

М.С. КУБЛАНОВ

---

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Часть I. Моделирование систем и процессов

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Рекомендовано УМО  
вузов РФ по образованию в области  
эксплуатации авиационной и космической техники  
в качестве учебного пособия*

МОСКВА 2004

ББК 517.8

К88

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты: профессор, д-р техн. наук В.Г Ципенко;  
профессор, канд. техн. наук С.Г. Косачевский.

Кубланов М.С.

К88 Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов: Учебное пособие. Часть I. Третье издание. – М.: МГТУ ГА, 2004. – 108 с.: список лит. 33 наим., ил. 42, табл. 5.  
ISBN 5-86311-

Данное учебное пособие издается в соответствии с учебными планами для студентов специальностей 130300, 330500 и направления 552000 всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры АКПЛА 10.02.04 г. и методических советов по специальности 130300 16.02.04 г., по специальности 330500 20.02.04 г., по направлению 552000 17.02.04 г.

Св. тем. план 2004 г.

К  $\frac{1602110000 - 028}{Ц33(03) - 04}$

поз. 28

© Московский государственный технический университет ГА, 2004  
© Кубланов М.С.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## Часть I

<b>Предисловие</b> .....	4
<b>Введение</b> .....	6
Раздел 1	
<b>МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ</b>	
<b>Глава 1. Модели и моделирование</b> .....	9
1.1. Понятие моделирования.....	9
1.2. Классификация моделей.....	12
<b>Глава 2. Методология математического моделирования</b> .....	14
2.1. Математические модели и их виды.....	14
2.2. Адекватность математических моделей.....	20
2.3. Понятие об обратных задачах.....	29
2.4. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования.....	30
2.5. Основные принципы математического моделирования механических систем и процессов.....	32
<b>Глава 3. Методы разработки математических моделей</b> .....	34
3.1. Проблемы построения математических моделей.....	34
3.2. Подобие и анализ размерностей.....	36
3.3. Понятие о теории графов.....	42
3.4. Теория массового обслуживания.....	44
3.5. Метод Монте-Карло.....	50
<b>Глава 4. Вычислительные методы и приемы</b> .....	54
4.1. Вычислительные методы алгебры.....	54
4.2. Вычислительные методы решения дифференциальных уравнений.....	63
4.3. Приемы упрощения математических моделей.....	72
4.4. Математические свойства методов вычислений.....	77
4.5. Математические методы оптимизации.....	81
4.6. Приемы контроля математических моделей.....	97
<b>Список литературы</b> .....	99
<b>Предметный указатель</b> .....	101

## Предисловие

До середины XX века при решении прикладных задач приходилось (и это было допустимо) ограничиваться известными классическими примерами, допускающими простейшее, аналитическое представление с однозначным решением. Сегодняшний уровень развития техники требует более точного, более глубокого анализа как реальности, так и создаваемых человеком систем. Широкая компьютеризация предоставляет такую возможность, однако, процедура получения качественных, достоверных результатов оказывается не столь испытанной, не столь очевидной и простой, как в случае однозначного аналитического решения.

Это потребовало объединения усилий прикладников и математиков в новом научном направлении – математическом моделировании, соединившем в себе, с одной стороны, грамотность описания изучаемого явления и постановки задачи исследований, а с другой стороны, строгость математических методов, обеспечивающих достоверность результатов. Возникла необходимость резко расширить круг инженерных и научных работников, обладающих серьезной математической подготовкой и достаточно высоким уровнем математической культуры.

Сегодня учебная дисциплина основ математического моделирования в той или иной форме введена во всех технических вузах. Настоящее третье издание учебного пособия основано на курсах лекций автора, читаемых в течение нескольких лет в различных вариантах для студентов механического факультета Московского государственного технического университета гражданской авиации.

Данное учебное пособие дает завершенное и достаточно строгое представление об областях применения, особенностях и возможностях методов прикладной математики, применяемых в математическом моделировании. Основой для отбора материала и компоновки пособия послужил многолетний личный опыт научной работы автора в гражданской авиации. Учитывая инженерно-практический характер специальностей МГТУ ГА, при составлении пособия не преследовалась цель строгого изложения и доказательства собственно математических методов. Основное внимание в нем сосредоточено на условиях применимости тех или иных методов и на практических примерах.

Учебное пособие широко опирается на теоретический и прикладной материал изданий, указанных в списке литературы.

Пособие может быть полезно студентам всех форм и ступеней обучения, а также аспирантам, инженерам и научным работникам при первом знакомстве с дисциплиной. Для более глубокого изучения методов математического моделирования рекомендован список литературы и дан предметный указатель терминов. В тексте термины выделены курсивом, а там, где дается их определение – подчеркиванием.

Учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть посвящена собственно теории математического моделирования и полностью изучается студентами механического факультета МГТУ ГА в рамках дисциплин "Моделирование систем и процессов" и "Прикладные методы вычислений". В ней излагаются основные понятия теории, классификация моделей, дается обзор методов разработки математических моделей и вычислительных методов.

Вторая часть посвящена методам прикладной математики, применяемым при математическом моделировании, и изучается студентами в рамках дисциплин "Методы и алгоритмы обработки статистических данных" и "Основы теории оптимизации".

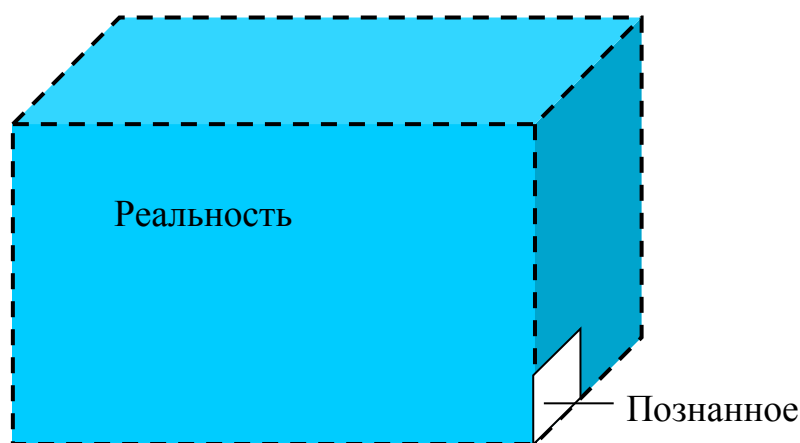
Студенты магистерской подготовки в рамках дисциплины "Методы обработки и анализа информации" изучают отдельные разделы второй части пособия, не входящие в программу дисциплин бакалаврской подготовки.

Предметный указатель терминов распространяется только на данную первую часть учебного пособия.

## Введение

Соотношение науки и практики всегда было главной философской проблемой всех исследователей. Вопрос о том, насколько верно те или иные рассуждения, расчеты, действия человека отражают суть реальности, является коренным вопросом любой научной теории.

Познанное человечеством по отношению к реальности можно условно иллюстрировать рис. 1. Реальность всегда **бесконечнообразна и бесконечномерна**, поэтому границы ее на рисунке обозначены пунктиром. То, что мы знаем, представляет собой лишь тонкий срез, отпечаток реальности, имеющий конечные размеры и свойства. Всё о реальности может знать лишь Создатель, нам в силу ограниченности органов чувств и познаний дано лишь составлять себе то или иное **представление** о реальности. Для науки существенное значение имеет уверенная оценка близости такого ограниченного представления к реальности. Оценить эту близость практикой, полагая ее истиной, невозможно, так как мы можем исследовать опять же лишь тот ограниченный круг свойств, который нам доступен. Поэтому между нашим представлением и реальностью оказывается дистанция неконтролируемого



размера.

Рис. 1

Но это еще не все трудности научного познания. Если один человек что-то новое познал о реальности, он стремится объяснить это другим людям. И здесь возникает необходимость использовать терминологию, **единообразно** понимаемую собеседниками, которая неизбежно содержит какие-то упрощения – **абстракции**. Абстракции позволяют отсечь, отбросить из рассмотрения малозначительные факторы, ввести однозначные термины и представить себе объект в более простой форме, доступной формальной человеческой логике.

Однако неизбежно при этом познанное одним человеком передается другому в усеченном виде – в виде некоторых **моделей**. Такое соотношение познанного и моделей можно иллюстрировать рис. 2. На нем подчеркнута возможность существования для одного познанного явления нескольких моделей, отражающих **те или иные** его свойства в различных условиях.

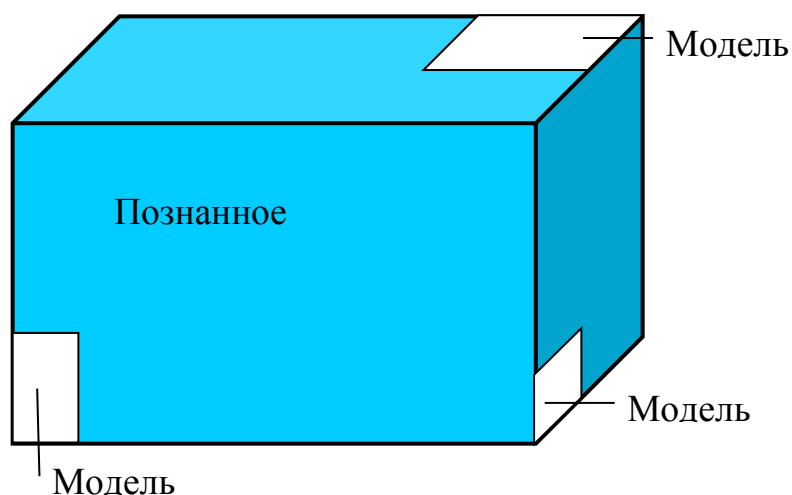


Рис. 2

Поясним, почему так происходит. До XX века научные исследования велись, в основном, с целью установления хорошо интерпретируемых функциональных связей между небольшим количеством факторов, т.е. **законов**, которым подчиняется исследуемый объект. Закон имеет характер объективной категории, безусловно верной или безусловно неверной на данном этапе развития науки. Успех в выявлении законов природы сопутствовал тем ученым, которые, опираясь на свой интеллект, могли вычленить небольшое количество существенных для изучаемого явления факторов из множества возможных. Явления и объекты, достаточно точно и однозначно описываемые **небольшим** количеством факторов, получили название "хорошо организованных систем".

Экспериментальные исследования "хорошо организованных систем" заключались в наблюдении за результатом изменения одного фактора при постоянстве прочих. Такой подход вполне соответствует человеческой логике, поддается осмыслению и объяснению, передаче накопленных знаний. Законы природы, выявленные таким образом, непосредственно составляют *модель* явления. Примерами могут служить законы классической механики, генетики, химии и т.п.

В XX веке стало ясно, что без изучения сложных систем, в том числе и созданных человеком, дальнейший прогресс невозможен. Возникла необходимость исследования "плохо организованных систем", в которых нельзя разделить отдельные явления. Простейшим примером такого типа систем является распространение разнообразных видов возмущений от ядерного взрыва: здесь есть и ударная волна, которая подчиняется одному закону, и световое излучение, подчиняющееся другому закону, и распространение радиации. Более сложным примером может служить авиация: для безопасного полета в пункт назначения необходимо не только знать виды воздействия внешней среды на самолет (вес, тягу двигателей, аэродинамические силы и силы взаимодействия с взлетно-посадочной полосой

– а они описываются отнюдь не простыми зависимостями), но и уметь достаточно точно просчитать их, а также управлять ими в полете.

Однако давно замечено, что результаты, полученные с помощью лишь умозрительно построенных моделей, не всегда хорошо соответствуют действительности – на результат действия выявленных законов накладывается влияние и других неучтенных факторов, и погрешностей эксперимента. Попытка учета этих факторов приводит к усложнению модели. Если таких факторов много, модель становится сложной и трудно воспринимаемой, так, например, произошло с теорией относительности и с квантовой механикой. На заре авиации ошибки в описании этой сложной системы часто приводили к катастрофам.

Процессы в сложных системах нельзя описать законами, умозрительно построенными или полученными с помощью простых экспериментов. Для описания "*плохо организованных систем*" такой подход не всегда приемлем – необходимо учитывать не только множество разнообразных по своей природе связей – **закономерностей**, но и возможность различных методологических подходов и глубины отражения реальности. Т.е. вместо моделей, построенных на законах природы, для описания сложных систем приходится применять для **тех или иных целей** модели более широкого смысла, учитывающие закономерности, свойственные объекту. Поэтому для одного и того же явления допустимо равноправное существование **нескольких различных моделей**, что немыслимо для моделей, основанных лишь на законах природы. Примерами закономерностей могут служить поляра самолета, инфляционные ожидания, оценка надежности и т.п.

Как мы выяснили, умозрительные исследования могут привести к выявлению некоторых законов. Проверка их практикой тоже возможна лишь на ограниченном круге свойств. Постановка же исследовательского эксперимента нуждается не только в четкой формулировке цели исследований, но и в знании основных свойств оригинала. Т.е. **перед** постановкой и проведением эксперимента нужно не только формально провести его *планирование*, но и изучить объект, построить его описание и выбрать *модель*, хотя бы пробную. Если этого не делать, то можно совершить ошибку в отборе и *обработке информации*, ее оценке и прийти к выводам, прямо противоположным действительности. В экспериментальных науках очень часто, к сожалению, встречаются такого рода ошибки, основанные на нечетко и необоснованно поставленном эксперименте. Без модели – без сколько-нибудь четкого представления об объекте – проведение эксперимента бессмысленно.

В итоге можно сказать, что если целью научных исследований является познание законов природы, то целью инженерных исследований следует считать познание **закономерностей**, свойственных продуктам человеческой деятельности. То и другое в равной степени определяет технический уровень и прогресс общества – ибо гармония между природой и продуктами человеческой



деятельности увеличивает эффективность последней, а противоречия могут приводить к катастрофам.

Раздел 1  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Глава 1. Модели и моделирование

1.1. Понятие моделирования

Любая наука пользуется той или иной абстракцией реальной действительности для того, чтобы выявить общие закономерности различных конкретных явлений. Например, в физике исследуется такая абстракция, как "математический маятник", известный из курса средней школы. Однако конкретными, реальными явлениями, описываемыми одной и той же указанной абстракцией, могут быть:

- колебания чугуна шара, подвешенного на тросе крана в Москве для разрушения сносимых строений,
- колебания маятника старинных башенных часов в Праге,
- колебания маятника Фуко и т.п.

Иными словами, между различными объектами может быть какое-то **сходство**, которое как раз и позволяет строить абстракции науки.

Если с точки зрения целей исследования между двумя объектами есть сходство, то вместо одного можно исследовать другой. Первый называется оригиналом, а второй – моделью. Модель – это заместитель *оригинала*, позволяющий **изучить** некоторые его **свойства** в определенных **условиях**. При этом следует подчеркнуть, что сходство может быть не по всем характеристикам: форме, цвету, структуре и т.п. Достаточно, чтобы сходство было лишь в тех свойствах, которые являются объектом **данного исследования**. Так, например, для изучения распространения волн возмущения от сверхзвукового самолета можно воспользоваться сходством этого явления с распространением волн при движении лодки по поверхности пруда.

Следует особо отметить, что данное определение модели является не только строгим, но и исчерпывающим и продуктивным. Так, например, не существует моделей "вообще" – не предназначенных для каких-либо исследований. Даже детские игрушки предназначены для **изучения** окружающего мира. Нет таких моделей, которые воспроизводили бы все **свойства** оригинала. Во-первых, таких свойств бесконечно много и мы бесконечно многие из них даже не представляем себе. А во-вторых, воспроизвести все свойства оригинала в состоянии только сам оригинал – как известно, даже два самолета одного типа Ту-154М различаются весьма существенно. Выбор необходимых для исследования **свойств и условий** дает возможность на основании предварительного изучения оригинала планомерно строить модель, удовлетворяющую поставленным **целям** (определенным требованиям точности, широты применения, ответа на поставленные вопросы и т.п.).

- ПРИМЕРЫ.** 1. Арифметика – модель счетно-обменных операций.  
2. Радиосхема – модель электронной аппаратуры.  
3. Электронная система автоматического управления – модель действий управляющего оператора (в частности, пилота).  
4. Глобус – модель земного шара.

**Моделирование** – это **процесс** выбора или построения *модели* для исследования определенных **свойств оригинала** в определенных **условиях**. *Моделирование* – творческий процесс познания, который в первом приближении можно представить рис. 3, отражающим самые крупные необходимые стадии (более подробно алгоритм исследовательской деятельности с помощью моделирования будет сформулирован в § 2.4).

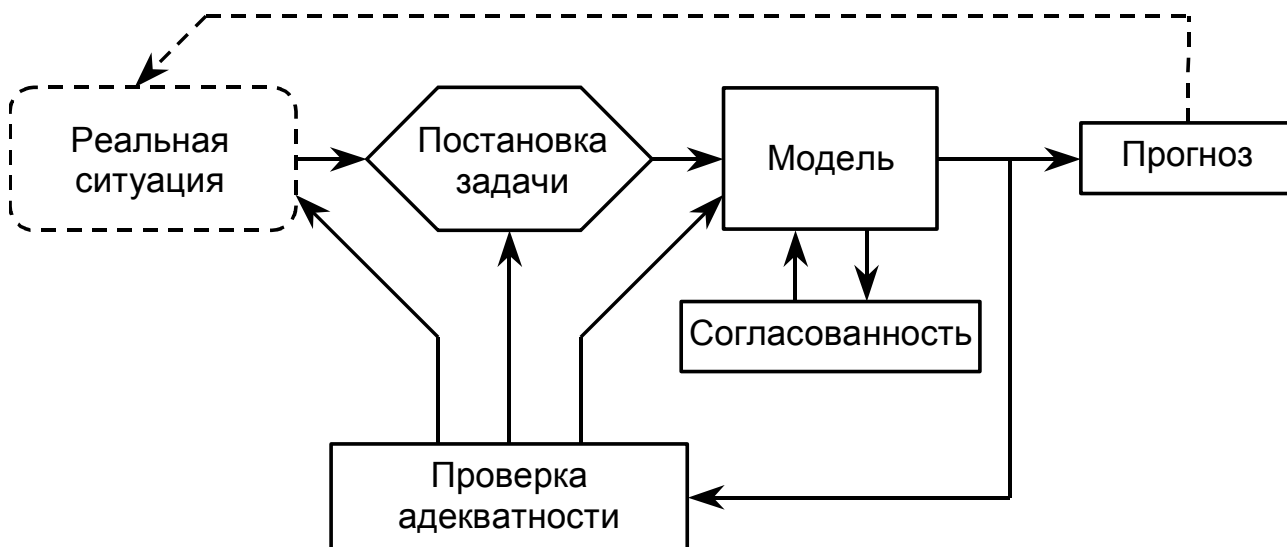


Рис. 3

Охарактеризуем основные стадии этого процесса.

Постановка задачи исходит из знаний, полученных в результате наблюдения, изучения объекта, а также из той практической проблемы, которую требуется решить. При этом из всего множества влияющих на объект факторов надо суметь отобрать **существенные** и определить **диапазоны** их изменения и **особенности** влияния на конечный результат. Это – уже искусство, здесь не существует общих приемов и рекомендаций. Кроме того, к этой стадии относится оценка требуемой **точности** результатов, диктуемая целью исследования.

Под выбором модели понимается не просто подбор из известного заранее множества, а именно **синтез**, составление общей модели из элементарных "кирпичиков" тех наук, с помощью которых будет исследоваться явление. Здесь действительно серьезным подспорьем является знание определений, логических цепочек и методов соответствующих разделов науки. Однако определяющим для правильности решения конкретной задачи оказывается строгость в использовании этих определений, логических цепочек и методов именно в той области и в тех условиях, **где они пригодны!** Нарушение такой

строгости грозит внутренней несогласованностью отдельных частей модели и, как следствие, ошибочными результатами и выводами.

Проверка адекватности модели – это проверка **соответствия** результатов, получаемых с помощью модели, реальному поведению исследуемого объекта. На этой стадии проводится исследование и уточнение самой модели в соответствии с поставленной задачей, а также может корректироваться и постановка задачи, и общий подход к восприятию реальной ситуации.

Сутью решения практических прикладных задач является прогноз поведения объекта в различных ситуациях. К построению алгоритма прогнозирования реальной ситуации в других случаях, отличающихся от исследованных во время процесса разработки модели, можно приступить только после завершения всех стадий, описанных выше.

Каждая стадия этого процесса существенна. Пренебрежение любой из них может приводить к **неверным выводам** по существу решаемой практической задачи в результате таких ошибок, как:

- вычисление с недопустимой, неконтролируемой **погрешностью**;
- **несоответствие** полученных результатов поставленной задаче (полученные результаты могут оказаться решением совсем **другой** задачи);
- **неоднозначность** решения при невозможности селекции;
- **неполучение** решения (алгоритм расходится или не может завершиться).

Следует подчеркнуть особую значимость при моделировании четкого представления об исследуемых **определенных свойствах** объекта **в определенных условиях**, а не всех свойствах и всех условиях! Все свойства во всех условиях может реализовать только сам оригинал. Чем уже круг моделируемых свойств, условий и уже диапазон значений параметров, тем проще модель и легче добиться ее согласованности и адекватности, тем достовернее результаты и выводы исследования. Поэтому научные методы исследования (в отличие от дилетантского подхода) основываются на замене оригинала моделью в четко оговоренной области свойств и условий, определяемой задачей исследования.

Моделирование – это не только удобный, но в некоторых условиях и **необходимый** научный прием. Среди таких особых условий можно выделить основные причины, вынуждающие *применять моделирование*, без которого изучение оригинала невозможно:

- сложность или дороговизна натурального исследования (например, в экономике, в экологии),
- невозможность натурального исследования по причинам аварийности или бесконечного времени ожидания результатов (например, аварийные ситуации при полетах, астрофизические явления).

Из всего вышесказанного следует, что любая наука представляет собой непрерывный процесс моделирования – творческий процесс познания реальности до такого уровня, который позволяет прогнозировать определенные

свойства оригинала в определенных условиях. Учебные дисциплины в этом контексте можно рассматривать в качестве сборников готовых моделей изучаемых явлений и рецептов их применения.

## 1.2. Классификация моделей

Модели можно рассматривать по отношению к оригиналу в двух аспектах, соответствующих **внутренним** их устройствам и **связям** с оригиналом:

- характерные **особенности выражения** свойств оригинала и особенности функционирования модели,
- **основания для преобразования** свойств модели в свойства оригинала.

По характерным особенностям выражения свойств оригинала и особенностям функционирования модели подразделяются на:

- логические – построенные на принципах человеческой логики; из которых можно выделить:

образные – дающие наглядное представление (например, образное представление самолета любым человеком),

символьные – использующие символы (геометрические, химические),

образно-символьные – схемы (например, карты, радиосхемы);

- материальные – построенные по объективным законам; из которых можно выделить:

функциональные (например, протез коленного сустава),

геометрические (например, самолет-игрушка),

функционально-геометрические (например, модель самолета для исследований в аэродинамической трубе).

Замечание: неспециальный термин "физические модели" можно отнести к некоторым моделям из класса материальных.

Эту классификацию можно изобразить следующим рис. 4.

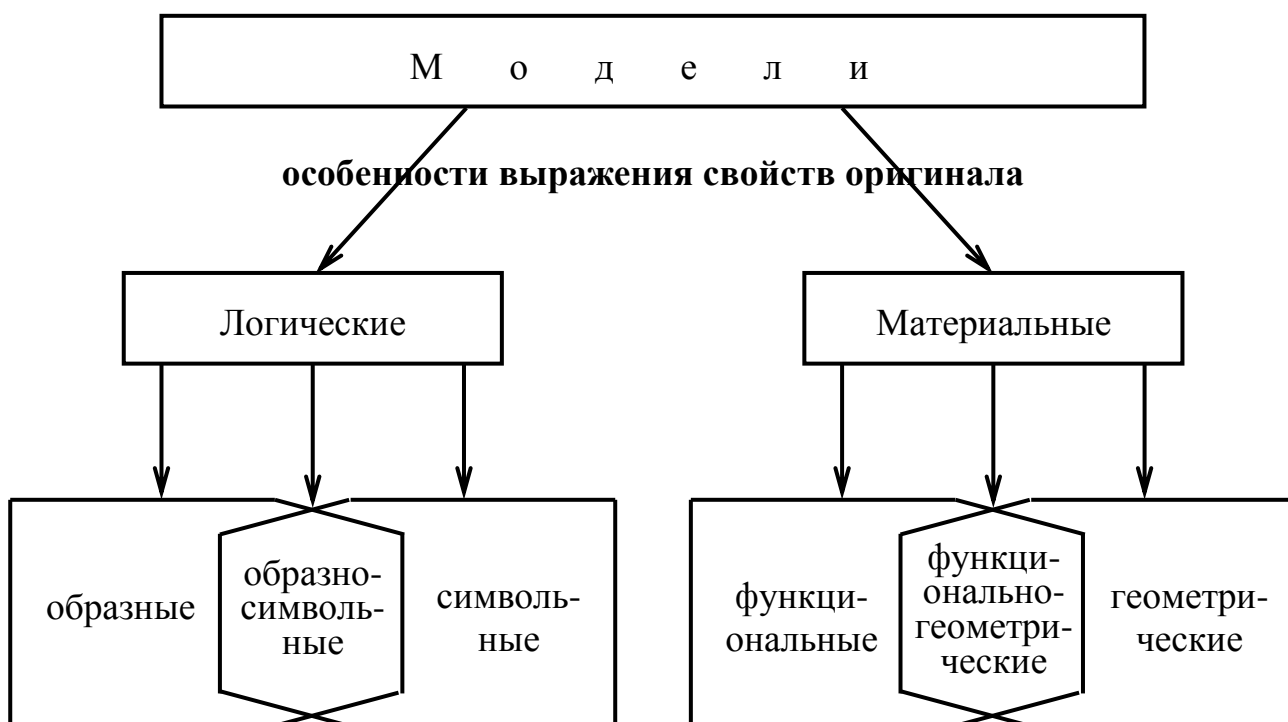


Рис. 4

По основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала модели подразделяются на (рис. 5):

- условные – на основе соглашения (например, система физических единиц измерения, система технической документации);
- аналогичные – на основе логического вывода о сходстве (например, производная от функции по времени – это аналог скорости изменения функции);
- математические – на основе математического описания.



Рис. 5

**ПРИМЕР.** Маятник башенных часов в Праге.

То, что в средней школе называют "физической" моделью, носит специальное название "математический маятник" и предполагает определенные **условности**:

- масса маятника сосредоточена **в точке** на конце нити,
- нить **длинная**,
- нить **нерастяжимая**,
- нить **невесомая**,
- трение и аэродинамическое **сопротивление отсутствуют**,
- на массу действует единственная внешняя сила – **сила тяжести**.

1) Эту абстракцию можно классифицировать как *образную, условную* модель реального маятника.

2) Из рассмотрения **малых углов** отклонения маятника от положения равновесия, используя физические и математические рассуждения, можно вывести формулу колебаний и прийти к выводу об их гармоничности:  $x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ . Такая модель классифицируется как *символьная, математическая*.

3) Если собрать реальный маятник и использовать его в качестве модели, то это будет *геометрическая* (или *функционально-геометрическая*), *аналогичная* модель.

4) Если построить электрический колебательный контур, воспроизводящий реальные колебания, то он будет моделью *функциональной, математической*.

5) Если построить программу для цифровой ЭВМ, рассчитывающую колебания реального маятника, то такая модель тоже *функциональная, математическая*, с возможным уточнением – *дискретная* (или *цифровая*), в отличие от *непрерывной* (или *аналоговой*) в предыдущем случае.

Из приведенного примера очевидно, что классификация моделей не может рассматриваться, как жесткая. Ее гибкость допускает некоторые вариации и обнаруживает недостаточность приведенных классов. Поэтому некоторые исследователи предлагали варианты углубления классификации. Однако они носят неуниверсальный, специфический характер и здесь не рассматриваются.

## Глава 2. Методология математического моделирования

### 2.1. Математические модели и их виды

Существенно важным в теории математического моделирования является постоянное согласование всех аспектов построения модели с задачами и целями исследования. Поэтому сосредоточим внимание на некоторых существенных для исследований особенностях **механических** систем и процессов. Во-первых, факторы, определяющие такие объекты, характеризуются, как измеримые величины – параметры. Во-вторых, в основе таких моделей лежат уравнения, описывающие фундаментальные законы природы (механики), не нуждающиеся в пересмотре и уточнении. Даже готовые частные модели отдельных явлений, используемые при составлении более общих, хорошо сформулированы и описаны с точки зрения условий и областей применения. В-третьих, наибольшую трудность при разработке моделей механических систем и процессов представляет описание недостоверно известных характеристик объекта, как функциональных, так и числовых. В-четвертых, современные требования к таким моделям приводят к необходимости учета множества факторов, влияющих на поведение объекта, не только таких, которые связаны известными законами природы. Все эти особенности приводят к тому, что модели механических систем и процессов относятся в основном к классу математических.

*Математические модели* основываются на *математическом описании* объекта. В математическое описание, прежде всего, входят, и это естественно, взаимосвязи параметров объекта, что характеризует его особенности функционирования. Такие связи могут представляться в виде:

- вектор-функций  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,
- неявных функций  $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = 0$ ,
- обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(m)}, t) = 0,$$

- дифференциальных уравнений с частными производными

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \dots\right) = 0$$

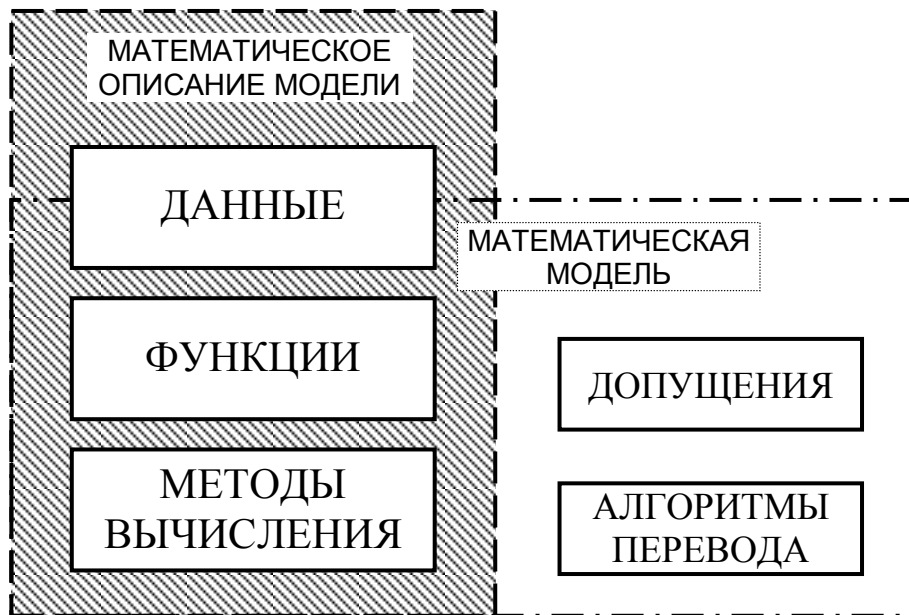
- *вычислительного алгоритма,*
- *вероятностного (стохастического) описания.*

Первые четыре из указанных видов носят обобщающее название: *аналитических зависимостей*.

Математическое описание включает в себя не только взаимосвязь элементов и параметров объекта (**законы и закономерности**), но и полный набор числовых и функциональных **данных** объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения), а также **методы вычисления** выходных параметров модели. Т.е. под математическим описанием понимается **полная совокупность** данных, функций и методов вычисления, позволяющая **получать результат**.



Со своей стороны в *математическую модель* может не входить часть *математического описания* (чаще всего некоторые исходные данные), но помимо него должны присутствовать описания всех **допущений**, использованных для ее построения, а также **алгоритмы перевода** исходных и



выходных данных с модели на оригинал и обратно (рис. 6).

Рис. 6

В качестве дополнения к классификации *математические модели* в зависимости от природы объекта, решаемых задач и применяемых **методов**, могут различаться следующими видами:

- *линейные* или *нелинейные* (описываемые функциями, которые содержат основные параметры только в степени 0 и 1, или любыми видами функций),
- *стационарные* или *нестационарные* (независящие или зависящие от времени),
- *непрерывные* или *дискретные*,
- *детерминированные* или *стохастические* (точные, однозначные или вероятностные),
- *четкие* или *нечеткие* (примеры нечетких множеств: около 10; глубоко или мелко; хорошо или плохо).

Понятие математических моделей объединяет чрезвычайно широкий круг моделей разнообразного вида. Используемая в аэродинамике аппроксимация

полюры летательного аппарата  $c_{xa} = c_{xa0} + \frac{c_{ya}^2}{\pi\lambda}$  может рассматриваться как математическая модель. Это – простейший пример. Но математическими моделями называются и сложные вычислительные комплексы с многочисленным программным обеспечением для моделирования процессов развития экономики.

Исторически сложилось так, что под *математической моделью* иногда подразумевается только один особый вид моделей, содержащих сугубо однозначное прямое математическое описание в виде аналитических зависимостей или вычислительных алгоритмов – т.е. детерминированная математическая модель, с помощью которой при одних и тех же исходных данных можно получить только один и тот же результат. Наибольшее распространение получили детерминированные модели, устанавливающие связь с параметрами оригинала при помощи коэффициентов пропорциональности, всех одновременно равных **единице**. Используемое такой моделью математическое описание естественно рассматривать как описание непосредственно оригинала – и это верно: у модели и оригинала в этом случае существует одно общее математическое описание (понятие подобных объектов см. § 3.2). В силу такой кажущейся простоты неискушенный инженер воспринимает и модель уже не как модель, а как оригинал (!). На самом деле такая математическая модель является все же моделью со всеми условностями, абстракциями, предположениями, упрощениями, положенными в ее основу. Возникает желание "упростить" процесс добротного моделирования, что в принципе невозможно, так как модель или соответствует оригиналу, или ее нет вообще. Пренебрежительное отношение к этому провоцирует множество ошибочных выводов в прикладных исследованиях, и полученные результаты не согласуются с реальностью.

**Процесс** разработки детерминированной математической модели может быть проиллюстрирован нижеследующим подробным примером для определения параметров разбега самолета Ан-2.

**ПРИМЕР.** Требуется разработать математическую модель для определения скорости отрыва, времени и дистанции разбега самолета Ан-2 по горизонтальной взлетно-посадочной полосе (ВПП) в стандартных атмосферных условиях без возмущений.

Для разработки требуемой математической модели используем известные сведения из аэродинамики и динамики полета самолетов с вспомогательной хвостовой стойкой шасси и с винтовым двигателем.

Разбег такого самолета вплоть до момента отрыва от ВПП производится при постоянном (стояночном) угле атаки  $\alpha$ , который однозначно определяет значения основных аэродинамических коэффициентов:  $c_{xa}$  – коэффициента лобового сопротивления и  $c_{ya}$  – коэффициента аэродинамической подъемной силы. С их помощью можно определить соответствующие составляющие аэродинамической силы, действующей на самолет. Для этого достаточно умножить их на  $S$  – площадь крыла самолета и на  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  – скоростной

напор, где  $\rho$  – плотность атмосферы,  $V$  – воздушная скорость движения. Таким образом определяются:

$$X_a = c_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S$$

– сила лобового сопротивления (по направлению вектора набегающего потока, т.е. в направлении, противоположном движению в спокойной атмосфере) и

$$Y_a = c_{ya} \frac{\rho V^2}{2} S$$

– аэродинамическая подъемная сила (перпендикулярная  $X_a$  и направленная вверх).

Из теории авиационных двигателей известно, что при разбеге самолета следует учитывать зависимость силы тяги  $P$  двигателя от скорости движения. В первом приближении для винтовых двигателей можно принять эту зависимость в виде:

$$P = P_0 (-aV - bV^2),$$

где  $P_0$  – взлетная тяга двигателя при нулевой скорости и при заданном положении РУД (рукоятки управления двигателем),  $a$  и  $b$  – коэффициенты, получаемые эмпирически. Здесь и далее будем полагать, что направление вектора тяги  $P$  совпадает с направлением движения самолета.

Используем сведения из динамики полета и составим уравнения движения самолета в вертикальной плоскости. Поскольку в вертикальном направлении во время разбега вплоть до скорости отрыва не происходит заметного движения, то соответствующее уравнение движения вырождается в уравнение баланса сил: вниз действует сила тяжести  $mg$ , вверх – аэродинамическая подъемная сила  $Y_a$  и сила  $N$  реакции ВПП. Таким образом, уравнение принимает вид:  $mg = Y + N$ . Из этого уравнения можно определить скорость самолета в

момент отрыва от ВПП  $V_{отр}$ , т.е. в момент обращения  $N$  в нуль:  $mg = c_{ya} \frac{\rho V_{отр}^2}{2} S$ ,

$$\text{откуда: } V_{отр} = \sqrt{\frac{2mg}{c_{ya} \rho S}}.$$

Составим уравнение движения самолета в продольном направлении. В этом направлении сила тяги двигателя  $P$  разгоняет самолет, а сила лобового сопротивления  $X_a$  и сила сопротивления трения качения по ВПП  $F = fN = f(mg - Y_a)$  – стремятся его затормозить. Тогда по второму закону Ньютона:

$$m \frac{dV}{dt} = P - X_a - F.$$

Для отыскания дистанции разбега  $L_{разб}$  понадобится еще одно известное кинематическое соотношение:

$$V = \frac{dL}{dt}.$$

Таким образом, выписаны все функциональные **соотношения**, представляющие взаимосвязь элементов и параметров объекта (законы движения), входящие в математическое описание модели. Однако это еще не всё математическое описание и не вся модель. Необходимо разработать методы вычисления, которые позволят аналитически или с помощью ЭВМ вычислить требуемые параметры разбега. Для этого исследуем подробнее структуру полученных дифференциальных уравнений с точки зрения определения времени  $T_{разб}$  и дистанции разбега  $L_{разб}$ . Из уравнения движения в продольном направлении следует:

$$m \frac{dV}{dt} = P - X_a - F = P_0 (-aV - bV^2) - c_{xa} \frac{\rho V^2}{2} S - fmg + fc_{ya} \frac{\rho V^2}{2} S,$$

$$\text{или } \frac{dV}{dt} = \frac{P_0}{m} \left( -aV - bV^2 \right) - fg - \frac{\rho V^2}{2m} S \left( \alpha_{xa} - f c_{ya} \right) = A + BV + CV^2,$$

$$\text{где } A = \frac{P_0}{m} - fg; \quad B = -\frac{P_0}{m} a; \quad C = -\frac{P_0}{m} b - \frac{\rho S}{2m} \left( \alpha_{xa} - f c_{ya} \right),$$

т.е. дифференциальное уравнение разрешимо в квадратурах аналитически, как уравнение с разделяющимися переменными:

$$dt = \frac{dV}{A + BV + CV^2},$$

$$\text{или } T_{\text{разб}} = \int_0^{V_{\text{отр}}} \frac{dV}{A + BV + CV^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{B} (\ln |A + BV|) & \text{при } C = 0, \\ \frac{-2}{B + 2CV} & \text{при } C \neq 0 \text{ и } B^2 = 4AC, \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \left| \frac{2CV + B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2CV + B + \sqrt{B^2 - 4AC}} \right| & \text{при } C \neq 0 \text{ и } B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \operatorname{arctg} \left| \frac{2CV + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right| & \text{при } C \neq 0 \text{ и } B^2 < 4AC. \end{array} \right. \Bigg|_0^{V_{\text{отр}}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{B} (\ln |A + BV_{\text{отр}}|) - \frac{1}{B} \ln |A| & \text{при } C = 0, \\ \frac{-2}{B + 2CV_{\text{отр}}} + \frac{2}{B} & \text{при } C \neq 0 \text{ и } B^2 = 4AC, \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \left( \ln \left| \frac{2CV_{\text{отр}} + B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2CV_{\text{отр}} + B + \sqrt{B^2 - 4AC}} \right| - \ln \left| \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}} \right| \right) & \text{при } C \neq 0 \text{ и } B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \left( \operatorname{arctg} \left| \frac{2CV_{\text{отр}} + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right| - \operatorname{arctg} \left| \frac{B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right| \right) & \text{при } C \neq 0 \text{ и } B^2 < 4AC. \end{array} \right.$$

Из кинематического дифференциального уравнения в силу полученного выше выражения для dt следует:

$$dL = Vdt = \frac{VdV}{A + BV + CV^2},$$

$$\text{или: } L_{\text{разб}} = \int_0^{V_{\text{отр}}} \frac{VdV}{A + BV + CV^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{V}{B} - \frac{A}{B^2} \ln|A + BV| \right) \Big|_0^{V_{отр}} \quad \text{при } C = 0, \\ \frac{1}{2C} \ln|A + BV + CV^2| \Big|_0^{V_{отр}} - \frac{B}{2C} \int_0^{V_{отр}} \frac{dV}{A + BV + CV^2} \quad \text{при } C \neq 0. \end{array} \right. =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{B} (V_{отр} - AT_{разб}) \quad \text{при } C = 0, \\ \frac{1}{2C} \left( \ln|A + BV_{отр} + CV_{отр}^2| - \ln|A| - BT_{разб} \right) \quad \text{при } C \neq 0. \end{array} \right.$$

На этом завершается разработка **методов вычисления** требуемых величин. Вместе с предыдущими соотношениями они составляют сердцевину математического описания модели для заданной цели.

Для завершения математического описания к взаимосвязям и методам вычисления следует добавить числовые и функциональные **данные** параметров объекта, которые позволят вычислить требуемые величины:

- плотность воздуха  $\rho = 1,225$  кг/м<sup>3</sup>;
- коэффициент трения качения колес шасси по ВПП  $f = 0,035$ ;
- массу самолета  $m = 5250$  кг;
- площадь крыла  $S = 71,5$  м<sup>2</sup>;
- аэродинамические коэффициенты:  $c_{xa} = 0,3$ ;  $c_{ya} = 1,5$ ;
- взлетную тягу двигателя при нулевой скорости  $P_0 = 2000$  кгс;
- коэффициенты зависимости тяги от скорости:  $a = 0,002$  с/м,  $b = 0,0002$  с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;

**и начальные условия** для интегрирования дифференциальных уравнений: при  $t = 0$ :  $V = 0$ ,  $L = 0$ , которые уже использованы для записи определенных интегралов. Как нетрудно видеть, полнота математического описания модели позволяет произвести расчеты и получить значения требуемых величин в заданных условиях.

Кроме математического описания в математическую модель входит описание всех **допущений**, использованных выше для ее построения (в том числе и из дисциплин аэродинамики и динамики полета), а также **алгоритмы перевода** исходных и выходных данных с модели на оригинал и обратно (в данном простом примере этот перевод осуществляется с коэффициентами подобия равными единице, т.е. непосредственно, если не считать правила округления в пределах точности измерений).

В качестве антипода детерминированных моделей выступают модели имитационные. Имитационные модели (стохастические) – это математические модели таких оригиналов, для отдельных элементов которых отсутствует аналитический вид математического описания. Математическое описание имитационных моделей содержит описание **случайных процессов (стохастических)**. В качестве такого описания выступают разнообразные формы законов распределения, которые могут быть составлены на основании статистической обработки результатов наблюдения за оригиналом.

В математическое описание имитационных моделей кроме законов распределения случайных величин, описывающих явление, может входить описание взаимосвязей случайных величин (например, с помощью моделей теории массового обслуживания), а также алгоритм статистических испытаний (метод Монте-Карло для реализации элементарных случайных событий). Таким

образом, имитационные модели используют математический аппарат *теории вероятностей*: *математической статистики*, *теории массового обслуживания* и *метода статистических испытаний (метода Монте-Карло – § 3.5)*.

С помощью имитационных моделей воспроизводится один или несколько из возможных способов функционирования объекта, т.е. то, что вполне **могло бы быть** на самом деле. Это позволяет получить дополнительный статистический материал об исследуемом оригинале и выявить подчас такие эффекты, которые в реальном эксперименте невозможно обнаружить по тем или иным причинам.

Пример построения имитационной модели рассматривается в § 3.5.

## 2.2. Адекватность математических моделей

Особенностью математических моделей является то, что получение с их помощью каких-либо результатов связано с вычислениями. Так возникает необходимость понятия вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент – это получение результатов с помощью математической модели для какого-либо конкретного случая исследований. Это может быть как **единичный** расчет одного параметра, так и **комплекс** расчетов целого спектра параметров модели во множестве определенным образом связанных условий. Во втором случае большое значение приобретает процедура *планирования вычислительного эксперимента* (см. раздел 3), целью которого является получение максимума **достоверной** информации при минимуме затрат. Под достоверностью результата вычислительного эксперимента понимается одновременное выполнение двух условий: во-первых, результат должен быть достаточно **точен**, а во вторых, не может быть **опровергнут** с помощью каких либо дополнительных расчетов. (В математической статистике этим понятиям соответствуют понятия **несмещенности** и **состоятельности** оценок, получаемых из наблюдений, § 5.3.) При *планировании вычислительного эксперимента* используются многие методы математического моделирования – от простого здравого смысла до *теории катастроф* (§ 3.1) и методов *математической статистики*.

**ПРИМЕР.** Определение предельных по условиям бокового выкатывания сочетаний значений скорости бокового ветра и коэффициента сцепления колес шасси с ВПП многодвигательного самолета с двигателями под крылом. Последовательность действий:

- выявление **критических** случаев (например, взлет с отказом критического двигателя в критический момент: при ветре слева критическим является правый крайний двигатель, а критическим моментом является момент достижения скорости принятия решения);

- выбор способов нетрадиционного **управления** самолетом (например, отдельное управление тягой двигателей, включение-выключение управления передним колесом, отдельное торможение);

- последовательная *аппроксимация* (§§ 4.1, 6.3) линии, представляющей на координатной плоскости исследуемых параметров (скорости бокового ветра и

коэффициента сцепления) предельные допустимые сочетания значений, полученных в результате расчетов на множестве критических случаев и способов управления самолетом.

Такую последовательность действий можно рассматривать в качестве *плана вычислительного эксперимента* (§ 7.2).

Центральным понятием теории математического моделирования является понятие *адекватности*. Игнорирование этого понятия низводит теорию до уровня схоластики, а аргументированная проверка адекватности обеспечивает получение добротных и практически значимых результатов.

Адекватность математической модели – это **соответствие** результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования. Поэтому возможны различные подходы к оценке адекватности различных моделей.

Для выявления этого соответствия для **механических систем и процессов**, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала **в одних и тех же условиях**. Очевидно, что сравнивать следует лишь **соответствующие** друг другу параметры между собой и только **в той области** функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать.

Математические модели механических систем и процессов строятся в основном как подобные (см. § 3.2) детерминированные модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием. Поэтому для адекватности математической модели поведению оригинала – механической системы – достаточно убедиться в выполнении двух свойств: **точности** и **непротиворечивости**.

Точность в задачах механики означает, что обобщенная характеристика **рассогласования** соответствующего параметра модели и оригинала ( $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$ ) должна быть не больше, чем заранее заданное значение **приемлемой погрешности**. В качестве такой характеристики может выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования или статистическая оценка, как, например:

– *доверительный интервал* для математического ожидания рассогласования (§ 5.3);

– диапазон практически наблюдаемых значений рассогласования;

– интегральная оценка одного из следующих типов:

$$K_{\Delta} = \alpha \int_0^T \Delta u(t) dt \left( K_{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta u_i \right), \text{ или } K_{\delta} = \beta \int_0^T \delta u(t) dt \left( K_{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta u_i \right).$$

Однако точность не может быть самоцелью, так как существует множество причин, оправдывающих существование значительных систематических погрешностей, как, например, в летной эксплуатации при нерегистрируемой настройке пилотом начала отсчета угла тангажа. Поэтому критерии проверки точности не должны рассматриваться, как догма, они выбираются в соответствии с целью исследований.

Непротиворечивость подразумевает идентичный **характер изменения** соответствующих параметров, т.е. идентичный вид основных **свойств** функциональных зависимостей на отдельных участках, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п. При более глубоком рассмотрении этого понятия становится очевидным многообразие возможных критериев проверки непротиворечивости.

Поскольку сравниваемые параметры в области функционирования объекта могут принимать **множество** различных значений, постольку какие-либо выводы о соответствии их поведения можно сделать только на основании статистической обработки таких множеств. Поэтому адекватность проверяется с помощью **статистических критериев**, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в соответствующих условиях.

Для образной характеристики понятий точности и непротиворечивости можно воспользоваться рис. 7. На нем изображены графики некоторой функциональной зависимости между параметрами оригинала, которую модель должна адекватно воспроизвести. Для первого знакомства с понятием адекватности нижеследующий анализ приводится в нестрогой форме – строгий математический аппарат проверки адекватности дан в виде алгоритма в § 5.7.

В случае "а" существует область, в которой выполняются некоторые заданные требования точности, т.е. погрешность модели по отношению к оригиналу меньше некоторого допустимого значения. Однако с точки зрения такого свойства рассматриваемой зависимости, как возрастание-убывание, эта модель противоречит поведению оригинала, поэтому не может быть признана адекватной. (Между прочим, если рассмотренное свойство несущественно для данного исследования, то модель может быть признана адекватной.) Случай "б" демонстрирует непротиворечивый ход зависимости с той же точки зрения.

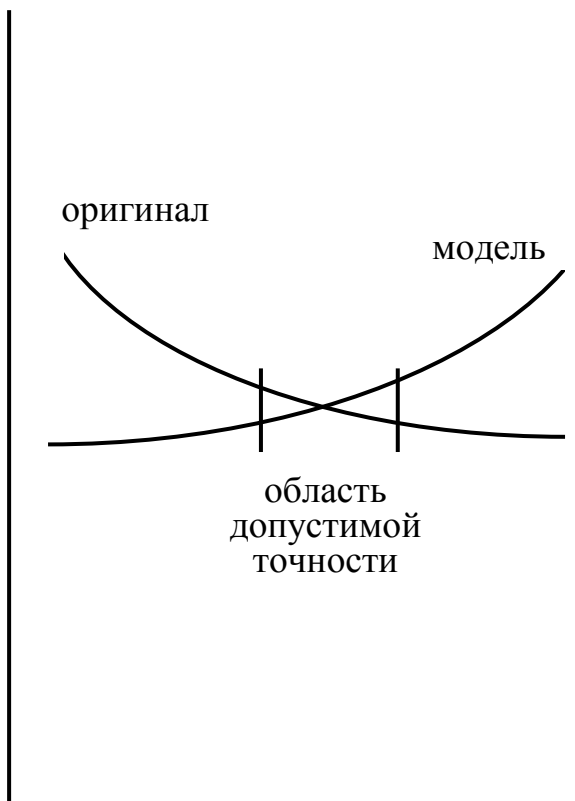
На графиках "в" и "г" показано поведение оригинала, наиболее часто встречающееся в реальных механических объектах. Колебания связаны с возмущающими факторами, не поддающимися регистрации, а также с погрешностями записывающей аппаратуры. Тем не менее, заменять экспериментальную зависимость более "красивой" нельзя, так как истинный характер ее неизвестен. В этом случае сравнение оригинала и модели особенно сложно.

В случае "в" заметна систематическая погрешность модели – постоянно присутствующее рассогласование между параметрами модели и оригинала. В этом случае, если все наблюдаемые частные значения рассогласования **существенно** меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной. Если большое число наблюдаемых частных значений рассогласования больше допустимого значения погрешности, то модель нельзя считать достаточно точной. А в промежуточном случае необходимо руководствоваться соображениями цели исследований.

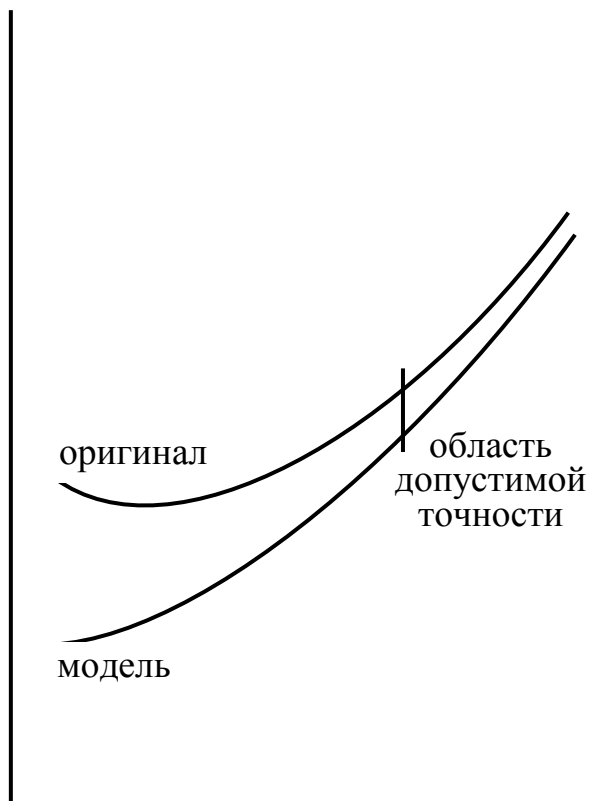


В случае "г" систематическая погрешность модели значительно меньше той случайной ее составляющей, которая обязана своим появлением возмущающим факторам. Поэтому, если большинство наблюдаемых частных значений рассогласования меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной.

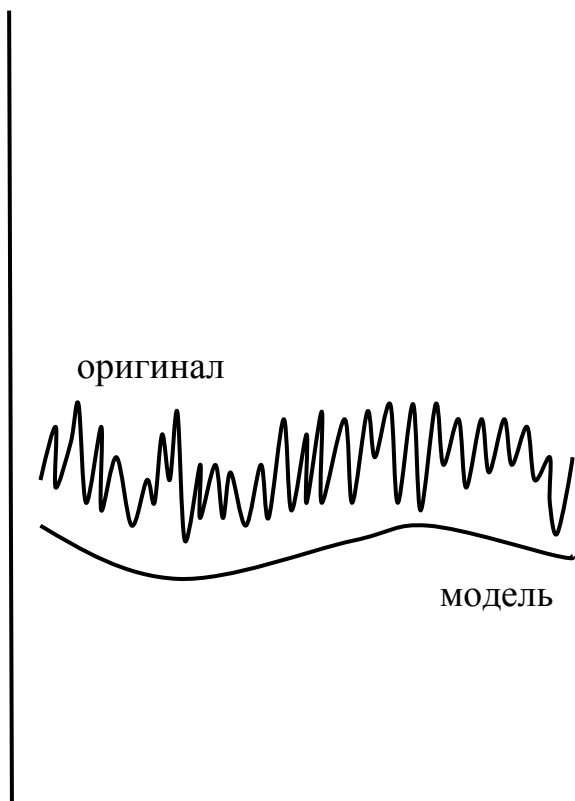
Что касается свойства непротиворечивости модели в случаях "в" и "г", то этот вопрос значительно сложнее. Если по своей природе исследуемая зависимость должна быть более плавной, чем это зарегистрировано на оригинале (на- пример, скорость полета самолета по времени в пределах 20 с), то это значит, что практически все высокочастотные колебания являются результатом наложения шума (неучитываемых факторов), который следует отфильтровать. Эта неформализуемая процедура должна быть построена только на одном требовании: для непротиворечивости **рассогласование** между оригиналом и моделью



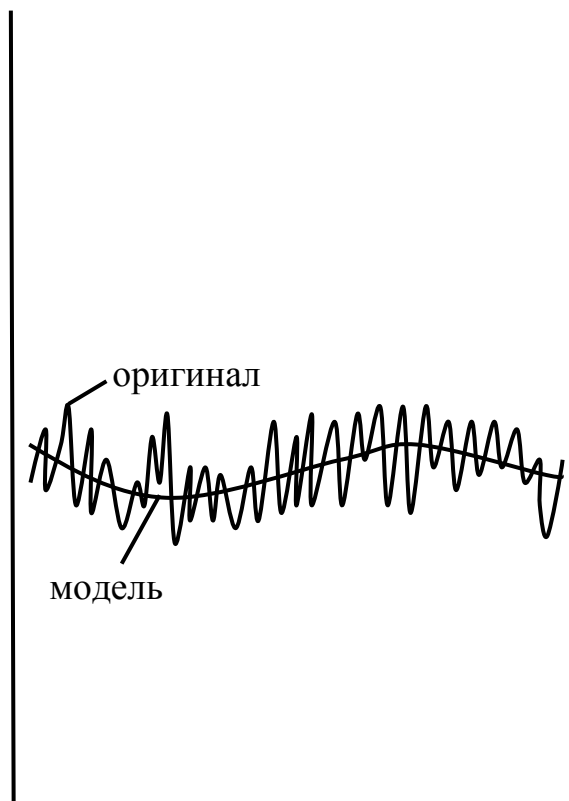
а



б



в



г

Рис. 7

не должно подчиняться какой-либо **закономерности**, рассогласование должно вести себя вполне хаотически. С этой точки зрения случай "г" позволяет надеяться на непротиворечие модели поведению оригинала, а случай "в" – нет.

Таким образом, становится очевидным, что для проверки адекватности необходимо иметь (рис. 8):

- **исчерпывающую** информацию о реальном случае (что всегда трудно, а подчас бывает практически невозможно);
- результаты **контрольного вычислительного эксперимента**, воспроизводящего известный реальный случай;
- алгоритм оценки **точности** математической модели;
- алгоритм проверки **непротиворечивости** математической модели.

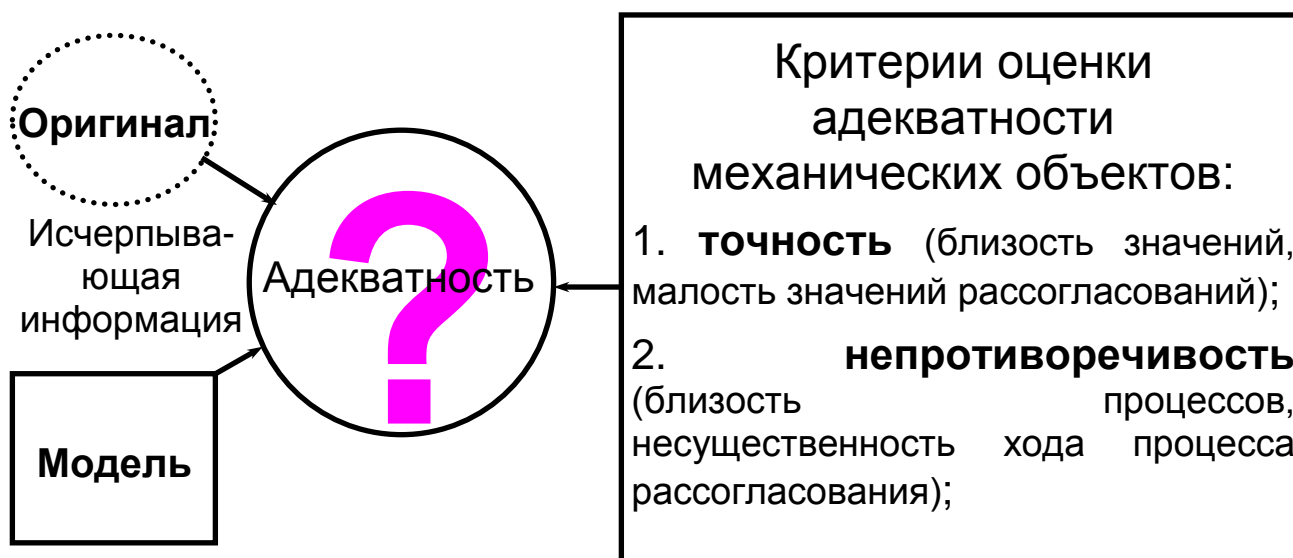


Рис. 8

При построении алгоритма проверки адекватности необходимо учитывать как особенности модели, так и область ее применения:

- **ограниченность** допустимого диапазона изменения параметров системы (вследствие ограниченной области функционирования объекта, в которой он моделируется),
- соответствие математического описания **условий** реального и вычислительного экспериментов,
- возможную **неоднозначность** решений в вычислительном эксперименте,
- **точность** самого вычислительного эксперимента.

Поясним это на примерах. Если предполагается исследовать поведение самолета, **ограниченное** разбегом по ВПП только при взлете, то нет необходимости добиваться адекватности моделирования таких явлений, как реверс тяги двигателей, торможение колес, вертикальное движение самолета. Однако при моделировании посадки самолета с некоторой высоты все перечисленное оказывается необходимым.

Ошибки неучета идентичности начальных и конечных **условий**, к сожалению, еще встречаются в технической литературе.

**ПРИМЕР.** Примером может служить один из расчетов "оптимальной" по минимуму расхода топлива траектории набора высоты 10200 м от высоты круга самолетом Ил-86, проиллюстрированный рис. 9. Руководство по летной эксплуатации (РЛЭ) данного самолета рекомендует набор высоты осуществлять с приборной скоростью 550 км/ч, а выше 9500 м – при  $M = 0,8$ . На такой набор высоты затрачивается дальность 351,45 км (см. рис. 9а). Предлагавшийся "оптимальный" набор высоты с переменной скоростью (от 620 км/ч до соответствующей  $M = 0,8$ ) обеспечивается на дальности 360,62 км (см. рис. 9б), поэтому для сравнения этих режимов к полету по РЛЭ добавлялся крейсерский полет на дальности 9,17 км. В результате такого сравнения "оптимальный" режим сэкономил 87 кг топлива по сравнению с режимом РЛЭ. Однако авторы не заметили, что начальные **условия** этих траекторий не соответствовали друг другу: на высоте круга скорость в одном из них 550 км/ч, а в другом 620 км/ч. Безусловно необходимо обеспечить в расчетах те же начальные и конечные условия: кроме весовых, аэродинамических и силовых характеристик задать одинаковые значения координат пространственного положения самолета и вектора его скорости в начальной и конечной точках этапа. Если провести расчет траектории по РЛЭ с учетом участка разгона на высоте круга от 550 км/ч до 620 км/ч, то на это понадобится 3 км и 130 кг топлива (рис. 9г). Такое же увеличение дальности по РЛЭ на крейсерском режиме потребует 35 кг топлива. Таким образом, сравнение полученных траекторий оказывается не в пользу "оптимальной", а вывод об экономии топлива был сделан прямо противоположным истинному положению вещей.

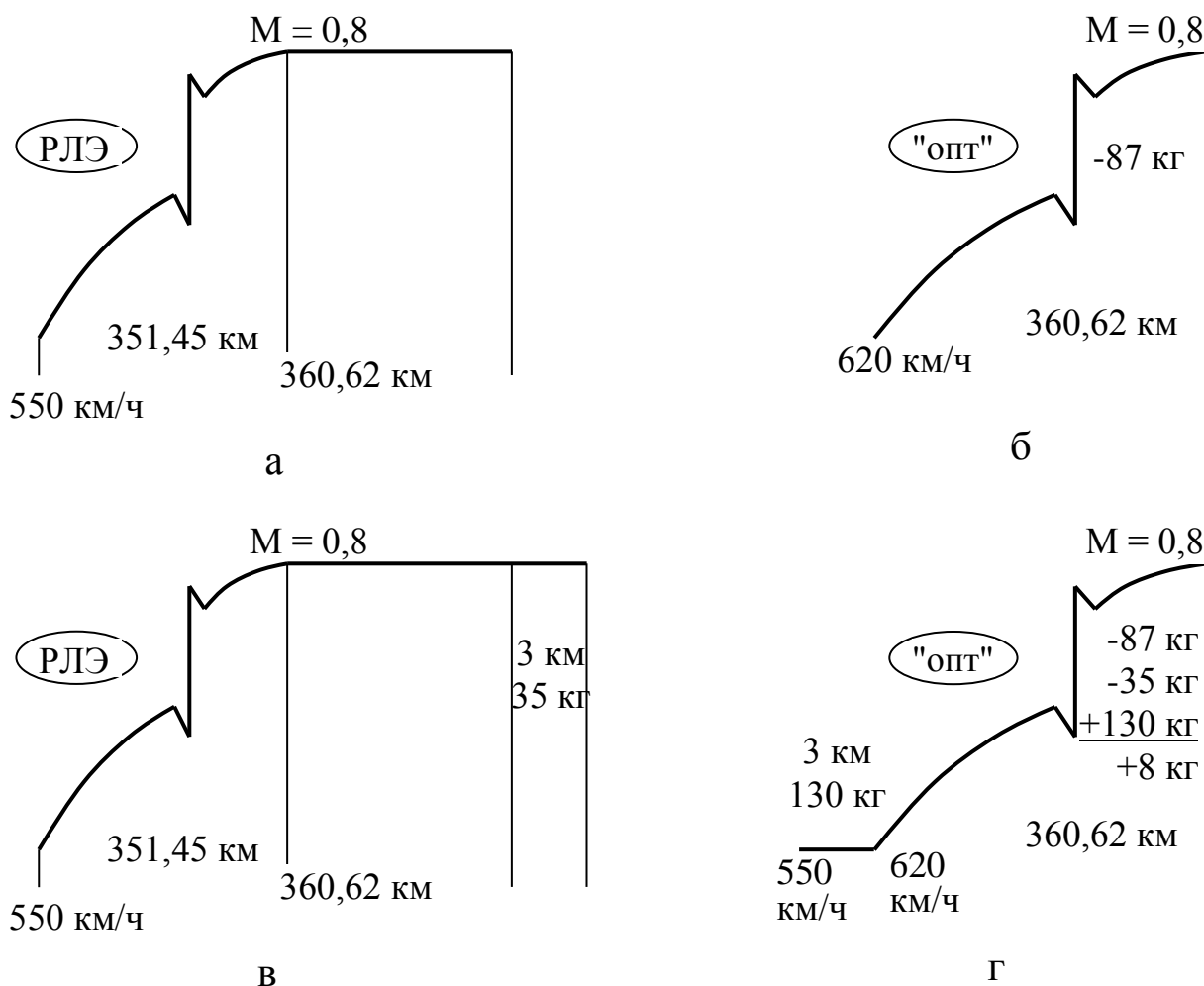


Рис. 9

Возможность получения **неоднозначного** решения в расчетах можно представить на примере квадратного уравнения, имеющего в общем случае два корня, один из которых может не иметь физического смысла и должен быть отброшен. Однако в некоторых задачах таких явных признаков может и не быть.

**Точность** модели определяется погрешностью – рассогласованием значений рассматриваемого параметра  $u$ :

– абсолютная погрешность  $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$ ,

– относительная погрешность  $\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{оригинала}}} \cdot 100\%$ ,

– относительная приведенная погрешность  $\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{меры}}}$  (где  $u_{\text{меры}}$  –

некоторое характерное значение, например,  $u_{\text{меры}} = |u|_{\text{max}}$ ).

*Погрешности* получили следующие эпитеты:

– грубая – недопустимая с точки зрения целей исследования;

– удовлетворительная – допустимая с точки зрения целей исследования;

– случайная – принимающая случайные значения при многократном повторении опыта в неизменных условиях (например, замер времени падения шара с Пизанской башни с помощью одного и того же секундомера);

– систематическая – принимающая неизменное значение при многократном повторении опыта в неизменных условиях (то же, что в предыдущем случае, но с испорченным секундомером, который начинает отсчет времени на 0,1 с позже пуска).

При математическом моделировании возможны *погрешности*, обусловленные различными причинами:

– погрешности **физической абстракции** (неточность физических законов и закономерностей, неучет некоторых факторов);

– погрешности **математического описания**:

приближенность уравнений,

приближенность данных,

погрешность расчетов (погрешность установок, ЭВМ, приближенные методы расчетов);

– погрешность **обработки результатов** (округление результатов, графическое изображение).

Из всех перечисленных причин в пояснении нуждается лишь погрешность расчетов, которую при моделировании всегда надо учитывать.

Выясним особенности **приближенных вычислений**, влияющих на погрешность расчетов с помощью математических моделей. Будем определять погрешность результатов при известных погрешностях операндов  $\Delta a$  и  $\Delta b$ .

1. Погрешности суммы:

$$(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b),$$

т.е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a + b) < |\Delta a| + |\Delta b|$$

– **абсолютная погрешность суммы ограничена суммой модулей абсолютных погрешностей слагаемых**; а относительная:

$$\delta(a + b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} = \frac{\delta a \cdot a + \delta b \cdot b}{a + b},$$

но, если для определенности  $\delta(a) < \delta(b)$ , то

$$\frac{\delta a \cdot a + \delta a \cdot b}{a + b} < \frac{\delta a \cdot a + \delta b \cdot b}{a + b} < \frac{\delta b \cdot a + \delta b \cdot b}{a + b},$$

следовательно,  $\min(\delta a, \delta b) < \delta(a + b) < \max(\delta a, \delta b)$

– **относительная погрешность суммы принимает значение между наибольшей и наименьшей относительными погрешностями слагаемых.**

2. Погрешности разности:

$$(a + \Delta a) - (b + \Delta b) = (a - b) + (\Delta a - \Delta b),$$

т.е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a - b) < |\Delta a| + |\Delta b|$$

– **абсолютная погрешность разности ограничена суммой модулей абсолютных погрешностей операндов**; а относительная:

$$\delta(a - b) = \frac{\Delta a - \Delta b}{a - b} = \frac{\delta a \cdot a - \delta b \cdot b}{a - b},$$

т.е. **относительная погрешность разности принимает значения больше относительных погрешностей операндов, а при близких их значениях – не ограничена.** Из этого следует, что в приближенных вычислениях необходимо **избегать** разности близких величин, что особенно важно учитывать при программировании алгоритмов для ЭВМ.

3. Погрешности произведения:

$$(a + \Delta a) \times (b + \Delta b) = (a \times b) + (\Delta a \times b + \Delta b \times a) + (\Delta a \times \Delta b),$$

а если предполагать малость абсолютных погрешностей по сравнению со значениями самих величин, то абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a \times b) \approx \Delta a \times b + \Delta b \times a$$

– **абсолютная погрешность произведения приближенно равна сумме перекрестных произведений абсолютных погрешностей сомножителей на смежные сомножители**; а относительная:

$$\delta(a \times b) \approx \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{a \times b} = \delta a + \delta b,$$

т.е. **относительная погрешность произведения приближенно равна сумме относительных погрешностей сомножителей.**

4. Погрешности деления:

$$\frac{a + \Delta a}{b + \Delta b} = \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{(b + \Delta b)^2} + \frac{\Delta a \times \Delta b}{(b + \Delta b)^2},$$

т.е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{(b + \Delta b)^2}$$

– **абсолютная погрешность частного приближенно равна сумме произведений абсолютной погрешности делимого на делитель и абсолютной погрешности делителя на делимое, деленной на квадрат делителя;** а относительная:

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{(b + \Delta b)^2 \frac{a}{b}} \approx \delta a + \delta b,$$

т.е. **относительная погрешность частного приближенно равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.**

5. Погрешности вычисления функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в предположении разложимости ее в ряд Тейлора по степеням  $x_n$  и малости абсолютных погрешностей  $\Delta x_n$  по сравнению со значениями  $x_n$  в первом (линейном) приближении:

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

т.е. абсолютная погрешность определится величиной:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

а относительная:

$$\begin{aligned} \delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx \frac{1}{|f(x_1, x_2, \dots, x_n)|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \delta x_i. \end{aligned}$$

6. Погрешность методов вычисления в более сложных случаях связана с применяемым алгоритмом. Поэтому для обеспечения возможности контроля

погрешности методы должны обладать свойствами аппроксимации и устойчивости (см. § 4.4).

### 2.3. Понятие об обратных задачах

В процессе построения математической модели при недостаточной степени ее адекватности или в условиях недостаточной информации об оригинале возникает необходимость уточнения, "доводки" модели. Эта процедура носит название идентификации – задачи определения недостающих или неточно известных параметров или функциональных соотношений модели с помощью результатов вычислительного эксперимента и данных о реальном поведении объекта.

**ПРИМЕР.** В качестве простейшего примера рассмотрим идентификацию математической модели разбега самолета Ан-2, математическое описание которой составлено в примере § 2.1. Вычисление всех необходимых величин дает:

$$V_{\text{отр}} = 28,0 \text{ м/с} = 100,8 \text{ км/ч};$$
$$A = 3,393 \text{ м/с}^2; B = -0,007472 \text{ 1/с}; C = -0,002812 \text{ 1/м},$$

а для результатов вычислений по формулам Ньютона-Лейбница в условиях данной задачи соответствующие выражения дают:

$$T_{\text{разб}} = 12 \text{ с}; L_{\text{разб}} = 205 \text{ м}.$$

Для оценки адекватности полученной математической модели, как следует из § 2.2, необходимо сравнить полученный результат с поведением реального объекта, т.е. с взлетом реального самолета Ан-2 в тех же условиях. Предположим, что данные такого летного испытания получены и что в них зафиксировано значение дистанции разбега самолета  $L_{\text{разб}} = 232 \text{ м}$ . Какой вывод об адекватности разработанной модели можно сделать в этом случае? Ответ на такой вопрос не однозначен, а зависит от той практической задачи, которую необходимо решить – от **цели исследований**.

Если поставлена задача оценить возможность взлета самолета Ан-2 в условиях, близких к условиям летных испытаний, с ВПП длиной 300 м, то, по-видимому, можно утверждать, что достигнутая точность расчета дистанции разбега (относительная погрешность  $\approx 13 \%$ ) обеспечивает удовлетворительную степень адекватности разработанной математической модели. Заметим попутно, что в данной постановке задачи исследований от модели требуется всего лишь одно значение дистанции разбега, а не вид функциональной зависимости. Поэтому критерий непротиворечивости при оценке адекватности здесь не нужен, и понятие адекватности данной модели совпадает с понятием точности.

Если поставлена задача оценить влияние различных факторов на разбег самолета Ан-2 в условиях, близких к условиям реального полета, в котором произошло летное происшествие в момент отрыва самолета от ВПП (в конце разбега), то, очевидно, что достигнутая относительная точность расчета дистанции разбега ( $\approx 13 \%$ ) не обеспечивает удовлетворительной степени адекватности разработанной математической модели. Действительно: такая относительная погрешность в определении дистанции разбега может свидетельствовать о примерно такого же порядка относительной погрешности в определении скорости отрыва (которую зарегистрировать в реальном полете очень трудно), что недопустимо при оценке условий возникновения нештатной ситуации.

В этом случае необходимо "привести" математическую модель в соответствие с реальностью. Для этого необходимо проанализировать математическое описание модели. В него входят функциональные соотношения, отображающие законы механики, закономерности аэромеханики, динамики полета, теории авиадвигателей, теории трения – их подвергать сомнению не имеет смысла, тем более, что и сам самолет конструировался на основе именно этих соотношений. Такой элемент математического описания, как методы вычисления, в данной модели оказался в виде аналитических формул. Единственной



природой погрешности их применения может стать только погрешность вычисления, явно не способная достичь величины в 13 %, поэтому и их подвергать сомнению также не имеет смысла. Остается проанализировать все входящие в математическое описание значения числовых параметров на предмет их уточнения. Значения тех параметров, которые известны недостаточно точно, необходимо идентифицировать. Если, например, значение взлетной тяги двигателя при нулевой скорости  $P_0 = 2000$  кгс вызывает подозрения, поскольку после ремонта он имеет солидную наработку, то следует подобрать такое меньшее ее значение, которое обеспечит полученную в летном испытании дистанцию разбега. Таким образом, можно **идентифицировать** взлетную тягу **по известному** значению дистанции разбега.

Это, конечно, простейший пример задачи идентификации одного параметра по другому одному известному параметру. В общем случае решение задачи идентификации, например, поляры самолета по данным летных испытаний, представляет собой сложную проблему.

Как видно из примера, для решения задачи идентификации приходится проводить множество расчетов, составляющих специальный *контрольный вычислительный эксперимент* по поэтапному подбору и коррекции математической модели. (Только в том случае, когда модель строго линейная, можно решить задачу идентификации за один расчет – найти  $x$  из уравнения  $ax + b = y$  при известном  $y$ .) Таким образом, задача идентификации решается с помощью *метода последовательных приближений* (§ 3.1) в широком смысле. При обработке результатов такого вычислительного эксперимента используются статистические методы: *метод наименьших квадратов* (§ 6.3), *метод моментов* (§ 5.3), *метод наибольшего правдоподобия* (§ 5.3).

Поскольку задачу идентификации нельзя решить "прямо", т.е. нельзя прямым вычислением определить недостающие параметры, то такая задача относится к особому классу – обратных задач. Следует заметить, что математически строго (т.е. безусловно верно) решить обратную задачу нельзя в принципе (кроме случая простейшей линейной математической модели). Даже квадратичная модель допускает два решения, а сложные нелинейные зависимости вообще необратимы. По выражению академика А.Н. Тихонова любое решение обратной задачи следует рассматривать не более чем "интерпретацию данных наблюдений", что блестяще иллюстрируется разобранном выше примером. Таким образом, *идентификация математических моделей* сводится по сути к "интерпретации" исходного приближенного числового материала и моделей тех отдельных элементов, которые не описываются законами природы.

Для решения задач идентификации чаще всего используются (§ 3.1): *метод проб и ошибок*, *метод перебора* – выборочного или последовательного, *метод проверки гипотез*. Последним методом, в частности, решаются задачи расследования летных происшествий.

Второй тип *обратных задач* – *задачи оптимизации* подробно рассматриваются в § 4.5.

## 2.4. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования

Математическое моделирование – мощное современное средство научных исследований и его применение требует соблюдения определенной строгости во избежание получения неверных выводов. Так, например, пренебрежительное отношение к разработке математического описания грозит получением неразрешимой задачи (при ее незамкнутости), а игнорирование оценки адекватности – получением неверных выводов. Такого рода примеры упоминались ранее. В § 1.1 рассматривалось первое приближение структуры процесса моделирования, теперь можно обоснованно дать следующий выработанный практикой алгоритм действий, которого рекомендуется придерживаться:

- 1▶ изучение оригинала: выявление основных факторов, особенностей, диапазонов исследуемых параметров, условий и задач исследования, постановка (формулировка) задачи исследования, оценка требуемой **точности**;
- 2▶ феноменологическое описание оригинала ("физическое" описание): поиск **аналогий и функциональных** зависимостей на основе предыдущего этапа и достижений в различных областях **науки**;
- 3▶ *математическое описание* оригинала;
- 4▶ разработка алгоритмического и программного **обеспечения** для реализации математического описания с помощью ЭВМ;
- 5▶ проведение контрольного вычислительного эксперимента (воспроизводящего реальный известный случай поведения оригинала в конкретных условиях);
- 6▶ оценка *адекватности* результатов *контрольного вычислительного эксперимента* **реальному случаю**; при необходимости – повторение алгоритма с пункта 3, 2 или 1;
- 7▶ *планирование* вычислительного эксперимента **в целях исследования**;
- 8▶ проведение *вычислительного эксперимента* в целях исследования, **обработка** его результатов;
- 9▶ **анализ** результатов вычислительного эксперимента, сравнение с результатами изучения оригинала (при необходимости – повторение алгоритма с пункта 7 или 1);
- 10▶ формулировка выводов исследования.

Пункты 1 – 6 составляют процесс *моделирования* – построения математической модели. В нем можно выделить процесс *идентификации*, объединяющий пункты 3 – 6.

По такому алгоритму проведены многочисленные исследования особенностей динамики полета самолетов гражданской авиации, в том числе выявлены **причины летных происшествий**, разработаны **рекомендации по летной эксплуатации** (пожар центрального двигателя Ту-154; удар самолета Ил-86 хвостовой опорой о ВПП при неправильной посадке; выявление

предельных значений скорости бокового ветра и коэффициента сцепления колес шасси с ВПП для предотвращения выкатывания; особые случаи посадки и взлета самолетов Ил-96-300 и Ил-96Т в сложных метеоусловиях и с отказами систем; аварии перегруженного самолета Ил-76ТД на взлете; взлет и посадка самолетов в условиях сдвига ветра).

## 2.5. Основные принципы математического моделирования механических систем и процессов

В заключение главы 4 сформулируем все те "правила" строгости процесса моделирования, которые так или иначе прозвучали в предыдущих главах, в виде принципов математического моделирования механических систем и процессов.

**1.** Главным из этих принципов безусловно является обеспечение высокой степени **адекватности** математической модели. В теории математического моделирования принято называть моделью только тот объект, который успешно прошел оценку адекватности. Как было выяснено в § 2.2, адекватность математической модели механических систем и процессов основывается на удовлетворительной *точности и непротиворечивости* по отношению к поведению оригинала. Проверка этих качеств модели делается чаще всего с помощью методов математической статистики (§ 5.7).

**2.** Обычно выделяемые принципы математического моделирования: **гибкость, инвариантность и динамичность** – сводятся в основном к полной **унификации** всего программного обеспечения и специальным его свойствам, обеспечивающим оперативную настройку на новые задачи. В конечном итоге следует стремиться к такому состоянию программного обеспечения, когда для решения новой задачи требуется лишь подготовить исходные данные, что тоже должно делаться с помощью специального программного обеспечения.

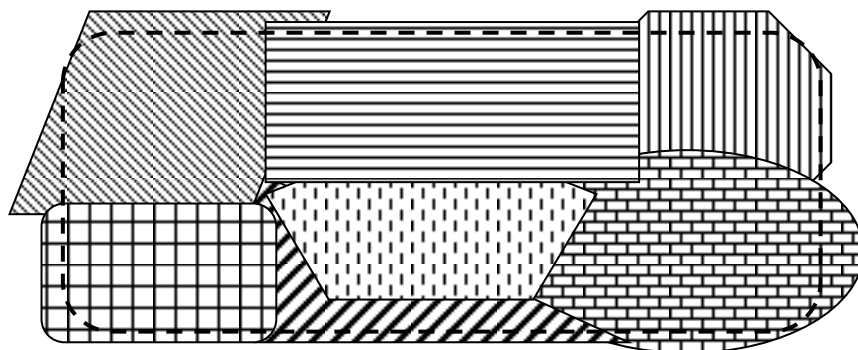
**3.** Принцип **состоятельности результатов вычислительного эксперимента** трактуется, как обеспечение результатов, безусловно приближающихся к истине. Состоятельность здесь следует понимать как статистический термин, обозначающий стремление по вероятности при увеличении объема информации результатов вычислительного эксперимента к истинным значениям параметров исследуемого явления (§ 5.3). Этот принцип требует предельной математической строгости, то есть использования в программном обеспечении вычислительных методов, проявляющих при их применении одновременно *устойчивость, сходимостъ и однозначность* (§ 4.4).

**4.** Принцип **удобства исследователя** – простота обращения с программным обеспечением, компоновки вариантов расчета, обработки и представления результатов вычислительного эксперимента – все это достигается развитым **диалоговым** режимом работы, **сервисным**

программным обеспечением (таблицы, графики и т.п.) и **унификацией** всего программного обеспечения.

**5. Принцип планирования** вычислительного эксперимента обеспечивается применением методов и приемов планирования эксперимента (см. главу 7).

**6. Принцип конкретизации условий и области применения** разрабатываемой математической модели. Особенно большое значение этот принцип приобретает при математическом моделировании сложных систем. Он помогает избежать соблазна построения одной математической модели на все случаи жизни, что принципиально невозможно, и построить несколько математических моделей, с достаточной степенью адекватности отвечающих на множество частных конкретных вопросов. Рис. 10 иллюстрирует "мозаику" нескольких моделей, обозначенных различной штриховкой, покрывающую область исследования, обозначенную пунктиром. Этот прием (называемый



**декомпозицией**) позволяет добиться как достоверности результатов вычислительных экспериментов в той области, которая не выходит за пределы области проверки точности, так и непротиворечивости. Прием декомпозиции бывает полезен и при разработке комбинированных методов вычисления, когда не удается получить адекватные результаты с помощью обычных распространенных методов.

Рис. 10

**7. Принцип опережающей математической строгости и глубины феноменологического описания** явления. В соответствии с ним при математическом моделировании механических систем и процессов необходимо построение физических закономерностей отдельных явлений на порядок более строгих и глубоких, чем это диктуется непосредственно постановкой конкретной задачи. Дело в том, что на практике невозможно избежать применения математических моделей в несколько более широкой области, чем это проверено при оценке адекватности. Поэтому во избежание ошибок при принятии решений необходимо **обосновать** возможность некоторой **экстраполяции** результатов вычислительного эксперимента. Такая экстраполяция возможна только в том случае, когда основу феноменологического описания каждого частного явления составляют **физически обоснованные** закономерности. Данный принцип можно было бы

назвать иначе принципом приоритета физичности – приоритета перед статистическим моделированием и приемами упрощения моделей. Этот принцип отнюдь не противоречит предыдущему принципу конкретизации применения, а лишь дополняет возможности математического моделирования механических систем и процессов.

**ПРИМЕР.** Важность этого принципа можно показать на примере описания работы шасси. Для того, чтобы описать движение самолета по ВПП в продольном канале, на первый взгляд достаточно знать коэффициент трения только в продольном канале. Но для обеспечения адекватности необходимо учитывать возможность разных нюансов реального движения самолета по ВПП, например, с боковым заносом. При этом существенно изменяются характеристики продольного движения. Это явление необходимо как-то описать. Поэтому приходится в модель, которая будет предназначена для расчета только продольного движения включать учет и таких эффектов, как боковой занос.

## Глава 3. Методы разработки математических моделей

### 3.1. Проблемы построения математических моделей

Можно построить очень сложную математическую модель, учитывающую все видимые и предполагаемые факторы и явления, но получение результата с ее помощью может оказаться не менее сложным, чем на оригинале. Можно построить очень простую модель, отображающую минимум очевидных свойств объекта, но тогда нельзя с ее помощью исследовать тонкие свойства. Задача *построения математической модели* – это отыскание оптимального **компромисса** между простотой модели и степенью ее адекватности изучаемому оригиналу.

Построение математической модели (синтез математической модели) требует решения достаточно сложных проблем, среди которых:

- множественность критериев оценки качества функционирования моделируемой системы (*многокритериальность*);
- большая размерность описания сложных систем ("*проклятие размерности*");
- *адекватность*.

Под многокритериальностью понимается наличие подчас противоречивых требований к различным элементам сложной системы или к системе в целом (например, экономичность и безопасность полетов, быстрота и качество обслуживания). Для решения этой проблемы применяют различные приемы *ранжирования*, в том числе и основанные на результатах применения *методов экспертных оценок* (§ 8.2).

С "проклятием размерности" борются тоже *ранжированием*, а также *агрегированием*, что позволяет решать задачу поблочно (поагрегатно). Наиболее сложной при этом остается задача **выявления факторов**, способных описать изучаемое явление, а также **взаимосвязи** различных факторов, входных и выходных данных системы. Для этого помимо глубокого изучения физических особенностей системы подчас бывает необходимо проводить *многомерный статистический анализ* (глава 6) результатов экспериментов (вычислительных или натуральных).

При решении проблемы *адекватности* математической модели приходится очень придирчиво рассматривать **условия моделирования**, выделять из множества факторов главные, подлежащие изучению. Кроме того, в зависимости от конкретных свойств математической модели следует из всей палитры статистических методов выбирать наиболее приемлемые и эффективные критерии.

Дадим краткую характеристику упоминавшимся ранее методам, которые применяются для разработки математических моделей – методам математического моделирования.

Ранжирование – неформализуемый анализ, в результате которого можно произвести распределение параметров по **важности (рангу)**; наиболее важные необходимо учитывать, наименее важными иногда можно пренебречь, промежуточные по важности можно учесть в виде поправок, каждому из них можно приписать весовые коэффициенты.

Агрегирование (декомпозиция) – разбиение большого числа факторов (параметров) задачи на небольшое число групп, блоков (агрегатов) по определенному принципу; предполагает, с одной стороны, вполне конкретные связи между блоками, которые нетрудно формализовать и учесть, а с другой стороны, возможность решения необходимых вопросов внутри агрегата.

Теория катастроф – часть математической логики, которая позволяет в области изменения основных параметров (факторов), связанных **аналитически**, выявить точки, линии, плоскости и т.п. границы (*бифуркации*), на которых происходят резкие изменения качественного поведения рассматриваемой системы – "катастрофы" той или иной интерпретации поведения системы. Так, например, в динамике полета линия разграничения I и II режимов полета самолета – граница бифуркации, где I режим характерен естественной зависимостью: чем большей скорости установившегося полета требуется достичь, тем большую тягу двигателей следует развить, а II режим характерен обратной связью, на первый взгляд неожиданной.

Метод последовательных приближений – общее название группы математических методов, в которых на каждом очередном **цикле** однообразных вычислений определяются новые значения параметров, более точные, которые в свою очередь используются на следующем цикле.

Метод проб и ошибок – по результатам одного или нескольких (отличающихся подбираемыми значениями параметров) расчетов делается **вывод о направлении** дальнейшего подбора искомых значений для минимизации ошибки.

Метод перебора – процесс отыскания решения, в котором проверяются **возможные варианты**, или *простым* перебором всего их множества, или *случайным* перебором. Этот прием для непрерывно распределенных факторов механических систем и процессов, принимающих бесконечное множество значений на любом отрезке своего изменения, не может считаться методом, поскольку не гарантирует получение решения.

Метод проверки гипотез – процесс выдвижения, анализа и проверки разнообразных **предположений** о причинах появления определенного результата. Этот метод имеет смысл применять там, где требуется найти скорее качественное, чем количественное объяснение сложного и неординарного явления.

Обзор *методов экспертных оценок* приводится в § 8.2.

*Многомерный статистический анализ* – группа методов математической статистики, рассматриваемых в главах 6 и 8).

Другие методы математического моделирования, требующие подробного изложения, рассматриваются в последующих параграфах.

### 3.2. Подобие и анализ размерностей

Наиболее распространенным частным случаем математических моделей является случай *подобных моделей*. Подобные модели наиболее легко воспринимаются и вызывают у неподготовленных людей желание отбросить в сторону все строгости науки. Поэтому сформулируем в терминах теории моделирования строгое понятие подобия. Два *объекта подобны*, если выполнены **одновременно два** условия:

- 1) они имеют **одинаковые** математические описания;
- 2) их соответствующие переменные связаны **коэффициентами подобия** (масштабами, константами подобия, коэффициентами пропорциональности).

Рассмотрим подробнее особенности различных величин с точки зрения строгости построения подобных детерминированных математических моделей.

Еще древние заметили, что величины ведут себя по-разному по отношению к арифметическим действиям. Некоторые из них можно складывать, вычитать, умножать и делить, а результат арифметических действий с другими величинами не имеет смысла. Так, например, не имеет смысла сумма длины и времени, зато результат деления длины на время имеет вполне конкретный физический смысл скорости. Сумма длины и ширины прямоугольника, наоборот, имеет смысл полупериметра. Величины, сумма или разность которых имеет физический смысл, назвали **однородными**.

Для сравнения результатов измерений одной и той же или однородных величин необходимо было ввести некое мерило, масштаб. Поэтому были разработаны единицы измерения, и стали различать размерные и безразмерные величины. Единицей измерения физической величины  $D$  (размерностью, обозначаемой с помощью квадратных скобок  $[D]$ ) называется условно выбранная физическая величина, имеющая тот же самый физический смысл, что и величина  $D$ . Например, единицей измерения температуры может служить градус по шкале Фаренгейта, который равен  $1/180$  части разности температур кипения воды и таяния льда при нормальных атмосферных условиях, причем температура таяния льда принята за  $32^\circ\text{F}$ . Такое сложное описание единицы недопустимо в формулах, поэтому для размерностей были придуманы специальные краткие обозначения ( $^\circ\text{F}$ ). Однако это не означает, что единицы измерения – нечто второстепенное. Наоборот, всякое значение любой физической величины представляет собой **единство** численного значения (масштабного множителя по отношению к единице измерения) и размерности. Это жесткое сочетание при использовании в расчетах можно рассматривать как произведение.

Величины, численное значение которых зависит от принятых единиц измерения, называются размерными. Величины, численное значение которых



не зависит от принятых единиц измерения, называются безразмерными. Изучением размерных величин занимается анализ размерностей – мощный метод математического моделирования.

Все известные законы природы описываются с помощью функциональных связей между размерными величинами, поэтому для расчетов необходимо в эти связи подставлять значения величин вместе с их размерностями. Например, вычисляя по закону Ома величину тока  $I$  осветительной сети с напряжением  $U = 220$  В, протекающего через лампу сопротивлением  $R = 2$  кОм, необходимо произвести не только арифметические действия с числами, но и преобразования единиц измерения:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ В}}{2 \text{ кОм}} = \frac{220 \text{ В}}{2000 \text{ Ом}} = \frac{220 \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}}}{2000 \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{А}^2}} = 0,11 \text{ А}.$$

Порядок и правила применения размерностей устанавливают **системы единиц измерения**. В физике использовалось достаточно большое количество таких систем: СГС, техническая, МКС, МКСА, СГСЭ и СГСМ. В 1960 году в Париже XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла Международную систему единиц измерения, обозначаемую SI (в русской транскрипции СИ). Сегодня эта система на территории России утверждена ГОСТом 8.417–81 Единицы физических величин. Этим стандартом устанавливаются правила применения размерностей в технической документации, терминология и система обозначений.

Упомянутый пример с законом Ома показывает, что из некоторой совокупности одних единиц измерения можно получить другие единицы. Иными словами, в любой системе можно выделить основные единицы, через которые с помощью законов природы получаются остальные. В 1832 г. Гаусс предложил в качестве основных единиц измерения выбирать **независимые** единицы (попарно не связанные между собой законами природы), на которых строится вся система. В СИ основными единицами приняты:

- **метр** [м] в качестве меры длины,
- **килограмм** [кг] в качестве меры массы,
- **секунда** [с] в качестве меры времени,
- **ампер** [А] в качестве меры силы электрического тока,
- **кельвин** [°К] в качестве меры термодинамической температуры,
- **моль** [моль] в качестве меры количества вещества,
- **кандела** [кд] в качестве меры силы света.

Кроме этого вводятся дополнительные единицы измерения плоских углов – **радиан** [рад] и телесных углов – **стерадиан** [ср], по сути являющиеся безразмерными.

Остальные размерные единицы принято называть производными. Они получаются из основных с помощью физических законов. Например, единица

мощности  $N$  Ватт [Вт] получается применением следующих формул известных законов механики, использующих понятия работы, силы, массы и ускорения:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{mas}{t}; \text{ откуда } [N] = \text{Вт} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

Общепризнанность системы СИ определяется удачным выбором минимального набора основных единиц, обеспечивающего запись практически всех физических законов без использования размерных числовых коэффициентов.

Исходным положением теории размерностей является то, что все основные законы природы в любой системе единиц измерения описываются степенными комплексами:

$$z = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \dots \cdot x_n^{y_n},$$

– произведениями размерных параметров  $x_i$ , определяющих изучаемое явление, со своими числовыми показателями степеней  $y_i$ . Этот факт нельзя доказать, но он легко проверяется: действительно, законы Ньютона, Кулона, Фарадея и т.п. описываются именно степенными комплексами. Следует оговориться, что функциональные связи, содержащие знак + или –, не являются основными законами природы, а представляют суперпозицию нескольких независимых природных явлений, каждое из которых в свою очередь выражается степенным комплексом.

Нетрудно видеть, что выражение:

$$\Pi = \frac{z}{x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \dots \cdot x_n^{y_n}}$$

безразмерно, так как числитель и знаменатель его должны иметь одну и ту же размерность в силу записи закона природы. Этот факт уже можно доказать. Более того, можно доказать, что независимая от выбора системы единиц измерения связь между  $n + 1$  размерными величинами  $z, x_1^{y_1}, x_2^{y_2}, \dots, x_n^{y_n}$  принимает вид соотношения между  $n + 1 - k$  безразмерными степенными комплексами (критериями подобия), где  $k$  – количество величин из используемых  $n + 1$ , которые имеют независимые размерности. Так формулируется  $\Pi$ -теорема ("Пи-теорема" – по названию греческой буквы  $\Pi$ ).

Очевидно то фундаментальное место, которое занимает  $\Pi$ -теорема. Действительно: для функционального описания изучаемого явления достаточно выбрать параметры, которые его характеризуют, и составить из них все возможные критерии подобия. Эти критерии подобия содержат в себе с точностью до безразмерного числового коэффициента все действующие в данном явлении законы природы. Так, в частности, можно получить и новые законы, и доселе неизвестные исследователю.

П-теорема нашла широкое применение при разработке подобных детерминированных математических моделей. Так как у таких моделей математическое описание то же самое, что у оригинала, то и критерии подобия у них общие. А это означает, что недостающий в критерии подобия безразмерный числовой коэффициент можно определить эмпирически в процессе *идентификации* модели. Таким образом, можно составить недостающие элементы математической модели сложного явления.

**ПРИМЕР 1.** Равномерное поступательное движение описывается формулами: для объекта  $L = VT$ ; для подобной модели  $l = vt$ . Это означает, что при переходе от оригинала к модели должен сохраняться *безразмерный степенной комплекс*:

$$\frac{VT}{L} = \frac{vt}{l} = \Pi \text{ – критерий подобия.}$$

**ПРИМЕР 2.** Чем определяется вид движения вязкой жидкости в гладкой трубе (ламинарный или турбулентный)? Основные параметры явления: радиус трубы  $r$  [м], вязкость жидкости  $\mu$  [кг/(м·с)], плотность жидкости  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>], средняя скорость движения жидкости  $V$  [м/с]. Можно ли из этих параметров составить безразмерный степенной комплекс? П-теорема дает на это положительный ответ. Степенной комплекс  $\Pi = r^{y_1} \cdot \mu^{y_2} \cdot \rho^{y_3} \cdot V^{y_4}$  должен иметь размерность 1 хотя бы при одном комплекте значений показателей степеней. Это означает, что размерности величин  $r$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $V$ , будучи возведенные в соответствующие степени, после их перемножения должны дать 1. С другой стороны, поскольку размерности [м], [кг], [с] независимы (это основные единицы измерения в СИ) и не могут быть переведены друг в друга с помощью каких-либо степеней, постольку эту 1 можно получить только при условии равенства нулю всех показателей степени  $y$  [м], [кг], [с] в произведении размерностей рассматриваемых основных параметров, возведенных в соответствующие степени:

$$[\Pi] = [r]^{y_1} \cdot [\mu]^{y_2} \cdot [\rho]^{y_3} \cdot [V]^{y_4} = \text{м}^{y_1} \text{кг}^{y_2} \text{м}^{-y_2} \text{с}^{-y_2} \text{кг}^{y_3} \text{м}^{-3y_3} \text{м}^{y_4} \text{с}^{-y_4} = \\ = \text{м}^{y_1 - y_2 - 3y_3 + y_4} \text{кг}^{y_2 + y_3} \text{с}^{-y_2 - y_4} = \text{м}^0 \text{кг}^0 \text{с}^0.$$

Отсюда следует система линейных однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных  $y_i$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(м): } y_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 = 0 \\ \text{(кг): } y_2 + y_3 = 0 \\ \text{(с): } -y_2 - y_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Решение этой системы:  $y_2 = -y_4$ ,  $y_3 = y_4$ ,  $y_1 = y_4$ , где  $y_4$  – произвольно (свободное

неизвестное), дает безразмерный степенной комплекс вида:  $\Pi = \left( \frac{r\rho V}{\mu} \right)^{y_4}$  и в силу

произвольности числа  $y_4$  приводит к хорошо известному критерию подобия:  $Re = \frac{r\rho V}{\mu}$  –

вид движения жидкости в трубе определяется числом Рейнольдса.

**ПРИМЕР 3.** Этот пример применения П-теоремы демонстрирует возможность составления недостающих элементов математического описания, связывающих параметры исследуемого явления.

В условиях невесомости (при этом ускорение силы тяжести несущественно) рассматривается шар в вязкой жидкости. Для очень медленного равномерного движения шара (при этом плотность жидкости и масса шара несущественны) требуется определить вид зависимости силы сопротивления  $W$  от скорости движения  $V$  и других существенных параметров явления.

Из условия задачи следует, что масса шара, ускорение силы тяжести и плотность жидкости не являются для данного процесса существенными параметрами. Составим список других параметров, которые могут претендовать на существенные. Вязкость жидкости характеризуется коэффициентом динамической вязкости  $\mu$ , который в СИ имеет размерность  $[\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})]$ . Существенно влияние и диаметра шара  $d$ , и, по-видимому, размеров шероховатости поверхности шара  $h$ . Возможно влияние и температуры  $T$ . Таким образом выявлены следующие параметры, которые могут быть существенными в исследуемом явлении:  $d$ ,  $\mu$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $h$ ,  $T$ . Их размерности, выраженные через основные единицы измерений:  $[d] = \text{м}$ ,  $[\mu] = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$ ,  $[V] = \text{м}/\text{с}$ ,  $[W] = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ ,  $[h] = \text{м}$ ,  $[T] = \text{°К}$ .

Найдем вид возможных безразмерных степенных комплексов  $[\Pi] = 1$ , т.е. показатели степеней  $y_i$  при физических параметрах задачи, составляющих безразмерное произведение:

$$\Pi = d^{y_1} \cdot \mu^{y_2} \cdot V^{y_3} \cdot W^{y_4} \cdot h^{y_5} \cdot T^{y_6}.$$

Из приведенных размерностей следует:

$$\begin{aligned} [\Pi] = 1 &= [d]^{y_1} \cdot [\mu]^{y_2} \cdot [V]^{y_3} \cdot [W]^{y_4} \cdot [h]^{y_5} \cdot [T]^{y_6} = \\ &= \text{м}^{y_1} \text{кг}^{y_2} \text{м}^{-y_2} \text{с}^{-y_2} \text{м}^{y_3} \text{с}^{-y_3} \text{кг}^{y_4} \text{м}^{y_4} \text{с}^{-2y_4} \text{м}^{y_5} (\text{°К})^{y_6} = \\ &= \text{м}^{y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5} \cdot \text{кг}^{y_2 + y_4} \cdot \text{с}^{-y_2 - y_3 - 2y_4} \cdot (\text{°К})^{y_6}. \end{aligned}$$

Поскольку м, кг, с и °К – основные единицы, имеющие независимые размерности, то показатели степеней при каждой из них должны независимо обращаться в нуль:

$$\left. \begin{aligned} (\text{м}): \quad & y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 0 \\ (\text{кг}): \quad & y_2 + y_4 &= 0 \\ (\text{с}): \quad & -y_2 - y_3 - 2y_4 &= 0 \\ (\text{°К}) & & y_6 = 0 \end{aligned} \right\}$$

В этой системе линейных алгебраических уравнений для определения 6 неизвестных есть только 4 уравнения, поэтому решение выглядит как выражение четырех базисных неизвестных через два свободных. Выбор свободных неизвестных может быть произвольным, но таких комбинаций слишком много для полного перебора. Поэтому выберем в качестве одного из свободных неизвестных  $y_4$ , так как целью выкладок является получение функции для определения  $W$ , показателем степени которого и служит  $y_4$ . В качестве второго свободного неизвестного можно избрать лишь  $y_1$  или  $y_5$ , так как ни  $y_2$ , ни  $y_3$  в силу второго и третьего уравнений не могут быть свободным в паре с  $y_4$ , а  $y_6$  определяется однозначно. Таким образом, приходим к решению в одном из следующих видов:

1)  $y_5, y_4$  – свободные, тогда из (°К):  $y_6 = 0$ , из (кг):  $y_2 = -y_4$ , затем из (с):  $y_3 = -y_4$ , далее из (м):  $y_1 = -y_5 - y_4$ . Из курса линейной алгебры известно, что так как свободные неизвестные могут принимать любые значения независимо друг от друга, то

линейно независимые ортонормированные комбинации в пространстве двух переменных могут получиться в двух случаях:

1.1)  $y_5 = 1, y_4 = 0$ : тогда  $y_2 = y_3 = 0, y_1 = -1$ . Это приводит к безразмерному степенному комплексу вида:

$$\Pi = d^{-1} \cdot h^1,$$

который интерпретируется как критерий подобия, т.е. явления будут подобны при сохранении соотношения между  $h$  и  $d$  – геометрическое подобие движения различных шаров в жидкости;

1.2)  $y_5 = 0, y_4 = 1$ : тогда  $y_1 = y_2 = y_3 = -1$ . Это приводит к безразмерному степенному комплексу вида:

$$\Pi = d^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot V^{-1} \cdot W^1.$$

Отсюда вытекает искомая функциональная зависимость:

$$\frac{W}{\mu d V} = k \text{ или } W = k \mu d V,$$

где  $k$  – безразмерное число, так же как и  $\Pi$ ;

2)  $y_1, y_4$  – свободные, тогда из (°К):  $y_6 = 0$ , из (кг):  $y_2 = -y_4$ , затем из (с):  $y_3 = -y_4$ , далее из (м):  $y_5 = -y_1 - y_4$ . Рассуждениями, аналогичными п. 1, получаем:

2.1)  $y_1 = 1, y_4 = 0$ : тогда  $y_2 = y_3 = 0, y_5 = -1$  и безразмерный степенной комплекс вида:  $\Pi = d^1 \cdot h^{-1}$ , с той же интерпретацией;

2.2)  $y_1 = 0, y_4 = 1$ : тогда  $y_2 = y_3 = y_5 = -1$  и безразмерный степенной комплекс вида:  $\Pi = h^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot V^{-1} \cdot W^1$ , отличающийся от п. 1.2 только тем, что вместо  $d$  использует  $h$ . Если учесть критерий п. 2.1, то придем к той же зависимости, отражающей исследуемое физическое явление:  $W = k \mu d V$ .

Поскольку выбор любых других пар свободных неизвестных (без участия  $y_4$ ) приведет к критериям подобия, с возможным отсутствием  $W$ , что недопустимо для решения поставленной задачи, то принципиально иных критериев подобия с наличием  $W$  получить нельзя. Задача решена.

Ответ. Зависимость силы сопротивления вязкой жидкости при медленном движении шара в невесомости имеет вид:  $W = k \mu d V$ . Интересно отметить выявленную независимость рассматриваемого явления от температуры. Безразмерный коэффициент  $k$  не зависит от параметров  $\mu, d, V$  и  $W$ . Поскольку явление характеризуется и вторым критерием подобия  $h/d$ , и других критериев не существует, постольку  $k$  может определяться только этим отношением, т.е. принимает одно и то же значение для всех шаров с одинаковым отношением размера шероховатости  $h$  к диаметру  $d$ . Поскольку этот коэффициент  $k$  сохраняется в подобных явлениях, то для применения найденного соотношения в математическом описании достаточно определить его эмпирически в процессе идентификации модели;

Следует заметить, что в курсе аэродинамики совершенно из других рассуждений выводится закон Стокса, который совпадает с полученной зависимостью, если  $k = 3\pi$  (для гладкой трубы, при  $h \rightarrow 0$ ).

Замечание 1. Система определяющих явление параметров должна быть **полной**. Если это не так, то можно и не получить требуемый критерий подобия. Так, например, для определения величины мощности  $N$  некоторого процесса набора из трех параметров:  $\rho$  – плотность среды,  $s$  – путь,  $T$  – температура – недостаточно, так как у этих величин отсутствует размерность времени,

присутствующая в размерности мощности, и невозможно получить из всех этих четырех параметров безразмерный степенной комплекс, равно как и выразить мощность через остальные.

Замечание 2. П-теорема – мощное средство математического моделирования, но не являющееся панацеей. Получить с ее помощью принципиально новые законы природы невозможно. Действительно, для получения критериев подобия необходимо **знать размерности всех** основных определяющих параметров. Так, в примере 3 использовалась размерность коэффициента динамической вязкости  $\mu$ . Если бы она не была известна, как это было до Стокса, было бы невозможно найти критерий подобия и соответствующее соотношение. Заслуга Стокса состоит именно в том, что он на основании многолетних экспериментальных исследований **умозрительно** определил **физический смысл и размерность** этого параметра, и формулу, названную впоследствии его именем.

### 3.3. Понятие о теории графов

Идея использования компактных и наглядных схем легла в основу теории графов. Теория развилась в серьезный математический аппарат, весьма далекий от простейшего наглядного представления информации. Начавшись с задач о Кенигсбергских мостах, раскраски политической карты стран, о коммивояжере, современная теория графов позволяет решать задачи сложных систем, менеджмента и программирования для ЭВМ.

Для рассмотрения задач теории графов нам понадобится представление о ее понятийном аппарате, основанном на теории множеств.

Пусть задано конечное множество  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  элементов  $x_i$ , называемых вершинами. На рис. 11 показаны 7 вершин, в том числе вершина  $x_6$  изолированная. Если две вершины связаны линией без учета направления, то такая линия  $(x_i, x_j)$  называется ребром (например,  $(x_2, x_3)$ ), а такие вершины – смежными. В частности, можно рассматривать ребро, называемое петлей, которое возвращается в исходную вершину:  $(x_i, x_j)$ . На рис. 11 есть петля  $(x_1, x_1)$ . Если важно, откуда куда идет ребро:  $(x_i, x_j) \neq (x_j, x_i)$ , то оно называется дугой и обозначается стрелкой (например, левая дуга  $(x_2, x_5)$ ).

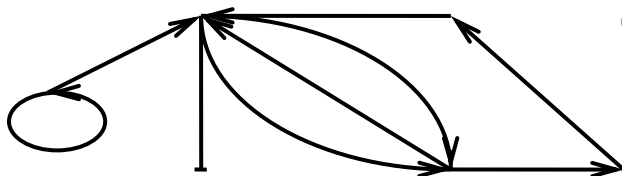


Рис. 11

Обозначим множество ребер  $U$ , а множество дуг  $\tilde{U}$ . Тогда пара объектов  $G = (X, U)$  называется (неориентированным) графом, а пара  $G = (X, \tilde{U})$  ориентированным графом.

Вершины могут соединяться не одной дугой, а несколькими, в этом случае их называют кратными дугами (пример кратных дуг: левая  $(x_2, x_5)$  и правая  $(x_2, x_5)$ ).

Вершинам и ребрам могут быть приписаны определенные числа, тогда *граф* называется помеченным. Смежные ребра имеют общую вершину (ребра  $(x_1, x_2)$  и  $(x_2, x_3)$ ). Конечная последовательность смежных ребер называется путем (например,  $(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_5, x_7)$ ). Путь, у которого первая и последняя вершины совпадают, называется циклом (например,  $(x_2, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_4), (x_4, x_2)$ ). Путь называется простым, если в нем все вершины кроме, может быть, первой и последней различны. Цикл называется простым, если соответствующий путь простой.

Полустепень исхода вершины – количество исходящих из нее дуг. Полустепень захода вершины – количество входящих в нее дуг. Степень вершины – их сумма. На рис. 11 вершина  $x_1$  имеет полустепень исхода 2, полустепень захода 1 и степень 3. В неориентированном графе используется только понятие степени, например, у вершины  $x_3$  степень равна 1.

Граф, в котором для любой пары вершин существует хотя бы один путь, называется связанным графом.

*Задача о Кенигсбергских мостах* была сформулирована и решена Л. Эйлером. Жители этого города размышляли о возможности обойти однократно все мосты и вернуться обратно. На языке теории графов это звучит так: существует ли в графе простой цикл, содержащий все ребра графа (эйлеров цикл). Эйлер доказал, что такое возможно тогда и только тогда, когда граф связан и степени его вершин четны. В Кенигсберге XVIII века было 7 мостов, связывающих 2 берега реки и 2 острова (рис. 12), т.е. степени всех вершин нечетны и задача не имеет решения.

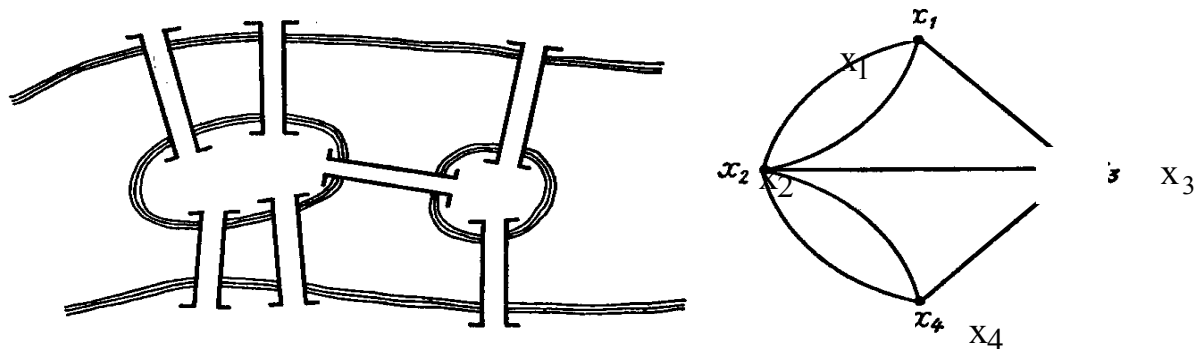


Рис. 12

*Задача о коммивояжере* – первая из цикла "транспортных" задач и, как оказалось, наиболее общая из них – тоже была сформулирована в XVIII веке и стала классической для теории графов. В ней требуется найти кратчайший

замкнутый маршрут (цикл), проходящий через все назначенные пункты по одному разу. (Не следует путать эту задачу, в которой рассматривается однократное появление в **вершинах помеченного графа**, с предыдущей с кратными дугами). Следует отметить, что к категории транспортных задач относятся задачи менеджмента, например, об оптимальном назначении сотрудников для получения наибольшего эффекта или для минимизации возможных допустимых просчетов, а также задачи распределения ресурсов.

*Задача о раскраске политической карты* формулируется следующим образом: можно ли любую политическую карту раскрасить четырьмя цветами так, чтобы имеющие общую протяженную границу страны обозначались различными цветами. В терминах графов это означает возможность раскрасить четырьмя цветами вершины произвольного неориентированного графа так, чтобы никакие две смежные вершины не были выкрашены одинаково. Интересен тот факт, что для двух, трех, пяти красок на плоскости задача давно решена. А для четырех красок ее удалось разрешить только в конце 80-х годов XX века и только с помощью компьютера!

Успехи применения теории графов объясняются тем, что большинство задач в ней доведено до строго обоснованных алгоритмов. Однако решить конкретную практическую задачу значительно проще, чем подобрать пригодное готовое решение обобщенной.

### 3.4. Теория массового обслуживания

Усвоение материала следующих двух §§ 3.4 и 3.5 требует знания основ теории вероятностей, хотя бы в объеме §§ 5.1 и 5.3.

Для построения *имитационных моделей* сложных систем (при отсутствии аналитического вида математического описания хотя бы для некоторых элементов) применяют методы *теории массового обслуживания* и *метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)* – разделы теории вероятностей.

Теория массового обслуживания изучает модели систем массового обслуживания, представляющие собой системы, которые по одному или многим *каналам* обслуживают поступающие в них *заявки*. Примерами систем массового обслуживания могут служить АТС, кассы, АТБ, диспетчер и т.п.

Заявки в систему массового обслуживания поступают не одновременно, а как-то случайно – распределённо во времени – т.е. случайным потоком. Каждая заявка может быть выполнена за свой собственный интервал времени. В некоторых системах массового обслуживания заявка может попадать в очередь и дожидаться, когда освободится какой-либо канал обслуживания. Таким образом, системы массового обслуживания представляют собой *модели* случайных процессов поступления и обработки заявок. Поток заявок, время их выполнения (обслуживания), условия существования очереди – эти параметры систем



массового обслуживания имеют характеристики, описываемые *законами распределения*.

Теория массового обслуживания различает некоторое число **состояний системы** (например, 1 заявка находится на обслуживании в одноканальной системе, а 4 ожидают в очереди). Каждое из них характеризуется вероятностью нахождения системы в этом состоянии. Кроме того, рассматриваются вероятности перехода системы из одного состояния в другое.

Для наглядности представления состояний систем массового обслуживания применяют графы. Например, телефонный номер может быть в одном из двух состояний: свободен или занят. Граф состояний такой системы массового обслуживания изображен на рис. 13.

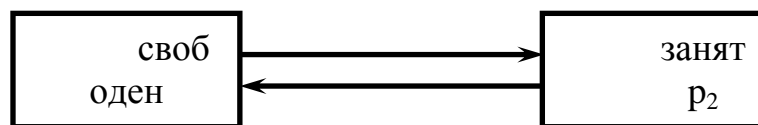


Рис. 13

В этом примере  $p_1$  и  $p_2$  задают вероятности того, что номер находится в свободном или занятом состоянии, соответственно. Вероятность перехода телефонного номера из свободного состояния в занятое задается величиной  $p_{12}$ ,

а в обратном направлении  $p_{21}$ . Очевидно, что  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , где  $n$  — число

возможных состояний системы. Это уравнение носит название условия нормировки.

Если рассматривать такую систему во временном процессе, то вероятности состояний представляются функциями  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , зависящими от времени  $t$ , а вероятности переходов функциями  $p_{12}(t, \Delta t)$ ,  $p_{21}(t, \Delta t)$ , зависящими от времени  $t$  и интервала времени  $\Delta t$ , в течение которого с момента  $t$  может произойти переход системы из состояния в состояние. В свою очередь вероятности переходов определяются **поток**ом заявок на обслуживание, поэтому чрезвычайно важно, какие характеристики имеет этот поток.

Для систем массового обслуживания имеет значение не вид заявки, а лишь факт и момент ее появления на обслуживании, а также факт и момент окончания обработки заявки, поэтому появления или исчезновения (выполнения) заявок рассматриваются как *однородные события*.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

Поток событий называется стационарным, если он однороден во времени (не зависит от календарного времени).

Поток событий называется ординарным, если события в потоке происходят по одиночке, а совместного появления двух и более событий не происходит.

В потоке отсутствует последствие, если события в потоке появляются независимо друг от друга (момент появления следующего события не зависит от момента появления предыдущего).

Поток событий называется пуассоновским, если он *ординарен* и не имеет *последствия*.

Поток событий называется простейшим (стационарным пуассоновским), если он *стационарен, однороден* и не имеет *последствия*.

Интенсивностью потока событий называется среднее число событий в единицу времени ( $\lambda(t)$  – для нестационарного потока,  $\lambda = \text{const}$  – для стационарного потока).

Для *простейшего* потока вероятность появления события за промежуток времени  $\Delta t$  определяется формулой:  $p(1, \Delta t) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}$ , где  $\lambda \Delta t$  может трактоваться как среднее число событий на интервале времени  $\Delta t$ . Вероятность того, что за промежуток времени  $\Delta t$  не появится ни одного события:  $p(0, \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}$ .

Для систем массового обслуживания с пуассоновскими потоками заявок и их выполнения применяется математический аппарат марковских случайных процессов. Случайный процесс в системе называется марковским (процессом без последствия), если для каждого момента времени  $t$  вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в момент  $t$ , но не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Системы массового обслуживания делятся на два типа: системы с отказами и системы с ожиданием (с очередями). В системах с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получает отказ и пропадает. В системах с ожиданием в таком случае заявка становится в очередь и ждет, когда освободится какой-нибудь канал, и сразу поступает в него на обслуживание.

На примере рис. 13 рассмотрим вероятность нахождения *системы с отказами* в определенном состоянии в определенный момент времени  $t + \Delta t$ , где  $\Delta t$  такой малый промежуток времени, что вероятность появления на нем более одного события пренебрежимо мала. Тогда из линейного приближения ряда Тейлора вероятность **непоявления** за  $\Delta t$  ни одного телефонного вызова определится  $p(0, \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t$ . Следовательно, вероятность того, что телефон за время  $\Delta t$  **не** перейдет из состояния "свободен", в котором он находился в момент времени  $t$ , в состояние "занят" вычислится как:  $p_1(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t)$ .

Аналогичными рассуждениями можно получить вероятность появления за  $\Delta t$  одного телефонного вызова:  $p(1, \Delta t) = \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t$  и вероятность того, что телефон за время  $\Delta t$  перейдет из состояния "занят", в котором он находился в момент времени  $t$ , в состояние "свободен":  $p_2(t) \cdot \mu \Delta t$ . Здесь  $\mu$  – интенсивность потока "завершения разговоров по телефону".

Таким образом, вероятность нахождения телефона в состоянии "свободен" в момент времени  $t + \Delta t$  вычислится:

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t) + p_2(t) \cdot \mu \Delta t$$

откуда после переноса  $p_1(t)$  в левую часть уравнения, деления на  $\Delta t$  и перехода к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  получается дифференциальное уравнение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t). \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= -\mu p_2(t) + \lambda p_1(t). \end{aligned} \right\} \text{Аналогично:}$$

Такая система дифференциальных уравнений вероятностей состояний системы массового обслуживания носит название уравнений Эрланга.

В общем случае системы массового обслуживания уравнения Эрланга составляются по следующему правилу:

- в левой части каждого уравнения находится производная по времени от вероятности соответствующего состояния системы;
- в правой части находится столько слагаемых, сколько дуг графа связано с соответствующим состоянием системы;
- знак каждого слагаемого в правой части определяется направлением дуг графа: минус – если дуга исходит из данного состояния, плюс – если дуга входит в данное состояние;
- каждое слагаемое имеет вид произведения интенсивности потока событий по данной дуге на вероятность состояния, из которого выходит данная дуга.

В том случае, когда отыскивается стационарный режим работы системы (установившийся режим, когда вероятности состояний не зависят от времени), дифференциальные уравнения Эрланга вырождаются в систему алгебраических уравнений за счет обнуления производных. Так, например, для системы массового обслуживания типа телефона (рис. 13) в установившемся режиме работы можно определить следующие характеристики:

- вероятность "соединения" с абонентом  $p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ;
- вероятность получить отказ ("занято")  $p_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ;
- абсолютная пропускная способность – среднее число обслуженных заявок (разговоров) за единицу времени:  $A = \lambda p_0 = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$ .

Классическим примером системы массового обслуживания с отказами является так называемый процесс гибели и размножения, характеризующийся последовательной цепочкой состояний и возможностью перехода только в **соседние** состояния (рис. 14).

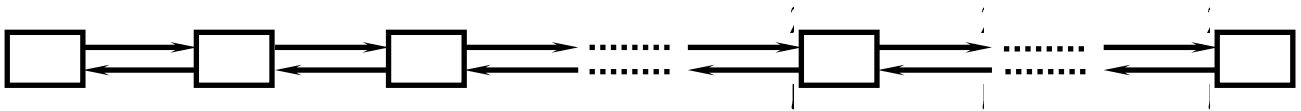


Рис. 14

Здесь  $S_i$  – состояния системы,  $\lambda_{i,i+1}$  – интенсивности переходов из низшего состояния в очередное высшее,  $\mu_{i+1,i}$  – интенсивности обратных переходов из высшего состояния в предыдущее низшее.

Предельные вероятности состояний (при  $t \rightarrow \infty$ , в установившемся случае) определяются следующими формулами:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} + \dots + \frac{\lambda_{12} \dots \lambda_{n-1,n}}{\mu_{21} \dots \mu_{n,n-1}}}; \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} p_1; \quad p_3 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} p_1;$$

$$\dots; \quad p_n = \frac{\lambda_{12} \dots \lambda_{n-1,n}}{\mu_{21} \dots \mu_{n,n-1}} p_1.$$

Частным видом системы массового обслуживания типа *процесса гибели и размножения* является *многоканальная система с отказами* (рис. 15). В этом случае нумерацию состояний разумно начать с 0, тогда состояние  $S_0$  – свободное состояние всех каналов системы; состояние  $S_i$  – в системе заняты  $i$  каналов; все  $\lambda_{i-1,i} = \lambda$ , а  $\mu_{i,i-1} = i\mu$ .

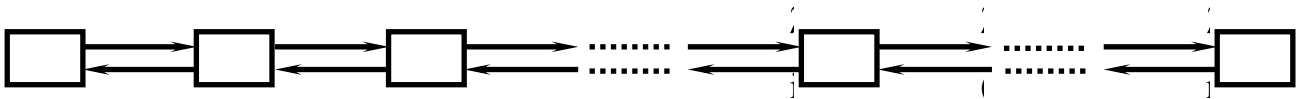


Рис. 15

В такой системе предельные вероятности состояний (при  $t \rightarrow \infty$ , в установившемся случае) определяются следующими формулами:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}; \quad p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , и можно определить следующие характеристики:

– вероятность отказа  $p_{\text{отк}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$ ,

– относительную пропускную способность  $q = 1 - p_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0$ ,

– абсолютную пропускную способность  $A = \lambda q = \lambda(1 - p_n) = \lambda \left( 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right)$ ,

– среднее число занятых каналов  $\bar{k} = \rho(1 - p_n) = \rho \left( 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right)$ .

Системы массового обслуживания *с ожиданием* (с очередью длиной  $m$ ) строятся на основе того же процесса гибели и размножения, в котором укорачивание очереди на одну заявку, поступившую на освободившийся канал обслуживания, имеет интенсивности перехода, равные произведению интенсивности обслуживания одним каналом на число каналов  $n$ :  $n\mu$  (рис. 16).

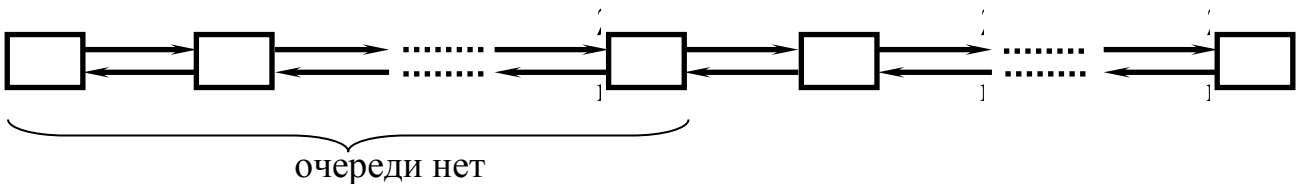


Рис. 16

В этой системе предельные вероятности состояний (при  $t \rightarrow \infty$ , в установившемся случае) определяются следующими формулами:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho - n}{1 - \frac{\rho}{n}}}; \quad p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0; \quad \dots; \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0; \quad \dots; \quad p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0,$$

где  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , и можно определить следующие характеристики:

– вероятность отказа  $p_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$ ,

– относительную пропускную способность  $q = 1 - p_n = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$ ,

– абсолютную пропускную способность  $A = \lambda q = \lambda \left( 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)$ ,

– среднее число занятых каналов  $\bar{k} = \rho(1 - p_n) = \rho \left( 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0 \right)$ ,

– среднюю длину очереди  $\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{1 - (m+1)\alpha^m + m\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)^2}$ , где  $\alpha = \frac{\rho}{n}$ ,

– среднее число заявок, связанных с системой  $\bar{z} = \bar{k} + \bar{r}$ ,

- среднее время ожидания в очереди  $t_{ож} = \frac{\rho^n p_0}{n \cdot n! \mu} \frac{1 - (m+1)\alpha^m + m\alpha^{m+1}}{(1-\alpha)^2}$ ,
- среднее время пребывания заявки в системе  $t_{сист} = t_{ож} + \frac{q}{\mu}$ .

В классической теории массового обслуживания вероятностные характеристики ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) и законы распределения состояний и переходов между ними полагаются пуассоновскими. Если это не так, то их можно определить статистически – наблюдая работу оригинальной системы. В этом случае приходится пользоваться более сложным математическим аппаратом, описывающим процессы перехода системы из состояния в состояние.

**ПРИМЕР.** Примером такого рода задач является разработка в МГТУ ГА математического аппарата для оценки уровня безопасности полета конкретного воздушного судна, исходя из его текущего состояния. Это задача может быть решена и в обратной постановке: исходя из нормативных требований летной годности определить допустимое время безаварийной эксплуатации. Исходным для формулировки указанной задачи является полный граф состояний системы "экипаж – воздушное судно – среда", изображенный на рис. 17.

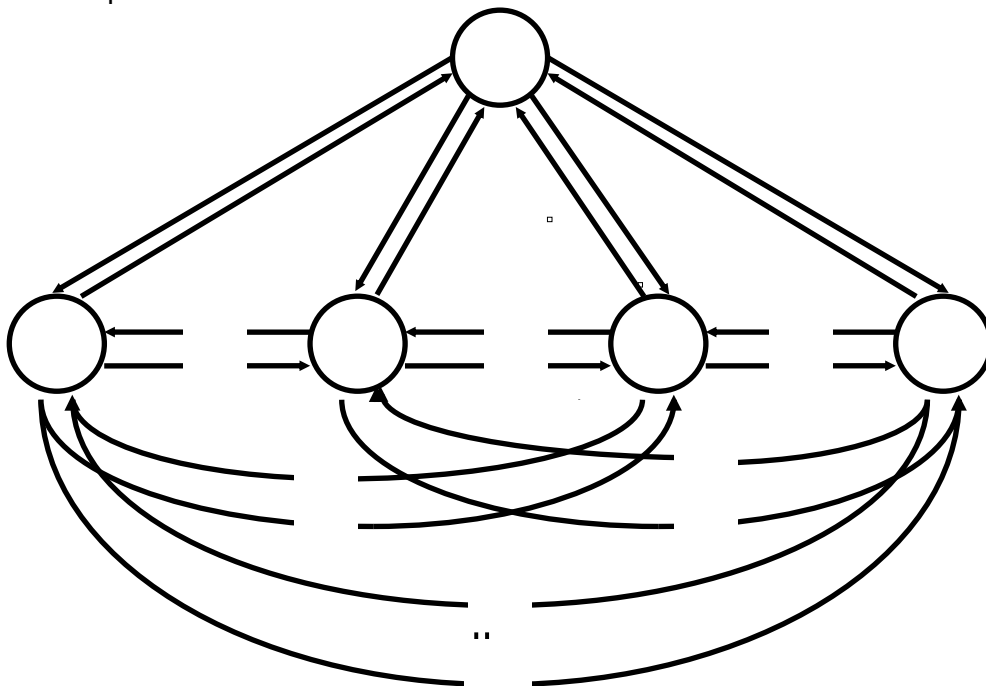


Рис. 17

В этом графе состояния системы характеризуются своими значениями вероятностей, нормируемыми требованиями летной годности:  $A_0$  – нормальное, исправное состояние;  $A_1$  – состояние усложнения условий полета;  $A_2$  – сложная ситуация (вероятность появления за 1 ч полета не более  $10^{-4}$ );  $A_3$  – аварийная ситуация ( $10^{-6}$ );  $A_4$  – катастрофическая ситуация ( $10^{-9}$ ).

### 3.5. Метод Монте-Карло

В тех случаях, когда решение уравнений перехода в системе массового обслуживания затруднено, используется метод статистических испытаний. Этот универсальный метод *стохастического (имитационного)* моделирования позволяет не только определять параметры системы, но и **имитировать** ее работу. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) сводится к **розыгрышу** случайных событий в системе массового обслуживания.

Элементарным примером такого розыгрыша может служить выбор одного из двух исходов с помощью подбрасывания монетки.

Метод Монте-Карло включает в себя три этапа: получение случайного числа  $R$ , отождествление его с вероятностью и розыгрыш единичного жребия.

Случайное число  $R$  – значение **случайной величины, равномерно распределенной** на интервале  $[0, 1]$ . Такое случайное число можно получить с помощью рулетки, размеченной, например, простыми десятичными дробями – отсюда и название метода Монте-Карло. Ранее пользовались таблицами случайных чисел, и процесс реализации даже одного единичного жребия был длительным. Для ЭВМ существуют специальные программы – "датчики случайных чисел", которые позволяют при каждом обращении к программе получить "псевдослучайное число" (случайную величину, распределенную **почти** равномерно на  $[0, 1]$  и принимающую конечное множество значений, определенное разрядной сеткой ЭВМ).

Случайное число ставят в **соответствие** вероятности рассматриваемого события, так как и случайное число, и вероятность принимают значения на интервале  $[0, 1]$ .

В теории вероятностей условились называть единичным жребием любой опыт со случайным исходом, который **отвечает** на один из следующих вопросов:

- "произошло" или "не произошло" (якобы) определенное событие  $A$ ;
- какое событие из полной группы независимых событий  $\{A, B, \dots, C\}$  "произошло" (якобы);
- какое значение "приобрела" случайная величина (якобы).

Для ответа на **первый вопрос** единичного жребия необходимо знать вероятность события  $A$ :  $p(A) = p$ . Тогда, если разыгранное случайное число  $R < p$ , то считают, что событие  $A$  "произошло", если  $R > p$ , то не "произошло" (рис. 18).

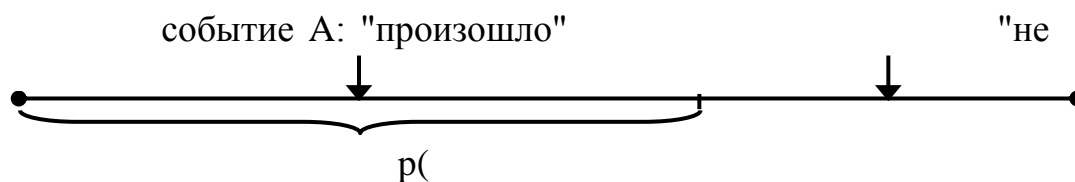


Рис. 18

*Полная группа событий* – это такая группа событий, кроме которых никаких других событий произойти не может. *Независимые события* не происходят одновременно. Таким образом, полная группа независимых событий  $\{A, B, \dots, C\}$  имеет сумму вероятностей, равную единице. Иначе

говоря, на интервале  $[0, 1]$  можно выделить последовательность непересекающихся подынтервалов длиной, равной вероятностям этих событий  $p(A), p(B), \dots, p(C)$ . Тогда ответ на **второй вопрос** единичного жребия о том, какое из событий "произошло", делают по тому факту, на какой из подынтервалов попало случайное число  $R$  (рис. 19).

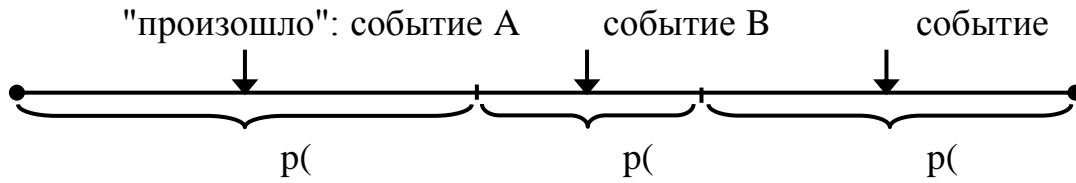


Рис. 19

В **третьем случае**, если случайная величина дискретна, то процедура сводится к предыдущей. Непрерывная случайная величина, как известно, задается законом распределения в виде интегральной функции распределения  $F(x) = P(\xi < x)$ , т.е. вероятности того, что случайная величина  $\xi$  примет значение, не превосходящее  $x$ . Эта функция по своему смысловому содержанию является **монотонно возрастающей** от 0 до 1 при изменении  $\xi$  от нижней до верхней границы области возможных значений. В силу монотонности эту функцию можно **обратить однозначно**: по заданному значению  $F(x)$  определить единственное значение  $x$ , ему соответствующее. Тогда случайное число  $R$  рассматривают как значение вероятности  $F(x)$  и по нему находят значение  $x$ , которое "приобрела" случайная величина (рис. 20).

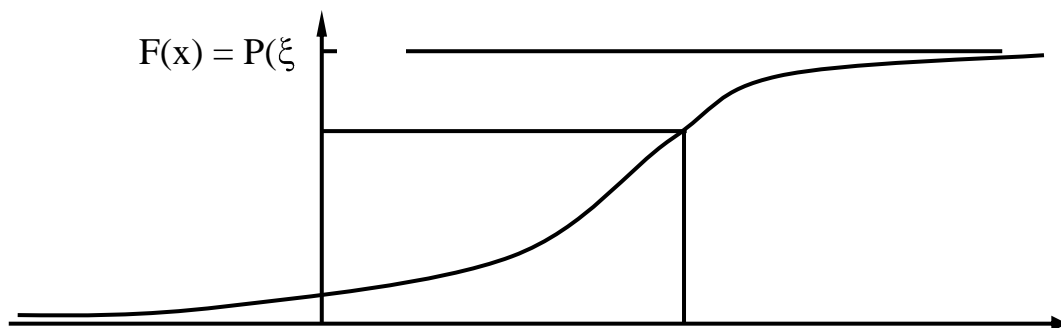


Рис. 20

Имея такой "аппарат" розыгрыша единичного жребия, нетрудно построить цепочку жребиев для реализации случайного явления любой сложности, в том числе и для имитации процесса функционирования систем массового обслуживания.

**ПРИМЕР.** Построение *имитационной математической модели*.

Требуется симитировать работу аэродрома методом Монте-Карло. Найти время, за которое совершат посадку и освободят ВПП 10 самолетов. Выделить интервалы времени, в течение которых ВПП свободна более 5 минут, т.е. когда вылетающий самолет может произвести взлет. Выделить номера самолетов, которым будет отказано в посадке по причине занятости ВПП.



Интервалы времени между очередными подлетами самолетов к ВПП  $\Delta t_c$  – случайная величина. Время, в течение которого ВПП занята совершающим посадку самолетом,  $\Delta t_3$  – тоже случайная величина. Статистической обработкой результатов наблюдения за работой реального аэродрома-прототипа получены интегральные функции распределения этих случайных величин, представленные в табличном виде:

$\Delta t_c$ , мин										0
$F_1(\Delta t_c)$	,02	,02	,23	,40	,56	,71	,83	,92	,97	
$\Delta t_3$ , мин	,2	,4	,6	,8	,0	,2	,4	,6	,8	,0
$F_2(\Delta t_3)$	,01	,02	,05	,19	,40	,67	,85	,96	,99	

При реализации метода Монте-Карло предлагается использовать следующую последовательность случайных чисел (взятых из таблицы или разыгранных с помощью рулетки или датчика случайных чисел): 0,31 0,91 0,06 0,49 0,01 0,08 0,91 0,05 0,45 0,86 0,54 0,79 0,94 0,90 0,75 0,85 0,08 0,39 0,99 0,23.

Для имитации работы аэродрома методом Монте-Карло построим расчетную таблицу вычисления моментов подлета самолетов  $t_c$  и моментов освобождения ВПП  $t_3$  (табл. 1). Для определения момента освобождения ВПП каждым самолетом  $t_3$  следует к моменту его подлета  $t_c$  прибавить время занятости ВПП  $\Delta t_3$ , определенное по функции распределения  $F_2(\Delta t_3)$  с помощью очередного случайного числа. Момент подлета очередного самолета определится с помощью прибавления к  $t_c$  предыдущего самолета интервала времени подлета очередного  $\Delta t_c$ , определенного по функции распределения  $F_1(\Delta t_c)$  с помощью очередного случайного числа. В том случае, если на каком-то шаге  $t_c$  очередного самолета окажется меньше  $t_3$  предыдущего (очередной самолет подлетел раньше, чем освободилась ВПП), этот подлетевший самолет не получает разрешения на посадку (ему предписывается уход на второй круг). Если на каком-то шаге время подлета очередного самолета окажется  $t_c > t_3 + 5$  (очередной самолет подлетает к аэродрому таким образом, что свободная ВПП ему понадобится не ранее, чем через 5 минут), то можно произвести взлет вылетающего самолета.

Таблица 1

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_c$	$t_c$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8
0,01	0,5	<b>6,2</b>	– посадка запрещена		
0,08	2,3	8,5	0,91	1,5	10,0
0,05	2,1	10,6	0,45	1,0	<u>11,6</u>
0,86	7,3	<u>17,9</u>	0,54	1,1	<u>19,0</u>
0,79	6,7	<u>24,6</u>	0,94	1,6	<u>26,2</u>
0,90	7,8	<u>32,4</u>	0,75	1,3	<u>33,7</u>
0,85	7,2	<u>39,6</u>	0,08	0,6	40,2
0,39	3,9	43,5	0,99	1,8	45,3

Вывод по результатам расчетов: 10 самолетов будут приняты диспетчером посадки за 45,3 минуты. 4 интервала времени, когда ВПП свободна более 5 минут, позволяют произвести взлет вылетающих самолетов в следующие периоды времени (в минутах): с 11,6 по 17,9; с 19,0 по 24,6; с 26,2 по 32,4; с 33,7 по 39,6. Третий самолет, подлетевший на 6,2 минуте, не получил разрешения на посадку, т.к. ВПП оказалась занятой предыдущим самолетом до 6,8 минуты.

Этот пример хорошо иллюстрирует возможности имитационных математических моделей обнаружить **новые свойства**, явно не заложенные в математическое описание или имеющие очень малую вероятность появления (запрещение посадки самолета по причине занятости ВПП). Следует заметить, что **математическое описание** вышеприведенного примера состоит лишь из двух законов распределения, заданных таблицами и полученных наблюдением за оригиналом, а также пояснения логической связи случайных величин.

Необходимо сделать еще одно замечание по поводу особенностей имитационных моделей. Так как основой таких моделей являются законы распределения случайных величин (или вероятностные характеристики случайных явлений), получаемые чаще всего из наблюдения за оригиналом, то вопрос о проверке *адекватности* отпадает: нет смысла проверять соответствие сымитированной и наблюдаемой реализаций случайных процессов, построенных на одном и том же законе распределения. Имеет смысл проверка адекватности только в том случае, когда используются априорные законы распределения, не полученные статистической обработкой наблюдений.

## Глава 4. Вычислительные методы и приемы

### 4.1. Вычислительные методы алгебры

В данной главе представлены наиболее распространенные вычислительные методы, используемые для численного решения отдельных задач, встречающихся при математическом моделировании.

**А) Методы решения систем линейных алгебраических уравнений**  $Ax = B$  (матричная запись) достаточно подробно изучаются в курсе высшей математики. Здесь следует упомянуть о необходимости анализа условий **применимости** каждого метода к решению конкретной задачи. Так, например, если в процессе вычисления коэффициентов матрицы системы нельзя гарантировать априори существенно отличное от нуля значение главного определителя системы, то применение правила Крамера или матричного метода невозможно. Наиболее универсальными (однако, тоже с оговорками) являются *методы исключения* неизвестных: различные варианты схем Гаусса, Жордана; а также *итерационные методы*: простой итерации, метод Зейделя и т.п.

**Б) Методы решения нелинейных алгебраических уравнений** вида:  $f(x) = 0$  (или систем нелинейных алгебраических уравнений) обычно строятся на основе итераций – многократных *последовательных приближений*. Общая идея итерационных методов заключается в преобразовании исходной задачи отыскания корня функции  $f(x)$  к итерационному виду:  $x = \varphi(x)$ . Далее строится **итерационный процесс** ("пошаговое уточнение" искомого значения  $x$ ) по формуле:  $x^{[i+1]} = \varphi(x^{[i]})$ , где  $[i]$  обозначает номер шага итераций. Такого рода формулы, позволяющие вычислять каждое **следующее** приближение, исходя из **предыдущего**, называются рекуррентными формулами. Возможны различные

способы приведения к итерационному уравнению, но для всех итерационных методов формулируются *условия сходимости* и оценка *погрешности*. Метод можно применять, только убедившись в выполнении для исходной функции условий сходимости – условий того, что итерационный процесс последовательного приближения сходится именно к решению этого уравнения. Последнее бывает не всегда: процесс может сходиться к решению совсем не исходной задачи, а другой может вообще расходиться или не сходиться ни к какому решению.

Наиболее распространенными итерационными методами решения одного нелинейного уравнения  $f(x) = 0$  являются *методы деления отрезка пополам, секущих, золотого сечения, касательных (Ньютона)*.

Все эти методы применяются только в той области изменения аргумента  $x$ , где безусловно **существует единственный** корень искомого уравнения. Если корня на этом отрезке нет, то и искать его там бессмысленно – решения нет. Если на отрезке несколько корней, то необходимо разбить его на такие части, которые содержат только по одному корню. Поэтому необходимо заранее убедиться в выполнении этого требования, проанализировав функцию  $f(x)$  на предполагаемом исходном отрезке.

Выбор начального интервала, на котором безусловно **существует единственный** корень искомого уравнения, называется отделением корней. Указанные условия можно выполнить, опираясь на **теорему** о монотонной на отрезке функции: всякая монотонная на отрезке функция принимает любое свое промежуточное значение в одной единственной точке внутри отрезка. В этом случае необходимо лишь показать выполнение **одновременно двух** свойств:

– **монотонности** на этом интервале функции  $f(x)$ , что проверяется по условию  $f'(x) \neq 0$  или из физических соображений;

– на концах этого отрезка  $x^{[0]}$  и  $x^{[1]}$  функция принимает значения **разных** знаков (т.е. на одном конце  $f(x^{[0]}) > 0$ , а на другом  $f(x^{[1]}) < 0$ ).

Этим будет гарантировано существование одной единственной точки внутри отрезка, в которой  $f(x) = 0$ .

В итоге процедуры отделения корней получается, что положение корня уравнения известно с точностью до длины выбранного отрезка. Остается построить итерационный процесс таким образом, чтобы на каждой итерации **уменьшать** отрезок, на котором находится корень.

1) Метод деления отрезка пополам для решения нелинейного алгебраического уравнения применяется на отрезке, для которого проведены процедура отделения корней, и использует итерационное уравнение в виде:

$$x^{[i+1]} = \frac{1}{2} (x^{[i]} + x^{[i-1]}).$$

Идея этого метода заключается в простейшей процедуре разбиения отрезка на две равные части и исследования, на какой из них находится искомый корень уравнения. Такие дробления и исследования **повторяются на каждой итерации** (рис. 21).

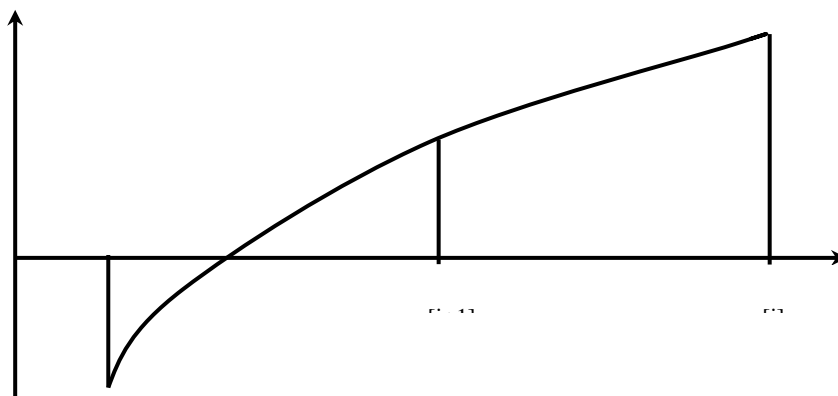


Рис. 21

Поскольку функция монотонна на всем отрезке, то она монотонна и на его части, поэтому на каждом шаге итерации достаточно выбрать тот (вдвое меньший) отрезок, на концах которого выполняются условия  $f(x^{[i+1]}) > 0$  и  $f(x^{[i]}) < 0$ . Так как после каждой итерации новый отрезок всегда меньше старого, то область возможного расположения корня постепенно сужается – стягивается в точку, а именно к решению исходного уравнения.

Итерации завершают, когда будет выполнено условие **заданной точности**. Это условие, в зависимости от постановки задачи исследований может быть сформулировано одним из двух способов: **по аргументу**  $|x^{[i+1]} - x^{[i]}| < \varepsilon$  (размер интервала стал меньше требуемой погрешности определения корня) или **по функции**  $|f(x^{[i+1]})| < \delta$  (значение функции пренебрежимо мало отличается от нуля).

Этот экономный метод, как видно из формулы, не использует значения функции для определения очередного приближения; и даже при выборе части интервала для следующего шага использует не столько значения функции, сколько лишь ее **знаки**. Алгоритм этого метода предельно прост.

2) Метод секущих (метод хорд) для решения нелинейного алгебраического уравнения **применяется, проводится и завершается** аналогично методу деления отрезка пополам (см. рис. 22).

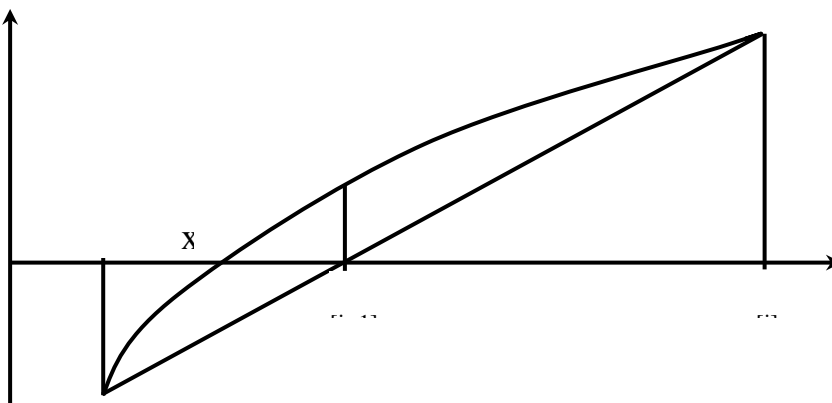


Рис. 22

Единственное его отличие заключается в итерационной формуле для отыскания очередного приближения, которая основана на пропорции для подобных треугольников (см. рис. 22):

$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{x^{[i]} - x^{[i-1]}}{f(x^{[i]}) - f(x^{[i-1]})} \cdot f(x^{[i]}).$$

Этот метод, как видно из формулы, использует для определения очередного приближения больше информации о функции – ее значения, поэтому от него следует априорно ожидать более быстрой сходимости к решению.

3) Метод золотого сечения для решения нелинейного алгебраического уравнения **применяется, начинается и завершается** так же, как и предыдущие методы. Его отличие от них заключается в применении не одной, а двух точек внутри отрезка, используемых для следующего шага итерации.

Золотым сечением отрезка  $[a, b]$  называются две точки:

$$u_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a) \approx a + 0,381966911(b - a),$$

$$u_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) \approx a + 0,618033989(b - a),$$

расположенные симметрично относительно середины отрезка. Каждая из этих точек делит исходный отрезок на две неравные части таким образом, что **отношение** длины **всего** отрезка к длине **большой** части равняется **отношению** длины **большой** части к длине **меньшей** части.

На каждом очередном шаге итераций при известных  $x^{[i]}$ ,  $x^{[i+1]}$  определяются точки  $u_1$  и  $u_2$  золотого сечения отрезка между точками  $x^{[i]}$  и  $x^{[i+1]}$  и знаки функции в точках золотого сечения:  $f(u_1)$  и  $f(u_2)$  (см. рис. 23).

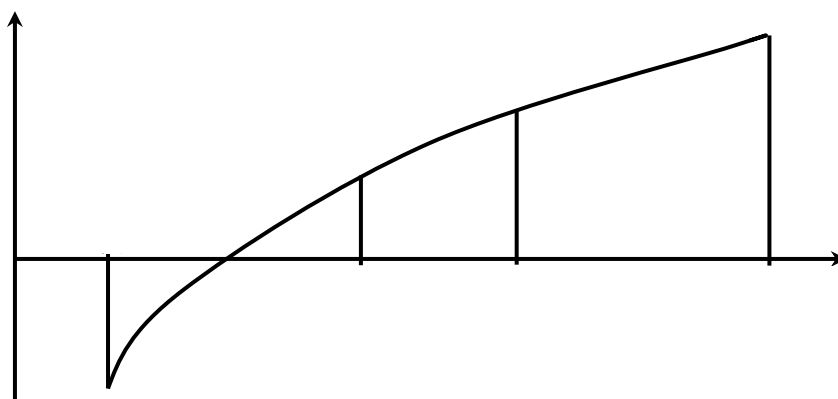


Рис. 23

Для перехода к следующему шагу итерации выбираются те две **ближайшие** друг к другу точки из четырех:  $x^{[i]}$ ,  $x^{[i+1]}$ ,  $u_1$  и  $u_2$ , в которых

значения функции различаются знаком. Эти точки образуют новый отрезок, на котором находится решение и следует проводить очередное золотое сечение.

Заметим, что метод золотого сечения, как и метод деления отрезка пополам, не использует значений функции: на каждой итерации для выбора отрезка нужны только знаки функции. Поэтому этот метод следует считать, вообще говоря, более экономным, чем метод секущих. С другой стороны, он быстрее сходится, чем метод деления отрезка пополам, так как на каждой итерации отрезок уменьшается почти втрое.

Преыдушие сравнения скорости сходимости методов весьма условны, так как этот процесс существенно зависит не только от вида функции, но и от выбора исходного приближения.

*Метод секущих, метод деления отрезка пополам и метод золотого сечения*, а также их модификации удобны тогда, когда **функция**  $f(x)$  вычисляется относительно **просто**, а искомый корень – единственный на известном отрезке. В случае, когда еще и **производная**  $f'(x)$  вычисляется достаточно просто, можно использовать более быстро сходящиеся методы, основанные на информации о производной, например, метод касательных (Ньютона).

4) Для применения метода касательных (метода Ньютона) требуется соблюдение не только прежних условий единственности решения на исходном отрезке, но и дополнительного условия сохранения своего знака второй производной  $f''(x) \neq 0$  (функция не только строго **монотонна** и имеет на концах отрезка значения **разных знаков**, но и **выпукла**, т.е. метод нельзя применять на интервале, где возможны несколько корней или точки перегиба).

Перед началом метода проводится процедура отделения корня.

В качестве итерационной формулы используется выражение:

$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{f(x^{[i]})}{f'(x^{[i]})},$$

которое следует применять к тому концу отрезка, на котором знаки  $f(x)$  и  $f''(x)$  **совпадают** (см. рис. 24). Если применить ее неверно, то можно получить следующее "приближение" вне исходного отрезка и метод начнет расходиться.

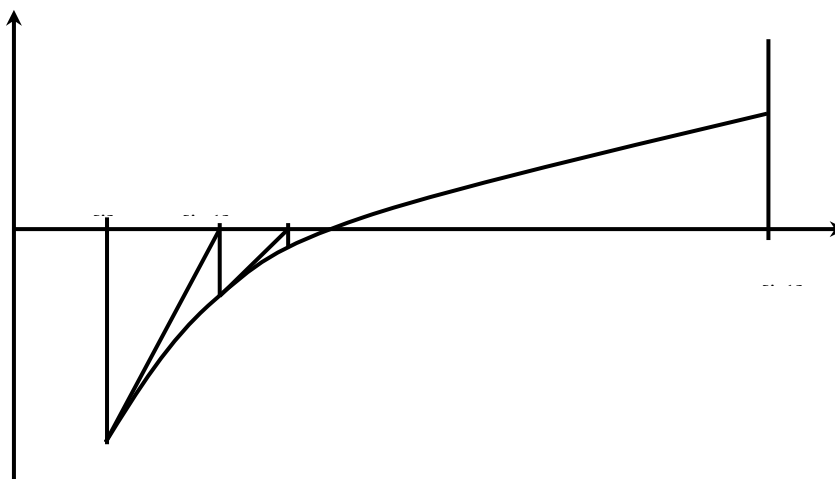


Рис. 24

Завершается метод касательных (метод Ньютона) так же, как предыдущие методы.

*Метод касательных (метод Ньютона)*, в отличие от остальных рассмотренных, может применяться и в многомерном случае, т.е. для решения невырожденных систем нелинейных алгебраических уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных. В этом случае формула метода трактуется в матричном представлении.

**В)** Методы интерполяции таблично заданных функций применяются для вычисления значений функции в точках между соседними узлами  $x_k$  и  $x_{k+1}$ , в которых значения функции  $f(x_k)$  и  $f(x_{k+1})$  **заданы**. Таким образом, интерполяция служит для **доопределения** функции в промежутках между заданными ее значениями в узлах.

Необходимость в такой процедуре возникает при использовании в математических моделях таких характеристик объекта, которые получены экспериментальным или сложным расчетным способом. При этом в зависимости от поставленной задачи могут предъявляться различные специфические требования к свойствам такой интерполяции. Различают следующие методы интерполяции.

1) Кусочно-постоянная интерполяция используется нами повседневно, когда мы говорим, сколько сейчас времени: в течение, например, минуты время считается постоянным (12 часов 27 минут). Графическое представление такой интерполяции приведено на рис. 25.

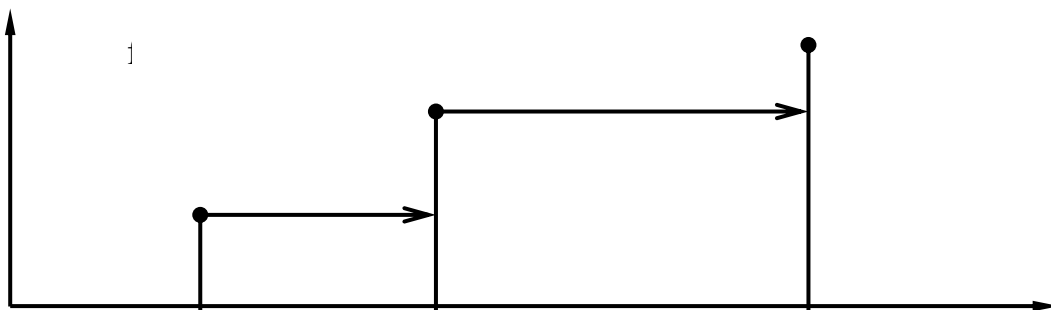


Рис. 25

Кусочно-постоянная интерполяция самая простая, но и обладает самыми примитивными качествами с точки зрения применения в моделировании. Действительно: в каждом узле полученная *интерполяционная функция* терпит разрыв, а разрывная функция применима далеко не во всех задачах.

2) Самая распространенная – линейная интерполяция – для нахождения значения функции в точке  $x$ , расположенной между соседними узлами (см. рис. 26), предполагает **линейный** характер изменения функции:

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k).$$

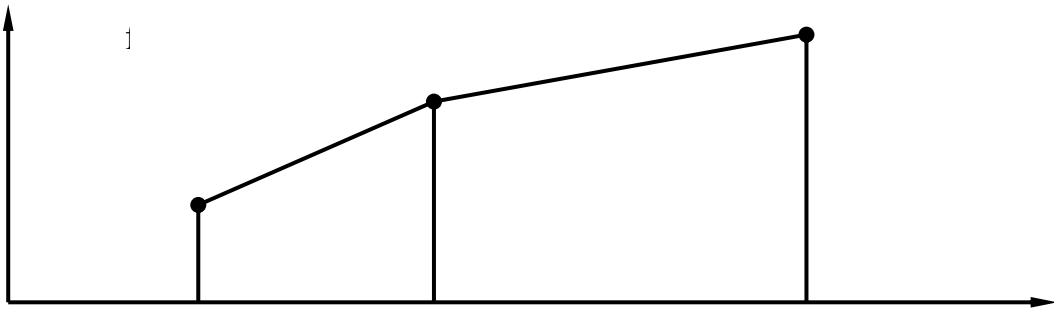


Рис. 26

Линейная интерполяционная функция непрерывна, однако имеет **разрывы производной** в узлах (представляет собой ломанную, связывающую отрезками прямых все заданные узлы). Поэтому, например, в задачах оптимизации, она неприемлема. Однако для простых расчетных процедур она самая употребительная, ее изучают в средней школе при работе с тригонометрическими функциями по таблицам В.М. Брадиса.

3) Квадратичная интерполяция развивает идею линейной для поиска "удобной" функции. Если одна единственная точка задает лишь одно свое значение (постоянная), а две точки – отрезок прямой (линейная функция), то квадратичная функция, как известно, проходит через три заданные точки. Поэтому для построения квадратичной интерполяционной функции используются три соседних узла таблично заданной функции (рис. 27).

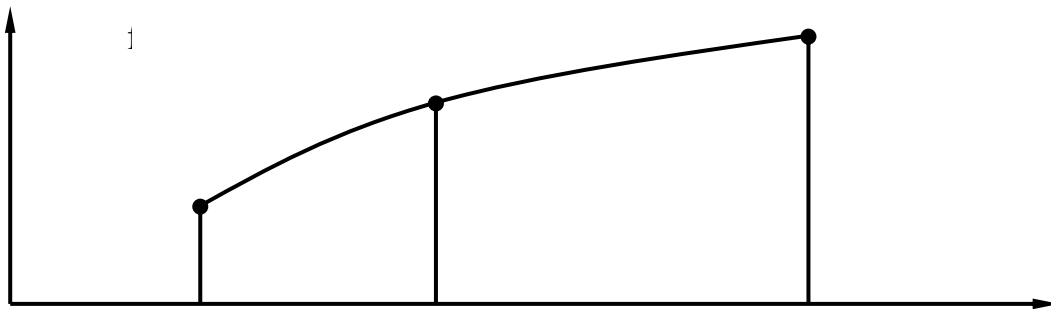


Рис. 27

Квадратичная интерполяционная формула получается именно из системы уравнений, описывающих прохождение многочлена второй степени через три точки, заданные соседними узлами:

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k) + \frac{f(x_{k+2}) - f(x_{k+1})}{x_{k+2} - x_{k+1}} - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k) \cdot (x - x_{k+1})$$



При малых изменениях  $x$  – между  $x_k$  и  $x_{k+2}$  – производная такой интерполяционной функции остается непрерывной даже в среднем узле  $x_{k+1}$ . Однако при смене "троек" узлов разрыва производной избежать не удастся.

4) Полиномиальная интерполяция развивает идею использования многочленов (полиномов) до **необходимого** числа узлов. В общем случае через  $n + 1$  точку проходит единственный многочлен степени  $n$ , так как для определения всех его коэффициентов (от свободного члена  $a_0$  до старшего  $a_n$ ) необходимо  $n + 1$  уравнение. Однако обычно вместо процедуры вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена используются готовые интерполяционные формулы, подобные приведенным выше, с помощью которых непосредственно вычисляется значение интерполяционной функции в любой точке между крайними узлами  $x_0$  и  $x_n$ . Наиболее известными из них являются интерполяционная формула Лагранжа:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \cdot f(x_1) + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot f(x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x-x_k)}{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x_i-x_k)} \cdot f(x_i)$$

и интерполяционная формула Ньютона:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) \cdot \Delta_1(x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_1) \cdot \Delta_2(x_0, x_1, x_2) + \dots + \frac{x-x_k}{k!} \cdot \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

где  $\Delta_1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0};$

$$\Delta_r(x_0, x_1, \dots, x_r) = \frac{\Delta_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_r) - \Delta_{r-1}(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})}{x_r - x_0} \text{ для } r = 2, 3, \dots, n.$$

Нетрудно видеть, что полиномиальная интерполяция, хотя и достаточно громоздка, но обеспечивает сколь угодно **гладкую** функцию – непрерывную вместе со **всеми** производными.

5) Сплайновая интерполяция – интерполяция с помощью таких многочленов (*сплайнов*) на **каждом** участке интерполяции между соседними узлами, которые не только совпадают в определенном числе узлов со значениями заданной функции, но и дают **необходимое число непрерывных производных** при переходе от одного участка интерполяции к соседнему. Для этого при определении очередного сплайна используют не только значения заданной в узлах функции, но и значения производных предыдущего (например, левого) сплайна в точках сопряжения. Сплайновая интерполяция

позволяет достаточно экономным образом получить интерполяционную функцию с заданными свойствами гладкости, что бывает необходимо, например, в задачах оптимизации.

**ПРИМЕР.** Сплайновая интерполяция с непрерывной первой производной. Начнем построение интерполяции с крайнего левого участка:  $[x_0, x_1]$ . Поскольку на концах его известны лишь два значения самой функции  $f(x_0)$  и  $f(x_1)$ , постольку однозначно определить можно лишь два коэффициента линейной интерполяционной функции (сплайна), т.е. два коэффициента  $a_0^{(0)}$  и  $a_1^{(0)}$  линейного сплайна вида:

$$f^{(0)}(x) = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} \cdot (x - x_0).$$

На любом последующем  $k$ -ом участке известны не только значения функции на его концах  $f(x_k)$  и  $f(x_{k+1})$ , но и одно значение производной, с которым предыдущий (левый) сплайн "пришел" в правый конец своего участка. Таким образом, имеется три соотношения, которые могут определить квадратичный сплайн (второго порядка) вида:

$$f^{(k)}(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \cdot (x - x_k) + a_2^{(k)} \cdot (x - x_k)^2.$$

В результате несложных преобразований получаем систему рекуррентных соотношений, позволяющих определить коэффициенты всех сплайнов, обеспечивающих интерполяцию с непрерывной первой производной:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{(0)} = f(x_0), \\ a_1^{(0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ a_0^{(k)} = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ a_1^{(k)} = a_1^{(k-1)} + 2a_2^{(k-1)} \cdot (x_k - x_{k-1}), \\ a_2^{(k)} = \frac{\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - a_1^{(k)}}{x_{k+1} - x_k}. \end{array} \right.$$

**Г) Методы аппроксимации функций** – методы **приближенной замены** заданной сложной функциональной зависимости более простой функцией (алгебраическим полиномом, тригонометрическим полиномом и другими функциями), которую можно построить с помощью метода наименьших квадратов – см. § 6.3).

Следует четко различать задачи *интерполяции* и *аппроксимации*. Если интерполяционная функция обязательно совпадает в узлах с заданной, то аппроксимирующая – не обязательно! Последняя чаще всего не проходит вообще ни через одну заданную узловую точку. Аппроксимация нужна для **простого** вычисления сложных функций или для *сглаживания* (построения гладкой заменяющей функции) таблично заданных функций, чаще всего экспериментальных.

Простейшей аппроксимационной формулой является известная **формула Тейлора**, приближенно отражающая поведение известной функции в окрестности единственной точки с учетом необходимого числа производных.

Аппроксимация **полиномами** рассмотрена при отыскании линии регрессии в § 6.3.

Если зависимость имеет явно выраженный характер ограниченной на отрезке или периодической функции, то может быть использована аппроксимация **тригонометрическими** функциями (конечной частью ряда Фурье).

Вообще говоря, искусство аппроксимации основывается на подборе такого класса (вида) функций, которые наиболее удачно отображают **физические свойства** аппроксимируемой зависимости. Геометрический вид этой зависимости, или формальные статистические признаки могут приниматься во внимание лишь во вторую очередь, что объяснимо, если вспомнить 7 принцип построения математических моделей (принцип приоритета физичности – см. § 2.5).

#### 4.2. Вычислительные методы решения дифференциальных уравнений

Численные *методы интегрирования* обыкновенных *дифференциальных уравнений* и их систем вида  $y' = f(x,y)$  можно построить только для случая известных начальных значений всех интегрируемых переменных (для задачи Коши). Общее решение дифференциальных уравнений содержит произвольные постоянные, которые недопустимы в математических моделях, поэтому в качестве искомой функции используется определенное начальными условиями частное решение.

Эти вычислительные методы основаны на замене дифференциальных уравнений алгебраическими. Операцию взятия производной невозможно представить в цифровых ЭВМ, поэтому производная заменяется **разностным** выражением того или иного вида. В зависимости от этого вида различаются *разностные схемы* численного представления дифференциальных уравнений и соответствующие им методы.

**А) Методы Эйлера.** **Простейший** метод Эйлера основан на **аппроксимации** производной простейшей разностной схемой вида:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Отсюда в силу решаемого дифференциального уравнения  $y' = f(x,y)$  выводится разностное уравнение метода:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x.$$

Рис. 28 дает геометрическое представление об этом методе: в силу вида исходного дифференциального уравнения функция  $f(x_k, y_k)$  представляет собой значение производной в левом конце интервала  $\Delta x$ , называемого шагом интегрирования. Тогда разностное уравнение метода Эйлера просто описывает выходящую из левого конца шага интегрирования касательную к неизвестной искомой интегральной кривой (изображенной пунктиром).

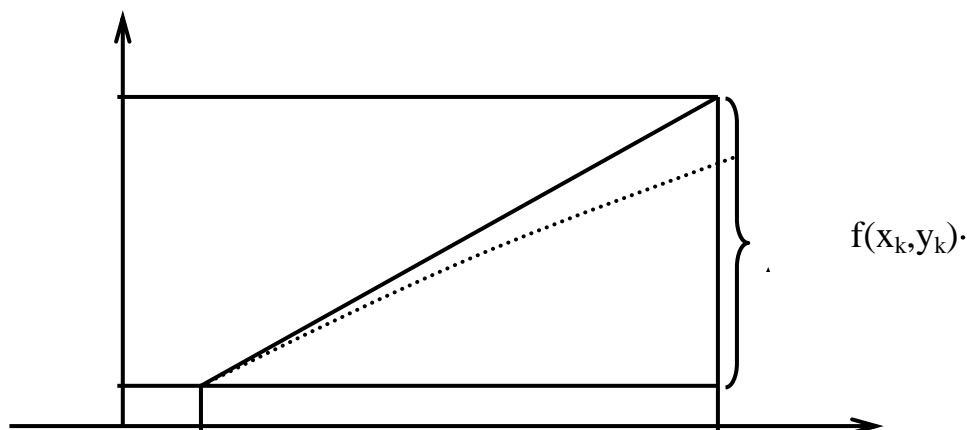


Рис. 28

Очевидно, что небольшую неизбежную погрешность при такой аппроксимации можно обеспечить только малым шагом интегрирования  $\Delta x$ . Поэтому численное решение задачи Коши на достаточно большом промежутке изменения аргумента – очень кропотливая процедура, немыслимая без вычислительной техники.

Простейший метод Эйлера относится к методам I порядка, поскольку использует в разностной формуле значение функции в **одной** точке.

Заметим попутно, что приведенная выше разностная схема аппроксимации производной не единственно возможная, например, схема I порядка  $y' \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$  и схема II порядка  $y' \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}}$  имеют такое же

право на аппроксимацию производной, однако интегрирование с их помощью обладает рядом особенностей.

Простейший метод Эйлера на практике почти не используется. Наибольшее распространение получили модифицированные методы Эйлера II порядка. Идея первой модификации заключается в выполнении шага интегрирования за **два полушага** и дает уравнение:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{1}{2} \Delta x + f(x_k + \frac{1}{2} \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{1}{2} \Delta x) \cdot \frac{1}{2} \Delta x.$$

Идея второй модификации заключается в выполнении **предварительного шага** интегрирования и поправки на касательную в конце шага:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x + f(x_k + \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x) \cdot \frac{1}{2} \Delta x.$$

Общими недостатками методов Эйлера I порядка являются **невысокая точность** и **слабая устойчивость** (погрешность одного шага интегрирования не только не компенсируется на последующих шагах, а растет – см. § 4.4). Например, для интегрирования уравнений динамики полета транспортных самолетов в условиях, близких к установившимся, с практической точки зрения допустимо пользоваться простейшим методом Эйлера. Но при исследовании

неустановившихся режимов полета этого недостаточно – следует применять модифицированные методы Эйлера, а для моделирования движения самонаводящихся ракет использование методов Эйлера практически недопустимо.

**Б) Методы Адамса** используют значения функции в нескольких предыдущих точках (учитывают предысторию поведения функции:  $y_{k-1} \dots$ ) для исправления направления касательной. Формула метода Адамса I порядка совпадает с формулой простейшего метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x,$$

а формулы более высокого порядка строятся наращиванием формул меньшего порядка:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] \Delta x \quad - \text{II порядка},$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] \Delta x + \\ + \frac{1}{12} [f(x_k, y_k) - 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_{k-2}, y_{k-2})] \Delta x \quad - \text{III порядка}.$$

Методы Адамса более **устойчивы**, чем методы Эйлера, а точность их растет с увеличением порядка. Трудоемкость расчетов по сравнению с другими методами такого же порядка (см. ниже) значительно меньше, так как используются значения функции, вычисленные ранее на предыдущих шагах интегрирования. Существенным неудобством методов Адамса является необходимость на первых шагах интегрирования использовать другие методы, поскольку значения функции в "предыдущих" точках не определены.

**В) Методы "прогноз-коррекция"** осуществляют расчет в два шага: предварительный расчет  $y_{k+1}^{\text{п}}$  – "прогноз" ("предсказание") и последующее уточнение – "коррекцию"  $y_{k+1}^{\text{к}}$ . Для построения формул метода "прогноз-коррекция" определенного порядка используются **формулы метода Адамса** того же порядка, например, для простейшего метода I порядка:

$$y_{k+1}^{\text{п}} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x \quad - \text{"предсказание"},$$

$$y_{k+1}^{\text{к}} = y_{k+1}^{\text{п}} = y_k + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{п}}) \cdot \Delta x \quad - \text{"коррекция"}.$$

Геометрическая интерпретация этого метода I порядка показана на рис. 29.

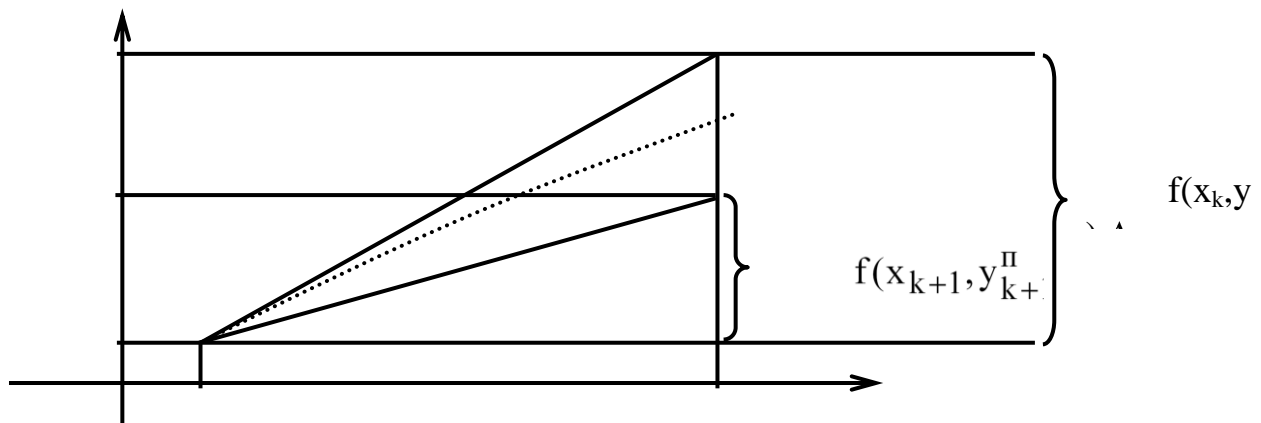


Рис. 29

При предсказании, как и при методе Эйлера (рис. 28), решение разностного уравнения на шаге отклоняется от точного решения в сторону **выпуклости** функции, так как строится с помощью касательной **в начале шага**. В свою очередь коррекция приводит к отклонению в сторону **вогнутости**, так как строится с помощью прямой, проведенной из той же исходной точки шага, но с наклоном, соответствующим наклону касательной **в конце шага**. Таким образом, разность между  $y_{k+1}^{\Pi}$  и  $y_{k+1}^K$  может служить **мерой погрешности** численного интегрирования на одном шаге. Т.е. методы "прогноз-коррекция" выгодно отличаются от ранее описанных методов тем, что допускают *контроль* величины погрешности на каждом шаге интегрирования. Это можно использовать для повышения точности расчетов с помощью уменьшения шага или для экономии времени расчетов с помощью увеличения шага  $\Delta x$ .

Для всех разностных методов справедливо утверждение: чем меньше  $\Delta x$ , тем меньше погрешность на шаге, тем выше точность интегрирования дифференциальных уравнений. Однако нельзя заранее сказать, какова должна быть величина  $\Delta x$  для обеспечения заданной точности. Поэтому расчеты с неприемлемой погрешностью просто идут "в корзину". В отношении этого выгодно отличаются разностные методы, которые позволяют не только контролировать погрешность, но и **изменять шаг в процессе** интегрирования. Этим последним удобством обладают все разностные методы I порядка, но из них только метод "прогноз-коррекция" дает возможность проконтролировать погрешность и подсказать, когда возникает необходимость изменения шага. Из методов более высокого порядка предоставляют возможность изменения шага интегрирования методы Эйлера и Рунге-Кутты.

Г) Методы Рунге-Кутты  $m$ -го порядка используют  $m$  внутренних точек шага интегрирования  $\Delta x$ :  $x_k^{(1)} = x_k; \dots; x_k^{(m)} \leq x_{k+1}$ , которые задаются характерным для определенной модификации этого метода способом и в которых **последовательно** вычисляются  $m$  значений функции:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k^{(1)}, y_{k+1}); \\
k_2 &= f(x_k^{(2)}, y_k + k_1 \cdot (x_k^{(2)} - x_k^{(1)})); \\
&\dots \\
k_m &= f(x_k^{(m)}, y_k + k_{m-1} \cdot (x_k^{(m)} - x_k^{(1)}));
\end{aligned}$$

а затем производится непосредственно сам шаг интегрирования:

$$y_{k+1} = y_k + \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i k_i \right) \cdot \Delta x.$$

Простейший метод Рунге-Кутты I порядка ( $m = 1$ ) – это метод Эйлера. Наиболее **распространенный** в программном обеспечении алгоритмических языков – "стандартный" метод Рунге-Кутты IV порядка использует 4 значения функции, вычисленные для двух промежуточных точек на шаге (в середине) и обеих крайних, и соответствующий набор коэффициентов  $\alpha_i$ :

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k); \\
k_2 &= f(x_k + \frac{1}{2} \Delta x, y_k + k_1 \cdot \frac{1}{2} \Delta x); \\
k_3 &= f(x_k + \frac{1}{2} \Delta x, y_k + k_2 \cdot \frac{1}{2} \Delta x); \\
k_4 &= f(x_k + \Delta x, y_k + k_3 \cdot \Delta x); \\
y_{k+1} &= y_k + \left( \frac{1}{6} k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \right) \Delta x.
\end{aligned}$$

Наиболее **экономичным** из методов Рунге-Кутта является метод II порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k); \\
k_2 &= f(x_k + \Delta x, y_k + k_1 \cdot \Delta x); \\
y_{k+1} &= y_k + \left( \frac{1}{2} k_1 + k_2 \right) \Delta x,
\end{aligned}$$

который по форме совпадает со вторым из приведенных выше модифицированных методов Эйлера. (Этот метод разработан как улучшение метода "прогноз-коррекция" I порядка, когда в качестве окончательного значения функции на шаге принимается среднее арифметическое между прогнозом и коррекцией – см. рис. 29)

Все методы Рунге-Кутта отличаются *устойчивостью* и возможностью *контроля погрешности* и **изменения шага** интегрирования. Однако по сравнению с методами Адамса того же порядка данные методы менее экономны, поскольку вычисленные для одного шага интегрирования значения функции нигде больше не используются. Поэтому применение методов Рунге-Кутта высоких порядков оправдано только тогда, когда необходима высокая точность или когда значения функции вычисляются сравнительно просто.

**ПРИМЕР.** Сравнение методов численного интегрирования дифференциальных уравнений проведем на примере решения следующей задачи Коши:

$$y' = -\frac{x-y}{x}; \quad y(1) = 0;$$

требуется определить  $y(2)$ . Результаты численного интегрирования рассмотренными выше методами с шагом  $\Delta x = 0,2$  сведены в табл. 2. В ней сравниваются: простейший метод Эйлера, простейший метод "прогноз-коррекция" I порядка, метод Адамса II порядка с началом (первый шаг) по методу Эйлера и метод Рунге-Кутты II порядка. Для краткости в табл. 2 обозначено:

$$f_k = f(x_k, y_k); \quad f_k^K = f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\Pi}); \quad f_k^+ = y_k + k_1 \cdot \Delta x.$$

В правом крайнем столбце для сравнения приведено точное решение этой задачи Коши:

$$y' = -\frac{1-x^2}{2x}; \quad y(2) = -0,75.$$

Из сравнения результатов численного интегрирования видно, что метод "прогноз-коррекция" действительно дает систематическую погрешность в сторону вогнутости графика функции, в то время как метод Эйлера – в сторону выпуклости (см. рис. 30). Хорошо виден процесс накопления погрешности. Методы I порядка, очевидно, проигрывают перед методами II порядка в точности. При подробном анализе этому можно найти объяснение в накоплении погрешности у первых и в ее явной компенсации у последних (в чем и проявляется устойчивость рассматриваемых методов II порядка). Наименее трудоемкими оказались методы Эйлера и Адамса. Метод Адамса проигрывает в точности методу Рунге-Кутты того же порядка, в основном из-за "нестандартного" и более грубого начала.

Таблица 2

Сравнительная таблица методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

		Эйле		"прогноз-коррекция"				Адамс		Рунге-Кутта				очное решение
		$x_k^p$	$y_k$	$f_k$	$y_k^{\Pi}$	$f_k^K$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$ 2	$y_k$ 1		
		1					1		1				1	0
,2	0,2	0,8(3)	0,2	0,8(3)	0,1(6)	0,8611	0,2[Э]	0,8(3)	0,2	0,8(3)	0,18(3)	0,8472	0,18(3)	
,4	0,3(6)	0,7381	0,3389	0,7579	0,3183	0,7727	0,35	0,75	0,3528	0,7480	0,3429	0,7551	0,34286	
,6	0,5143	0,6786	0,4728	0,7045	0,4592	0,7130	0,4917	0,6927	0,4939	0,6913	0,4876	0,6953	0,4875	
,8	0,6500	0,6389	0,6018	0,6657	0,5923	0,6709	0,6245	0,6531	0,6267	0,6519	0,6223	0,6543	0,6(2)	
,0	<b>0,7778</b>		0,7265	0,6368	<b>0,7197</b>		<b>0,7512</b>		0,7532	0,6234	<b>0,7501</b>		<b>0,75</b>	



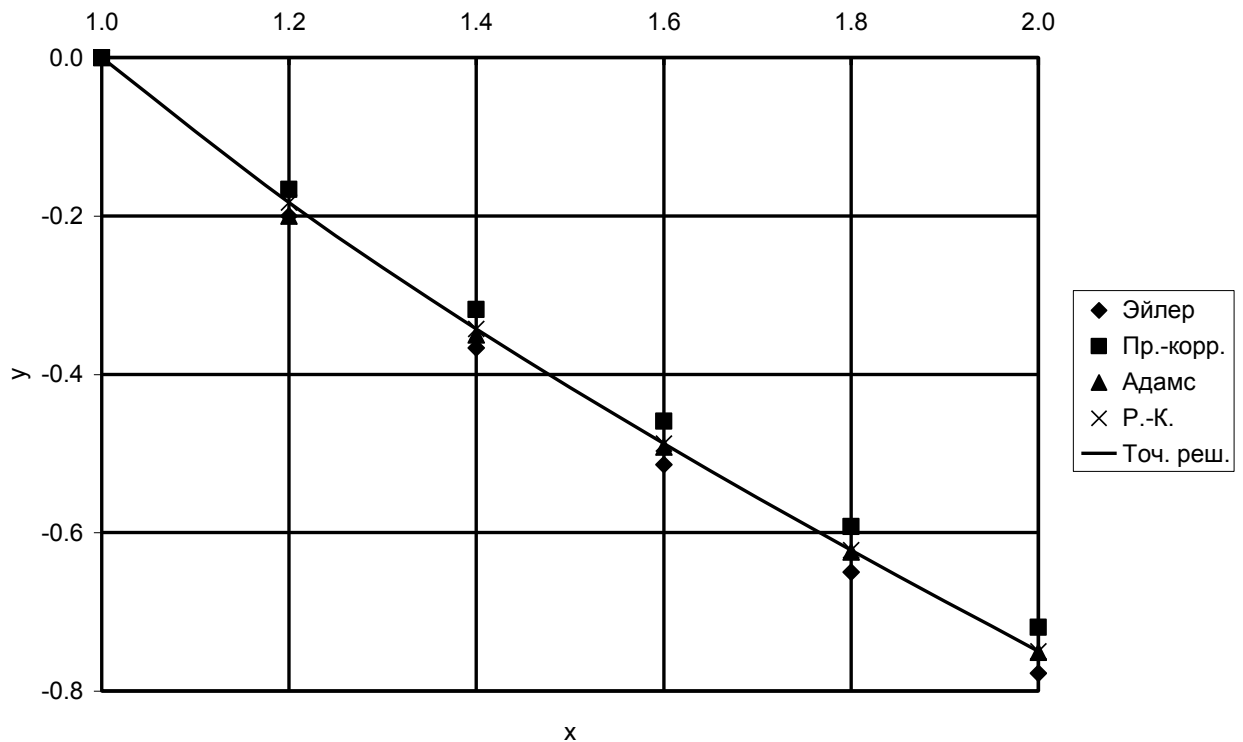


Рис. 30

Д) Задачи Коши для обыкновенных **дифференциальных уравнений** второго и более **высоких** порядков (содержащие вторые производные и производные более высокого порядка) решаются с помощью двух подходов.

Первый из них заключается в известном из курса высшей математики приеме предварительного сведения этого уравнения к системе уравнений первого порядка. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка можно решать практически всеми вышеизложенными численными ме-

тодами. На этом пути необходимо отслеживать корректность отыскания всех промежуточных производных, так как возможны случаи "отставания" их численных значений на шаг интегрирования. Это происходит потому, что применение разностной формулы для отыскания высшей производной требуется знание низшей производной или функции, а такое знание возможно только с предыдущего шага интегрирования.

Второй из подходов основывается на построении специальных разностных схем для уравнений высокого порядка, которые можно найти в специальной литературе.

Е) Методы решения краевых задач – задач решения **дифференциальных уравнений**, когда **не все начальные** условия известны, а известны значения некоторых параметров в начальной точке и некоторых из них в конечной или других точках интервала интегрирования.

1) Первая группа методов, называемых *методами сеток*, основывается на идее замены дифференциальных уравнений **разностными**, и отыскания

решения в виде **сеточной** функции. Сеточная функция представляет собой таблицу значений функции  $y_k$ , заданных в **узлах**, совпадающих с сеткой шагов интегрирования:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Все эти значения  $y_k$  для рассматриваемой задачи неизвестны, но для каждой узловой точки можно составить **алгебраическое** уравнение, если заменить производные их разностными соотношениями. Полученную в итоге систему  $n + 1$  алгебраических уравнений можно решить в некоторых специальных случаях.

Ниже рассмотрены два простейших случая для иллюстрации одного из методов сеток – *метода прогонки*.

**ПРИМЕР 1.** Вообще говоря, краевые задачи формулируются для уравнений второго порядка и выше или для систем уравнений, но для упрощения наглядного представления идеи этих методов в учебных целях рассмотрим некую "вырожденную" краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка  $y' = f(x)$  с граничным условием  $y = \bar{y}$  в конечной точке  $x = \bar{x}$  интервала интегрирования от  $x_0$  до  $x = \bar{x}$ . Будем искать численное решение  $y(x)$  с шагом интегрирования  $\Delta x = \frac{1}{5}(\bar{x} - x_0)$ , т.е. значения

сеточной функции в пяти точках:  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ . Заметим, что  $y_5 = \bar{y}$  известно из граничного условия. Воспользуемся простейшей разностной схемой Эйлера  $y' \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}$  и запишем исходное уравнение для всех шагов интегрирования от 0-го до 4-го:

$$\left. \begin{array}{rcl} -y_0 & + y_1 & = f_0 \cdot \Delta x \\ & - y_1 & + y_2 & = f_1 \cdot \Delta x \\ & & - y_2 & + y_3 & = f_2 \cdot \Delta x \\ & & & - y_3 & + y_4 & = f_3 \cdot \Delta x \\ & & & & - y_4 & + y_5 & = f_4 \cdot \Delta x \end{array} \right\},$$

где  $f_k = f(x_k)$  можно вычислить во всех точках в силу особого ее вида.

Полученная система алгебраических уравнений обладает специальными свойствами: она линейная, двухдиагональная (неизвестные группируются только по двум центральным диагоналям). В этой системе для 5 неизвестных  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$  существует 5 уравнений. Заметив, что в последнем уравнении только одно неизвестное  $y_4$  ( $y_5 = \bar{y}$  задано), решаем систему в обратном порядке и находим сначала  $y_4$ , потом  $y_3, y_2, y_1, y_0$ . Такой путь решения данной "вырожденной" задачи называется *обратной прогонкой*.

**ПРИМЕР 2.** Для иллюстрации более общего случая метода прогонки рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка  $y'' = f(x)$  с двумя граничными условиями:  $y(x_0) = \tilde{y}, y(\bar{x}) = \bar{y}$  на обоих концах того же интервала интегрирования, что и в предыдущем примере. Сеточную функцию построим таким же образом, а разностную схему второго порядка запишем в общем виде, содержащем три узловые точки с коэффициентами  $a, b, c$ :

$$y'' \approx \frac{ay_{k+1} + by_k + cy_{k-1}}{\Delta x^2}.$$

Тогда система алгебраических уравнений, заменяющая краевую задачу, будет выглядеть следующим образом:

$$\left. \begin{array}{rcl} ay_0 + by_1 + cy_2 & = & f_1 \cdot (\Delta x)^2 \\ & ay_1 + by_2 + cy_3 & = f_2 \cdot (\Delta x)^2 \\ & & ay_2 + by_3 + cy_4 & = f_3 \cdot (\Delta x)^2 \\ & & & ay_3 + by_4 + cy_5 & = f_4 \cdot (\Delta x)^2 \\ y_0 & & & & = \tilde{y} \\ & & & & & y_5 & = y \end{array} \right\}$$

В этой системе 6 уравнений 6 неизвестных, однако ее решение самыми общими методами (исключения) может оказаться неэффективным. Используя особый, трехдиагональный вид этой системы, ее решение можно найти следующим образом, называемым методом прогонки. Для этого 5-е уравнение запишем специальным образом:  $y_0 = L_0 y_1 + K_0$ , где  $L_0 = 0$ , а  $K_0 = \tilde{y}$ . С помощью этого уравнения исключим из 1-го уравнения системы  $y_0$ , а результат запишем в виде выражения для  $y_1$ :  $y_1 = L_1 y_2 + K_1$ , где

$$L_1 = \frac{-c}{b+aL_0} = \frac{-c}{b}, \quad K_1 = \frac{f_1 - aK_0}{b} = \frac{f_1 - a\tilde{y}}{-b}.$$

С помощью этого соотношения с известными коэффициентами, в свою очередь, можно из 2-го уравнения выразить  $y_2$ . Этот процесс следует провести вплоть до последнего уравнения системы и выразить предпоследнее неизвестное (в нашем примере  $y_4$ ) через известное из конечного условия  $y_5$  с известными из предыдущего шага коэффициентами  $L_4$  и  $K_4$ . Таким образом завершается прямая прогонка метода. Последнее полученное таким образом уравнение, содержащее только неизвестное  $y_4$ , позволяет его вычислить. После этого строится обратная прогонка для вычисления  $y_4$ ,  $y_3$ ,  $y_2$ ,  $y_1$ . Описанный метод достаточно экономичен и не накапливает погрешности вычислений.

Для построения метода прогонки в общем случае вводятся новые неизвестные с помощью линейной замены вида  $u_k = \alpha_k u_k + \beta_k u_{k-1}$ , через которые записывается система уравнений. Вид замены переменных подбирается в соответствии с видом системы уравнений таким образом, чтобы все коэффициенты  $\alpha_k, \beta_k$  можно было бы определить последовательно: от  $\alpha_1, \beta_1$  до  $\alpha_n, \beta_n$ . Этот шаг называется *прямой прогонкой*. После этого по уравнениям линейной замены переменных последовательно определяются  $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ , так как  $u_n$  известно из заданного граничного (конечного) условия. Этот шаг называется *обратной прогонкой*.

2) *Метод стрельбы* (пристрелки) основан на сведении решения краевой задачи к решению задачи Коши. Недостающие начальные условия отыскиваются, как решение одного или системы нелинейных алгебраических уравнений, в которых роль функций играют разности между заданными значениями конечных условий и соответствующими значениями найденных решений задач Коши.

На рис. 31 показан простейший случай одного дифференциального уравнения. По методу стрельбы в результате решения задачи Коши с исходным приближением начального условия  $y_0^{(1)}$  определяется конечное значение искомой функции  $y(\bar{x})$ , которое сравнивается с заданным значением  $\bar{y}$ . Исходя из этого сравнения, выбирается следующее приближение начального условия  $y_0^{(2)}$  для процедуры отделения корней, а затем по одному из методов решения нелинейного алгебраического уравнения – очередное:  $y_0^{(3)}$ , которое должно приводить к значению  $y(\bar{x})$ , достаточно близкому к  $\bar{y}$ .

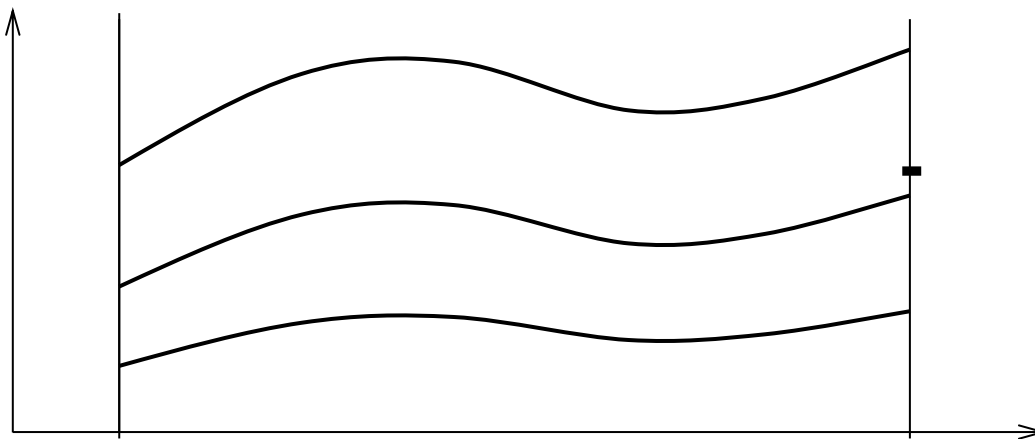


Рис. 31

Для решения оговоренной системы алгебраических уравнений применяются *итерационные методы*. Нетрудно видеть, что этот метод требует многократного интегрирования дифференциальных уравнений от начальной точки к конечной (многократного решения задачи Коши). Несмотря на кажущуюся простоту, метод стрельбы может оказаться вычислительно неустойчивым, что требует проведения дополнительных исследований искомой функции.

**Ж)** Методы интегрирования *дифференциальных уравнений с частными производными* основываются на *разностных схемах*, позволяющих отыскивать **сеточные функции** (таблицы искомых функций, заданных в узлах области интегрирования). Сеточные функции и разностные схемы для аппроксимации частных производных используют такие же подходы, как и в одномерном случае. Однако особенности получаемых сеточных решений могут сильно зависеть от вида таких аппроксимаций разностями и даже быть очень далекими от искомого решения. Во избежание этого разностные схемы подбираются с учетом сохранения основных особенностей **физической** сути отдельных членов уравнений.

**ПРИМЕР.** Поясним это на примере аппроксимации энергии и импульса. В задачах эти две величины обычно рассматриваются как независимые: например, закон сохранения

энергии и закон сохранения импульса (второй закон Ньютона). Однако нетрудно заметить, что величина импульса  $mV$  является производной по скорости от величины кинетической энергии  $\frac{mV^2}{2}$ . Эта связь, хотя может и отсутствовать в задаче, должна, тем не менее,

обеспечиваться теми разностными схемами, которые выбраны для аппроксимации одной и другой величины. Выполнить такого рода требования далеко не просто, но необходимо во избежание получения результата, противоречащего физике процесса.

**Корректное** задание граничных и начальных условий в этих задачах накладывает дополнительные, сложно формулируемые условия, которым должны удовлетворять используемые разностные схемы. Эти условия рассматриваются в специальной математической литературе.

### 4.3. Приемы упрощения математических моделей

#### А) Упрощение моделей

На этапе *феноменологического описания* часто применяются приемы упрощения, основанные на особенностях рассматриваемых движений, позволяющие уменьшить количество неизвестных.

*Установившееся движение* позволяет исключить зависимость параметров движения от времени и отказаться от начальных условий дифференциальных уравнений.

Плоскопараллельным движением называется такое движение, в котором можно ввести систему декартовых координат, одна из которых оказывается несущественной. Обычно в таком случае существенные координаты обозначают  $x$  и  $y$ . Картину такого движения можно изобразить на плоскости, что очень важно для понимания сути многих процессов (например, в аэродинамике). Для плоскопараллельных движений можно применить и хорошо разработанную теорию комплексных переменных.

Если движение можно описать с помощью цилиндрической системы координат, в которой полярный угол несущественен, то оно носит название осесимметрического движения.

В некоторых задачах существенной остается только одна координата (в общем случае криволинейная). Такое движение называется одномерным. Если такое движение еще и установившееся, то единственная производная становится обыкновенной, что существенно облегчает решение.

Автомодельным движением называется такое движение, которое может быть описано тремя существенными независимыми аргументами:

$$\frac{x}{t^\alpha}, \frac{y}{t^\alpha}, \frac{z}{t^\alpha}$$

вместо четырех координат  $x, y, z, t$ ; здесь  $\alpha$  – числовая постоянная. Если автомодельное неустановившееся движение еще и одномерное, то можно

обойтись одной независимой переменной вида  $\zeta = \frac{x}{t^\alpha}$  и использовать обыкновенные дифференциальные уравнения.

### Б) Упрощение уравнений

Основными способами упрощения уравнений являются:

- переход к *безразмерным* величинам (с помощью замены  $F = f \cdot f_0$ , где  $f_0$  – характерное значение размерной величины  $F$ ,  $f$  – безразмерная переменная);
- **приближенная замена** переменных величин постоянными значениями;
- *пренебрежение малыми членами*.

**ПРИМЕР.** Логику последнего приема проследим на примере работы шасси самолета при его разбеге по ВПП. На рис. 32 приведена схема действующих на стойку шасси вертикальных сил,  $s$  – обжатие амортизатора,  $e$  – обжатие пневматиков.

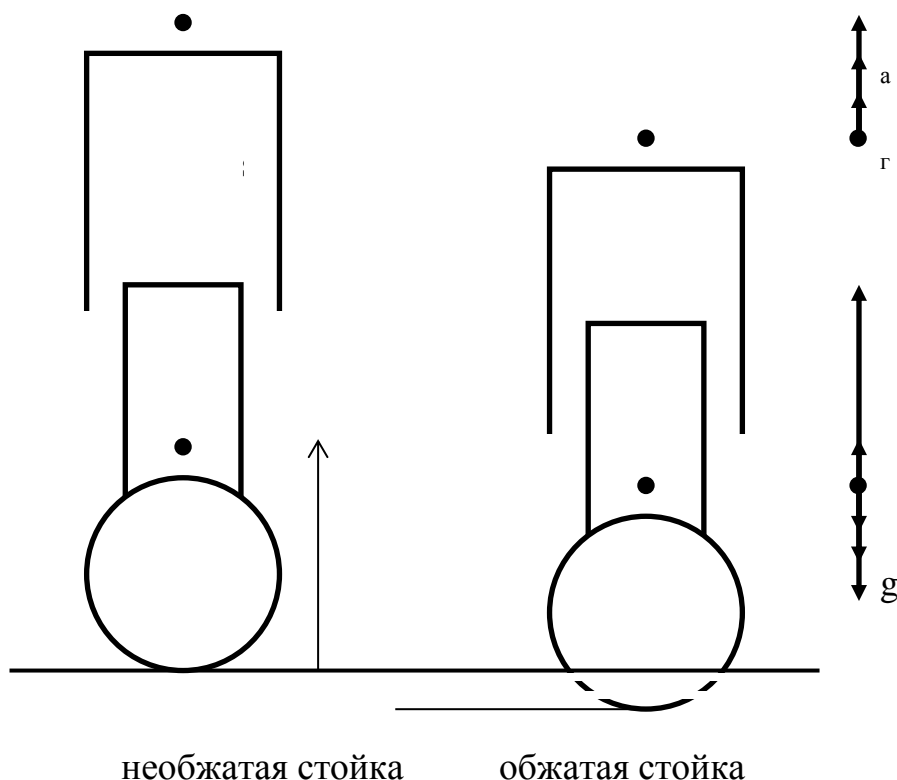


Рис. 32

Наиболее общий подход к описанию вертикального движения стойки шасси базируется на уравнении динамики материальной точки в виде:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - F_a - F_r - mg,$$

где  $m$  – масса подвижной части стойки шасси,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $d^2 y / dt^2$  – вертикальное ускорение подвижной части стойки,  $N$  – сила реакции ВПП на пневматики стойки,  $F_a$  – упругая сила (газового амортизатора стойки),  $F_r$  – диссипативная сила (гидравлического амортизатора стойки и сил трения). При этом считается, что изменение  $N$  определяется только обжатием пневматиков  $e$ , а  $F_a$  – обжатием стойки  $s$ . Обжатие стойки и обжатие пневматиков кинематически связаны с координатой  $y$  алгебраическими соотношениями. Разбиение силы газожидкостного амортизатора на две части  $F_a$  и  $F_r$

принято в авиации.  $F_r$  принято считать зависящим и от обжатия стойки, и от скорости изменения ее обжатия. Очевидно, что величины обжатия стойки и пневматиков связаны геометрически с высотой расположения самолета над ВПП и координатой  $y$  центра масс подвижной части стойки, для которого записано уравнение движения.

Как известно, всякая механическая система, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка, имеет собственные колебания. Колебательный характер имеет и решение вышеприведенного. Но вся сложность его получения кроется в правой части, которая имеет сложный вид зависимости от  $y$  и  $dy/dt$ . Проанализируем все члены этого уравнения.

Значения  $N$  и  $F_a$  близки (на передней стойке самолета Ил-96-300 при спокойном движении достигают 20 тс) и на несколько порядков превышают значения остальных членов уравнения ( $F_r$  не превосходит 0,2 тс). Даже без проведения эксперимента ясно, что инерционный член  $m(d^2y/dt^2)$  принимает в нормальных условиях разбега значения на порядки меньше, чем все слагаемые правой части, включая вес подвижной части стойки шасси  $mg$  и силу  $F_r$  гидравлического амортизатора стойки и трения. Поэтому есть резон пренебречь инерционным членом и перейти к дифференциальному уравнению первого порядка вида:

$$\frac{dy}{dt} = f(N - F_a - mg),$$

где  $f(\bullet)$  является функцией, обратной к функциональной зависимости  $F_r$  от  $dy/dt$ . Не заостряя внимания на конкретизации такого преобразования, заметим, что общее решение последнего уравнения не содержит колебаний, а имеет характер экспоненты. Это следует из того факта, что  $N$  и  $F_a$  в нормальных условиях разбега приблизительно пропорциональны  $y$ . Следовательно, при таком приближении модель не будет описывать собственные колебания подвижной части стойки шасси, например, после отпущения тормозов.

Если рассматривать разбег самолета по гладкой ВПП без внешних резких возмущений, то необходимо признать малым и слагаемое  $F_r$ . Тогда, пренебрегая уже двумя слагаемыми, можно записать:

$$N - F_a - mg = 0,$$

уже алгебраическое, а не дифференциальное уравнение. Однако очевидно, что такое уравнение описывает не движение шасси, а лишь статическое положение его равновесия. Для моделей, учитывающих аэродинамику и исследующих поведение самолета на ВПП, такой подход на сегодняшний день нельзя считать приемлемым.

### **В) Линеаризация**

Математические модели имеют наиболее простой вид математического описания, а также наиболее простые способы вычисления, в том случае, когда они линейные (§ 2.1). Линейными могут быть как алгебраические уравнения, так и дифференциальные. Методы решения таких уравнений хорошо разработаны, в том числе и для особых случаев, как то: определитель системы линейных алгебраических уравнений близок к нулю, система линейных дифференциальных уравнений близка к состоянию резонанса и т.п. Кроме того, решения линейных систем обладают свойством **суперпозиции**, т.е. при сложении аргументов складываются и решения, а при умножении аргумента на число на то же число умножается и решение. Это свойство приводит к возможности складывать частные решения одного и того же уравнения (или системы). Поэтому естественно стремление разработчиков математических моделей к таким упрощающим предположениям на стадии *феноменологического описания*, которые приводят к линейным уравнениям.

Однако существуют такие системы и процессы, которые имеют существенно нелинейный характер, пренебрегать которым нельзя из-за угрозы потери качественно верного описания. К проявлениям существенной нелинейности следует отнести изменение характера поведения объекта при изменении масштаба воздействия, наличие резких переходных границ (бифуркаций – см. 3.1), наличие диссипативных процессов (типа трения). В этих случаях стремиться к линейному математическому описанию нельзя.

На стадии изучения оригинала, когда выделяются исследуемые параметры и диапазоны их изменения, можно составить представление о том, насколько близко поведение оригинала к линейному. Это можно зафиксировать не только по результатам эксперимента в широком диапазоне условий, но и в том случае, когда сам диапазон изменения параметров мал и позволяет заменить их приращения дифференциалами. В этих случаях имеет смысл произвести линеаризацию модели – приближенную замену нелинейных соотношений на линейные.

**ПРИМЕР.** Процесс линеаризации изучим на примере решения нелинейного дифференциального уравнения некоторой механической системы:

$$y'' + (1+y^2)\sin y' + y = 1.$$

Это уравнение имеет очевидное частное решение  $y_0(x) = 1$ . Допустим, что нас интересует близкое к нему решение, которое можно представить в виде  $y(x) = 1 + \eta(x)$ , где  $\eta(x)$  мало в силу близости  $y(x)$  к 1, и подставим это выражение в исходное уравнение:

$$\eta'' + (1+1+2\eta+\eta^2)\sin\eta' + 1+\eta = 1,$$

или

$$\eta'' + 2\sin\eta' + \eta(2+\eta)\sin\eta' + \eta = 0.$$

Третьим слагаемым в последнем уравнении можно пренебречь по сравнению с первыми степенями  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\eta''$ . По той же причине  $\sin\eta'$  можно заменить на  $\eta'$ . В итоге получаем дифференциальное уравнение для  $\eta(x)$ :

$$\eta'' + 2\eta' + \eta = 0,$$

решение которого имеет вид:  $\eta(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}$ .

Другим примером применения линеаризации может служить метод Ньютона для численного решения нелинейного алгебраического уравнения (см. § 4.1). Этот метод основывается на линейном приближении разложения функции в ряд Тейлора:  $f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ .

Как видно, линеаризация представляет собой, по сути, прием пренебрежения членами разложения в ряд Тейлора более высокого порядка малости, чем первый, поэтому может быть безусловно применена на малых диапазонах изменения аргумента.

### **Г) Метод малого параметра (метод возмущений)**

Данный метод применяется при **аналитическом** виде математического описания и основывается на разложении в ряд Тейлора искомого решения.

Начинается применение метода малого параметра с анализа вида аналитической зависимости и выявления малых членов, может быть нескольких. Цель такого анализа заключается в получении уравнения, простого для решения, которое не содержит этих малых членов. Решение такого



упрощенного уравнения (вернее его части), называемого *невозмущенным*, служит нулевым членом разложения решения в ряд Тейлора  $y_0$ .

Пусть исходное уравнение имеет вид:

$$\varphi + \psi = 0,$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – некоторые функции, зависящие от аргумента задачи, причем уравнение вида  $\psi = 0$  дает невозмущенное решение  $y_0$ , а  $\varphi$  значительно меньше  $\psi$ .

Если малые члены  $\varphi$  обязаны своей малостью некоторому **общему малому** параметру  $\alpha$ , т.е.  $\varphi = \alpha\gamma$ , то именно его принимают за аргумент разложения искомого, уже возмущенного решения в ряд Тейлора по  $\alpha$ :

$$y = y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \dots$$

Если выделенные малые члены  $\varphi$  являются таковыми только в силу определенного **диапазона переменных**, тогда малый параметр вводят искусственно в виде коэффициента  $\alpha$  перед ними:  $\alpha\varphi$  вместо  $\varphi$ . Невозмущенное решение соответствует  $\alpha = 0$ , а искомое – при  $\alpha = 1$ . Возмущенное решение и в этом случае представляется в виде ряда Тейлора.

Для получения коэффициентов при степенях  $\alpha$  можно поступить двумя способами.

**Первым** способом после подстановки этого разложения в исходное уравнение группируют члены с **одинаковыми степенями** малого параметра  $\alpha$ . Суммы всех коэффициентов при каждой степени  $\alpha$  приравнивают к нулю (для выполнения исходного уравнения) и тем самым получают столько последовательных приближений решения, сколько необходимо. Этот способ приемлем в случае простой зависимости малых членов  $\varphi$  уравнения от искомого  $y$ , позволяющей вычислить такую зависимость от конечной суммы, представляющей начальную часть ряда Тейлора.

**Второй** способ более универсален и применяется в случаях сложной зависимости малых членов  $\varphi$  от искомого  $y$ . Как известно, коэффициенты ряда Тейлора при степенях  $\alpha$  имеют вид:

$$y_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}.$$

Значения производных  $y^{(n)}(0)$  отыскиваются с помощью последовательного дифференцирования исходного уравнения по  $\alpha$ . При каждом очередном дифференцировании отыскивается очередная производная и очередной коэффициент.

#### 4.4. Математические свойства методов вычислений

Как следует из §§ 4.1 и 4.2, методы вычисления построены на **замене исходной задачи** или функции (чаще всего непрерывной) на упрощенную, приближенную, дискретную расчетную схему. Последнее свойство – дискретность расчетной схемы – весьма существенно при использовании

цифровой вычислительной техники, так как в ней представление чисел всегда ограничено конечным числом разрядов. Кроме того, дискретность связана с возможностью разрешения конечного числа уравнений в системе или конечного числа итераций. Таким образом, потребительские качества методов вычисления оказываются многогранными и требуют взгляда с нескольких позиций. (Полная аналогия с отношением модели к оригиналу!)

Основные качества метода вычисления с точки зрения потребителя сводятся к двум позициям: насколько **близко** полученное решение к истине – оригиналу и насколько **удобно** пользоваться методом. Каждая из этих позиций, в свою очередь, распадается на множество конкретных свойств, основные из которых рассмотрены ниже.

А) Поскольку любая модель есть заместитель оригинала, постольку исходные данные о нем, используемые в модели, обладают погрешностью. Эта погрешность неизбежно приводит к погрешности результатов вычислительного эксперимента, даже если предположить, что расчеты проводятся абсолютно точно. Поэтому очень важно, чтобы в пределах погрешности исходных данных результаты менялись несущественно с точки зрения задачи исследования. Такое свойство метода, при котором **малое** изменение исходных данных не может вызвать **больших** изменений решения, называется устойчивостью.

Однако устойчивость методов вычисления тоже может быть разносторонней. Исходные данные об оригинале используются в математическом описании модели (§ 2.1) по-разному. Это могут быть числовые параметры, определяющие коэффициенты уравнений, некоторые члены уравнений, начальные и граничные условия дифференциальных уравнений. Поэтому и устойчивость конкретного вычислительного метода необходимо проверять отдельно: по коэффициентам, по слагаемым, по начальным и граничным условиям.

Это свойство важно для методов, которым присущи итерационные, рекуррентные вычислительные процессы, например, методов интегрирования дифференциальных уравнений (§ 4.2). Эти методы являются *устойчивыми*, если погрешность, допущенная на ранних шагах (итерациях), приводит лишь к ограниченному росту погрешности на последующих шагах (итерациях). Если такой рост оказывается неограниченным, то метод является *неустойчивым*.

**ПРИМЕР.** Рассмотрим подробнее понятие устойчивости на примере изучения работы стойки шасси самолета. Начнем с простейшей **линейной** модели динамики шасси:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = F(t),$$

где  $m \frac{d^2 y}{dt^2}$  – инерционный член,  $-a \frac{dy}{dt}$  – сила сопротивления ( $a > 0$ ),  $-by$  –

упругая восстанавливающая сила,  $F(t)$  – внешняя возмущающая сила.

Метод вычисления для данной математической модели принимает вид аналитических зависимостей (§ 2.1), поэтому для изучения его устойчивости достаточно рассмотреть лишь аналитическое решение данного уравнения.

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения, как известно, складывается из общего решения однородного дифференциального уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение однородного дифференциального уравнения определяется с помощью характеристического уравнения

$$m\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

имеющего характеристические корни  $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4mb}}{2m}$ , и записывается в

виде собственных колебаний:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ вещественные,} \\ e^{\lambda_1 t} (C_1 + C_2 t), & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2, \\ e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), & \text{если } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

Это решение имеет замечательную "точку" покоя  $y(t) \equiv 0$ .

Обычно  $a > 0$ , тогда, если обе действительные части  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны, то  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  и решение описывает убывающее отклонение или убывающие по амплитуде колебания. В этом случае "точка" покоя является устойчивым решением и по начальным условиям, и по коэффициентам уравнения.

Если хотя бы одна из действительных частей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  неотрицательна, то собственные колебания имеют незатухающую амплитуду. В этом случае "точка" покоя является неустойчивым решением и по начальным условиям, и по коэффициентам уравнения.

Наличие возмущающей силы в виде колебаний  $F(t) = Ae^{\chi t}(\cos \omega t + \sin \omega t)$  к собственным колебаниям общего решения однородного дифференциального уравнения добавляет частное решение неоднородного дифференциального уравнения, имеющее вид:

$$\begin{cases} e^{\chi t} (B \cos \omega t + D \sin \omega t), & \text{если } \chi + i\omega \text{ не характеристический корень,} \\ t^r e^{\chi t} (B \cos \omega t + D \sin \omega t), & \text{если } \chi + i\omega \text{ — характеристический корень кратности } r. \end{cases}$$

Если  $\chi < 0$ , то устойчивость общего решения неоднородного дифференциального уравнения определяется устойчивостью однородного.

Если  $\chi \geq 0$ , то общее решение неоднородного дифференциального уравнения неустойчиво независимо от однородного.

Если  $r \geq 1$ , то наступает резонанс, который не влияет на устойчивость.

Очевидно, что такой анализ возможен только в случае известных постоянных коэффициентов линейного уравнения. На практике уравнение такого вида слишком грубо описывает работу шасси, так как все члены этого уравнения, кроме инерционного, имеют вид, весьма далекий от рассмотренного: коэффициенты  $a$  и  $b$  сложным образом зависят от  $y$  и  $dy/dt$  (см. § 4.3). Поэтому при численном решении такого уравнения об устойчивости приходится судить лишь по "наблюдениям" за ходом решения. При этом к вопросу об устойчивости точного решения неразделимым образом примешивается вопрос об устойчивости метода вычисления уже неаналитического вида. Иными словами, на "точное" решение **накладывается** некоторое "паразитное" решение, которое

можно трактовать как влияние добавка "плохого" вида во внешнее возмущение  $F(t)$ .

Самый сложный случай неустойчивости такого решения наблюдается тогда, когда упомянутое "паразитное" решение само по себе неустойчиво. Такая система называется "*жесткой*". Для борьбы с неустойчивостью "жестких" систем применяются специальные разностные схемы. Однако, как показали специальные исследования, наилучшими разностными схемами для этих целей являются *восходящие*, которые используют в аппроксимации производной только предыдущие узловые точки, например, схема  $y' \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$  из § 4.2.

**Б)** Собственно вычислительный метод должен обладать своим "внутренним" свойством – **близостью расчетной схемы** к сформулированной задаче. Предположим, для простейшего примера, что изучаемое явление описывается квадратным уравнением (рис. 33, линией I), а методы его решения нам не известны. Очевидно, что заменить его линейным (линией II) для отыскания обоих корней нельзя. А если заменить исследуемую зависимость множеством линейных кусочков (III на рис. 33) – кусочно-линейной функцией – то задачу можно решить с той или иной точностью, которая прямо зависит от количества таких кусочков и их размеров. Чем их больше и чем они меньше, тем точнее можно найти корни. В этом случае говорят о *сходимости*: если многошаговый метод вычисления обеспечивает при определенном процессе дробления стремление приближенного решения задачи к точному, то метод сходится.



Рис. 33

**В)** Свойство сходимости может быть обеспечено только в том случае, если расчетная схема обладает еще одним свойством – *аппроксимацией*. Свойство аппроксимации имеет чрезвычайно большое значение для математического обоснования применимости метода, так как свидетельствует о безусловной **приемлемости** упомянутой в начале параграфа замене исходной задачи расчетной схемой. Если рассогласование (невязка), получаемое при **подстановке** в расчетную схему точных значений решения, стремится к нулю при определенном процессе дробления, то схема аппроксимирует исходную задачу.

Так, например, результат приближенного вычисления определенного интеграла с помощью метода трапеций отличается от результата, полученного с помощью метода Симпсона, и, разумеется, от точного его значения. При

изучении этих методов в курсе высшей математики доказывалась возможность предельного перехода от данных формул к точному значению определенного интеграла, т.е. *аппроксимация*.

Г) Свойство *аппроксимации*, а на его основе и свойство *сходимости* может быть более или менее "сильным". Если невязка ограничена по модулю величиной  $Ch^k$ , где  $C$  и  $k$  – некоторые постоянные,  $h$  – шаг схемы, стремящийся к нулю при определенном процессе дробления, то имеет место *аппроксимация  $k$ -го порядка*, а схема имеет  $k$ -й порядок точности. Если схема еще и устойчива, то она будет иметь *сходимость  $k$ -го порядка* (рис. 34). Очевидно, что схема более высокого порядка сходимости при том же  $h$  даст более точный результат. С другой стороны, для обеспечения той же погрешности (невязки) схема более высокого порядка сходимости будет довольствоваться бóльшим значением  $h$ , т.е. меньшим количеством шагов. Это обеспечивает бóльшую скорость сходимости метода – очень важное потребительское свойство метода.

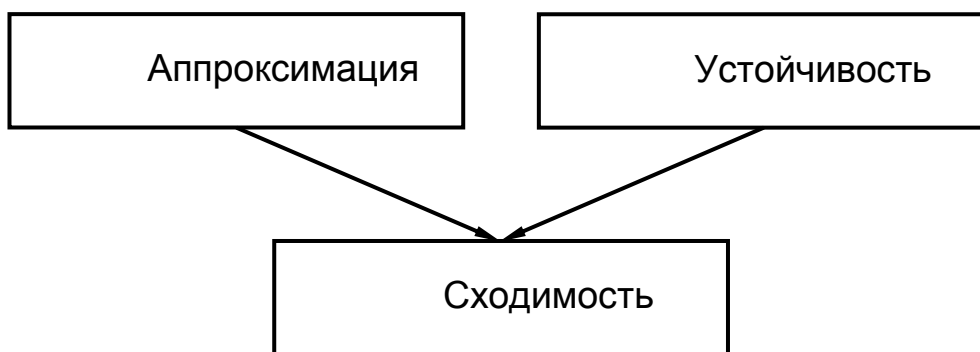


Рис. 34

#### 4.5. Математические методы оптимизации

Один из видов *обратных задач* – *задача оптимизации* – формулируется весьма громоздким образом, поэтому введем предварительно терминологию.

$\mathbf{x}(t)$  – фазовые координаты рассматриваемого объекта, т.е. вектор его линейных, угловых координат а также переменных, которые **удобно** рассматривать в качестве координат, например, скоростей, сил, ускорений, энергии и т.п.

$\mathbf{u}(t)$  – управления (управляющие функции), т.е. вектор таких параметров объекта (в общем случае функциональных зависимостей), которые **не зависят** от фазовых координат и могут быть **выбраны**, вообще говоря, произвольно.

$\mathbf{a}$  – вектор **параметров** объекта, характеризующих его свойства.

$t$  – время.

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, t) = 0$  – уравнения связей (уравнения движения) объекта, описывающие его функционирование и функциональные возможности ( $\mathbf{f}$  – вектор в общем случае дифференциальных функций).

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, t) \leq 0$  – ограничения, задающие область допустимых управлений ( $\mathbf{g}$  – вектор алгебраических функций).

$H = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_0, t_1)$  – критерий оптимальности (целевая функция), который может определяться не только фазовыми координатами и управлением в каждый момент временем, но и интегралом по времени в пределах от  $t_0$  до  $t_1$ . В последнем случае такое выражение, зависящее не столько от отдельных значений величин  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ , сколько от их **вида** как функций на интервале времени, называется функционалом.

Дадим теперь общую формулировку задачи оптимизации:

при заданных уравнениях связей (уравнениях движения) требуется найти такое оптимальное управление  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  и соответствующее ему оптимальное решение (оптимальную траекторию)  $\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{a}, t)$ , которые в области допустимых управлений доставляют минимум критерию оптимальности:

$$H = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_0, t_1) \rightarrow \min H = H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, t, t_0, t_1).$$

Таким образом, отличительным признаком задач оптимизации является наличие в их формулировке критерия оптимальности.

**ПРИМЕР.** Механическая система подчиняется уравнению движения определенной ее точки в виде  $x = ut$  (т.е.  $x - ut = 0$ ). Область допустимых управлений задается неравенствами  $-1 < u < 1$  (т.е. системой неравенств:  $u - 1 < 0, -u - 1 < 0$ ). Требуется найти оптимальное значение  $\hat{u}$  и оптимальную траекторию  $\hat{x}(\hat{u}, t)$ , при которых величина  $H = x(t=1)$  принимает максимальное значение.

Эта задача имеет наглядную интерпретацию, если в качестве  $u$  рассматривать скорость, а в качестве  $x$  – расстояние, пройденное точкой за время  $t$ , при условии постоянства значения скорости. Поэтому решение такой задачи можно получить простейшими рассуждениями ввиду ее простоты: оптимальное значение управления  $\hat{u} = 1$  (наибольшее допустимое значение), оптимальная траектория  $\hat{x}(\hat{u}, t) = t$ .

Рассмотрим типы задач оптимизации, которые различаются **видом** входящих в их описание функций.

**А)  $f, g, H$  – линейные алгебраические функции** (т.е. имеющие вид  $a_0 + a_1x + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ ), **не зависящие от времени**. Это – задача линейного программирования, она решается симплекс-методом. Простейший пример – нахождение наименьшего значения функции одного переменного на заданном интервале – иллюстрируется рис. 35.

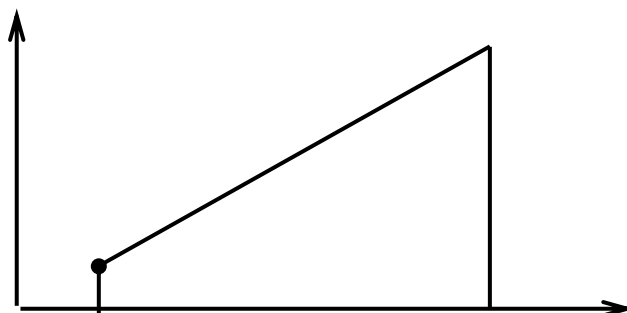


Рис. 35

Геометрическое толкование задачи линейного программирования для случая двух переменных легко интерпретируется. Ограничения в силу линейности вырезают на плоскости переменных многоугольник. Критерий оптимальности в силу линейности можно представить в виде наклонной плоскости с аппликатой  $z = H$  над этим многоугольником. Если вырезать из этой наклонной плоскости только ее часть, расположенную над многоугольником, а по границам сделать вертикальные стенки, то тяжелый шарик, брошенный на эту наклонную плоскость, скатится в ту **угловую** точку, которая расположена ниже всех других. Симплекс-метод, основанный на проведении ряда последовательных преобразований задачи, фактически и реализует математическими методами поведение шарика, т.е. проверку угловых точек допустимой области на оптимальность с помощью ряда преобразований вида записи задачи. Опишем симплекс-метод.

Общий вид задачи линейного программирования для  $s$  переменных  $X_k$ :

$$\text{минимизировать } z = \sum_{k=1}^s c_k X_k$$

$$\text{при ограничениях-равенствах } \sum_{k=1}^s a_{ik} X_k = D_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$\text{и ограничениях-неравенствах } \sum_{k=1}^s a_{jk} X_k = Z_j \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Этот вид позволяет лишь записать в систематической форме оптимизационную задачу линейного вида. Для ее решения симплекс-методом необходимо провести переход сначала к *стандартной* форме, а затем к *каноническим* формам.

Заметим попутно, что в задаче линейного программирования нет различия между фазовыми координатами и управлениями. Поскольку на все параметры могут быть наложены ограничения, то удобно считать их управлениями при отсутствии фазовых координат.

Стандартная форма задачи линейного программирования, которая может быть получена из общего вида с помощью **введения дополнительных** (вспомогательных) переменных, имеет следующий вид:

$$\text{минимизировать } z = \sum_{k=1}^n c_k x_k$$

$$\text{при ограничениях-равенствах } \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m < n)$$

$$\text{и ограничениях-неравенствах } x_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Особенностью стандартной формы является требование для всех правых частей:  $b_k \geq 0$  и особый (тривиальный) вид ограничений-неравенств.

Для канонических форм введем термины:

допустимое решение – всякая точка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая заданным ограничениям;

базисное допустимое решение – допустимое решение, в котором  $n - r$  **свободных** неизвестных равны 0 (где  $r$  – ранг системы линейных алгебраических уравнений-ограничений,  $r \leq m$ ).

Пусть  $r = m$  (все  $m$  уравнений связей линейно **независимы**). Тогда в канонической форме задачи линейного программирования, исходя из системы линейных алгебраических уравнений связей в стандартной или в другой канонической форме, запишем  $r = m$  **базисных** неизвестных  $x_i$  (пусть они имеют нумерацию от 1 до  $m$ ) с **коэффициентом 1** через остальные  $n - m = n - r$  **свободные** неизвестные  $x_k$  (которые пусть имеют нумерацию от  $m + 1$  до  $n$ ) в виде:

$$x_i + \sum_{k=m+1}^n \alpha_{ik} x_k = \beta_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где все  $\beta_i \geq 0$ . Если последнее условие выполнить не удастся, то полученная форма не является канонической и следует поменять выбор свободных и базисных неизвестных. Критерий оптимальности в канонической форме необходимо выразить только через **свободные** неизвестные, используя, если необходимо, уравнения связей базисных и свободных неизвестных:

$$z = z_0 + \sum_{k=m+1}^n \gamma_k x_k,$$

а ограничения-неравенства сохраняют тривиальный вид стандартной формы. По полученной канонической форме можно составить базисное допустимое решение:

$$x_i = \begin{cases} \beta_i & i = 1, 2, \dots, m \text{ – базисные,} \\ 0 & i = m + 1, \dots, n \text{ – свободные} \end{cases}$$

и сделать вывод о его виде:

базисное допустимое решение вырождено, если хотя бы одно из  $r$  **базисных** неизвестных обращается в 0; и невырождено, если все  $r$  **базисных** неизвестных строго больше 0;

базисное допустимое решение – оптимально, если оно минимизирует критерий оптимальности.

Выяснить, является ли полученное базисное допустимое решение оптимальным, можно по следующим случаям коэффициентов  $\gamma_k$  в критерии оптимальности, которые легко проследить по анализу зависимости  $z$  от свободных неизвестных  $x_k$ :

– **все**  $\gamma_k \geq 0$ , тогда найденное базисное допустимое решение *оптимально* (задача решена), но не единственное, так как критерий принимает одно и то же значение при любом значении  $x_k$ , соответствующем  $\gamma_k = 0$ ;

– **все**  $\gamma_k > 0$ , тогда *оптимальное* решение **единственно** (задача решена);



– существуют  $\gamma_k < 0$ , тогда найденное базисное допустимое решение не оптимально (в этом случае  $z$  уменьшается при увеличении соответствующего  $x_k$ ) и преобразования канонических форм надо продолжить.

**ПРИМЕР.** Построение математической модели для оптимизации экономичности авиаперевозок.

Пусть доход от перевозки одного пассажира на один километр пути составляет 5 рублей (цены условные), а расходы на один километр пути составляют 200 рублей. Спрашивается: сколько пассажиров и на какое расстояние возить выгоднее всего, если пассажировместимость самолета ограничена 150 пассажирами, а заправка топливом ограничивает пассажировместимость через дальность линейно таким образом, что до 1500 километров самолет может лететь с полной коммерческой нагрузкой, а на 3000 километров – только с нулевой коммерческой нагрузкой.

Обозначим  $x_1$  – дальность,  $x_2$  – число пассажиров. Тогда ограничения переменных примут вид:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 \leq 150, x_1 + 10x_2 \leq 3000;$$

а критерий оптимальности (минимизировать потери, т.е. затраты минус доход):

$$z = 200 \cdot x_1 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Такая задача не является задачей линейного программирования, поскольку в ней критерий выражен нелинейной функцией. Попробуем ее "упростить", перейдя к минимизации потерь, приходящихся на один километр пути: примем за критерий оптимальности величину:

$$z_1 = 200 - 5 \cdot x_2,$$

являющуюся множителем при  $x_1$  в выражении  $z$ . Тогда задача превращается в задачу линейного программирования, решение которой рассмотрим в качестве примера применения симплекс-метода.

Полученная форма записи задачи может считаться *общим видом*, так как ограничений-равенств нет, а все ограничения-неравенства можно записать в виде неотрицательных выражений.

Для перевода полученного общего вида в *стандартную форму* **введем дополнительные переменные** с целью замены нетривиальных ограничений тривиальными и равенствами. Так как  $150 - x_2 \geq 0$ , то удобно ввести новую переменную  $x_3 = 150 - x_2$ . Аналогично удобно ввести  $x_4 = 3000 - x_1 - 10x_2$ . Тогда стандартная форма задачи примет вид:

$$\begin{cases} z_1 = 200 - 5 \cdot x_2, \\ \begin{cases} x_1 + 10x_2 + x_4 = 3000 \geq 0 \\ x_2 + x_3 = 150 \geq 0 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Для получения *канонической формы* следует выбрать свободные и базисные неизвестные. Нетрудно убедиться в том, что ранг полученной системы уравнений  $r = 2$ , т.е. в решении должно быть два свободных неизвестных и два базисных. В этой системе  $x_2$  и  $x_3$  не могут быть одновременно свободными или базисными в силу второго уравнения. Поэтому примем для начала в качестве свободных неизвестных  $x_1$  и  $x_2$ , тогда базисные  $x_3$  и  $x_4$  выразятся с помощью следующих ограничений-равенств:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 = 150 > 0, \\ x_4 + x_1 + 10x_2 = 3000 > 0. \end{cases}$$

Критерий оптимальности в этой канонической форме примет вид:

$$z_1 = 200 - 5 \cdot x_2.$$

В этой канонической форме *базисное допустимое решение не оптимально*, так как коэффициент при  $x_2$  в критерии отрицателен. Это говорит о том, что поиск оптимального решения следует продолжить с помощью других канонических форм, которые отличаются выбором свободных и базисных неизвестных.

Примем на этот раз в качестве свободных  $x_1$  и  $x_3$ , а базисных  $x_2$  и  $x_4$ :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 150 > 0, \\ x_4 + x_1 - 10x_3 = 1500 > 0. \end{cases}$$

Тогда критерий оптимальности запишется:  $z = -550 + 5 \cdot x_3$ .

В этой форме *базисное допустимое решение* принимает вид:

$$x_1 = 0, x_2 = 150, x_3 = 0, x_4 = 1500,$$

в котором нулевые значения принимают свободные неизвестные. Это *базисное допустимое решение оптимально*, так как коэффициенты при всех (единственном  $x_3$ ) свободных неизвестных в критерии неотрицательны. Таким образом оптимальное решение имеет вид: затраты на один километр пути принимают наименьшее значение при следующих исходных переменных задачи  $x_1 = 0, x_2 = 150$ . Трактовку этого решения оставим до конца следующего пункта **Б** данного параграфа, здесь лишь отметим, что в качестве математической модели для оптимизации авиаперевозок задача линейного программирования неприемлема.

**Б)  $f, g, H$**  – алгебраические **нелинейные функции, не зависящие от времени**. Это – задача нелинейного программирования. Методы решения ее существенно зависят от формы записи (и вычисления)  $H$ . Рассмотрим эти формы.

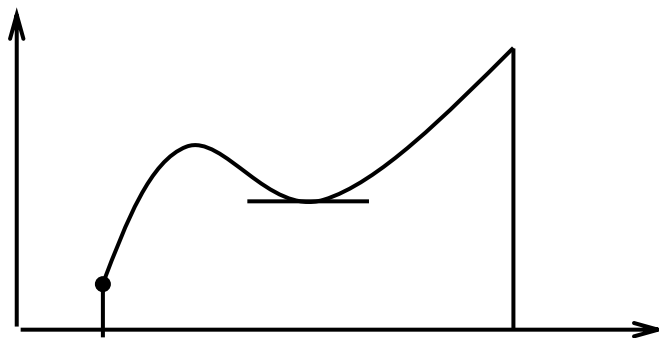
1) Случай, когда  $H$  имеет достаточно простой вид и позволяет определить не только значения всех частных производных в каждой точке пространства аргументов, но и **решить систему** уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений дает множество точек, среди которых могут находиться точки оптимального решения, т.е.  $\min H$ . Но такого может и не быть, если среди этого множества нет точек минимума **внутри области допустимых управлений** и фазовых координат. Поэтому следует дополнительно вычислить значения критерия оптимальности  $H$  и **на границе** допустимой области (или найти хотя бы точки, имеющие наименьшее значение  $H$  на каждой границе). Только после сравнения всех найденных значений  $H$  можно найти решение оптимизационной задачи. Этот метод не имеет специального наименования, но его можно было бы назвать **классическим** методом отыскания наименьшего значения функции в заданной области аргументов. Простейшая иллюстрация этого метода с акцентом на необходимость проверки границ приведена на рис. 36 для одномерного случая.

Замечание. Между задачей отыскания минимума функции  $H(\mathbf{x})$  и решением системы уравнений вида  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  существует тесная связь. Так, например, вместо первой можно решать вторую, если под  $\mathbf{f}$  понимать вектор

всех частных производных  $H$  по своим аргументам. Обратная замена тоже возможна, если, например, в качестве  $H$  использовать сумму квадратов модулей координат вектора  $f$ , т.е. скалярный квадрат. Но это возможно только в

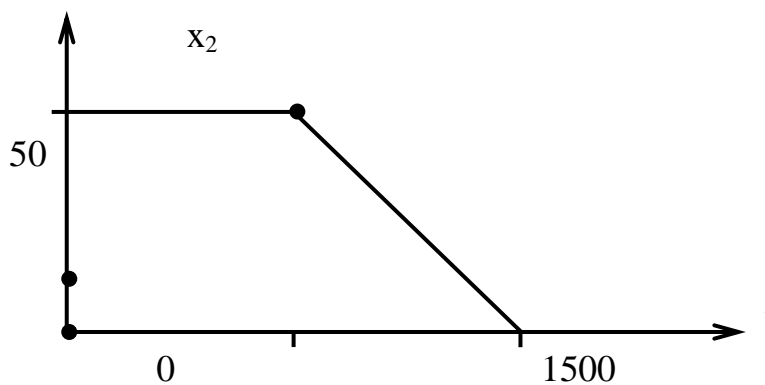


случае расположения решения внутри заданной области.

Рис. 36

**ПРИМЕР.** Рассмотрим дальнейшее развитие примера предыдущего пункта **A** – построения математической модели для оптимизации авиаперевозок.

Полученное решение задачи оптимизации в линейной постановке трактуется очень просто: наименьшие затраты **на один километр** пути обеспечиваются отсутствием перевозок. Это действительно так. Линейную постановку задачи оптимизации нельзя использовать в качестве математической модели для оптимизации экономичности авиаперевозок. Поэтому приходится вернуться к исходной, нелинейной постановке задачи. Нетрудно видеть, что в этой задаче необходимо найти наименьшее значение функции двух переменных, заданной на ограниченной области. Воспользуемся классическими приемами исследования функции. Как известно, наименьшее значение в этом случае следует искать среди **внутренних** точек возможных экстремумов **или на границе** области, изображенной



на рис. 37. В данной задаче нетрудно найти как первые, так и вторые.

Рис. 37

Сначала найдем все точки возможных экстремумов функции  $Z$  внутри допустимой области, если они есть. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x_1} = 200 - x_2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = -5x_1 = 0. \end{cases}$$

Решение выглядит следующим образом:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 40$ , т.е. подозрительной на экстремум является лишь одна точка (кстати, лежащая на границе допустимой области), в которой критерий оптимальности принимает значение:  $z_0(0; 40) = 0$ . Классифицировать эту точку нет необходимости, как это будет очевидно из последующих исследований. Проверим теперь все границы допустимой области.

Для верхней границы  $x_2 = 150$ , и  $z = -550x_1$ . Так как  $x_1$  изменяется в пределах от 0 до 1500, то наименьшее значение критерий оптимальности принимает в правой крайней точке этой границы:  $z_B(1500; 150) = -550 \cdot 1500 = -825000$ .

Для нижней границы  $x_2 = 0$ , и  $z = 200x_1$ . Так как  $x_1$  изменяется в пределах от 0 до 3000, то наименьшее значение критерий оптимальности принимает в левой крайней точке этой границы:  $z_H(0; 0) = 0$ .

Для левой границы  $x_1 = 0$ , и  $z_L = 0$  при любом  $x_2$ .

Для правой, наклонной границы  $x_1 = 3000 - 10x_2$ , поэтому

$$z_{II} = (3000 - 10x_2)(200 - 5x_2) = 600000 - 17000x_2 + 50x_2^2.$$

Это выражение принимает наименьшее значение, и притом единственное, в точке, где  $z'_{II} = -17000 + 100x_2 = 0$ . Эта точка лежит на прямой, являющейся продолжением наклонной границы, при  $x_2 = 170$ , т.е. вне области допустимых значений переменных. Однако заметим, что  $z$  на этой прямой ведет себя монотонно по обе стороны от точки минимума  $x_2 = 170$ , т.е. и на рассматриваемом отрезке границы. Поэтому наименьшее значение  $z$  на интервале изменения  $x$  от 0 до 150 будет в точке на этой наклонной прямой, ближайшей к  $x_2 = 170$ :  $z_{II}(1500; 150) = -550 \cdot 1500 = -825000$ .

Сравнивая все найденные значения  $z_0$ ,  $z_B$ ,  $z_H$ ,  $z_L$  и  $z_{II}$ , находим оптимальное решение нашей задачи: наибольший доход (наименьшие затраты) от эксплуатации данного самолета обеспечат перевозки полной коммерческой нагрузки 150 пассажиров на наибольшую возможную при этом (расчетную) дальность 1500 км.

Этот результат вполне соответствует реальности, поэтому такая математическая модель приемлема для решения задач оптимизации перевозок.

2)  $H$  представляет собой *унимодальную функцию* одного переменного  $x$ , что означает **существование** минимального значения  $H(x)$  в **единственной** точке внутри области допустимых значений. Поэтому прежде, чем применять следующие методы, необходимо каким-либо способом убедиться в том, что  $H$  обладает именно этим свойством.

Если аналитическая запись производной  $H'$  возможна, то это – частный случай рассмотренного выше п. 1. В противном случае можно воспользоваться одним из *методов последовательных приближений*, описанных ниже.

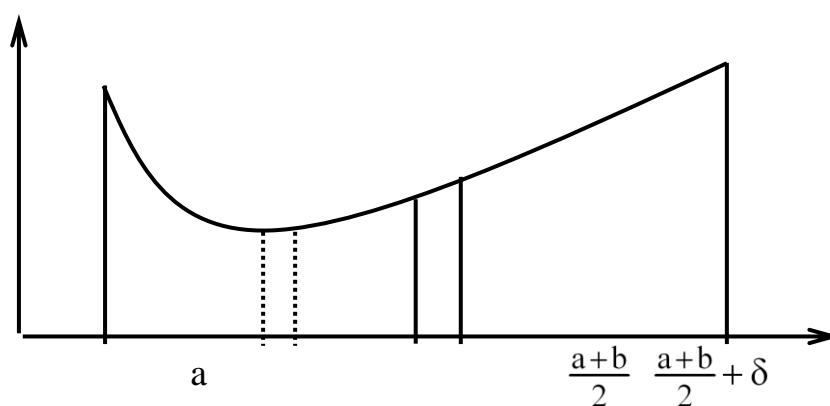
Метод деления отрезка пополам (название, но не сам метод, совпадает с названием одного из методов решения алгебраических уравнений) реализуется по следующему алгоритму.

1► Выделяется отрезок  $[a,b]$  области изменения аргумента  $x$ , в котором **гарантированно** находится решение (эту гарантию можно получить из дополнительных исследований функции  $H$  или, что тоже допустимо, из практических соображений о физической сути задачи).

2► В средней точке этого отрезка вычисляется значение  $H$   $[\frac{1}{2}(a+b)]$ .

3► Вычисляется значение  $H$   $[\frac{1}{2}(a+b)+\delta]$  в точке, расположенной **рядом** со средней точкой отрезка на расстоянии, равном требуемой точности решения задачи по величине аргумента (или гарантирующем "чувствительность" алгоритма расчетов величины  $H$  к изменению  $x$ ).

4► Выбирается та из половин отрезка, в сторону которой  $H$  внутри отрезка **уменьшается**, что можно определить по внутренним точкам, найденным в п.п. 2 и 3 (см. рис. 38, на котором условно показана зависимость  $H$



( $x$ ), на самом деле априори неизвестная в данной задаче).

Рис. 38

5► Для выбранной половины отрезка повторяются процедуры пунктов 2 – 4 алгоритма, т.е. отыскивается уже четверть исходного отрезка, на которой находится минимум. Такая процедура уменьшения области поиска (вдвое на каждой итерации) продолжается до тех пор, пока длина рассматриваемого отрезка не станет удовлетворять требованиям заданной точности (допустимой погрешности).

Метод золотого сечения (название, но не сам метод, совпадает с названием одного из методов решения алгебраических уравнений) реализуется по следующему алгоритму:

1► Выделяется отрезок  $[a,b]$  области изменения аргумента  $x$ , в котором **гарантированно** находится решение (эту гарантию можно получить из дополнительных исследований функции  $H$  или, что тоже допустимо, из практических соображений о физической сути задачи).

2► Производится **золотое сечение** отрезка  $[a,b]$  точками:  $u_1, u_2$  (см. одноименный метод в § 4.1).

3► Вычисляются значения  $H(u_1)$  и  $H(u_2)$ . Для продолжения алгоритма выбирается одна из больших частей отрезка: если  $H(u_1) \leq H(u_2)$ , то – левая:  $[a, u_2]$ , если  $H(u_1) > H(u_2)$ , то – правая:  $[u_1, b]$  (см. рис. 39).

4► Производится золотое сечение вновь полученного отрезка, как это делалось в п. 2 алгоритма, при этом одна из точек уже известна из предыдущего шага, так как по свойству золотого сечения одна его точка для всего отрезка является точкой золотого сечения той его части, на которой она расположена. Это позволяет экономить количество расчетов функции  $H$ .

5► Повторяется процедура п.п. 3 – 4 алгоритма дробления отрезка до тех пор, пока длина отрезка, подлежащего золотому сечению на очередном шаге, не станет удовлетворять требованиям заданной точности (допустимой погрешности).

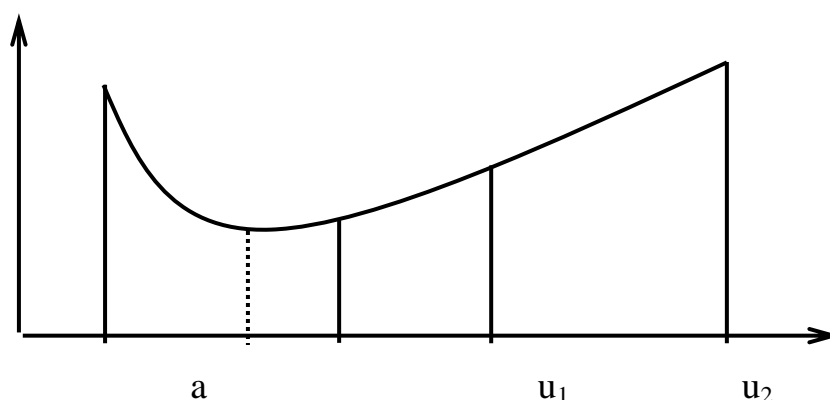


Рис. 39

3) Общий случай вида  $H$ , допускающий вычисление лишь значений ее частных производных тем или иным (в том числе и приближенным) способом, требует применения градиентных методов. Суть всех градиентных методов состоит в построении *метода последовательных приближений* по векторной формуле:

$$\mathbf{x}^{[j+1]} = \mathbf{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{по } i\text{-ой координате: } x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \lambda^{[j]} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i}),$$

где  $\mathbf{x}^{[j]}$  – точка в допустимой области, а  $\lambda^{[j]}$  каждого  $j$ -ого шага подбирается из соображений, свойственных конкретному методу, но так, чтобы  $\mathbf{x}^{[j+1]}$  тоже была бы допустимой точкой.

*Градиентные методы* имеют простой геометрический смысл. Рассмотрим пример функции  $H(x_1, x_2)$  двух аргументов  $x_1, x_2$  (см. рис. 40) и построим на плоскости их изменения линии уровней функции  $H$ . (Линией уровня функции называется геометрическое место точек, в которых функция принимает одинаковые значения.) Градиент  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  в любой точке, так же как и антиградиент

$-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  всегда направлен **по нормали** к линии уровня, проходящей через эту точку. Поэтому реализация градиентных методов означает спуск по поверхности  $H$  в наиболее крутом направлении (антиградиента  $-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ ) на некоторый шаг.

Последовательное повторение таких шагов при некоторых условиях обеспечивает спуск к минимуму  $H$ .

Таким образом, градиентный метод осуществляет пошаговый спуск по направлению антиградиента. Однако на каждом шаге при выборе его длины необходимо обеспечить два условия: во-первых, нельзя "заступать" за границы допустимой области изменения параметров, а во-вторых, не следует "перешагивать" через область минимума и попадать на противоположный склон. Разнообразные градиентные методы отличаются способами выполнения этих условий.

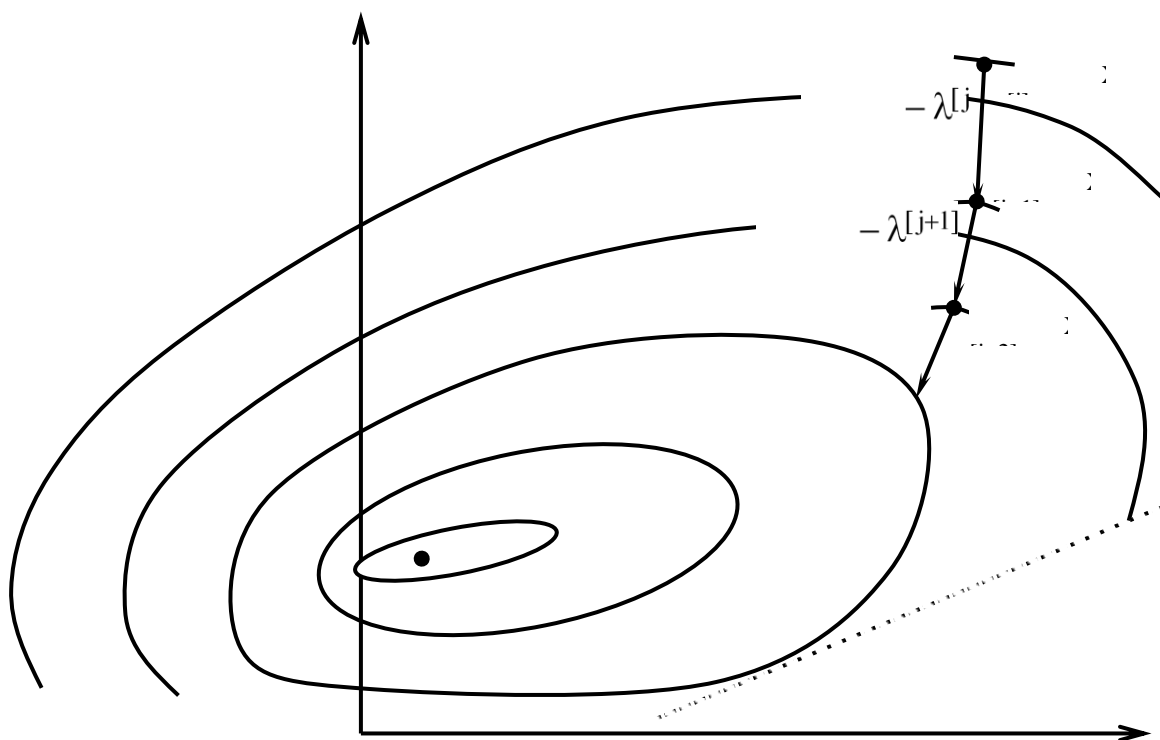


Рис. 40

Одним из приемов обеспечения первого из них является введение штрафных функций. *Штрафная функция* добавляется в критерий оптимальности  $H$  слагаемым и строится для каждой границы следующим образом: внутри допустимой области она принимает нулевое значение, а за границей начинает сильно расти, добавляя в критерий "нетерпимую" величину.

Для обеспечения второго условия приходится учитывать **предысторию** спуска, т.е. как быстро убывал критерий и в каком направлении. Учет предыстории помогает также экономить время расчета.

**В)  $f$  – не зависит явно от управлений и содержит производные** от фазовых координат:  $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}, t) = 0$ ; **ограничения** области допустимых управлений **отсутствуют**, но зато есть **граничные условия** вида:

$$\mathbf{G}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}, t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{a}, t] dt = 0,$$

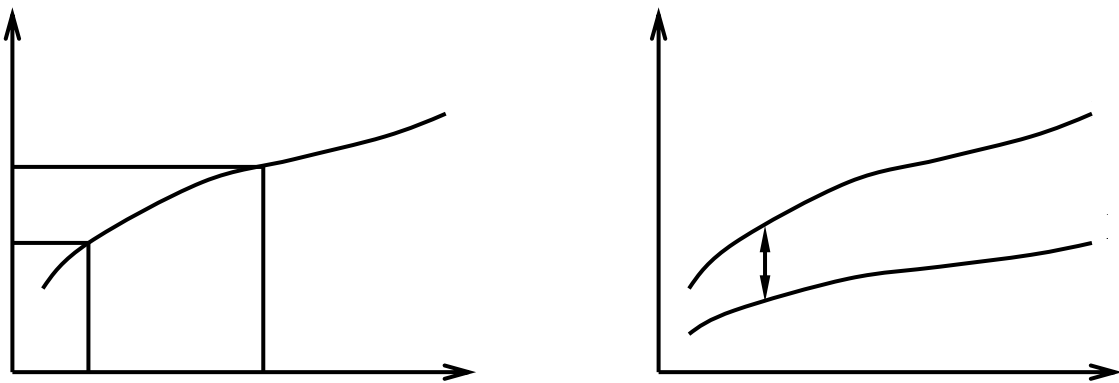
где  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{F}$  – векторные функции; критерий оптимальности имеет вид  $\mathbf{H}$  – **функционала, независящего явно от управлений**:

$$\mathbf{H} = \Phi[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}, t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{a}, t] dt = 0.$$

В этой задаче могут вообще отсутствовать управления  $\mathbf{u}(t)$ .

Это – *задача вариационного исчисления*: нахождение функции  $\mathbf{x}(t)$  (траектории), реализующей оптимум  $\mathbf{H}$ . Она решается "*непрямыми*" методами, основанными на дифференциальных уравнениях **необходимых** условий экстремума, или "*прямыми*" методами, основанными на последовательном приближении к оптимальной траектории с помощью **аппроксимирующих функций**.

Вариационное исчисление рассматривает **вариации функций** в некоторой области значений аргумента, аналогично тому, как в математическом анализе рассматриваются **приращения значений** функций. Однако, если приращение значения функции  $\mathbf{x}(t)$  имеет вид:  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)$ , то вариация функции  $\mathbf{x}(t)$  в вариационном исчислении имеет смысл функции-разности между исходной  $\mathbf{x}(t)$  и



новой функцией  $\mathbf{X}(t)$ , получаемой изменением  $\mathbf{x}(t)$ :  $\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{x}(t)$  (см. рис. 41).

Рис. 41

Функционал  $\mathbf{H}$  определен на некотором **множестве функций**  $\mathbf{x}(t)$  и связан с задачей отыскания такой из них (называемой *экстремалью*), при которой  $\mathbf{H}$  принимает экстремальное значение. Таким образом, функционал, в отличие от



функции, определяется не отдельными значениями аргумента, а **поведением** функции.

Упомянутые *непрямые* методы основаны на решении дифференциальных уравнений необходимых условий экстремальности Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

(где  $F$  – специальным образом определенная линейная комбинация из функций  $f$ ,  $F$  и  $F$ ) – аналога условия равенства нулю первой производной функции при отыскании ее экстремумов. Это – **необходимые**, но не достаточные условия экстремума. Поэтому для выявления истинных экстремалей следует проверять еще и дополнительные условия второго порядка – условия Лежандра – аналог равенства нулю вторых производных в математическом анализе.

Если в задаче вариационного исчисления не фиксированы граничные условия (*задача со свободными концами*), то приходится использовать дополнительные условия *трансверсальности* – дифференциальные соотношения на границах.

Решение вариационной задачи в случае **невывражения** каких-либо из упомянутых соотношений в конечном виде через элементарные функции представляет собой сложную вычислительную процедуру интегрирования дифференциальных уравнений. Иногда эту процедуру приходится проводить до конца, но чаще всего не прямые методы используются для анализа особенностей оптимальных решений. Такой анализ проводится, например, в динамике полета для изучения особенностей оптимальных траекторий в простейших случаях.

Что касается *прямых* методов решения вариационных задач, то они представляют собой подбор последовательными приближениями таблицы узловых значений искомой (*аппроксимирующей*) функции оптимальной траектории, удовлетворяющей уравнениям связей. Это очень громоздкая задача, требующая больших объемов памяти ЭВМ. Кроме того, нельзя математически строго **обосновать**, что найденное таким способом решение действительно является оптимальным – оптимальность необходимо проверить какими-либо дополнительными приемами и методами.

Г)  $f, g$  – функции, **зависящие явно от управлений**, причем  $f$  такова, что уравнения связей  $f = 0$  могут быть приведены к виду:  $\dot{x} = \tilde{f}$  – т.е. **разрешены** относительно производной; критерий оптимальности  $H$  – функционал вида:

$$H = \Phi [x(t_0), x(t_1), a, t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), u(t), a, t] dt = 0,$$

тоже в общем случае явно зависящий от управлений.

Это – задача оптимального управления: нахождение (синтез) оптимального управления  $\hat{u}(t)$ , которое переводит систему из одного состояния

в другое таким образом, что реализуется минимум  $H$ . Задачи оптимального управления решаются с помощью *принципа максимума* или *методом динамического программирования*.

Принцип максимума сформулирован Львом Семеновичем Понтрягиным и представляет собой обобщение уравнений необходимых условий экстремальности Эйлера-Лагранжа и условий трансверсальности вариационных задач с помощью особой функции Гамильтона, построенной из исходных уравнений связей. Особое преимущество использование принципа максимума дает при решении задач с **ограничениями** на фазовые координаты и управления, зависящими от времени. Примером может служить решенная автором задача оптимального набора высоты самолетом в условиях внешних ограничений, включая ограничения системы управления воздушным движением.

Метод динамического программирования разработан Р. Беллманом для решения так называемых "многошаговых" задач оптимального управления, в которых на каждом шаге предполагается отыскание оптимального управления (оптимальной стратегии) для перехода на следующий шаг.

Метод Беллмана, хотя и является математически достаточным, однако требует больших объемов памяти ЭВМ. При решении с его помощью непрерывных задач управления не всегда можно построить **сходящийся** алгоритм решения дифференциального уравнения с **частными производными**, в которые он преобразует исходную задачу. Поэтому метод Беллмана для решения таких задач обычно не применяется.

Следует упомянуть такой тип оптимизационных задач, как *дискретные*, подпадающие под понятие "многошаговых". Наибольшее распространение дискретные оптимизационные задачи, в частности, задачи линейного программирования и задачи оптимального программирования, получили в теории планирования эксперимента и исследовании операций.

Метод динамического программирования опирается в своем построении на принцип динамического программирования: планируя многошаговую операцию, надо выбирать управление на каждом шаге с **учетом всех его будущих** последствий на еще предстоящих шагах. Исходя из этого принципа, решение дискретной задачи оптимального управления начинают с **последнего** шага, пересматривая разные предположения об итоге возможного предыдущего.

Реализацию метода динамического программирования рассмотрим на предельно упрощенных примерах.

**ПРИМЕР 1.** Прокладка наивыгоднейшего (по минимуму суммарных затрат  $W$ ) пути из пункта А в пункт В.

Построим на плане местности между А и В прямоугольную сетку, предполагая, что дорога будет строиться только по границам этой сетки и только в северном или восточном направлении, т.е. в виде ломаной линии. Предположим, что известны затраты на строительство дороги вдоль каждого отрезка сетки на плане, которые указаны на рис. 42 в разрывах между узлами. Например, от А на север 10 единиц, а на восток 14. Требуется так проложить ломаную, чтобы сумма затрат вдоль ее отрезков была минимальной.

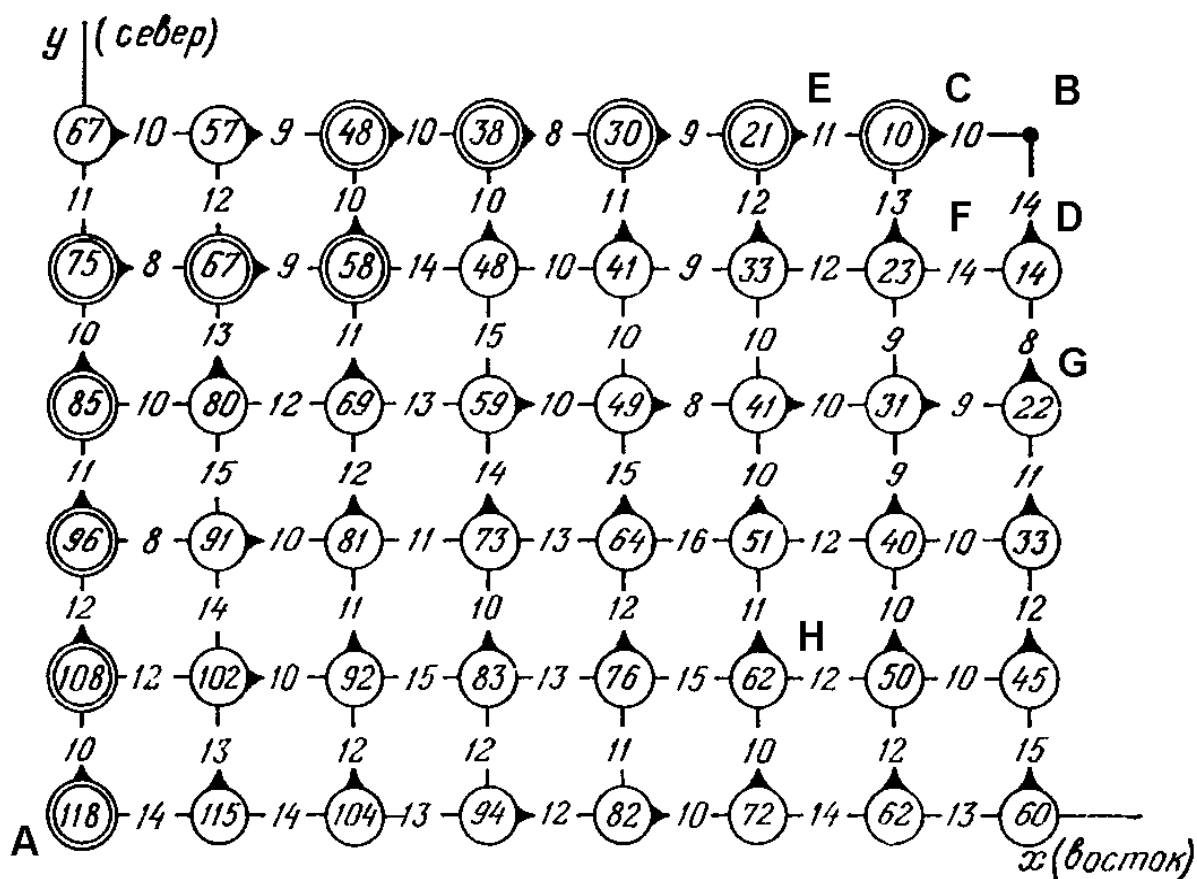


Рис. 42

Следуя принципу динамического программирования, решение нужно начать с последнего шага, т.е. от пункта В. В эту точку за один последний шаг можно попасть только из точек С или D. Из С в В можно построить дорогу единственным способом: на восток. Т.е. оптимальные (единственно возможные) затраты на этот путь составляют 10 единиц, что и записано в кружке этой точки, а оптимальное управление на восток показано стрелкой. Аналогично, в кружке точки D записано число 14 и стрелка указывает на север. Последний шаг рассмотрен и все его оптимальные варианты просчитаны.

Перед предпоследним шагом мы могли оказаться в одной из точек Е, F, G. Для каждой из них необходимо просчитать оптимальный путь предпоследнего шага. Из Е путь единственно возможный (по условиям задачи): на восток с затратами в 11 единиц. В этом случае оставшийся (вынужденный) путь из Е в В обойдется минимум в 21 единицу, это число и запишем в кружок точки Е, стрелка оптимального управления которого показывает на восток. Аналогичная ситуация, только с движением на север, складывается при нахождении в начале предпоследнего шага в точке G. Путь из этой точки до конечной точки В обойдется минимум в 22 единицы. В точке F есть две возможности выбрать предпоследний шаг: на север и на восток. Путь из F на север, через точку С, требует затрат в 13 единиц плюс минимум 10 (помеченных в кружке) на последнем шаге, т.е. 23 единицы. Вторая возможность (через точку D) потребует минимум  $14 + 14 = 28$  единиц. Таким образом, оптимальный путь из точки F на север **с учетом всех последующих шагов** требует минимум 23 единицы затрат. Это число со стрелкой на север и стоит в точке F. Рассмотрен предпоследний шаг.

Подобным образом необходимо просчитать оптимальный путь и определить оптимальное управление и на всех предыдущих шагах вплоть до первого. При этом оптимальные затраты определяются суммированием затрат на данном шаге с **уже оптимизированными** затратами всех последующих шагов, записанными в том кружке, куда показывает стрелка. В случае равенства затрат на различные пути из одной точки (например, из H) выбор делается произвольно.

После проведения такой процедуры оптимальные затраты оказываются определены и записаны в кружке А, а оптимальный путь указан стрелками. Таким образом, идя из точки А строго по стрелкам, мы построим оптимальный путь, проходящий через точки, отмеченные на рис. 42 двойными кружками.

Рассмотренный пример является классической задачей о кратчайшем пути из теории графов. Следующий пример относится к задаче теории графов типа оптимального назначения или распределения ресурсов.

**ПРИМЕР 2.** Распределение парка воздушных судов по авиалиниям наиболее выгодным (по максимуму доходов) способом.

Таблица 3

Авиакомпаниям требуется так распределить 10 самолетов по пяти авиалиниям, чтобы получить наибольший доход. Предполагается, что зависимость полученного на каждой авиалинии дохода от количества эксплуатируемых самолетов  $f_i(x)$  известно (см. табл. 3). В этой таблице видно, что ни на одну авиалинию ставить более 7 самолетов невыгодно: доходы перестают расти.

	X	1(x)	2(x)	3(x)	4(x)	5(x)
1	0	,5	,1	,6	,3	,0
2	1	,0	,5	,1	,6	,2
3	2	,4	,2	,2	,3	,3
4	3	,0	,8	,4	,4	,3
5	4	,5	,5	,6	,5	,3
6	5	,8	,9	,7	,5	,3
7	6	,0	,5	,8	,5	,3
8	7	,0	,5	,8	,5	,3

Метод динамического программирования в применении к этой задаче несколько громоздок, но его применение начинается, как и в предыдущем случае, с оптимизации последнего шага – распределения самолетов на последнюю 5-ю авиалинию. В табл. 4 приведены результаты расчетов условно оптимальных доходов по всем авиалиниям.  $Q$  обозначает располагаемый остаток самолетов для распределения на шаге,  $x_i(Q)$  – условно

оптимальное управление (распределение части остатка самолетов на данную авиалинию),  $W_i(Q)$  – условно оптимальный доход (от распределения самолетов на всех авиалиниях от  $i$ -й до пятой).

Таблица 4

	i = 5		i = 4		i = 3		i = 2		i = 1	
	x	W	x	W	x	W	x	W	x	W
	5(Q)	5(Q)	4(Q)	4(Q)	3(Q)	3(Q)	2(Q)	2(Q)	1(Q)	1(Q)
1	1	,0	0	,0	0	,0	0	,0	0	
2	2	,1	1	,3	1	,6	0	,6	0	
3	3	,2	2	,6	2	,1	0	,1	0	
4	4	,3	3	,3	2	,4	0	,4	0	
5	5	,3	3	,5	2	,9	0	,9	0	
6	6	,3	4	,6	2	,4	5	,5	3	
7	7	,3	5	,7	2	,6	5	,1	4	
8	8	,3	5	,7	2	,6	5	,1	4	

		,3	,8	,7	<b>5</b>	,6		
	1	1	2	3		5		
	1	1	2	4		5	*	*
0	0	,3	,8	,1		,6	<b>2</b>	<b>5,6</b>

Последние 2 столбца табл. 4, соответствующие первому шагу, содержат только одну строку, так как располагаемый "остаток" на первом шаге 10 самолетов. Табл. 4 заполняется по шагам с пятого до первого сверху вниз: элементы следующего шага (с меньшим номером) вычисляются только после заполнения предыдущих. Пара чисел для каждого шага определяется из **вспомогательных** таблиц, в которых рассматриваются **всевозможные** варианты распределения остатка самолетов на данном шаге и выбирается оптимальный – именно он и помещается в табл. 4. Для примера табл. 5 воспроизводит такой расчет для шага  $i = 3$  при остатке  $Q = 7$ .

Таблица 5

	$x$	$7 - x$	$\varphi_3(x)$	$W_4(7 - x)$	$\varphi_3(x) + W_4(7 - x)$
		0	1	0	1,8
		1	1	1,0	2,7
		2	1	1,3	2,9
		3	1	1,6	3,0
		4	1	2,3	3,5
		5	1	2,5	<b>*3,6</b>
<b>2</b>		6	0	2,6	3,2
		7	0	2,7	2,7

В первом столбце табл. 5 дается значение числа самолетов, которое можно распределить на данную авиалинию, исходя из остатка в 7 штук. Во втором столбце приведено значение остатка самолетов для распределения на 4-ю и 5-ю авиалинии. В следующих столбцах приводится расчет дохода: в третьем – от третьей авиалинии (табл. 3), в четвертом – оптимальный вариант от 4-й и 5-й авиалиний вместе (из 5-й строки:  $Q = 5$ , и 5-го столбца:  $i = 4$ , табл. 4), и в пятом – суммарный доход от 3-й, 4-й и 5-й авиалиний. Числа 2 и 3,6 для табл. 4 получаются как условно оптимальный вариант, обеспечивающий максимальное значение дохода на оставшихся шагах.

После заполнения всей табл. 4 отметим звездочкой \* оптимальное распределение, начиная с  $i = 1$ . Здесь по ходу вычислений с помощью таблицы, аналогичной табл. 5, получен оптимальный вариант в 2 самолета на первой авиалинии. После этого для распределения на 2-ю и оставшиеся авиалинии остается 8 самолетов, поэтому оптимальное распределение читаем на пересечении строки с этим остатком и столбца  $i = 2$ , т.е. 5 самолетов на 2-ю авиалинию. Далее: на третью – 2, на четвертую – ни одного, на пятую – 1 самолет. Доход от деятельности авиакомпании на этих пяти авиалиниях при таком распределении самолетов будет наибольшим и составит величину 5,6 единиц. Задача решена.

Рассмотренные примеры наглядно демонстрируют громоздкость решения подобных задач таким методом. Однако точное следование основному

принципу динамического программирования **гарантирует** получение оптимального решения, а применение вычислительной техники позволяет построить это решение на практике. Остается, как всегда в прикладных науках, только аккуратно сформулировать и поставить задачу.

#### 4.6. Приемы контроля математических моделей

Разработка математических моделей – трудоемкий процесс, сопряженный с подбором частных согласованных моделей, адекватных в своих областях, с идентификацией по результатам эксперимента. Поэтому такой дорогостоящий продукт нуждается в постоянном контроле на всех стадиях разработки. К основным приемам контроля математических моделей можно отнести следующие.

**А) Контроль размерностей** позволяет избежать несогласованностей в формулах основных законов природы и закономерностей объекта и подготовить их к применению в алгоритмах для вычислительной техники. Для контроля размерностей следует соблюдать три правила:

- знаки  $+$ ,  $-$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $=$  могут связывать величины только **одной** размерности;
- аргументами трансцендентных функций должны быть **безразмерные** величины;
- во всех расчетных формулах следует применять **одну** систему единиц измерения.

Так, например, в выражении  $e^{-at}$  показатель степени должен быть безразмерным: т.е.  $a$  и  $t$  безразмерны или имеют взаимно обратные размерности. В эмпирических формулах коэффициенты должны иметь размерность. Внесистемные единицы измерения следует перевести в применяемую систему, как это было сделано для тяги двигателя в § 2.1.

Общий контроль размерностей математического описания обеспечивается при его разработке, когда задача "решается в общем виде" и только в конечные формулы подставляются числовые значения величин. Однако, если таких этапов ("подмоделей") много, то контроль необходимо осуществлять на каждом из них.

**Б) Контроль основных законов** природы, прежде всего законов сохранения, необходим в моделях, не претендующих на всеобъемлющее описание оригинала, или в моделях, использующих численные методы вычисления. Так, например, если в модели используется только дифференциальное уравнение движения (2-й закон Ньютона), то разностная схема для его интегрирования должна строиться так, чтобы это уравнение, продифференцированное численным образом по времени, давало бы закон сохранения энергии с учетом особенностей явления.

**В) Контроль качественного поведения зависимостей** необходимо проводить во всех тех случаях, когда о промежуточных результатах можно что-

либо сказать. Такой контроль особенно важен при использовании в качестве частных элементов моделей зависимостей, полученных статистической обработкой результатов измерений. Хорошей иллюстрацией необходимости такого контроля является пример, разобранный в § 6.3, когда именно контроль качественного поведения рассматриваемой зависимости дает верные рецепты: или возможность применения только в области исходных данных без отражения физической сути, или невозможность применения для отражения физической сути явления.

Г) Общий порядок разработки математического описания модели, рассмотренный в § 2.1, обеспечивает *контроль математической замкнутости* задачи, т.е. соответствие количества уравнений количеству неизвестных. Действительно, без этого просто невозможно "решить задачу в общем виде", что необходимо для разработки вычислительного алгоритма модели. Однако, если разрабатываемую модель предполагается использовать только как промежуточное звено в более общей модели, то такой контроль необходимо проводить явным образом.

Д) Проверку *на контрольных примерах* проводят, как правило, для всей модели или для ее законченных частей, имеющих самостоятельное значение и смысл. В любом случае о поведении оригинала должна иметься достоверная информация, как для оценки адекватности, хотя, может быть, и неполная. Используются три вида контрольных примеров: простейшие случаи (тривиальные, как, например, "точка" покоя в примере § 4.3), случаи особого поведения (например, резонанс) и наиболее общие случаи, исследованные в специальных экспериментах. В отличие от задачи идентификации проверка на контрольных примерах дает лишь общий вывод о качественной правильности модели.

## Список литературы

1. Альсведе Р., Вегенер И. Задачи поиска. – М.: Мир", 1982. – 368 с.
2. Барзилович Е.Ю. Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения (теоретические основы эксплуатации авиационных систем по состоянию). – Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996. – 299 с.
3. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
5. Бернацкий Ф.И. Планирование экспериментов в инженерных исследованиях. – Владивосток: 1986. – 45 с.
6. Бормотов М.Ю., Гуров А.Г., Корунов С.С., Кукушкин С.Н. Экспертные методы прогнозирования. – М.: МАИ, 1985. – 60 с.
7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
8. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
10. Вилисов В.Я. и др. Экспертные методы в АСУ производством и отработкой ЛА. – М.: МАИ, 1984. – 72 с.
11. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, 1973. – 400 с.
12. ГОСТ 24026–80. Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1980.
13. Добров Г.М., Ершов Ю.В., Левин Е.И., Смирнов Л.П. Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. – Киев: Наукова Думка, 1974. – 160 с.
14. Дыхненко Л.М. и др. Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для вузов. – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.
15. Ибрагимов И.А. и др. Моделирование систем: Учебное пособие. – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
17. Красовский Г.И., Филаретов Г.Ф. Планирование эксперимента. – Минск: БГУ, 1982. – 302 с.



18. Кубланов М.С. Планирование экспериментов и обработка результатов: Учебно-методическое пособие по изучению дисциплины и варианты заданий РГР. – М.: МГТУ ГА, 1998. – 36 с.
19. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. М.: Радио и связь, 1989. – 224с.
20. Липатов Е.П. Теория графов и ее применения. – М.: Знание, 1986. – 32 с.
21. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Физматгиз, 1994. – 192 с.
22. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 208 с.
23. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савелов В.П. Динамические модели теории управления. – М.: Наука, 1995. – 400 с.
24. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1969. – 500 с.
25. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
26. Савченко А.А. Введение в математическую статистику с применением в гражданской авиации. – Киев: МИИГА, 1975. – 132 с.
27. Савченко А.А. Многомерный статистический анализ для инженеров гражданской авиации. – М.: МИИГА, 1976. – 112 с.
28. Советов Б.Я., Яковлев С.Я. Моделирование систем: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998. – 320 с.
29. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. – 664 с.
30. Хикс Ч.Р. Основные принципы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1967. – 406 с.
31. Чисар И., Кёрнер Я. Теория информации: теоремы кодирования для дискретных систем без памяти. – М.: Мир, 1985. – 400 с.
32. Шилейко А.В., Кочнев В.Ф., Химушин Ф.Ф. Введение в информационную теорию систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
33. Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. – М.: Мир, 1970. – 368 с.

## Предметный указатель

В предметном указателе приводятся выделенные в тексте курсивом и подчеркиванием термины, используемые в теории математического моделирования. Каждый термин снабжен списком страниц пособия, где он упоминается. Подчеркнутый номер указывает страницу пособия, где дается его определение, также подчеркнутое.

### А

- Агрегирование – 34, 35
- Адекватность – 20, 31, 34, 53
- Алгоритм вычислительный – 14
- Анализ статистический многомерный – 34, 35
- Аппроксимация – 20, 62, 79, 80, 93
  - k-го порядка – 80

### Б

- Бифуркация – 35

### В

- Величина безразмерная – 36, 73
  - размерная – 36
- Вершина – 42
  - изолированная – 42
  - смежная – 42
- Виды математических моделей – 15

### Г

- Граф неориентированный – 42
  - ориентированный – 42
  - помеченный – 42, 43
  - связанный – 43
- Группа событий полная – 51

### Д

- Движение автомодельное – 73
  - одномерное – 72
  - осесимметрическое – 72
  - плоскопараллельное – 72
  - установившееся – 72
- Декомпозиция – 35
- Достоверность – 20
- Дуга – 42
  - кратная – 42

## Е

- Единицы измерения (размерности) – 36
- – основные – 37
- – производные – 37

## Ж

- Жребий единичный – 51

## З

- Зависимости аналитические – 14, 76
- Задача вариационного исчисления – 91
  - идентификации – 29
  - Коши – 63, 71
  - краевая – 69
  - линейного программирования – 82
    - – – каноническая форма – 83, 85
    - – – общий вид – 82, 85
    - – – стандартная форма – 83, 85
  - нелинейного программирования – 86
  - о Кенигсбергских мостах – 43
  - о коммивояжере – 43
  - о раскраске политической карты – 43
  - оптимального управления – 93
  - со свободными концами – 92
- Задачи дискретные – 94
  - обратные – 30, 80
  - оптимизации – 30, 80
  - транспортные – 43
- Закон распределения – 44
- Заявки – 44

## И

- Идентификация – 29, 30, 31, 39
- Изучение оригинала – 31
- Интенсивность потока событий – 45
- Интервал доверительный – 21
- Интерполяция – 62
  - квадратичная – 60
  - кусочно-постоянная – 59
  - линейная – 59
  - полиномиальная – 60
  - сплайновая – 61

## К

- Каналы обслуживания – 44
- Комплекс степенной – 38
  - безразмерный (критерий подобия) – 38
- Контроль величины погрешности – 66, 67
  - математической замкнутости – 98
  - качественного поведения зависимостей – 98
  - основных законов – 97
  - размерностей – 97
  - на контрольных примерах – 98
- Координаты фазовые – 80
- Критерий оптимальности (целевая функция) – 81
  - подобия (безразмерный степенной комплекс) – 38, 39

## Л

- Линеаризация – 75

## М

- Метод деления отрезка пополам – 54, 55, 57, 88
  - динамического программирования – 93
  - золотого сечения – 54, 56, 57, 89
  - касательных (Ньютона) – 54, 58
  - моментов – 30
  - Монте-Карло (статистических испытаний) – 19, 44, 50
  - наибольшего правдоподобия – 30
  - наименьших квадратов – 30
  - Ньютона (касательных) – 54, 58
  - перебора – 30, 35
    - – простого – 35
    - – случайного – 34
  - проб и ошибок – 30, 35
  - проверки гипотез – 30, 35
  - прогонки – 69
  - секущих (хорд) – 54, 56, 57
  - симплекс-метод – 81
  - статистических испытаний (Монте-Карло) – 19, 44, 50
  - стрельбы – 71
  - хорд (секущих) – 56
- Методы Адамса – 64, 65
  - градиентные – 90
    - интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными – 71

- интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений –
- интерполяции – 57
- исключения – 54
- итерационные – 54, 71
- математического моделирования – 34
- "непрямые" – 91, 92
- неустойчивые – 77
- последовательных приближений – 30, 35, 54, 88, 90
- "прогноз-коррекция" – 65
- "прямые" – 92, 93
- Рунге-Кутта – 66
- сеток – 69
- устойчивые – 77
- Эйлера – 63
- модифицированные – 63
- экспертных оценок – 34, 35
- Многокритериальность – 34
- Модели аналогичные – 13
  - геометрические – 12, 13
  - детерминированные – 15, 16
  - дискретные (цифровые) – 13, 15
  - имитационные – 19, 44, 52
  - линейные – 15
  - логические – 12
  - математические – 13, 14, 15, 16
  - материальные – 12
  - нелинейные – 15
  - непрерывные (аналоговые) – 13, 15
  - нестационарные – 15
  - нечеткие – 15
  - образно-символьные – 12
  - образные – 12, 13
  - подобные – 36
  - символные – 12, 13
  - стационарные – 15
  - стохастические – 15, 19
  - условные – 13
  - функционально-геометрические – 12, 13
  - функциональные – 12
  - четкие – 15
- Моделирование – 10, 31
  - стохастическое (имитационное) – 50

Модель – 7, 8, 9, 10, 44

## Н

Непротиворечивость – 32

## О

Область допустимых управлений – 81, 86

Обработка информации первичная – 8

Объекты подобные – 36

Ограничения – 80

Однозначность – 32

Описание вероятностное (стохастическое) – 14

– математическое – 14, 15, 31

– феноменологическое – 31, 72, 75

Оптимальное решение (оптимальная траектория) – 81

– управление – 81

Оригинал – 9, 10

Ориентированный граф – 42

Отделение корней – 55

## П

Петля – 42

Пи-теорема – 38

План вычислительного эксперимента – 20

Планирование эксперимента – 8

– – вычислительного – 19, 20, 31

"Плохо организованные системы" – 7, 8

Погрешность – 26, 54

– абсолютная – 26

– грубая – 26

– относительная – 26

– относительная приведенная – 26

– систематическая – 26

– случайная – 26

– удовлетворительная – 26

Подобные объекты – 36

Полустепень захода вершины – 43

– исхода вершины – 43

Поток событий – 45

– – интенсивность – 45

– – ординарный – 45

– – простейший – 45

– – пуассоновский – 45

- с отсутствием последствия – 45
- стационарный – 45
- Пренебрежение малыми членами – 73
- Принцип динамического программирования – 94
  - максимума – 93
- Принципы математического моделирования – 32
- Причины, вынуждающие применять моделирование – 11
  - погрешности – 26
- Проблемы построения (синтеза) математических моделей – 34
- Прогонка обратная – 71
  - прямая – 71
- Программирование линейное – 82
- Проклятие размерности – 34
- Процесс гибели и размножения – 47, 48
  - марковский – 46
- Путь – 43
  - простой – 43

## **Р**

- Размерность (единица измерения) – 36
- Ранжирование – 34, 35
- Ребро – 42
  - смежное – 42
- Решение базисное допустимое – 83, 86
  - вырожденное – 83
  - оптимальное – 83, 84
  - допустимое – 82
  - невозмущенное – 76
  - оптимальное (оптимальная траектория) – 81

## **С**

- Сглаживание – 62
- Системы "жесткие" – 79
  - массового обслуживания – 44
  - многоканальная – 48
  - с ожиданием – 46, 48
  - с отказами – 46, 48
- События независимые – 51
  - однородные – 45
- Слайн – 61
- Статистика математическая – 19, 20
- Степень вершины – 43
- Схемы разностные – 63, 71

-- восходящие – 79  
Сходимость – 32, 79, 80  
– к-го порядка – 80

## Т

Теория вероятностей – 19  
– катастроф – 20, 35  
– массового обслуживания – 19, 44  
Точность – 32  
Траектория оптимальная (оптимальное решение) – 81

## У

Узлы – 58  
Управление оптимальное – 81  
Управления (управляющие функции) – 80  
Уравнения связей (уравнения движения) – 80  
– Эрланга – 46  
Условие нормировки – 45  
Условия сходимости – 54  
– трансверсальности – 92  
Устойчивость – 32, 64, 67, 77, 78

## Ф

Форма задачи линейного программирования стандартная – 82, 85  
– – – – каноническая – 82, 85  
Формула интерполяционная Лагранжа – 60  
– – Ньютона – 61  
Формулы рекуррентные – 54  
Функции управляющие (управления) – 81  
Функционал – 81, 91  
Функция интерполяционная – 59  
– сеточная – 69  
– целевая (критерий оптимальности) – 81  
– унимодальная – 88  
– штрафная – 91

## Х

"Хорошо организованные системы" – 7

## Ц

Цикл – 43  
– простой – 43



– эйлеров – 43

**Ч**

Число случайное – 50

**Ш**

Шаг интегрирования – 63

**Э**

Эйлеров цикл – 43

Эксперимент вычислительный – 20, 31

– – контрольный – 30, 31

Экстремаль – 92