МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Ю. И. Дементьев, Е. Н. Кушнер,
В. А. Ухова, К. К. Кислов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

*для студентов I курса
направления 162300
заочного обучения*

Москва – 2014

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Ю. И. Дементьев, Е. Н. Кушнер,
В. А. Ухова, К. К. Кислов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

для студентов I курса
направления 162300
заочного обучения

Москва – 2014

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для студентов 1 курса специальности 162300. В пособии содержатся варианты контрольных работ и образцы их решения.

Студенты заочного отделения специальности 162300 изучают математику на первом и втором курсах.

Распределение часов по видам занятий и формы контроля

Период обучения	Часы на дисциплину				Форма контроля
	общие	самост. работа	лекции	практ. занятия	
Курс 1 Семестр 1	180	156	12	12	зачёт
Курс 1 Семестр 2	180	158	10	12	экзамен
Курс 2	288	256	16	16	экзамен
Всего часов	648	570	38	40	

Одно лекционное и практическое занятие длится 2 часа.

Контрольные работы

В первом семестре студенты должны выполнить контрольную работу №1.

Контрольная работа №1 содержит следующие темы. Матрицы. Определители. Системы уравнений. Векторы. Прямая и плоскость. Пределы.

Во втором семестре студенты должны выполнить контрольную работу №2, контрольную работу №3 и контрольную работу №4.

Контрольная работа №2 содержит следующие темы. Производные. Частные производные.

Контрольная работа №3 содержит следующие темы. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Несобственный интеграл.

Контрольная работа №4 содержит следующие темы. Построение графиков функций. Приложения определенных интегралов.

В конце каждого семестра перед зачётом или экзаменом происходит собеседование по контрольным работам.

Указания по выполнению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради печатными буквами должны быть написаны фамилия, имя и отчество студента, учебный номер (шифр), название дисциплины, семестр или курс обучения, номер контрольной работы и номер варианта.

3. В работе необходимо решить все задания, указанные в контрольной работе. Тетради, содержащие не все задания контрольной работы, а также задания не своего варианта, не зачитываются.

4. Номера заданий, которые студент должен выполнить в контрольной работе, определяются по таблице вариантов (см. ниже). Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента, при этом цифра 0 соответствует варианту 10.

Номера заданий для выполнения контрольных работ в первом семестре

Вариант	Контрольная работа №1
1	1.1 2.1 3.1 4.1
2	1.2 2.2 3.2 4.2
3	1.3 2.3 3.3 4.3
4	1.4 2.4 3.4 4.4
5	1.5 2.5 3.5 4.5
6	1.6 2.6 3.6 4.6
7	1.7 2.7 3.7 4.7
8	1.8 2.8 3.8 4.8
9	1.9 2.9 3.9 4.9
10	1.10 2.10 3.10 4.10

Номера заданий для выполнения контрольных работ во втором семестре

Вариант	Контрольная работа №2	Контрольная работа №3	Контрольная работа №4
1	5.1 6.1	7.1 8.1 9.1	10.1 11.1 12.1
2	5.2 6.2	7.2 8.2 9.2	10.2 11.2 12.2
3	5.3 6.3	7.3 8.3 9.3	10.3 11.3 12.3
4	5.4 6.4	7.4 8.4 9.4	10.4 11.4 12.4
5	5.5 6.5	7.5 8.5 9.5	10.5 11.5 12.5
6	5.6 6.6	7.6 8.6 9.6	10.6 11.6 12.6
7	5.7 6.7	7.7 8.7 9.7	10.7 11.7 12.7
8	5.8 6.8	7.8 8.8 9.8	10.8 11.8 12.8
9	5.9 6.9	7.9 8.9 9.9	10.9 11.9 12.9
10	5.10 6.10	7.10 8.10 9.10	10.10 11.10 12.10

5. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к собеседованию по контрольной работе, к сдаче зачёта или экзамена.

6. Решения заданий надо располагать в порядке возрастания их номеров.

7. Перед решением каждого задания необходимо написать её номер и полностью переписать условие. В случае, если несколько заданий, из которых студент выбирает задания своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задания, заменить общие данные конкретными, взятыми из своего варианта.

8. Решения заданий следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

9. После получения прорецензированной работы, как незачтённой, так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решения заданий те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на неё. Поэтому при выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задание 1. Даны матрицы A, B, C. Найти $2A - 3B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$.

1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.3. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&1&4\\1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$.

1.8. $A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\4&3&7\\1&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-4\\3&1&1\\1&3&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\3&2&-4\\-1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&1&-7\\2&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$.

1.10. $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\5&2&4\\-4&3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-7&1\\15&3&-1\\3&2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

Задание 2. Дана система линейных уравнений. Решить ее двумя способами: методом Крамера и методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases}x+2y+3z=1\\2x-3y+2z=9\\5x+8y-z=7\end{cases}$

2.2. $\begin{cases}2x+y-z=2\\3x+2y+2z=-2\\x+y-2z=1\end{cases}$

2.3. $\begin{cases}x+2y+3z=5\\2x-y-z=1\\x+3y+4z=6\end{cases}$

2.4. $\begin{cases}x+2y-z=2\\2x-3y+2z=2\\3x+y+z=8\end{cases}$

2.5. $\begin{cases}x+y-z=0\\3x+2y+z=5\\4x-y+5z=3\end{cases}$

2.6. $\begin{cases}x+y-z=-2\\4x-3y+z=1\\2x+y-z=1\end{cases}$

2.7. $\begin{cases}x+2y+3z=14\\5x-y-z=0\\4x+3y+2z=16\end{cases}$

2.8. $\begin{cases}x+y+2z=-1\\2x-y+2z=-4\\4x+y+4z=-2\end{cases}$

2.9. $\begin{cases}2x+y+3z=11\\3x+2y+z=5\\x+y+z=3\end{cases}$

2.10. $\begin{cases}x+y-z=1\\8x+3y-6z=2\\4x+y-3z=3\end{cases}$

Задание 3. Даны координаты точек A, B, C. Найти:

а) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

б) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

в) векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

г) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

д) канонические уравнения прямой AB;

е) уравнение плоскости ABC.

3.1. $A\,(5,\,4,\,4)$, $B\,(-7,\,6,\,5)$, $C\,(3,\,-4,\,3)$.

3.2. $A\,(5,\,2,\,0)$, $B\,(2,\,5,\,0)$, $C\,(1,\,2,\,4)$.

3.3. $A\,(-2,\,0,\,-4)$, $B\,(-1,\,7,\,1)$, $C\,(4,\,-8,\,-4)$.

3.4. $A\,(2,\,-1,\,2)\,,$ $B\,(1,\,2,\,-1)\,,$ $C\,(3,\,2,\,1)\,.$
3.5. $A\,(-1,\,2,\,-3)\,,$ $B\,(4,\,-1,\,0)\,,$ $C\,(2,\,1,\,-2)\,.$
3.6. $A\,(1,\,-1,\,1)\,,$ $B\,(-2,\,0,\,3)\,,$ $C\,(2,\,1,\,-1)\,.$
3.7. $A\,(1,\,2,\,0)\,,$ $B\,(1,\,-1,\,2)\,,$ $C\,(0,\,1,\,-1)\,.$
3.8. $A\,(1,\,0,\,2)\,,$ $B\,(1,\,2,\,-1)\,,$ $C\,(2,\,-2,\,1)\,.$
3.9. $A\,(1,\,3,\,0)\,,$ $B\,(4,\,-1,\,2)\,,$ $C\,(3,\,0,\,1)\,.$
3.10. $A\,(0,\,3,\,2)\,,$ $B\,(-1,\,3,\,6)\,,$ $C\,(-2,\,4,\,2)\,.$

Задание 4. Найти пределы.

4.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3x^2}{4-2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}$

4.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-6x+7x^2}{3-x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

4.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+2x^2-3}{1-2x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-x-1}$

4.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+4x}{1+15x-x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

4.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{3+x-2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$

4.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x^3+2x^2}{5-2x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

4.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x+3x^2}{5-6x-2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+7x+10}$

4.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3+x}{1+x^2-3x^5}$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$

4.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^2+2x^3}{5x^3-6x^2+3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$

4.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+4}{6x^4-x^3+x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Задача 1. Матрицы

Матрица — это прямоугольная таблица чисел, заключённая в круглые скобки. Основные операции с матрицами:

— произведением числа k на матрицу A называется матрица, элементы которой получены из элементов матрицы A умножением их на число k;

— суммой (разностью) матриц A и B называется матрица, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B;

— произведением матрицы A на матрицу B называется матрица, элемент которой, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Задание 1. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы $4 \cdot A$, $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, $A \cdot C$.

Решение.

$$4 \cdot A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 0 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+(-2) \\ 0+1 & 1+4 & -2+0 \\ -3+1 & 0+5 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-(-2) \\ 0-1 & 1-4 & -2-0 \\ -3-1 & 0-5 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \\ -3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & (-3) \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2+3 & 3+8+15 & -2+0+3 \\ 0+1-2 & 0+4-10 & 0+0-2 \\ -6+0+4 & -9+0+20 & 6+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 26 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ -2 & 11 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 \\ -3 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2+21 \\ 0-1-14 \\ -9+0+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -15 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Системы линейных уравнений

1. Метод Крамера. Пусть у системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{1}$$

определитель отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ вычисляется по следующему правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определители Δ_x, Δ_y, Δ_z вычисляются аналогичным образом.

Задание 2.1. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot (-1) =$$
$$= -6 + 60 + 4 - 18 - 16 + 5 = 29.$$

Определитель $\Delta = 29 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение. Аналогичным образом вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 29, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -29, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 58.$$

Находим решение системы по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{29}{29} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-29}{29} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2.$$

Ответ: $x = 1, y = -1, z = 2$.

2. Метод Гаусса. Для решения системы уравнений (1) методом Гаусса, составляют расширенную матрицу коэффициентов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу коэффициентов системы уравнений приводят к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right).$$

Вместо знака $*$ будут какие-либо числа, получившиеся в результате элементарных преобразований матрицы.

Допустимые элементарные преобразования:

1) можно поменять любые две строки местами;

2) любую строку можно умножить (или разделить) на любое неравное нулю число;

3) к любой строке можно прибавить (или вычесть) любую строку, умноженную (или разделённую) на любое число.

По последней матрице составляют соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x + * \cdot y + * \cdot z = *, \\ \qquad\quad y + * \cdot z = *, \\ \qquad\qquad\quad z = * \end{cases}$$

и последовательно находят неизвестные z, y, x.

Задание 2.2. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 3x + 2y - z = -1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу коэффициентов

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Меняем местами первую и вторую строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

Умножаем вторую строку на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & -7 & -13 & -19 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на 7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right).$$

Делим третью строку на 29.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

По последней матрице составляем соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 6, \\ \qquad\; y + 6z = 11, \\ \qquad\qquad\;\; z = 2. \end{cases}$$

Решая систему „снизу вверх“ находим, что $y = -1$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1, y = -1, z = 2$.

Задача 3. Аналитическая геометрия

Для точек A и B с координатами $A(A_x; A_y; A_z)$, $B(B_x; B_y; B_z)$ координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле

$$\overrightarrow{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z\}.$$

Рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} \text{ и } \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}.$$

Длина вектора $\vec{a}$ обозначается через $|\vec{a}|$ и вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $(\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $[\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$ и вычисляется по формуле

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы, направленные по осям Ox, Oy, Oz соответственно.

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{b})\right)$ и вычисляется по формуле

$$\cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{b})\right) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точки A и B с координатами $A(A_x; A_y; A_z)$, $B(B_x; B_y; B_z)$, записываются в виде

$$\frac{x - A_x}{a_x} = \frac{y - A_y}{a_y} = \frac{z - A_z}{a_z},$$

где вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = \overrightarrow{AB}$ — направляющий вектор прямой AB.

Уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C, записывается в виде

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}z + \tilde{D} = 0,$$

где числа $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ — координаты вектора $\vec{c} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$, а число $\tilde{D}$ находится подстановкой координат точки A в уравнение плоскости. Вектор $\vec{c} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ называется нормальным вектором плоскости.

Задание 3. Даны координаты точек $A(3;-5;4)$, $B(2;-1;1)$, $C(-4;3;6)$. Найти:

1) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
2) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
3) векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
4) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
5) канонические уравнения прямой AB;
6) уравнение плоскости ABC.

Решение. 1) Сначала находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \{2-3; -1-(-5); 1-4\} = \{-1; 4; -3\}.$$

Теперь находим длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}.$$

2) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = \{-4-3; 3-(-5); 6-4\} = \{-7; 8; 2\}.$$

Вычисляем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = (\{-1;4;-3\}, \{-7;8;2\}) = -1\cdot(-7) + 4\cdot 8 + (-3)\cdot 2 = 33.$$

3) Вычисляем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -3 \\ -7 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot 4\cdot 2 + \vec{j}\cdot(-3)\cdot(-7) + \vec{k}\cdot(-1)\cdot 8 - \vec{k}\cdot 4\cdot(-7) - \vec{j}\cdot(-1)\cdot 2 - \vec{i}\cdot(-3)\cdot 8 =$$

$$= 8\vec{i} + 21\vec{j} - 8\vec{k} + 28\vec{k} + 2\vec{j} + 24\vec{i} = 32\vec{i} + 23\vec{j} + 20\vec{k} = \{32; 23; 20\}.$$

4) Для нахождения косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ вычислим длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}.$$

Теперь находим требуемый косинус.

$$\cos\left(\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{33}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{117}}=$$

$$=\frac{33}{\sqrt{2\cdot 13}\cdot\sqrt{9\cdot 13}}=\frac{3\cdot 11}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 3\cdot\sqrt{13}}=\frac{11}{13\sqrt{2}}.$$

5) В первом пункте был найден направляющий вектор прямой AB. Записываем канонические уравнения прямой.

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-4}{-3}.$$

6) В третьем пункте был найден нормальный вектор плоскости ABC. Уравнение плоскости запишется в виде $32x+23y+20z+\tilde{D}=0$. Плоскость проходит через точку A. Для нахождения числа $\tilde{D}$ подставим координаты точки A в найденное уравнение плоскости.

$$32\cdot 3+23\cdot(-5)+20\cdot 4+\tilde{D}=0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{D}=-61.$$

Окончательно получаем искомое уравнение $32x+23y+20z-61=0$.

Задача 4. Пределы

При выполнении заданий на вычисление пределов вместо переменной x ставится число (или символ), к которому стремится переменная x. В зависимости от получившейся неопределённости делают вывод о способе её раскрытия. Часто на конечном этапе вычисления пределов используют следующие формулы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Задание 4а. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-5}{2x^2-9x^3+8x}.$$

Решение. При подстановке в числитель вместо переменной x символа ∞, получаем ∞. При подстановке в знаменатель вместо переменной x символа ∞, тоже получаем ∞. Следовательно, имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Старшей степенью числителя и знаменателя является x^3. Для вычисления предела, в числителе и в знаменателе выносим x^3 за скобку. Далее сокращаем вынесенные x^3. Устремляя переменную x к ∞, получаем, что все дробные слагаемые стремятся к нулю, а оставшееся выражение является ответом.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-5}{2x^2-9x^3+8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(4+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3})}{x^3(\frac{2}{x}-9+\frac{8}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3}}{\frac{2}{x}-9+\frac{8}{x^2}}=\frac{4+0-0}{0-9+0}=-\frac{4}{9}.$$

Ответ: $-\dfrac{4}{9}$.

Задание 4б. Вычислить предел

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+3x-9}{9-x^2}.$$

Решение. При подстановке в числитель вместо переменной x числа -3, получаем 0. При подстановке в знаменатель вместо переменной x числа -3, тоже получаем 0. Следовательно, имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для вычисления данного предела раскладываем числитель и знаменатель на множители. Затем сокращаем на одинаковый множитель $(x+3)$ и вместо переменной x подставляем число -3.

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+3x-9}{9-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(2x-3)}{(3-x)(3+x)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{2x-3}{3-x}=\frac{2(-3)-3}{3-(-3)}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задание 5. Найти производные заданных функций.

5.1.
а) $y=e^x\cdot\arccos x$
б) $y=\dfrac{1-\cos x}{2^x+3}$
в) $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$
г) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}$
д) $y=\dfrac{\sin 3x}{\cos^2 x}$

5.2.
а) $y=\sqrt{x^5}\cdot\ln x$
б) $y=\dfrac{x^3-3}{\operatorname{arctg} x}$
в) $y=\cos^3 x\cdot 2^{\arcsin x}$
г) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$
д) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^5 5x}$

5.3. а) $y = \log_3 x \cdot \arcsin x$
б) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$
в) $y = \sqrt{x^3} \cdot \ln x + \dfrac{1}{x}$
г) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^4$
д) $y = 5^{x + \operatorname{arctg} x}$

5.4. а) $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos x$
б) $y = \dfrac{x + e^x}{x - e^x}$
в) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
г) $y = 3 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3} + e^{\arcsin x}$
д) $y = 3^{\sin \frac{1}{x}}$

5.5. а) $y = x^{10} \cdot \log_2 x$
б) $y = \dfrac{2^x}{\cos x + 5}$
в) $y = \dfrac{\sin^4 x}{\operatorname{ctg} x}$
г) $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
д) $y = e^{-3x} \cdot \arcsin 2x$

5.6. а) $y = 3^x \cdot \operatorname{tg} x$
б) $y = \dfrac{2 - x}{x^2 + \sqrt{x}}$
в) $y = \left(3 + 2x^2\right)^5$
г) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \dfrac{1}{x}}$
д) $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$

5.7. а) $y = \sqrt[7]{x^3} \cdot \sin x$
б) $y = \dfrac{4 + x^3}{x - \operatorname{ctg} x}$
в) $y = \operatorname{tg}^2 x + \dfrac{1}{\cos x}$
г) $y = \sqrt{2x - x^2} + \dfrac{1}{3x^3}$
д) $y = e^{2x} \cdot \ln\left(1 + x^2\right)$

5.8. а) $y = \log_5 x \cdot \arccos x$
б) $y = \dfrac{e^x}{1 - x^2}$
в) $y = \left(x^5 + 3x + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$
г) $y = 3 \sin 2x \cdot \cos^2 x$
д) $y = \sqrt{\ln\left(x^2 + 1\right)}$

5.9. а) $y = \sqrt[5]{x} \cdot 3^x$
б) $y = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{\ln x}$
в) $y = \dfrac{1}{2 \sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg} x\right)$
г) $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$
д) $y = \dfrac{2}{3} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

5.10. а) $y = \left(x^3 + 3x^4\right) \cdot \log_3 x$
б) $y = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$
в) $y = \operatorname{ctg}^3 x - \dfrac{1}{\sin x}$
г) $y = \dfrac{\ln\left(x^2 + 2x\right)}{3x}$
д) $y = x \cdot 5^{\frac{1}{x}}$

Задание 6. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ заданной функции.

6.1. $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$

6.2. $z = x \cdot \arcsin(xy)$

6.3. $z = y^2 \cdot e^{x^2 + y^2}$

6.4. $z = e^{xy} \cdot \left(2x + y^2\right)$

6.5. $z = y \cdot \ln\left(x^2 - y^2\right)$

6.6. $z = x^2 \cdot \sin \dfrac{x}{y}$

6.7. $z = y \cdot e^{\frac{y}{x}}$

6.8. $z = x^2 \cdot e^{x^2 - y^2}$

6.9. $z = \left(x^2 - y^2\right) \cdot \cos xy$

6.10. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Задача 5. Производные

При решении данного номера применяются *формулы производных основных элементарных функций*:

$$
\begin{array}{lll}
(c)'=0 \quad (c \text{ — число}), & x'=1, & (x^n)'=nx^{n-1},\\
(e^x)'=e^x, & (\sin x)'=\cos x, & (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
(a^x)'=a^x\ln a, & (\cos x)'=-\sin x, & (\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
(\ln x)'=\dfrac{1}{x}, & (\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}, & (\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2},\\
(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}, & (\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}, & (\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2},
\end{array}
$$

и *формулы производных суммы, разности, произведения и частного двух функций*:

$$(u+v)'=u'+v', \qquad (u-v)'=u'-v', \qquad (cu)'=cu' \text{ (с — число)},$$

$$(uv)'=u'v+uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

и *правило взятия производной сложной функции*:

Пусть функция $u=g(x)$ имеет производную в некоторой точке $x=x_0$, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=g(x_0)$. Тогда, сложная функция $f(g(x))$ имеет производную в точке $x=x_0$, которая вычисляется по формуле $[f(g(x_0))]'=f'(u_0)\cdot g'(x_0)$. Для краткости используется следующая запись последней формулы:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{2}$$

Задание 5а. Найти производные следующих выражений:

$$5, \quad \ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}, \quad 6^x, \quad \log_3 x.$$

Решение. Производная постоянной функции равна нулю, поэтому

$$5'=0, \quad \left(\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}\right)'=0.$$

Для нахождения производных функций 6^x и $\log_3 x$ воспользуемся табличными формулами для производных показательной (при $a=6$) и логарифмической (при $a=3$) функций, имеем:

$$(6^x)'=6^x\ln 6, \quad (\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}.$$

Задание 5б. Вычислить производные следующих функций:

$$x^{17}, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}.$$

Решение. Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$. Имеем:

$$\left(x^{17}\right)' = 17x^{17-1} = 17x^{16};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}\right)' = \left(x^{-\frac{7}{5}}\right)' = -\frac{7}{5}x^{-\frac{7}{5}-1} = -\frac{7}{5}x^{-\frac{12}{5}} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{12}{5}}} = -\frac{7}{5\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

Задание 5в. Найти производные функций:

$$\frac{1}{x^3} - 5\ln x, \quad \frac{2\operatorname{tg} x}{3} + \frac{\operatorname{ctg} x}{4}, \quad (x^2+x)\cos x, \quad \frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}, \quad \frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}.$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{x^3} - 5\ln x\right)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' - (5\ln x)' = \left(x^{-3}\right)' - 5\,(\ln x)' =$$

$$= -3x^{-4} - 5\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x} = -\frac{3+5x^3}{x^4}.$$

$$\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{3} + \frac{\operatorname{ctg} x}{4}\right)' = \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{3}\right)' + \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{4}\right)' = \left(\frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg} x\right)' + \left(\frac{1}{4} \cdot \operatorname{ctg} x\right)' =$$

$$= \frac{2}{3}(\operatorname{tg} x)' + \frac{1}{4}(\operatorname{ctg} x)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{2}{3\cos^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x}.$$

$$\left((x^2+x)\cos x\right)' = (x^2+x)'\cos x + (x^2+x)(\cos x)' =$$

$$= (2x+1)\cos x + (x^2+x)(-\sin x).$$

$$\left(\frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}\right)' =$$

$$= \frac{(x^3+2x^2+5x+1)'(x^2+2^x) - (x^3+2x^2+5x+1)(x^2+2^x)'}{(x^2+2^x)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2+4x+5)(x^2+2^x)-(x^3+2x^2+5x+1)(2x+2^x\ln 2)}{(x^2+2^x)^2}.$$

Функция $\lg x$ — это десятичный логарифм, то есть $\lg x = \log_{10} x$. Применим формулы производных частного и произведения:

$$\left(\frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}\right)' = \frac{\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)'\cdot \lg x - \left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot(\lg x)'}{(\lg x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(x^{13}\right)'\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(\operatorname{arcctg} x\right)'\right)\cdot \lg x - \left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot \dfrac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{\left(13x^{12}\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right)\cdot \lg x - x^{13}\operatorname{arcctg} x\dfrac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{13x^{12}\operatorname{arcctg} x\lg x - \dfrac{x^{13}\lg x}{1+x^2} - \dfrac{x^{12}\operatorname{arcctg} x}{\ln 10}}{\lg^2 x}.$$

Задание 5г. Найти производные функций: $\ln\sin x$, e^{x^2}.

Решение. Найдем производную функции $\ln\sin x$. Обозначим

$$y=\ln u, \quad u=\sin x, \text{ тогда } y=\ln\sin x.$$

По формуле (3) для вычисления производной сложной функции находим:

$$y'_u = (\ln u)'_u = \frac{1}{u}, \qquad u'_x = (\sin x)'_x = \cos x,$$

откуда

$$(\ln\sin x)' = y'_x = y'_u\cdot u'_x = \frac{1}{u}\cdot\cos x = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Часто более удобно непосредственно находить производные промежуточных функций:

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Найдем производную функции e^{x^2}. Обозначим

$$y=e^u, \quad u=x^2, \text{ тогда } y=e^{x^2}.$$

По формуле (3) для вычисления производной сложной функции находим:

$$y'_u = (e^u)'_u = e^u, \qquad u'_x = \left(x^2\right)'_x = 2x,$$

откуда
$$y'_x = \left(e^{x^2}\right)' = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$
Теперь найдем ту же производную в компактном виде:
$$y'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Задание 5д. Найти производные функций:
$$e^{-x}, \quad (\operatorname{tg}\sqrt{x})^3, \quad \operatorname{arctg}^2 e^{-x}, \quad \cos\log_6 5x - \log_6\cos 5.$$

Решение.
$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$
$$\left((\operatorname{tg}\sqrt{x})^3\right)' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2(\operatorname{tg}\sqrt{x})' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' =$$
$$= 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$
$$\left(\operatorname{arctg}^2 e^{-x}\right)' = \left(\left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)^2\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)' =$$
$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2} \cdot \left(e^{-x}\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-x)' =$$
$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -\frac{2e^{-x}\operatorname{arctg} e^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$
$$(\cos\log_6 5x - \log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - (\log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - 0 =$$
$$= -\sin\log_6 5x \cdot (\log_6 5x)' = -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{(5x)\ln 6} \cdot (5x)' =$$
$$= -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{5x\ln 6} \cdot 5 = -\frac{\sin\log_6 5x}{x\ln 6}.$$
Выражение $\log_6\cos 5$ является числом, поэтому $(\log_6\cos 5)' = 0$.

Задача 6. Частные производные

Частные производные вычисляются для функций от двух или большего числа переменных. Формулы и правила для нахождения частных производных такие же как и в случае функции одной переменной. Если находим частную производную по переменной x, то переменную y следует рассматривать как постоянную величину. Если находим частную производную по переменной y, то переменную x следует рассматривать как постоянную величину.

Обозначения частных производных: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ — частная производная по переменной x, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y$ — частная производная по переменной y.

Задание 6. Найти частные производные z'_x и z'_y следующих функций

$$z = x^2y^3 - 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1, \quad z = (x^2 + y^2)e^{xy}.$$

Решение. Вычислим частные производные функции

$$z = x^2y^3 - 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1.$$

При вычислении частной производной по переменной x переменную y считаем постоянной (числом, константой).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = (x^2y^3 - 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1)'_x = (x^2y^3)'_x - (4x^3y^2)'_x + (5x)'_x - (4y)'_x + 1'_x =$$
$$= y^3(x^2)'_x - 4y^2(x^3)'_x + 5 - 0 + 0 = y^3 \cdot 2x - 4y^2 \cdot 3x^2 + 5 =$$
$$= 2xy^3 - 12x^2y^2 + 5.$$

При вычислении частной производной по переменной y переменную x считаем постоянной (числом, константой).

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = (x^2y^3 - 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1)'_y = (x^2y^3)'_y - (4x^3y^2)'_y + (5x)'_y - (4y)'_y + 1'_y =$$
$$= x^2(y^3)'_y - 4x^3(y^2)'_y + 0 - 4 + 0 = x^2 \cdot 3y^2 - 4x^3 \cdot 2y - 4 =$$
$$= 3x^2y^2 - 8x^3y - 4.$$

Теперь вычисляем частные производные функции $z = (x^2 + y^2)e^{xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left((x^2 + y^2)e^{xy}\right)'_x = (x^2 + y^2)'_x e^{xy} + (x^2 + y^2)(e^{xy})'_x =$$
$$= \left((x^2)'_x + (y^2)'_x\right) e^{xy} + (x^2 + y^2)e^{xy}(xy)'_x = (2x + 0)e^{xy} + (x^2 + y^2)e^{xy}y =$$
$$= 2xe^{xy} + (x^2y + y^3)e^{xy} = (2x + x^2y + y^3)e^{xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left((x^2 + y^2)e^{xy}\right)'_y = (x^2 + y^2)'_y e^{xy} + (x^2 + y^2)(e^{xy})'_y =$$
$$= \left((x^2)'_y + (y^2)'_y\right) e^{xy} + (x^2 + y^2)e^{xy}(xy)'_y = (0 + 2y)e^{xy} + (x^2 + y^2)e^{xy}x =$$
$$= 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2)e^{xy} = (2y + x^3 + xy^2)e^{xy}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Задание 7. Найти неопределённые интегралы. В пунктах а) и б) результат проверить дифференцированием.

7.1. а) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + 5^x + 2\right) dx$ б) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 16}\, dx$

в) $\displaystyle\int x \cos\frac{x}{2}\, dx$ г) $\displaystyle\int \sin^3 x \sin 2x\, dx$

7.2. а) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{1}{x^3}+\frac{8}{x^2+9}+1\right) dx$ б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2}}$

в) $\int (2x+1)\ e^{2x}\,dx$ г) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

7.3. а) $\int \left(1-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x^2}+e^x\right) dx$ б) $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+4\right)^3}$

в) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ г) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$

7.4. а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2x^2}{3}+1\right) dx$ б) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

в) $\int x^2\ \ln x\,dx$ г) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

7.5. а) $\int \left(7+\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+\frac{2}{x^2+9}\right) dx$ б) $\int (3-10x)^9\ dx$

в) $\int \ln\left(x^2+1\right) dx$ г) $\int \sin^2 x\ \cos^3 x\,dx$

7.6. а) $\int \left(\frac{x}{2}-4+\frac{4}{x}-\frac{3}{3-x^2}\right) dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

в) $\int x\,e^{\frac{x}{2}}\,dx$ г) $\int \sin^2 4x\,dx$

7.7. а) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{3x}+\frac{4}{x^2}+2\right) dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+5}}$

в) $\int x\,3^x\,dx$ г) $\int \frac{\cos x\,dx}{9+\sin^2 x}$

7.8. а) $\int \left(5\sqrt{x}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2+1}+8\right) dx$ б) $\int \frac{1+\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

в) $\int x\ \cos 4x\,dx$ г) $\int \cos^2 \frac{x}{4}\,dx$

7.9. а) $\int \left(x\sqrt{x}-7^x+\frac{2}{x^2}-3\right) dx$ б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

в) $\int x^3\ \ln x\,dx$ г) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^{10} x}\,dx$

7.10. а) $\int \left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}+6\right) dx$ б) $\int \frac{3-x}{x^2+4}\,dx$

в) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$ г) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

Задание 8. Вычислить определённые интегралы.

8.1. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^{10}+3}$ б) $\int\limits_1^e x^2\ \ln x\,dx$

8.2. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$ б) $\int\limits_{2}^{e^2} \ln x\,dx$

8.3. а) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ б) $\int\limits_{0}^{\pi} x\,\cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

8.4. а) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{16+x^4}$ б) $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

8.5. а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin 4x\,dx$

8.6. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ б) $\int\limits_{0}^{1} x\,e^{-2x}\,dx$

8.7. а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}}$ б) $\int\limits_{0}^{1} x\,3^x\,dx$

8.8. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+1}\,dx$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

8.9. а) $\int\limits_{2}^{6} \sqrt{x-2}\,dx$ б) $\int\limits_{0}^{\pi} x\,\sin\left(\frac{x}{6}\right) dx$

8.10. а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\,(\ln x+2)}$ б) $\int\limits_{0}^{1} \mathrm{arctg}\,x\,dx$

Задание 9. Вычислить несобственные интегралы.

9.1. а) $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$ б) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$

9.2. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$ б) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$

9.3. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

9.4. а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ б) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

9.5. а) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(5+x^2)^3}}$ б) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx$

9.6. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{3+x^2}$ б) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{2\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

9.7. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} x^2\,e^{x^3}\,dx$ б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2}$

9.8. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$ б) $\displaystyle\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

9.9. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+2x+10}$ б) $\displaystyle\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\,\ln x}$

9.10. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-2)^3}$ б) $\displaystyle\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3

Задача 7. Неопределённые интегралы

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если для любого допустимого значения x выполнено равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F_0(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ совпадает с множеством функций $F(x) = F_0(x) + C$, где C — любое число.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных $F(x)$ функции $f(x)$. Неопределённый интеграл от функции $f(x)$ обозначается символом $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Функция $f(x)$ называется при этом подынтегральной функцией.

Например, функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$. Поэтому

$$\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Для подсчёта интегралов используется *таблица основных неопределённых интегралов.*

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int dx = \int 1\,dx = x + C,$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

В процессе вычисления интегралов часто применяется *таблица основных дифференциалов.*

$$dx = d(x \pm a), \qquad dx = -d(-x),$$

$$dx = b\,d\left(\frac{x}{b}\right), \qquad dx = \frac{1}{b}\,d(bx),$$

$$x^n\,dx = \frac{d\left(x^{n+1}\right)}{n+1} \quad (n \neq -1), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right),$$

$$x\,dx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right), \qquad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,d\left(\sqrt{x}\right), \qquad \cos x\,dx = d\left(\sin x\right),$$

$$\sin x\,dx = -d\left(\cos x\right), \qquad a^x\,dx = \frac{d\left(a^x\right)}{\ln a},$$

$$e^x\,dx = d\left(e^x\right), \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\operatorname{ctg} x\right),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\operatorname{tg} x\right), \qquad \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg} x\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\left(\arccos x\right), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = -d\left(\operatorname{arcctg} x\right).$$

Формулы таблицы дифференциалов следуют из следующей часто используемой при вычислении интегралов формулы

$$df(x) = (f(x))'\,dx. \tag{3}$$

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$, тогда справедливо равенство, называемое *формулой интегрирования по частям*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

С учётом формулы (3) последнее равенство можно записать в компактном виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Необходимо заметить, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, так как и правая часть формулы содержит интеграл. Однако при правильном применении метода интеграл из правой части будет табличным интегралом или легко сводящимся к табличному интегралу. При вычислении некоторых интегралов метод интегрирования по частям может применяться несколько раз. Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin ax\,dx, \quad \int x^k \cos ax\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx,$$
$$\int x^k \arcsin ax\,dx, \quad \int x^k \arccos ax\,dx, \quad \int x^k \operatorname{arctg} ax\,dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Задание 7а. Найти неопределённый интеграл. Результат проверить дифференцированием.

$$\int \left(x^4 - 5 + 3\sqrt[7]{x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}\right) dx.$$

Решение. Раскладываем интеграл в сумму и разность нескольких интегралов, выносим константы за знаки интегралов и применяем табличные формулы.

$$\int\left(x^4-5+3\sqrt[7]{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}\right)dx=$$
$$=\int x^4\,dx-\int 5\,dx+\int 3\sqrt[7]{x}\,dx+\int\frac{1}{2x^3}\,dx-\int\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}\,dx=$$
$$=\int x^4\,dx-5\int dx+3\int\sqrt[7]{x}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3}\,dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx=$$
$$=\int x^4\,dx-5\int dx+3\int x^{1/7}\,dx+\frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx-\frac{2}{3}\int x^{-5/4}\,dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}-5\cdot x+3\cdot\frac{x^{8/7}}{8/7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-1/4}}{-1/4}+C=$$
$$=\frac{x^5}{5}-5x+\frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8}-\frac{1}{4x^2}+\frac{8}{3\sqrt[4]{x}}+C.$$

Проверка дифференцированием.

$$\left(\frac{x^5}{5}-5x+\frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8}-\frac{1}{4x^2}+\frac{8}{3\sqrt[4]{x}}+C\right)'=$$
$$=\left(\frac{x^5}{5}\right)'-(5x)'+\left(\frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8}\right)'-\left(\frac{1}{4x^2}\right)'+\left(\frac{8}{3\sqrt[4]{x}}\right)'+C'=$$
$$=\frac{1}{5}\left(x^5\right)'-5x'+\frac{21}{8}\left(x^{8/7}\right)'-\frac{1}{4}\left(x^{-2}\right)'+\frac{8}{3}\left(x^{-1/4}\right)'+0=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 5x^4-5\cdot 1+\frac{21}{8}\cdot\frac{8}{7}x^{1/7}-\frac{1}{4}\cdot(-2)\cdot x^{-3}+\frac{8}{3}\cdot(-\frac{1}{4})\cdot x^{-5/4}=$$
$$=x^4-5+3\sqrt[7]{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}.$$

Задание 7б. Найти неопределённые интегралы

$$\int x\sin 3x\,dx,\qquad\int xe^{-4x}\,dx.$$

Результат проверить дифференцированием.

Решение. При решении первого интеграла применяем табличные дифференциалы

$$dx=\frac{1}{3}\,d\,(3x)\,,\quad\sin x\,dx=-d\,(\cos x)\,.$$

Тогда

$$\int x\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int x\sin 3x\,d3x = -\frac{1}{3}\int x\,d\cos 3x =$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x\cos 3x - \int \cos 3x\,dx\right) = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int \cos 3x\,d3x = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\,\sin 3x + C.$$

Проверка дифференцированием.

$$\left(-\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\,\sin 3x + C\right)' = -\frac{1}{3}(x\cos 3x)' + \frac{1}{9}(\sin 3x)' + C' =$$
$$= -\frac{1}{3}\,(x'\cos 3x + x(\cos 3x)') + \frac{1}{9}\cos 3x(3x)' + 0 =$$
$$= -\frac{1}{3}\,(\cos 3x - x\sin 3x(3x)') + \frac{1}{9}\cos 3x\cdot 3 = -\frac{1}{3}\,(\cos 3x - x\sin 3x\cdot 3) + \frac{1}{3}\cos 3x =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}x\sin 3x\cdot 3 + \frac{1}{3}\cos 3x = x\sin 3x.$$

При решении второго интеграла применяем табличные дифференциалы

$$dx = -\frac{1}{4}\,d(-4x), \quad e^x dx = d\left(e^x\right).$$

Тогда

$$\int xe^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\int xe^{-4x}\,d(-4x) = -\frac{1}{4}\int x\,de^{-4x} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(x\cdot e^{-4x} - \int e^{-4x}\,dx\right) = -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} - \frac{1}{16}\int e^{-4x}\,d(-4x) = -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} - \frac{1}{16}\,e^{-4x} + C.$$

Проверяем вычисление дифференцированием.

$$\left(-\frac{1}{4}\,xe^{-4x} - \frac{1}{16}\,e^{-4x} + C\right)' = -\frac{1}{4}\left(xe^{-4x}\right)' - \frac{1}{16}\left(e^{-4x}\right)' + C' =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(x'e^{-4x} + x(e^{-4x})'\right) - \frac{1}{16}e^{-4x}(-4x)' + 0 =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(e^{-4x} + xe^{-4x}(-4x)'\right) - \frac{1}{16}e^{-4x}(-4) = -\frac{1}{4}\left(e^{-4x} + xe^{-4x}(-4)\right) + \frac{1}{4}e^{-4x} =$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4}xe^{-4x}(-4) + \frac{1}{4}e^{-4x} = xe^{-4x}.$$

Задание 7в. Найти неопределённые интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}}, \quad \int \frac{dx}{2x-6}, \quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx, \quad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx, \quad \int \frac{x\,dx}{5x^2-3}.$$

Решение. В первом интеграле сделаем замену $t = 5x+2$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+2)}{\sqrt{5x+2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x+2} + C.$$

Во втором интеграле делаем замену $t = 2x-6$.

$$\int \frac{dx}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-6)}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-6| + C.$$

В третьем интеграле обозначаем $t = \ln x$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,d\ln x = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

В четвёртом интеграле вводим обозначение $t = e^{2x}+1$.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,d2x = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}\,d2x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{e^{2x}+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.$$

В пятом интеграле делаем замену $t = 5x^2-3$.

$$\int \frac{x\,dx}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d(5x^2-3)}{5x^2-3} =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10}\ln|t| + C = \frac{1}{10}\ln|5x^2-3| + C.$$

Задание 7г. Найти неопределённые интегралы

$$\int \cos^3 x\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx.$$

Решение. При вычислении первого интеграла используем основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и сделаем замену $\sin x = t$.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int \cos^2 x\,d\sin x = \int (1-\sin^2 x)\,d\sin x =$$

$$= \int (1-t^2)\,dt = \int 1\,dt - \int t^2\,dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

При вычислении второго интеграла сделаем замену $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{4+\cos^2 x} = \int \frac{-d\cos x}{4+\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x+4} =$$
$$= -\int \frac{dt}{t^2+4} = -\int \frac{dt}{t^2+2^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C.$$

Задача 8. Определённые интегралы

Методы вычисления определённых интегралов аналогичны методам вычисления неопределённых интегралов. Все правила и формулы, применяемые в неопределённых интегралах, справедливы и для определённых интегралов. Лишь несколько правил имеют специфику в случае определённых интегралов. Приведём их.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — первообразная от функции $f(x)$ на этом отрезке. Тогда справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива *формула интегрирования по частям для определённого интеграла*

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

Последнюю формулу можно записать в компактном виде

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Задание 8а. Вычислить определённые интегралы

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx, \quad \int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2 dx.$$

Решение. В первых двух интегралах сразу применяем формулу Ньютона-Лейбница для табличных интегралов. При вычислении интеграла по формуле Ньютона-Лейбница в первообразную сначала подставляется верхний предел, затем нижний предел, и из первого выражения вычитается второе.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

В следующем интеграле применяем табличный дифференциал $xdx = \frac{1}{2}dx^2$.

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2 dx = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos x^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\sin x^2\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задание 8б. Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\, d\operatorname{arctg} x = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= 1\cdot\operatorname{arctg} 1 - 0\cdot\operatorname{arctg} 0 - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}dx^2}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

В процессе нахождения интеграла использовали следующее вычисление

$$d(\operatorname{arctg} x) = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Задача 9. Несобственные интегралы

А. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называется предел (если он существует) $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$, его величина обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx.$$

В случае, если этот предел конечен, то говорят, что интеграл сходится, если предел бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогично определяется интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty;a]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)\,dx.$$

Задание 9а. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2},\quad \int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{1+x^2},\quad \int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x}.$$

Решение.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg}A - \operatorname{arctg}0) = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}A = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, несобственный интеграл сходится и его величина равна $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^1\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_A^1 = \lim_{A\to-\infty}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}A) =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}A\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Получили, что несобственный интеграл сходится и его величина равна $\dfrac{3\pi}{4}$.

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_e^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\Big|_e^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln|A| - \ln|e|) = +\infty.$$

Значит, несобственный интеграл расходится.

Б. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a;b)$, но не ограничена в окрестности точки b. Точка b в этом случае называется особой точкой. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, его величина обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится. Если же предел бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл расходится. Запись $\varepsilon \to 0+$ означает, что $\varepsilon \to 0$ при выполнении условия $\varepsilon > 0$.

Аналогично, пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $(a;b]$, но неограничена в окрестности точки a. Точка a в этом случае называется особой точкой. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $(a,b]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, его величина обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится. Если же предел бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Задание 9б. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{x}.$$

Решение. Для интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ особой точкой является $x = 1$. Значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится и его величина равна $\dfrac{\pi}{2}$.

Для интеграла $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ особой точкой является $x = -1$. Значит,

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon)) = \arcsin 0 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится и его величина равна $\dfrac{\pi}{2}$.

Для интеграла $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x}$ особой точкой является $x = 0$. Значит,

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x|\Big|_{-2}^{-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln|-\varepsilon| - \ln|-2|)) = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln\varepsilon - \ln 2)) = -\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

Задание 10. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и на основании результатов построить график.

10.1. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

10.2. $y = \dfrac{2}{x^2+2x}$

10.3. $y = \dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$

10.6. $y = \dfrac{4}{3+2x-x^2}$

10.7. $y = \dfrac{3x-2}{x^3}$

10.8. $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

10.4. $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$ 10.9. $y = \dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

10.5. $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$ 10.10. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

Задание 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми. Сделать чертёж.

11.1. $y = 2x - x^2, \quad y = -x$

11.2. $y = \dfrac{4}{x}, \quad y = 5 - x$

11.3. $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$

11.4. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$

11.5. $y = (x-2)^2, \quad x = 0, \quad y = 0$

11.6. $y = x^2 - 4x, \quad y = x$

11.7. $y = \dfrac{x^2}{4}, \quad y = 5 - x^2$

11.8. $y = 1 - x^2, \quad y = x - 1$

11.9. $y = (x-2)^2, \quad y = x$

11.10. $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = x, \quad x = 2$

Задание 12. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной кривыми. Сделать чертёж.

12.1. $y = x^2 + 1, \quad y = 1, \quad x = 2$

12.2. $y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 1$

12.3. $y = x^3 + 1, \quad y = 1, \quad x = 1$

12.4. $y = 2x - x^2, \quad y = 2 - x$

12.5. $y = 3\sin x, \quad y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$

12.6. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$

12.7. $y = x^2, \quad y = 1$

12.8. $y = x^2 + 1, \quad y = 9 - x^2$

12.9. $y = \dfrac{4}{x}, \quad y = 1, \quad x = 1$

12.10. $y = \sin 2x, \quad y = 0$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №4

Задача 10. Полное исследование функции и построение её графика

Полное исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на периодичность.

3. Исследовать функцию на чётность и нечётность.

4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функции.

5. Найти точки разрыва функции и установить характер разрыва; исследовать поведение функции на границе области определения; найти асимптоты.

6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

7. Исследовать направления выпуклости графика функции, найти точки перегиба.

8. Используя все полученные результаты, построить график функции.

В процессе исследования функции необязательно строго придерживаться приведённой схемы, иногда удобнее изменить порядок исследования.

Задание 10. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение.

1. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = -1$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0; 0)$. Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

5. Функция имеет разрыв в точке $x = -1$.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отсюда следует, что в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода. Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

Найдём параметры наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = -1.$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

6. Найдём производную: $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $x = 0$, $x = -3$. Первая производная положительна на интервалах $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ и отрицательна на интервале $(-3; -1)$.

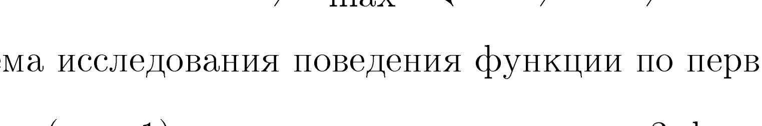

Рис. 1. Схема исследования поведения функции по первой производной.

Из схемы (рис. 1) следует, что в точке $x = -3$ функция имеет максимум, а в точке $x = 0$ экстремума нет. Найдём ординату точки максимума:

$y_{max} = -3\frac{3}{8}$. На интервалах $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция монотонно возрастает, на интервале $(-3; -1)$ — монотонно убывает.

7. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$. Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $x = 0$. Вторая производная положительна на интервале $(0; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$.

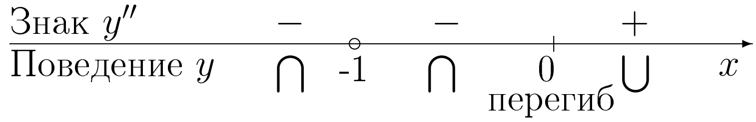

Рис. 2. Схема исследования поведения функции по второй производной.

Из схемы (рис. 2) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба $y_{пер} = 0$. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз.

8. График функции изображён на рис. 3.

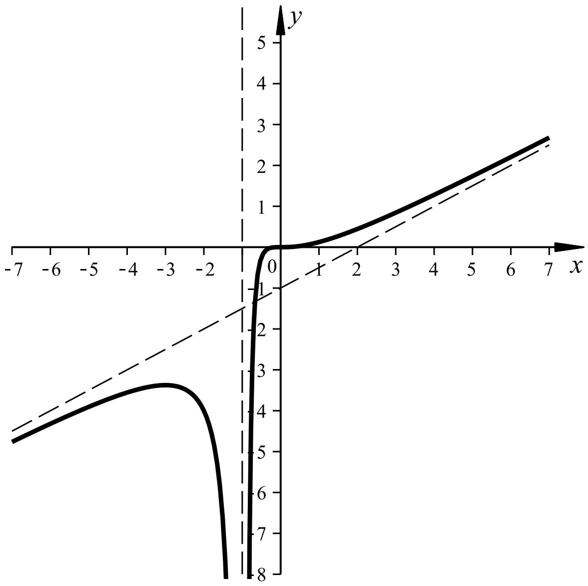

Рис. 3. График функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Задача 11. Площади

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 4), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

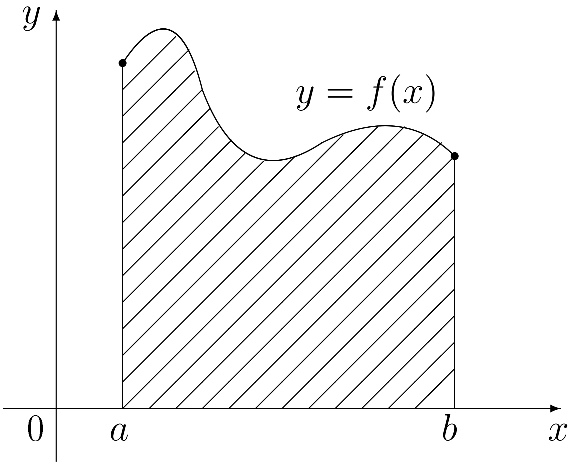

Рис. 4. Криволинейная трапеция.

Пусть фигура ограничена сверху и снизу кривыми, уравнения которых $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a, b]$, $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ (см. рис. 5). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx.$$

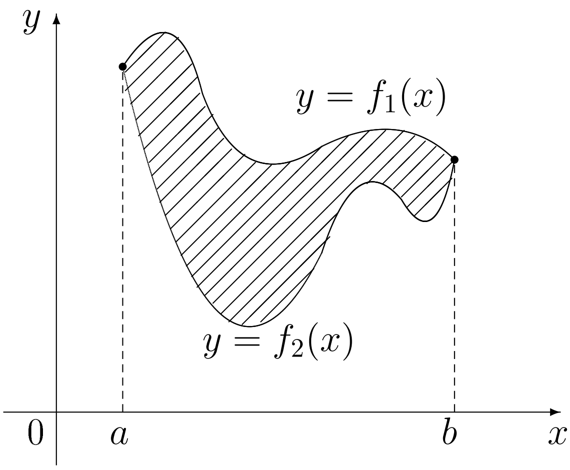

Рис. 5. Плоская фигура.

Задание 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми $y = \sqrt{6x}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

Решение. Заданная фигура изображена на рис. 6.

Найдём точки пересечения графиков функций, решив уравнение

$$\sqrt{6x} = \frac{x^2}{6} \Rightarrow 6^3 x = x^4 \Rightarrow 6^3 x - x^4 = 0 \Rightarrow x(6^3 - x^3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ и } x = 6.$$

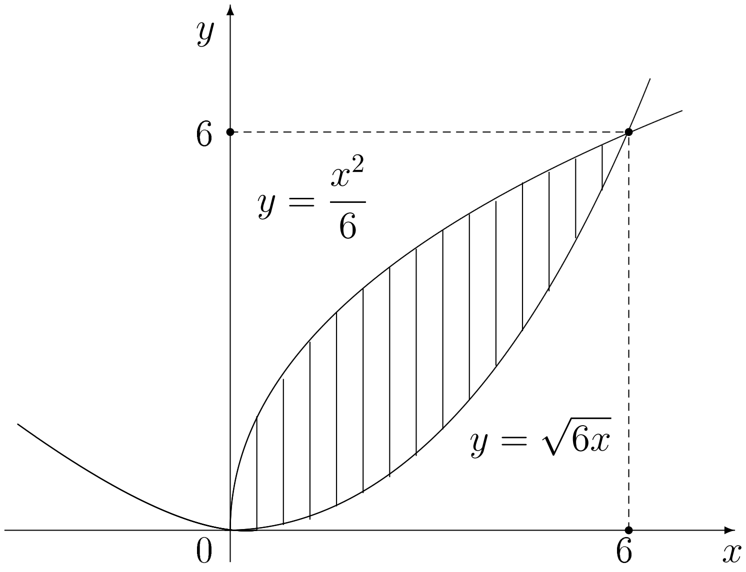

Рис. 6. Фигура, ограниченная кривыми $y = \sqrt{6x}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

Найдем ординаты точек пересечения графиков функций:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ и } x = 6 \Rightarrow y = 6.$$

Вычисляем площадь заданной фигуры

$$S = \int\limits_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{18}\right)\Bigg|_0^6 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot 6^{3/2} - \frac{6^3}{18}\right) - 0 = 12.$$

Ответ: 12.

Задача 12. Объёмы

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 7), вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Пусть фигура ограниченна сверху и снизу кривыми, уравнения которых

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x \in [a, b], \quad f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant 0$$

(см. рис. 8). Тогда объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ox вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int\limits_a^b \Big((f_1(x))^2 - (f_2(x))^2\Big)\, dx.$$

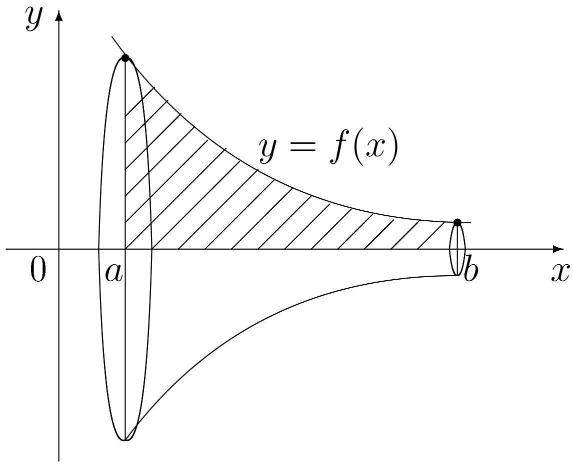

Рис. 7. Вращение криволинейной трапеции вокруг оси Ox.

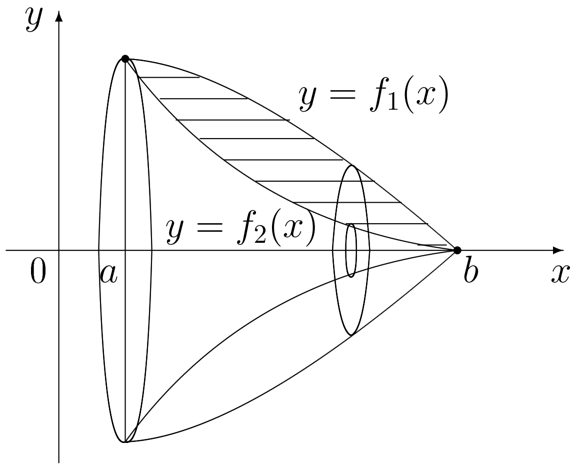

Рис. 8. Вращение плоской фигуры вокруг оси Ox.

Задание 12. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x} + 1$, $y = 3$, $x = 1$.

Решение. Найдём точки пересечения данных линий. Приравняв функции $y = \sqrt{x}+1$ и $y = 3$ получим $x = 4$. Начертим данную фигуру на плоскости Oxy (см. рис. 9).

В нашем случае $f_1(x) = 3$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 1$, $a = 1$, $b = 4$. Находим искомый объём „вычитая из верхней функции нижнюю“.

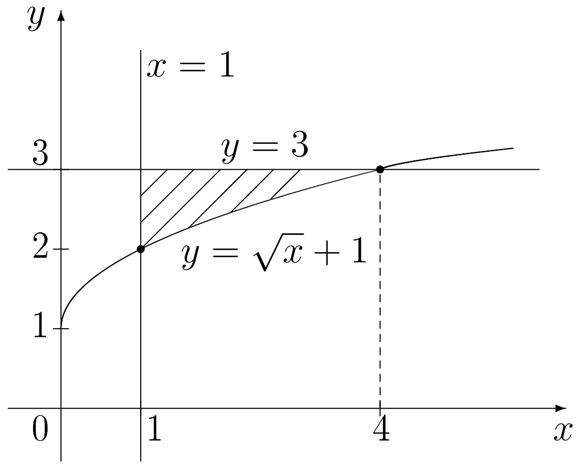

Рис. 9. Вращение фигуры вокруг оси Ox.

$$V = \pi \int\limits_1^4 \left(3^2 - (\sqrt{x}+1)^2\right) dx = \int\limits_1^4 \left(8 - x - 2x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= \left(8x - \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}(\sqrt{x})^3\right)\Bigg|_1^4 = 8\cdot 4 - \frac{4^2}{2} - \frac{4}{3}(\sqrt{4})^3 - \left(8\cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{4}{3}(\sqrt{1})^3\right) =$$

$$= 32 - 8 - \frac{32}{3} - \left(8 - \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) = 16 + \frac{1}{2} - \frac{28}{3} = \frac{43}{6}.$$

Ответ: $\frac{43}{6}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2012.
2. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2012.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс – М.: Айрис-пресс, 2009.

Содержание

Введение . . . 3
Контрольная работа №1 . . . 5
Образец решения контрольной работы №1 . . . 7
Контрольная работа №2 . . . 15
Образец решения контрольной работы №2 . . . 17
Контрольная работа №3 . . . 21
Образец решения контрольной работы №3 . . . 24
Контрольная работа №4 . . . 34
Образец решения контрольной работы №4 . . . 35
Рекомендуемая литература . . . 41