (3.15))

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix},$$

где $\bar{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$; матрица оператора A симметрическая, поэтому оператор самосопряженный: $A^{*} = A$.

5. В пространстве многочленов M_2 задано скалярное произведение

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2. \tag{3.26}$$

Где $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2, g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$.

Найти матрицу оператора дифференцирования A и сопряженного оператора A^{*} в базисе $1, t, t^2$.

Решение

Матрицей оператора A является

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(см. (3.16), $n = 2$). Согласно теореме о скалярном произведении в ортонормированном базисе, базис $1, t, t^2$ в евклидовом пространстве M_2 со скалярным произведением (3.26) является ортонормированным. Поэтому матрица сопряженного оператора совпадает с

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, то $A^{*}f(t) = a_0t + 2a_1t^2$.

Задание

1. В трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов найти оператор, сопряженный оператору $A\bar{x} = \ \bar{a}, \bar{x} \ \bar{b}$ ($\bar{a}$ и $\bar{b}$ – фиксированные векторы).

2. В пространстве многочленов M_2 скалярное произведение определяется формулой (3.26).

а). Найти сопряженный оператор, если $Af(t) = f(-t)$.

б). Найти матрицу сопряженного оператора в базисе 1, t, t^2 если $Af(t) = f(t+1) - f(t)$.

3.6. Преобразование координат вектора и матрицы линейного оператора при переходе к другому базису

Пусть в n-мерном линейном пространстве даны два базиса: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Первый условимся называть старым базисом, второй – новым.

Определение 14. Матрицей перехода от старого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к новому базису $g_1, g_2, \ldots, g_n$ называется матрица, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Другими словами, матрица перехода $C = (c_{ij})(i, j = 1, \ldots, n)$ определяется равенством

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i,\ j = 1, \ldots, n. \qquad (3.27)$$

Заметим, что в силу линейной независимости векторов базиса, матрица перехода всегда невырожденная ($\det C \neq 0$).

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в старом базисе и $x = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ в новом. Тогда

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (3.28)$$

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, $C = (c_{ij}), (i, j = 1, \ldots, n)$ – матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда (3.28) записывается в виде

$$X = CX'. \qquad (3.29)$$

Пусть линейный оператор A в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет матрицу A_e, а в базисе $g_1, \ldots, g_n$ – матрицу A_g. Тогда

$$A_g = C^{-1} A_e C. \qquad (3.30)$$

Задачи

1. Векторы e_1, e_2, e_3 и x заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 сами образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе

$$e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (1, 1, 2),\ e_3 = (1, 2, 3),\ x = (6, 9, 14).$$

Решение

1. По определению базиса векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис, если:

1) Они образуют упорядоченную систему.

2) Их число равно размерности пространства.

3) Они линейно независимы.

Выполнение условия 1 очевидно. Далее размерность пространства устанавливается по числу координат: в нашем случае $n = 3$. Значит, условие 2 выполнено. Наконец, если определитель, составленный из координат векторов

e_1, e_2,e_3, отличен от нуля, то они линейно независимы. В нашем случае величина этого определителя равна –1. Следовательно, условие 3 тоже выполняется, и векторы e_1, e_2,e_3 образуют базис.

2. Обозначим векторы исходного базиса через a_1, a_2,a_3(базис, в котором записаны координаты векторов e_1, e_2,e_3). Тогда $e_1 = a_1+a_2+a_3$, $e_2 = a_1+a_2+2a_3$, $e_3 = a_1+2a_2+3a_3$. Согласно определению (см. формулу (3.27)), матрица перехода от базиса a_1, a_2,a_3 к базису e_1, e_2,e_3 есть

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть X' – столбец координат вектора x в базисе e_1, e_2,e_3, а $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе a_1, a_2,a_3. Тогда

$$X' = C^{-1}X \tag{3.31}$$

(см. формулу (3.29)). Найдем C^{-1}:

1). $\det C = -1$;

2). Матрица из алгебраических дополнений

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B^T;$$

3). $$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя (3.31), получим

$$X' = C^{-1}X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x = e_1+2e_2+3e_3$.

2. В базисе 1, t, t^2 пространства M_2 оператор A задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе, составленном многочленами

$$3t^2 + 2t,\ 5t^2 + 3t + 1,\ 7t^2 + 5t + 3.$$

Решение

Матрица перехода C от старого базиса к новому записывается в следующем виде:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A матрицу оператора A в старом базисе, через A' – в новом. По формуле (3.30) $A' = C^{-1}AC$. Найдем C^{-1}:

1. $\det C = 4$;

2. Матрица из алгебраических дополнений

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 8 & -9 & 3 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix};$$

3. $$B^T = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

4. $$C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 6 & -9 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & -16 & -20 \\ 9 & 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{4} & -4 & -5 \\ \frac{9}{4} & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Однородные системы

Рассматривается однородная система:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\ i = 1, ..., m \qquad (4.1)$$

Однородная система всегда совместна, так как имеет тривиальное решение. Наша задача: описать совокупность всех решений системы (4.1). Введем линейное пространство R матриц – столбцов высоты n с обычными операциями сложения и умножения на число.

Теорема 1. Совокупность решений системы (4.1) является подпространством линейного пространства R.

Теорема 2. Если r – ранг основной матрицы системы (4.1), то размерность подпространства ее решений есть $n - r$.

Определение 1. Любой базис подпространства решений системы (4.1) называется фундаментальной системой решений системы (4.1).

Из теоремы 2 следует, что фундаментальная система решений системы (4.1) состоит из $n - r$ линейно независимых решений этой системы. Из определения 1, теорем 1 и 2 следует, что любое решение X однородной системы (4.1) представимо в виде

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_{n-r} X_{n-r}, \qquad (4.2)$$

где X_1, X_2, …, X_{n-r} – фундаментальная система решений, c_1, c_2, …, c_{n-r} – произвольные постоянные.

Определение 2. Общим решением линейной системы (вообще говоря, неоднородной) называется совокупность всех решений этой системы.

Формула (4.2) дает общее решение рассматриваемой однородной системы.

Задача

Найти общее решение однородной системы

$x_1+2x_2 + 4x_3 -3x_4 = 0;$

$3x_1+5x_2 + 6x_3 -4x_4 = 0;$

$4x_1 +5x_2 - 2x_3 +3x_4 = 0;$

$3x_1 +8x_2 + 24x_3 -19x_4 = 0.$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Отсюда Rang$A$ = 2 – меньше числа неизвестных и система нетривиально совместна. Размерность подпространства решений равна $n - r = 2$. Фундаментальная система состоит из двух линейно независимых решений. При вычислении ранга матрицы в элементарных ее преобразованиях участвовали только строки. Поэтому по последней матрице в (4.3) запишем эквивалентную систему (базисный минор этой матрицы находится в левом верхнем углу, следовательно, слагаемые, содержащие x_3 и x_4, переносим в правые части уравнения системы).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases} \tag{4.4}$$

Формулы (4.4) дают общее решение системы: произвольно задавая x_3 и x_4, получаем x_1,x_2. Недостаток формул (4.4) заключается в том, что они не дают представления о структуре общего решения системы. Запишем общее решение в виде столбца и разложим его по фундаментальной системе решений

$$X_{0.0} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

В (4.5) x_3 и x_4 – произвольные постоянные, столбцы $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений.

4.2. Неоднородные системы

Рассматривается неоднородная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, ..., m. \tag{4.6}$$

Предположим, что система (4.6) совместна.

Теорема 3. Разность двух решений неоднородной системы есть решение соответствующей однородной системы, сумма решения неоднородной системы и решения соответствующей однородной системы есть решение данной неоднородной системы.

Отсюда следует, что сумма частного решения неоднородной системы (4.6) и общего решения соответствующей однородной системы дает общее решение неоднородной системы (4.6).

$$X_{\text{он}} = X_{\text{чн}} + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_{n-r} X_{n-r}, \tag{4.7}$$

где $X_{\text{чн}}$ – частное решение системы (4.6), X_1, X_2, …, X_{n-r}– фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, c_1, c_2, …, c_{n-r}– произвольные постоянные.

Задача

Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Решение

Используя теорему Кронекера – Капелли, исследуем на совместность эту систему

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{4.8}$$

Отсюда Rang$A$ = RangA_p = 2 и система совместна. По последней матрице (4.8) выписываем эквивалентную систему; учитывая, что Rang$A$ = 2 и базисный минор матрицы находится в левом верхнем углу, слагаемые, содержащие x_3, x_4 и x_5, переносим в правые части уравнений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases} \tag{4.9}$$

Формулы (4.9) определяют общее решение системы. Точно так же, как и в предыдущем примере, общее решение перепишем в виде

$$X=\begin{pmatrix}-16+x_3+x_4+5x_5\\23-2x_3-2x_4-6x_5\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Столбец $\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ есть частное решение заданной неоднородной системы.

Выражение $x_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ представляет собой общее решение соответствующей однородной системы.

4.3. Геометрический смысл линейной системы трех уравнений с тремя неизвестными

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы геометрически изображает плоскость в трехмерном пространстве. Возможны случаи:

А. Система совместна Rang$A$ = RangA_p:

а) Rang$A$ = RangA_p = 3. Плоскости пересекаются в единственной точке.

б) Rang$A$ = RangA_p = 2. Три плоскости пересекаются по одной прямой.

в) Rang$A$ = RangA_p = 1. Три уравнения системы определяют одну и ту же плоскость.

Б. Система несовместна.

а) Rang$A$ = 2, RangA_p = 3. Три плоскости пересекаются либо по двум, либо по трем различным параллельным прямым.

б) Rang$A$ = 1, RangA_p = 2. Плоскости параллельны и две из них могут совпадать.

Задачи

1. Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$

а) Имеют одну общую точку.

б) Проходят через одну прямую.

в) Пересекаются по трем различным параллельным прямым.

Решение

Запишем уравнения данных плоскостей в виде неоднородной системы

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y - z = -b, \\ x + ay - 6z = -10. \end{cases}$$

а) Плоскости имеют одну общую точку тогда и только тогда, когда определитель системы Δ отличен от нуля. Так как $\Delta = 5a - 35$, то при $a \neq 7$ и любом b три данные плоскости имеют одну общую точку.

б), в) Вычислим Rang A и Rang A_p при $a = 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -b \\ 1 & 7 & -6 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & -10 \\ 0 & -5 & 5 & -b+10 \\ 0 & -15 & 15 & 21 \end{array}\right).$$

Rang A=Rang A_p при условии, что $3(-b + 10) = 21$, то есть $b = 3$. Отсюда при $a = 7$ и $b = 3$ три данные плоскости проходят через одну прямую и при $a = 7$ и $b \neq 3$ плоскости пересекаются по трем различным параллельным прямым (среди данных плоскостей нет параллельных).

2. Для линейного оператора A в трехмерном линейном пространстве определить ранг и дефект, построить базисы образа и ядра, образ и ядро. Дать геометрическую интерпретацию результата.

$$Ax = (-x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 + 4x_3,\ x_1 - x_2 - 2x_3).$$

Решение

Составим матрицу оператора A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Столбцами матрицы A являются координаты образов базисных векторов Ae_1, Ae_2, Ae_3. Образ оператора A есть линейная оболочка векторов Ae_1, Ae_2, Ae_3. Размерность этой линейной оболочки есть ранг оператора, то есть ранг матрицы A. Найдем его, преобразуя только столбцы матрицы (в таком случае столбцы преобразованной матрицы – координаты линейных комбинаций векторов Ae_1, Ae_2, Ae_3).

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 6\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг оператора A равен 2, дефект – 1. Из последней матрицы заключаем, что базисом образа оператора A является

$$f_1=(-1,\ 1,\ 1),\ f_2=(0,\ 1,\ 0).$$

Образом оператора A является множество векторов вида $x = \alpha(-1, 1, 1) + \beta(0, 1, 0)$ где α и β – произвольные постоянные.

Найдем ядро оператора A – множество векторов $x \in R$, для которых $Ax = \theta$. Обозначая $x = (x_1, x_2, x_3)$, отсюда получим линейную систему для определения x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=0,\\ x_1+x_2+4x_3=0,\\ x_1-x_2-2x_3=0.\end{cases}\tag{4.10}$$

Решая ее, получим $x_1 = -x_3$, $x_2 = -3x_3$. Общее решение системы (4.10) есть

$$x=\gamma(-1,\ -3,\ 1).\tag{4.11}$$

Множество всех векторов вида (4.11) есть ядро оператора A, а $f_3 = (-1, -3, 1)$ – базис этого ядра.

Геометрическая интерпретация результата

Образ оператора A – множество векторов, лежащих в плоскости – линейной оболочке векторов f_1и f_2.Найдем уравнение этой плоскости, предполагая, что она проходит через начало координат. Пусть x_1, x_2, x_3– текущие координаты точек этой плоскости. Тогда, учитывая, что эта плоскость содержит векторы $f_1 =(-1, 1, 1)$ и$f_2 = (0, 1, 0)$, получим ее уравнение

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=0,\ \text{или } x_1+x_3=0.$$

Ядро оператора A – множество векторов, лежащих на прямой

$$\frac{x_1}{-1}=\frac{x_2}{-3}=\frac{x_3}{1}.$$

5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Определение 1. Число λ называется собственным значением оператора A, если существует ненулевой вектор x, такой, что

$$Ax = \lambda x. \tag{5.1}$$

При этом вектор x называется собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ.

Задачи

1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A трехмерного евклидова пространства: $A\overline{x} = \;\overline{x}, \overline{a}\;$, где $\overline{a}$ – фиксированный вектор.

Решение

Из определения собственного вектора линейного оператора следует, что в трехмерном евклидовом пространстве образ собственного вектора коллинеарен ему самому, то есть в нашем случае

$$\overline{x}, \overline{a} \; = \lambda \overline{x}. \tag{5.2}$$

Но из определения векторного произведения следует, что векторное произведение $[\overline{x}, \overline{a}]$ ортогонально вектору $\overline{x}$. Значит (5.2) может выполняться лишь в одном случае $\lambda = 0$ и $\overline{x}$ коллинеарен $\overline{a}$.

Ответ. Собственные векторы – любые ненулевые векторы, коллинеарные $\overline{a}$, $\lambda = 0$.

2. То же для оператора $A\overline{x} = \;\overline{x}, \overline{a}\;\; \overline{a},$ где $\overline{a}$ – фиксированный вектор.

Решение

Для любого собственного вектора

$$\overline{x}, \overline{a}\;\; \overline{a} = \lambda \overline{x}. \tag{5.3}$$

Отсюда следует, что любой собственный вектор коллинеарен $\overline{a}$

$$\overline{x} = \kappa \overline{a}. \tag{5.4}$$

Объединяя (5.3) и (5.4), получим $\kappa |\overline{a}|^2 \, \overline{a} = \lambda \kappa \overline{a}$, откуда $\lambda = |\overline{a}|^2$.

Ответ. Собственные векторы – любые ненулевые векторы, коллинеарные $\overline{a}$, $\lambda = |\overline{a}|^2$.

Задание

Найти собственные значения и собственные векторы оператора A трехмерного евклидова пространства $A\overline{x} = \;\overline{a}, \overline{x}\;\; \overline{b},$ где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – фиксированные векторы.

Определение 2. Многочлен относительно λ $\det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом оператора A.

Теорема 1. Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Определение 3. Характеристическим уравнением оператора Aнезывается уравнение вида

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{5.5}$$

Теорема 2. Для того, чтобы число λ было собственным значением оператора A, необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения оператора A.

Теорема 3. Все собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образуют линейное пространство.

Теорема 4. Если собственные векторы $x_1, \ldots, x_k$ принадлежат попарно различным собственным значениям, то они линейно независимы.

Следствие. Если в n-мерном пространстве характеристический многочлен оператора A имеет n различных действительных корней, то собственные векторы оператора A образуют базис.

Этот базис называется собственным базисом оператора A. В собственном базисе матрица оператора A имеет диагональный вид $A = (\lambda_i \delta_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ (δ_{ij} –символ Кронекера), или

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$ – собственные значения оператора A.

Отыскание собственных значений и собственных векторов линейного оператора

1. Решая характеристическое уравнение (5.5), находим все действительные собственные значения оператора A.

2. Решив однородную систему

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda_\kappa \delta_{ij}) x_j = 0, \; i = 1, \ldots, n. \tag{5.6}$$

($A = (a_{ij})$ – матрица оператора A), мы определим все собственные векторы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ оператора A, соответствующие собственному значению λ_κ($\kappa = 1, 2, \ldots, l$, $1 \le l \le n$).

Фундаментальная система решений системы (5.6) дает нам линейно независимые собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_κ.

Теорема 5. Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Теорема 6. Если A – самосопряженный оператор, то собственные векторы, соответствующие различным собственным значения ортогональны.

Теорема 7. Для любого самосопряженного оператораA в n-мерном евклидовом пространстве существует собственный ортонормированный базис.

Напомним, что в собственном базисе матрица оператора диагональна.

Задачи

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

2. Находим собственные векторы.

$\lambda_1 = 1$. Система (5.6) имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим $x_1 = x_2 = x_3$. Собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 1$ имеют вид $x = \alpha(1, 1, 1)$, где $\alpha \neq 0$ – произвольная константа.

$\lambda_2 = 2$.Система (5.6) имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$. Собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 2$, имеют вид $x = \alpha(1, 0, 1)$, где $\alpha \neq 0$ – произвольная константа.

$\lambda_3 = 3$. Система (5.6) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получим $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$. Собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_3 = 3$, имеют вид $x = \alpha(1, 1, 0)$, где $\alpha \neq 0$ – произвольная константа.

2. Выяснить, какие из матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

2а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду, если существует собственный базис. В этом базисе матрица имеет диагональный вид, причем на главной диагонали находятся собственные значения оператора.

1. Нахождение собственных значений оператора.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$.

2. Вычисление рангов матриц $(A - \lambda E)(\lambda = 1$ и $2)$.

а) $A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда $\mathrm{Rang}(A - \lambda_1 E) = 2$ (базисный минор находится в правом нижнем углу матрицы). Значит размерность линейной оболочки собственных векторов, соответствующих $\lambda = \lambda_1$, равна 1.

б) $A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Rang}(A - \lambda_{2,3} E) = 1$.

Значит размерность линейной оболочки собственных векторов, соответствующих $\lambda = \lambda_{2,3}$, равна 2.

Так как все векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы, то размерность линейной оболочки всех собственных векторов оператора A равна сумме размерностей линейных оболочек собственных векторов, соответствующих собственных значениям $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3} = 2$, то есть трем. Отсюда следует, что линейная оболочка всех собственных векторов оператора совпадает с исходным линейным пространством. Значит, существует собственный базис оператора A.

3. Нахождение собственных векторов.

а) $\lambda_1 = 1$;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = x_2 = x_3$, $x = x_1(1, 1, 1)$, $x_1 \neq 0$.

б) $\lambda_{2,3} = 2$;

$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

Отсюда $x_3 = -3x_1 + 3x_2$, $x = (x_1, x_2, -3x_1 + 3x_2) = x_1(1,0,-3) + x_2(0,1,3)$, $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.

Собственным базисом является $e_1(1, 1, 1)$, $e_2(1, 0, -3)$, $e_3(0, 1, 3)$.

4. Матрицей оператора A в собственном базисе e_1, e_2, e_3 является

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2б) $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Нахождение собственных значений оператора. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Отсюда $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$.

2. Вычисление рангов матриц $(A - \lambda E)(\lambda = 1, \lambda = 2)$.

а) $A - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Отсюда $\mathrm{Rang}(A - \lambda_{1,2}E) = 2$ (базисный минор находится в правом нижнем углу матрицы). Размерность линейной оболочки собственных векторов, соответствующих $\lambda = \lambda_{1,2}$, равна 1.

б) $A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Отсюда $\mathrm{Rang}(A - \lambda_3 E) = 2$ (базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы). Размерность линейной оболочки собственных векторов, соответствующих $\lambda = \lambda_3$, равна 1.

Мы получили, что размерность линейной оболочки всех собственных векторов оператора A равна 2, то есть меньше размерности исходного пространства. Значит не существует собственного базиса оператора A и матрицу оператора А нельзя привести к диагональному виду.

6. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Определение 1. Квадратичной формой F от n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется функция вида

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j. \quad , \tag{6.1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, \ldots, n)$ – вещественные числа.

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})$, i, $j = 1, \ldots, n$, называется матрицей квадратичной формы F.

Переменные x_1, x_2, …, x_n интерпретируем как координаты переменного вектора x, принадлежащего n-мерному евклидову пространству в ортонормированном базисе; матрица A – матрица самосопряженного оператора в этом базисе. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = (Ax, x) \tag{6.2}$$

При невырожденном преобразовании координат

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j,\ i = 1, \ldots, n \tag{6.3}$$

Квадратичная форма (7) переходит в

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} y_i y_j, \tag{6.4}$$

где $a'_{ij}(i, j = 1, \ldots, n)$ – постоянные коэффициенты.

Теорема 1. Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2 \tag{6.5}$$

Выражение (6.5) называется каноническим видом квадратичной формы. Заметим, что одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Поэтому канонический вид не является однозначно определенным.

Теорема 2. (закон инерции квадратичных форм).

Число слагаемых с положительными и отрицательными коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения этой квадратичной формы к каноническому виду.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

С помощью ортогонального преобразования координат квадратичная форма (6.1) может быть приведена к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \quad , \tag{6.6}$$

где $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$ – собственные значения самосопряженного оператора A, имеющего матрицу (a_{ij}) в некотором ортонормированном базисе. Базис, в котором квадратичная форма (6.1) имеет вид (6.6) есть собственный ортонормированный базис оператора A.

Задачи

1. Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма

$$3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$$

посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования.

Решение

Матрица квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&3&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}.$$

Коэффициентами квадратичной формы в каноническом виде являются собственные значения матрицы A. Характеристическое уравнение $\lambda^3-6\lambda^2+32=0$. Отсюда $\lambda_1=-2,\lambda_{2,3}=4$. Канонический вид квадратичной формы $-2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$.

2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3.$$

к каноническому виду и написать этот канонический вид.

Решение

Матрица квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5=0$. Отсюда $\lambda_1=5$, $\lambda_{2,3}=-1$. Канонический вид квадратичной формы $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$. Новым базисом является собственный ортонормированный базис оператора A. Найдем его.

$$\lambda_1=5:\begin{cases}-4x_1+2x_2+2x_3=0,\\2x_1-4x_2+2x_3=0,\\2x_1+2x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

Отсюда $x_1=x_2=x_3$ и нормированный собственный вектор есть

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\lambda_{2,3}=-1:\ 2x_1+2x_2+2x_3=0.$$

Отсюда $x_1=-x_2-x_3,\ x=\ -x_2-x_3,x_2,x_3\ =x_2\ \ -1,1,0\ +x_3\ \ -1,0,1$.

Собственные векторы $\tilde{e}_2\left(-1,1,0\right),\tilde{e}_3\left(-1,0,1\right)$ ортогональны вектору e_1, так как векторы $e_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3$ принадлежат различным собственным значениям.

Система векторов $\tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ линейно независима, но не является ортонормированной. Пользуясь методом Грама – Шмидта, получим из нее ортонормированную систему. Имеем

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{|\tilde{e}_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Вектор $\hat{e}_3$, ортогональный вектору e_2, ищем в виде $\hat{e}_3 = \tilde{e}_3 - \alpha e_2$, α – искомое число. Из условия $\left(\hat{e}_3, e_2\right) = 0$ получим $\alpha = \left(\tilde{e}_3, e_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$\hat{e}_3 = (-1, 0, 1) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Нормируя вектор $\hat{e}_3$, получим $e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Итак, ортонормированный базис оператора A

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Матрица перехода от заданного базиса к базису

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $X = CY$ (X и Y– матрицы-столбцы координат вектора x в старом и новом базисах соответственно), получим

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3.$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3.$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} y_3.$$

7. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 1. Кривой второго порядка называется линия, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат записываются в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 > 0. \qquad (7.1)$$

Каждое уравнение (7.1) второй степени определяет либо эллипс ($\sigma = AC - B^2 > 0$), либо гиперболу ($\sigma < 0$), либо параболу ($\sigma = 0$). При этом следует учитывать мнимые и вырожденные эллипсы, а также вырожденные гиперболы и параболы.

Определение 2. Центром некоторой линии называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметричными парами.

Определение 3. Линии второго порядка, обладающие единственным центром, называются центральными.

Точка $S(x_0,\ y_0)$ является центром линии, определяемой уравнением (7.1), тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \qquad (7.2)$$

Если определитель этой системы $\sigma \neq 0$ ($\sigma = AC - B^2$), то она имеет единственное решение. В этом случае линия, описываемая уравнением (7.1), является центральной (эллипс и гипербола, включая случаи вырождения). Если же $\sigma = 0$, то система (7.2) либо несовместна либо имеет бесчисленное множество решений. В этом случае линия либо не имеет центра, либо имеет их бесконечное множество (парабола, включая вырожденный случай).

Если $S(x_0,\ y_0)$ – центр линии второго порядка, то в результате преобразования координат по формулам

$$x = \tilde{x} + x_0,\ y = \tilde{y} + y_0. \qquad (7.3)$$

(что соответствует переносу начала координат в центр линии) ее уравнение примет вид

$$A\tilde{x}^2 + 2B\tilde{x}\tilde{y} + C\tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0, \qquad (7.4)$$

где $\tilde{F} = Dx_0 + Ey_0 + F$.

Построение кривых второго порядка

1. Центральная кривая ($\sigma \neq 0$).

а) Находим координаты центра и переносим в негоначало координат (результат – уравнение (7.4)).

б) С помощью ортогонального преобразования координат квадратичную форму в левой части уравнения (7.4) приводим к каноническому виду. Тогда уравнение (7.4) перейдет в следующее:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \tilde{F} = 0, \qquad (7.5)$$

где λ_1, λ_2 – характеристические числа квадратичной формы. Новые координатные оси, а также главные оси кривой направлены по векторам ортонормированного базиса.

Получившееся уравнение приводим к каноническому виду.

в) Строим кривую (исключая случай мнимого эллипса).

2. Нецентральная кривая (σ= 0).

а) С помощью ортогонального преобразования координат квадратичную форму в левой части уравнения (7.1) приводам к каноническому виду. Тогда уравнение (7.1) перейдет в следующее:

$$\lambda_2 x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \qquad (7.6)$$

где λ_2 – характеристическое число квадратичной формы (λ_1 = 0).

б) Параллельно переносим повернутые оси. Получившееся уравнение приводим к каноническое виду.

в) Строим кривую (исключая случай мнимой параболы).

Задачи

Каждое из следующих уравнений привести к каноническому виду; определить тип каждого из них установить, какие геометрические образы они определяют; для каждого случая изобразить на чертеже оси первоначальной системы, оси других координатных систем, которые вводятся по ходу действия, и геометрический образ, определяемый данным уравнением

1. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$

Решение

σ< 0; следовательно, уравнение гиперболического типа и кривая является центральной.

а) Координаты центра (2, –1). Уравнение кривой в координатах $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$3x + 10\tilde{x}\tilde{y} + 3\tilde{y}^2 - 8 = 0.$$

б) Характеристические числа квадратичной формы λ_1 = 8, λ_2 = –2. Уравнение кривой в повернутой системе координат $8x'^2 - 2y'^2 - 8 = 0$, или $x'^2 - \dfrac{y'^2}{4} = 1$. Это уравнение гиперболы с полуосями a = 1; b = 2.

в) Собственные векторы матрицы квадратичной формы $\tilde{e}_1\ 1,1\ , \tilde{e}_2\ 1,\ -1$. Нормируя векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ и учитывая, что определитель матрицы оператора поворота на плоскости равен +1, получим новые базисные векторы $\tilde{e}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\tilde{e}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Матрица перехода от базиса i, j к базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда угол поворота координатных осей $\alpha = \pi/4$ против часовой стрелки. Напомним, что матрица оператора поворота на угол α есть

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Строим гиперболу (см. рис. 7.1).

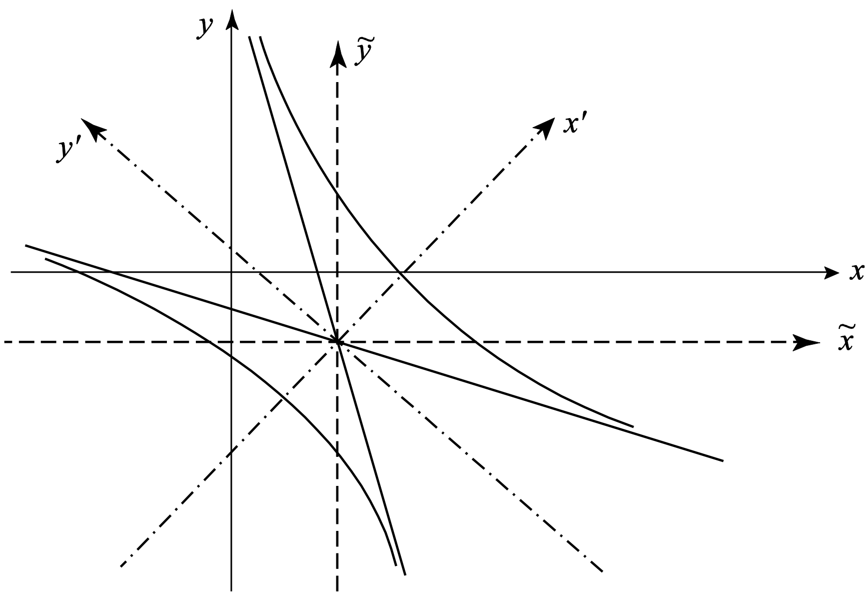

Рис. 7.1

2. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$

Решение

σ> 0; уравнение эллиптического типа, кривая центральная.

а) Координаты центра (–1, 1). Уравнение кривой в координатах $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$25\tilde{x}^2 - 14\tilde{x}\tilde{y} + 25\tilde{y}^2 - 288 = 0.$$

б) Характеристические числа квадратичной формы $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 32$. Уравнение кривой в повернутой системе координат $18x'^2 + 32y'^2 - 228 = 0$, или $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$. Это уравнение эллипса с полуосями $a = 4$; $b = 3$.

в) Собственные векторы матрицы квадратичной формы $\tilde{e}_1\ 1,1\ ,\ \tilde{e}_2\ 1,\ -1$.

Как и в предыдущем случае, поворот осуществляется на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Строим эллипс (см. рис. 7.2).

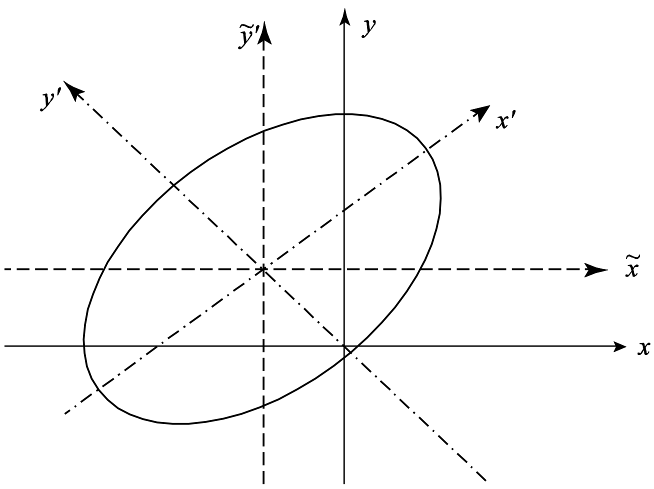

Рис. 7.2

3. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0.$

Решение

σ< 0; уравнение гиперболического типа. Координаты центра (–2, 0). Уравнение кривой в координатах $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$7\tilde{x}^2 + 6\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}^2 = 0. \qquad (7.7)$$

Это пара пересекающихся прямых (вырожденная гипербола). Решая квадратное уравнение (7.7) относительно $\tilde{y}$ находим $\tilde{y} = -\tilde{x}, \tilde{y} = 7\tilde{x},$ или в первоначальных координатах $y = -x - 2$, $y = 7x + 14$ (см. рис. 7.3).

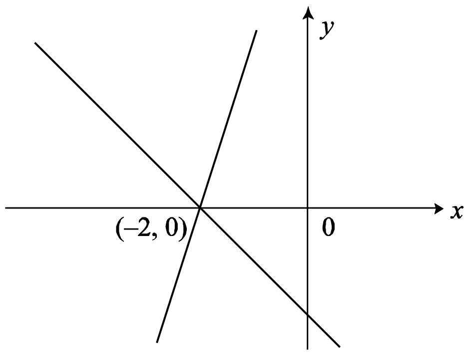

Рис. 7.3

4. $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0.$

Решение

σ> 0. Уравнение эллиптического типа. Координаты центра (–1, 0). Уравнение кривой в координатах $(\tilde{x},\tilde{y}):19\tilde{x}^2+6\tilde{x}\tilde{y}+11\tilde{y}^2+10=0$. Это уравнение определяет мнимый эллипс, так как при любых значениях переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ квадратичная форма, входящая в уравнение, строго положительна.

5. $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0.$

Решение

σ> 0.Уравнение эллиптического типа. Координаты центра (0, –2). Уравнение кривой в координатах $(\tilde{x},\tilde{y}): 5\tilde{x}^2-2\tilde{x}\tilde{y}+5\tilde{y}^2=0$. Это уравнение определяет точку $\tilde{x}=\tilde{y}=0$, или в прежних координатах $x = 0$, $y = –2$.

6. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0.$

Решение

σ= 0. Уравнение параболического типа, кривая не является центральной.

а) Характеристические числа квадратичной формы $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Нормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы $e_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right), e_2\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

Отсюда

$$x=\frac{1}{5}(4x'-3y'),\ y=\frac{1}{5}(3x'+4y')$$

Уравнение кривой в координатах(x', y')

$$y'^2+2x'+4y'-2=0. \qquad (7.8)$$

Угол поворота координатных осей $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$.

б) Преобразуя уравнение (7.8), получим

$$(y'+2)^2 = -2(x'-3).$$

Это парабола с вершиной в точке (3, –2) с осью, параллельной оси $O'X'$. Центра нет.

в) $\begin{cases} \tilde{x} = x' - 3 \\ \tilde{y} = y' + 2 \end{cases}$ (см. рис. 7.4).

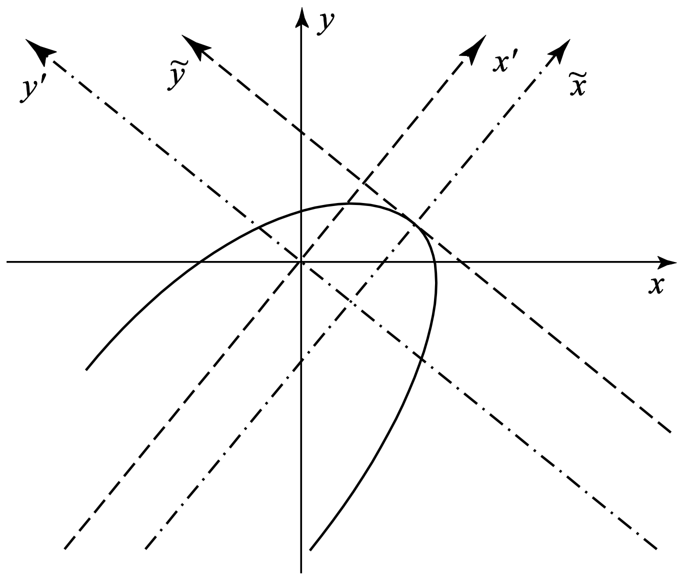

Рис. 7.4

7. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0.$

Решение

σ= 0. Уравнение параболического типа.

а) Характеристические числа квадратичной формы $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 13$. Нормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы $e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right), e_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$

Отсюда

$$x = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y'),\ y = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3x' + 2y').$$

Уравнение кривой в координатах $(x', y') : 13y'^2 - 8\sqrt{13}y' + 3 = 0.$

Угол поворота координатных осей $\alpha = -\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}.$

б) Это уравнение определяет пару параллельных прямых $y' = \frac{4}{\sqrt{13}} - 1$ и $y' = \frac{4}{\sqrt{13}} + 1$. Это вырожденная парабола, имеет бесчисленное множество центров, они располагаются на прямой $y' = \frac{4}{\sqrt{13}}$.

в) см. рис. 7.5.

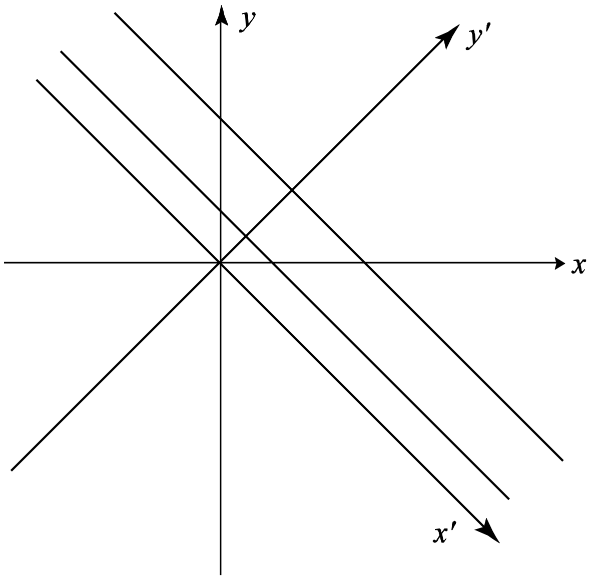

Рис. 7.5

8. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0.$

Решение

Уравнение параболического типа. Характеристические числа квадратичной формы $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$. Нормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы $e_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), e_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. Отсюда $x = \frac{1}{5}\;3x' - 4y'$, $y = \frac{1}{5}\;4x' + 3y'$.

Уравнение кривой в координатах $(x', y') : y'^2 + 8y' + 17 = 0$ или $y' + 4\;^2 + 1 = 0$. Это уравнение не определяетникакого геометрического образа.

ЛИТЕРАТУРА

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2003. – 303 с.

Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975. – 319 с.

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984. – 336с.

Шмелев П.А. Сборник задач и упражнений по линейнойалгебре. – М.: МЭИ, 1975. – 140 с.

СОДЕРЖАНИЕ