ВВЕДЕНИЕ

Физические процессы, рассматриваемые в инженерных задачах, описываются, в большинстве случаев, функциями времени, называемыми реализациями процесса. Существуют физические явления, будущее поведение которых можно предсказать на основе прошлых измерений, такие процессы называются детерминированными. Однако многие процессы в каждой серии измерений дают свою специфическую реализацию, которую нельзя предсказать. Эти процессы принято называть случайными.

Анализ электромагнитной обстановки и обнаружение источников радиоизлучения является сложной инженерной задачей. Априорная неопределенность по классу излучений предполагает использование статистических (вероятностных) методов оценки электромагнитной обстановки. При этом речь идет именно об анализе случайных процессов.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Любой случайный процесс x(t) задается ансамблем его реализаций

$$x_i(t), i = 1,2,3,...$$

Среднее значение (момент первого порядка) случайного процесса в момент времени t_1 может быть найден суммированием мгновенных значений каждой выборочной функции ансамбля в момент t_1 и деления этой суммы на число выборочных функций. Аналогичным образом могут быть найдены и другие моменты более высокого порядка

$$\bar{x} = \mu_x(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1), \qquad (1)$$

$$R_x(t_1,\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)x_k(t_1+\tau). \qquad (2)$$

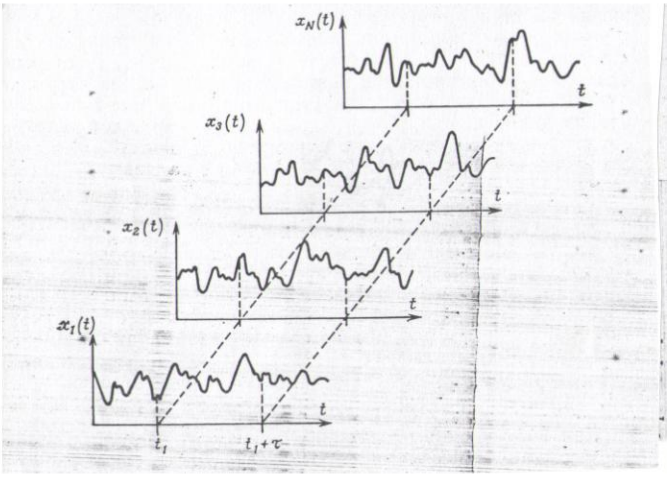

Рис. 1. Ансамбль выборочных функций

Если все средние значения не зависят от времени t_1 *, то случайный процесс называется стационарным.*

Часто средние характеристики стационарного процесса, найденные усреднением по ансамблю, совпадают с соответствующими характеристиками, вычисленными путем усреднения по времени в пределах одной реализации. Так средние значения, заданные уравнениями (1) и (2), в большинстве случаев можно вычислить по формулам

$$\bar{x} = \mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \tag{3}$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt, \tag{4}$$

где $x(t)$ - произвольная реализация, принадлежащая ансамблю $\{ x(t) \}$.

Такие случайные процессы называют эргодическими случайными процессами.

Эргодические случайные процессы представляют важный класс случайных процессов, так как все свойства эргодических процессов могут быть определены осреднением по времени одной выборочной функции.

Для описания основных свойств случайных процессов используются четыре статистические функции:
- среднее значение;
- среднее значение квадрата случайного процесса;
- автокорреляционная и/или спектральная плотность.

Среднее значение квадрата дает представление об интенсивности случайного процесса. Плотность распределения характеризует распределение значений процесса в фиксированных точках. Автокорреляционная функция и спектральная плотность дают аналогичную информацию о процессе во временной и частотной областях соответственно.

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И МОМЕНТЫ

Элементарное представление о суммарной интенсивности любого случайного процесса дает *среднее значение квадрата,* которое представляет собой просто среднее значение квадрата значений процесса в пределах данной реализации.

В частном случае, для стационарных эргодических процессов, моменты разного типа не зависят от времени и могут быть вычислены по единственной реализации x(t) по формулам

$$\bar{x} = \mu_x = E[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \tag{5}$$

$$\varphi_x^2 = E[x^2(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt, \tag{6}$$

$$\sigma_x^2 = E[(x(t)-\mu_x)^2] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\mu_x]^2 dt\ . \tag{7}$$

1.2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Плотность распределения случайного процесса определяет вероятность того, что значения процесса в произвольный момент времени будут заключены в определенном интервале.

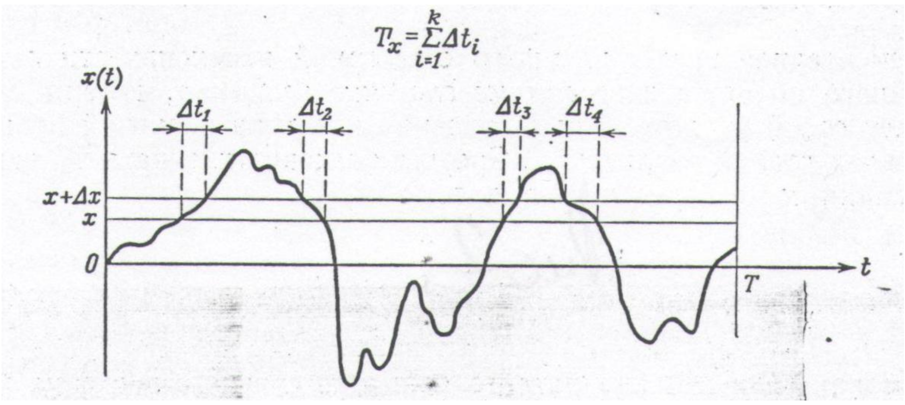

Рис. 2. Определение плотности распределения

Вероятность того, что значения $x(t)$ попадают в интервал от $\breve{o}$до $(x+\Delta x)$ можно найти, вычисляя отношение $\frac{T_x}{T}$. Здесь T_x - суммарное время нахождения значений процесса в интервале $(x, x+\Delta x)$ за время наблюдения T.

$$P[x < x(t) \le x+\Delta x] = \lim_{T\to\infty}\frac{T_X}{T}.$$

При малых Δx одномерная плотность распределения p(x) определяется отношением:

$$p(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P[x < x(t) \le x+\Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\grave{O}}\left(\frac{T_X}{\Delta x}\right). \tag{8}$$

Вероятность того, что мгновенное значение x(t) не превышает некоторой величины x, характеризуется функцией P(x), численно равной интегралу от плотности распределения от $-\infty$ до x. Функцию P(x) называют интегральной функцией распределения

$$\text{Đ}(x) = \text{Đ}[x(t \le x] = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx\,. \tag{9}$$

В настоящее время при анализе случайных процессов используются различные плотности вероятности. Однако при анализе электромагнитной обстановки в большинстве случаев достаточно трех плотностей вероятности, которые хорошо описывают широкий класс практически важных случайных процессов. К ним относятся плотности:

- нормального (гауссовского) шума;
- гармонического процесса;
- аддитивной смеси гармонического процесса и гауссовского шума;

Все эти три плотности хорошо известны.

Пример 1. Нормальный (гауссовский) шум

Важность нормального распределения определяется применимостью на практике центральной предельной теоремы теории вероятностей, которая формулируется следующим образом [1]:
если случайная величина x есть сумма n статистически независимых случайных величин $x_1, x_2, ..., x_n$ с произвольными плотностями, то плотность суммы случайных величин $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ приближается к нормальной плотности, если n стремится к бесконечности.

Выражение (10) называют нормальной или гауссовской плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}\,, \tag{10}$$

где μ_x и σ_x - соответственно среднее значение (момент первого порядка) и среднеквадратичное отклонение (σ^2 - центральный момент второго порядка).
Функция (10) обычно нормируется $z = (x - \mu_x)/\sigma_x$, табулируется и имеется в справочной литературе [1,2]

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \tag{11}$$

Нормированная гауссовская интегральная функция распределения имеет вид

$$\text{Đ}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz\,. \tag{12}$$

Графики нормированного интегрального нормального распределения и его плотности приведены на рис. 3.

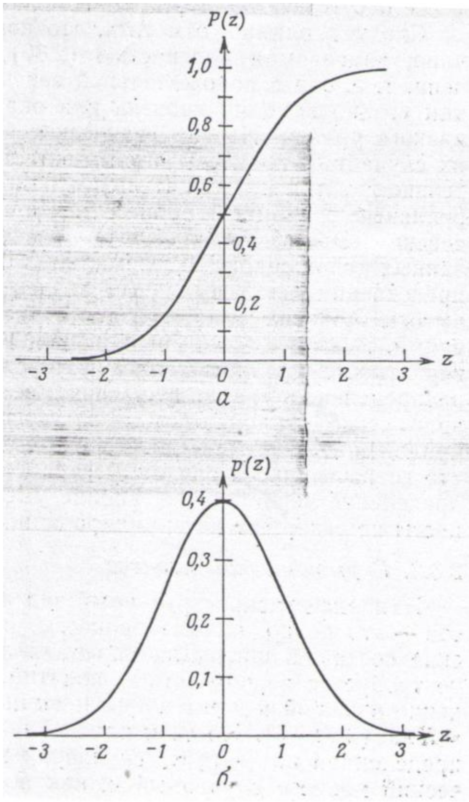

Рис.3. Нормированная гауссовская функция распределения (а)
и ее плотность (б)

Таким образом, нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами – средним значением μ_X и среднеквадратичным отклонением σ_X. Поэтому для определения нормальной плотности достаточно оценить только эти два параметра процесса.

Пример 2. Гармонический процесс

Наиболее распространенный вид детерминированных процессов – это периодические процессы, разлагаемые на гармонические составляющие. Для описания гармонической составляющей не требуется вероятностных понятий, так как ее точное значение в любой момент времени вычисляется по формуле $x(t) = A\sin(2\pi ft + \theta)$. Но, если начальная фаза θ - случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$, то этот гармонический процесс также случайный и его плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} (\pi\sqrt{2\sigma_x^2 - x^2})^{-1}, |x| < A; \\ 0, |x| \geq A. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\sigma_x = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$ - среднеквадратичное отклонение гармонического процесса. График этой плотности при $\sigma_x = 1$ изображен на рис.4.

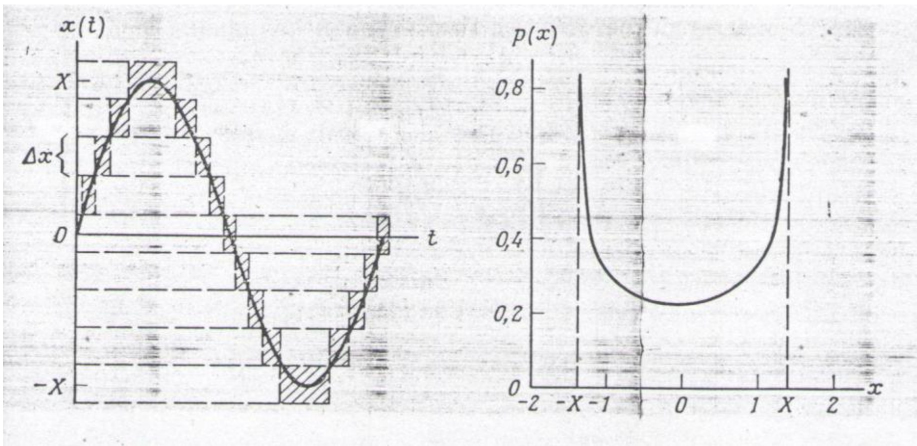

Рис.4. Нормированная плотность вероятности гармонического процесса

Из *рис.4.* видно, что при любой ширине интервала Δx гармонический процесс на каждом периоде наибольшее время находится вблизи крайних (амплитудных) значений $\pm A$ и наименьшее – вблизи среднего $\mu_x = 0$ значения.

Как и гауссовская плотность, плотность гармонического процесса полностью определяется средним значением и среднеквадратичным отклонением. Но, в отличие от гауссовской плотности, среднее значение которой наиболее вероятно, плотность гармонического процесса достигает минимума в точке с координатой, равной среднему, т.е. значения, близкие к среднему, наименее вероятны. Это является главным и существенным отличием гармонического процесса от узкополосного шума*. На этом отличии часто строят алгоритмы обнаружения слабого гармонического сигнала в нормальном, белом шуме.

---

* Узкополосный шум обычно является гауссовским, каким бы узким ни был его спектр, см. [1,2,3].

Пример 3. Аддитивная сумма гармонического процесса и гауссовского шума.

В этом случае реализация стационарного эргодического случайного процесса имеет вид x(t)=S(t)+n(t), где S(t) - гармонический процесс, $S(t) = A\sin(2\pi ft + \theta)$, а n(t) гауссовский случайный шум.

Плотность вероятности этого процесса равна свертке плотностей слагаемых, задаваемых формулами (10) и (13).

Полагая, что средние значения обоих процессов равны нулю, можно показать [1,3], что

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_n \pi \sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \exp\left[-\left(\frac{x - A\cos\theta}{4\sigma_n}\right)^2\right] d\theta, \qquad (14)$$

где σ_n - среднеквадратичное отклонение гауссовского шума n(t), а A и θ - соответственно амплитуда и начальная фаза гармонического процесса.

Графики p(z) для различных значений отношения дисперсии гармонического процесса к дисперсии шума $R = \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_n}\right)^2$ приведены на рис.5.

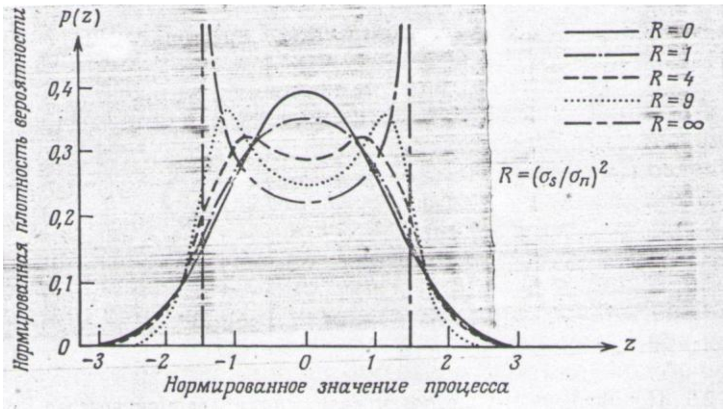

Рис. 5. Нормированная плотность вероятности аддитивной суммы гармонического процесса и шума

1.3. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Классическое определение корреляционной функции известно из курса теории вероятности и/или статистики [1].

Рассмотрим лишь применение понятий корреляции для целей анализа электромагнитной обстановки и определения основных характеристик принимаемых радиосигналов.

Автокорреляционная функция случайного процесса (АКФ) характеризует общую зависимость значений процесса в некоторый момент времени от значений в любой другой момент, рис.6.

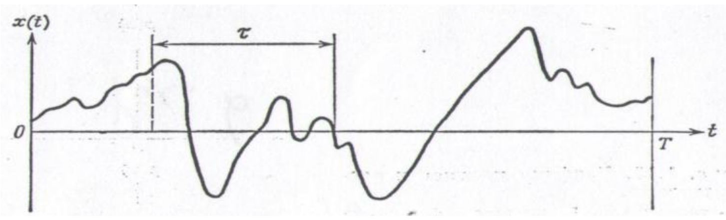

Рис.6. Определение автокорреляционной функции

Оценку величины автокорреляционной функции связывающей значение $x(t_i)$ в моменты времени t_i и $t_i + \tau$, можно получить, вычисляя произведение этих ординат и осредняя величину произведения в пределах времени наблюдения T. Найденное таким образом значение произведения приближается к точному значению АКФ при стремлении времени наблюдения к бесконечности, $T \to \infty$

$$R_X(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt. \qquad (15)$$

Величина $R_x(\tau)$ - всегда действительная четная функция с максимумом в точке $\tau = 0$. В общем виде $R_x(\tau) = R_x(-\tau), R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$ при любых τ.

Среднее значение функции x(t) равно положительному значению корня квадратного из АКФ, взятой при $\tau \to \infty$ $\bar{x} = \mu_x = \sqrt{R_x(\infty)}$, а среднее значение квадрата функции x(t) $\varphi_x^2 = E[x^2(t)] = R_x(0)$ равно значению автокорреляционной функции при нулевом сдвиге.

Пример 4. Виды автокорреляционных функций

На рис.7 показаны графики автокорреляционных функций для гармонического сигнала, узкополосного и широкополосного шумов, а также аддитивной суммы гармонического сигнала и случайного шума.

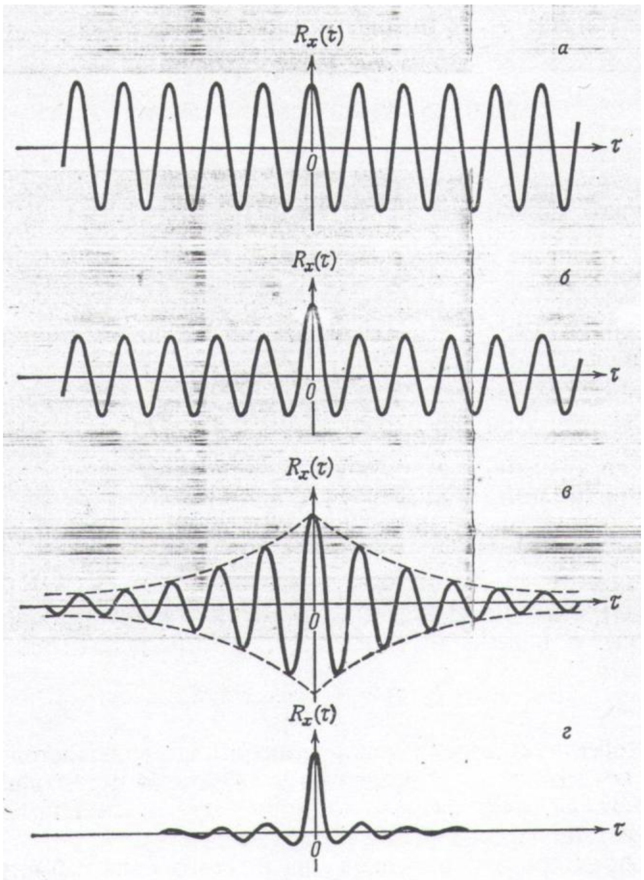

Рис.7. Автокорреляционные функции гармонического сигнала (а), аддитивной суммы гармонического сигнала и случайного шума (б), узкополосного (в), широкополосного (г) шумов

Автокорреляционная функция гармонического сигнала имеет вид

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f_0\tau. \tag{16}$$

Это косинусоида, важная особенность кореллограмммы заключается в том, что форма ее периодически повторяется во времени с периодом гармонического колебания, но информация о фазе колебания теряется.

Автокоррелограмма широкополосного случайного процесса имеет вид крутого пика с быстрым спаданием к нулю. В предельном случае – белого шума, автокорреляционная функция имеет вид дельта - функции при $\tau = 0$.

Автокоррелограмма суммы гармонического колебания и шума представляет собой суммы автокоррелограмм гармонического колебания и случайного шума.

Автокоррелограмма узкополосного случайного шума напоминает автокоррелограмму гармонического колебания, однако, ее амплитуда быстро затухает.

Таким образом, в случае гармонического колебания автокорреляционная функция повторяет свою форму во времени, в отличие от автокорреляционной функции случайного процесса, поэтому автокорреляционная функция представляет мощное средство выявления детерминированных процессов, которые могут маскироваться случайным фоновым шумом.

1.4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Спектральная плотность мощности случайного процесса описывает частотную структуру процесса через спектральную плотность среднего значения квадрата его значений. Среднее значение квадрата значений реализаций в интервале частот $[f, f+\Delta f]$ можно получить, подавая эту реализацию на вход идеального полосового фильтра с узкой полосой пропускания и осредняя возведенную в квадрат функцию на выходе фильтра. Это усредненное значение приближается к его точному значению при стремлении интервала наблюдения к бесконечности

$$\varphi_X^2[f, f+\Delta f] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t, f, \Delta f)dt \ . \tag{17}$$

При малых полосах пропускания осредняющего фильтра $\varphi_x^2(f, f+\Delta f) \approx G_x(f)\Delta f$, или более строго спектральная плотность мощности есть

$$G_X(f) = \lim_{\Delta f\to 0} \frac{\varphi_X^2[f, f+\Delta f]}{\Delta f} = \lim_{\Delta f\to 0}\,[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(f, \Delta f, t)dt]. \tag{18}$$

Величина $G_x(f)$ - всегда действительная, неотрицательная функция. Важное свойство спектральной плотности заключается в её связи с автокорреляционной функцией. Для стационарного процесса эти функции связаны преобразованием Фурье

$$G_x(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-2\pi j\tau}d\tau = 4\int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau\,. \tag{19}$$

Среднее значение функции x(t) определяется через спектральную плотность в соответствии с формулой

$$\bar{x} = \mu_X = m_1 = \left[\int_{-0}^{+\infty} G_X(f)df\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

а среднее значение квадрата функции x(t) описывается зависимостью

$$\varphi_x^2 = \int_{-0}^{+\infty} G_x(f)df. \tag{21}$$

Следовательно, среднее значение квадрата случайной величины x(t) равно площади под кривой спектральной плотности как функции частоты.

Пример 5. Частотная характеристика случайного процесса

Основным применением спектральной плотности физического процесса является исследование его частной структуры, например, если на вход четырехполюсника с частотной характеристикой H(f) подается стационарный случайный сигнал со спектральной плотностью $G_x(f)$, то на его выходе будет наблюдаться стационарный случайный сигнал со спектральной плотностью [1]

$$G_y(f) = |H(f)|^2\, G_x(f).$$

Отсюда следует, что если любые две величины, входящие в данные выражения, измерены или известны, то можно найти и третью.

1.5. ПОГРЕШНОСТИ ВЫБОРОЧНЫХ ОЦЕНОК

Все приведенные формулы, определяющие среднее, средний квадрат, дисперсию, плотность вероятности указывают и на метод оценивания этих величин. Все определения содержат операцию перехода к пределу, которая на практике не осуществима*. Невозможность выполнить предельный переход приводит к выборочной изменчивости оценок, полученных при обработке данных. Другими словами, анализ случайных процессов дает только некоторое приближение к истинным значениям вычисляемых параметров процесса. В этом смысле важно оценить величину возможной ошибки при расчете полученных оценок.

Случайными ошибками называют ошибки, являющиеся следствием разброса значений оценок, полученных по разным выборкам для одного и того же случайного процесса. Эти ошибки являются прямым следствием конечной длины T, доступной для наблюдения реализации и/или конечного числа N значений реализации. Случайная ошибка оценки φ равна среднеквадратичному отклонению оценки $\hat{\varphi}$

$$G_{\hat{\varphi}} = \left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\varphi}_i - \overline{\hat{\varphi}_i}\;\; ^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ошибки обычно выражают в относительных единицах $\varepsilon = \dfrac{G_\varphi}{\varphi}$. Если $\varepsilon = 0.1$, то разброс оценки $\hat{\varphi}$ относительно среднего значения имеет среднеквадратичное отклонение, равное 10% истинного значения φ.

---

* Очевидно, что нельзя обрабатывать реализацию бесконечной длины или, тем более, обрабатывать бесконечное число реализаций.

Другим классом ошибок являются ошибки смещения - это систематические ошибки. Смещение оценки φ равно

$$B_{\hat{\varphi}} = \hat{\varphi} - \varphi = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\varphi}_i - \varphi.$$

Часто ошибки смещения оцениваемых параметров случайного процесса отсутствуют либо они могут быть учтены в алгоритмах обработки.

Плотность вероятности выборочной оценки может иметь очень сложный вид, но если случайная ошибка не очень велика, то приближенно можно считать, что выборочное распределение аппроксимируется нормальным распределением со средним $\mu_{\hat{\varphi}} = \varphi + B_{\hat{\varphi}}$ и среднеквадратичным отклонением

$$\sigma_{\hat{\varphi}} = \varepsilon \cdot \varphi .$$

Оценки среднего значения и среднего квадрата несмещенные. Случайные ошибки этих оценок вычислены (см. [3]) и приведены ниже.

Для оценок, получаемых усреднением по ансамблю, получены точные значения ошибок [3,4]. В случае же усреднения по времени, формулы для ошибок применимы только к процессам, энергия которых равномерно распределена в полосе частот шириной $\Delta f = B$. В этом случае, в соответствии с теоремой отсчетов (Котельникова), число независимых выборок равно N=2BT.

Среднее значение и среднее значение квадрата

Нормированная среднеквадратичная ошибка оценки среднего значения случайного процесса $\hat{\mu}_{\delta}$, полученной по реализации x(t) с истинным средним значением μ_X и среднеквадратичным отношением σ_x, равна

$$\varepsilon \approx \frac{1}{\sqrt{2BT}} \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X} \right). \tag{22}$$

Величина $$T_r = \frac{1}{2B\varepsilon^2} \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X} \right) \tag{23}$$

определяет минимальную длину реализации, необходимую для того, чтобы ошибка измерения была равна заданной величине ε .

Нормированная среднеквадратичная ошибка оценки среднего значения квадрата $\hat{\varphi}_X^2$ равна

$$\varepsilon \approx \frac{1}{\sqrt{BT}}, \text{ а} \tag{24}$$

$$T_r \approx \frac{1}{B\varepsilon^2} \tag{25}$$

определяет минимальную длину реализации, необходимую для того, чтобы ошибка измерения не превосходила заданное ε.

Плотность распределения

Нормированная среднеквадратичная ошибка оценки одномерной плотности распределения $\hat{p}(x)$ достаточно хорошо аппроксимируется выражением

$$\varepsilon \approx \frac{A}{\sqrt{BTW\hat{p}(x)}}, \qquad (26)$$

где A- некоторая константа, а W- представляет ширину разрешающей полосы частот. Величина

$$T_r = \frac{A}{\varepsilon^2 WB\hat{p}(x)}, \qquad (27)$$

как и ранее, позволяет определить минимальную длину реализации, необходимую для того, чтобы ошибка измерения была не более ε.

Автокорреляционная функция

Нормированная среднеквадратичная ошибка оценки АКФ $\hat{R}_x(\tau)$, полученной по реализации x(t) случайного процесса с истинным средним $\mu_x = 0$ и истинной автокорреляционной функцией $R_x(\tau)$, равна

$$\varepsilon \approx \frac{1}{\sqrt{2BT}}\left[1+\frac{R_x^2(0)}{R_x^2(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (28)$$

Таким образом, величина

$$T_r = \frac{1}{B\varepsilon^2}\left[1+\frac{R_x^2(0)}{R_x^2(\tau)}\right] \qquad (29)$$

определяет минимальную длину реализации, необходимую для того, чтобы ошибка измерения была не более заданной величины ε. При $\tau = 0$ $T_r = \frac{1}{B\varepsilon^2}$, т.е. для оценки близких к нулю значений АКФ с фиксированной ошибкой ε необходимо располагать весьма длинными реализациями, как и в случае оценивания средних значений.

Спектральная плотность

Нормированная среднеквадратичная ошибка оценки спектральной плотности $\hat{G}_x(f)$ при разрешающей способности B_e этой оценки имеет вид

$$\varepsilon \cong \frac{1}{\sqrt{B_e T}}.^{*} \tag{30}$$

Следовательно, $T_r = \dfrac{1}{B_{\mathring{a}} \varepsilon^2}$ (31)

определяет минимальную длину реализации, необходимую для того, чтобы ошибка измерения была меньше или равна заданной величине ε.

Все приведенные выражения можно применить для получения соответствующих оценок с использованием цифровых вычислителей - специализированных или универсальных.

Следует отметить, что случайные ошибки ε обратно пропорциональны корню квадратному из числа реализаций или длины реализации (объёма выборки). Кроме того, при получении оценок усреднением по времени ширина полосы B влияет на объем выборки в той же степени, что и длина реализации. Это значит, что при анализе широкополосных процессов, в частности в задачах оценки электромагнитной обстановки, даже сравнительно короткая реализация может обеспечить высокую точность оценок.

2. РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПО ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Применение цифровых вычислителей требует дискретного представления непрерывных процессов: решения задач дискретизации во времени и квантования по амплитуде, замены интегралов суммами, установления связи между длительностью реализации и разрешающей способностью по частоте с соответствующими параметрами дискретных реализаций. Статистические ошибки, связанные с численными расчетами, необходимо определить через эти параметры.

Преобразование непрерывного процесса в дискретный (временной ряд) необходимо выполнить в соответствии с теоремой отсчетов (Котельникова), таким образом $\{u_n\}, n = 1,2,...,N$ -численные значения отдельной реализации функции времени u(t) в точках $t_n = t_0 + nh, n = 1,2,...N$. Соседние точки разделены интервалом $\Delta t = h$,

$$\Delta t = h = \frac{1}{2 f_c} \ , \tag{32}$$

---

* предполагается, что ошибка смещения пренебрежимо мала, из-за высокой разрешающей способности (B_e) измерения.

где f_c - наивысшая частота в спектре анализируемого процесса.

Таким образом, исходные данные могут быть представлены в виде временного ряда $u_n = u(nh), n = 1,2,...,N$.

Вычисление среднего значения

Выборочное среднее значение находится в виде

$$\bar{u}_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u_n . \tag{33}$$

Рассчитываемая по этой формуле $\bar{u}_n$ представляет собой несмещенную оценку истинного среднего значения μ_n. При независимых отсчетах среднеквадратичная ошибка оценки равна $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Если среднее значение не равно нулю, то для упрощения последующих расчетов желательно преобразовать процесс таким образом, чтобы его среднее значение было равно нулю.

Новая реализация будет иметь вид $x(t) = u(t) - \bar{u}$, а последовательность $\{x_n\} = nh = u_n - \bar{u}, n = 1,2,...N.$

Вычисление среднего значение квадрата

Выборочное среднее значение квадрата вычисляется следующим образом

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (x_n)^2 . \tag{34}$$

Рассчитываемая по этой формуле оценка $\overline{x^2}$ представляет собой смещенную оценку истинного среднего значения квадрата φ_x^2.

Нормированная среднеквадратичная ошибки равна $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{N}}$.

Выборочное значение среднеквадратичного отклонения определяется в виде

$$\sigma_S = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{(x_n)^2}{N-1}\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{35}$$

Рассчитываемые σ_s и σ_s^2 представляют собой несмещенные оценки истинных значений среднеквадратичного отклонения σ_s и дисперсии σ_s^2.

Вычисление автокорреляционной функции и энергетического спектра

При вычислении АКФ и энергетического спектра анализируемого процесса интервал дискретизации можно выбирать в соответствии с теоремой отсчетов $\Delta t = h = \dfrac{1}{2f_c}$,(32). Однако для точного измерения АКФ, когда эта функция может иметь частоты близкие к f_c , интервал дискретизации рекомендуется выбирать равным $\Delta t = \dfrac{1}{4f_c}$. Если же основное внимание уделяется оценки энергетического спектра, то достаточно принять $\Delta t = h = \dfrac{1}{5f_c}$.

Число шагов для расчета корреляционной функции m выбирают из желаемой разрешающей способности B_e при расчете энергетического спектра

$$m = \frac{1}{B_e h} \text{ или } B_e = \frac{1}{mh}. \tag{36}$$

Таким образом, при постоянном шаге дискретизации h величина B_e будет уменьшаться с ростом m.

Объем выборки N и длина реализации T_r выбираются исходя из заданной или желаемой величины среднеквадратичной ошибки

$$N = \frac{m}{\varepsilon^2} \text{ и } T_r = Nh, \tag{37}$$

где ε - нормированная среднеквадратичная ошибка оценки спектра процесса.

Число степеней свободы при расчете оценок спектра равно

$$n = \frac{2N}{m} = 2B_e T_r \ , \tag{38}$$

а нормированная среднеквадратичная ошибка

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m}{N}}. \tag{39}$$

Таким образом, при фиксированном объеме выборки N среднеквадратичная ошибка уменьшается с уменьшением m.

Пример 6. Задана разрешающая способность оценки спектра $B_e = 100\tilde{A}\ddot{o}$

при $f_{\tilde{n}} = 10000$ Гц и $T_r = 10$ с. Найти величины $\Delta t, m, N, \varepsilon$.

1. $\Delta t = h = \dfrac{1}{2f_c} = \dfrac{1}{2 \cdot 10^4} = 0.05\grave{\imath}\ c$,

2. $$m = \frac{1}{B_e h} = \frac{1}{100 \cdot 0.05 \cdot 10^{-3}} = 200 \ ,$$

3. $$N = \frac{T_r}{h} = \frac{10}{0.05 \cdot 10^{-3}} = 200.000,$$

4. $$\varepsilon = \sqrt{\frac{m}{N}} = \sqrt{\frac{200}{200 \cdot 10^{3}}} = 0.03 \ .$$

Пример 7. Задана среднеквадратичная ошибка
$\varepsilon = 0.1,\ f_c = 1000\tilde{A}\ddot{o}, m = 50.$

Необходимо найти величины $\Delta t, B_e, N, T_r$.

1. $$h = -\frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \cdot 1000} = 0.5\grave{\imath}\ c = 0.5 \cdot 10^{-3} c,$$

2. $$B_e = \frac{1}{mh} = \frac{1}{50 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}} = 40\tilde{A}\ddot{o},$$

3. $$N = \frac{m}{\varepsilon^2} = \frac{50}{0.1 \cdot 0.1} = 5.000,$$

4. $$T_r = N \cdot h = 5000 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 2.5c\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств :учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2004.

2. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983.

3. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т.1,2. – М.: Мир,1983.

4. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1971. Т.1, 1972. - Т.2.