СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ... 4

2. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ.. 4

3. СТРУКТУРА КУРСА... 5

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ 5

5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.. 12

6. ПРАКТИЧЕСКИЕ И СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ…………………… 13

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ... 14

8. ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ.. 18

9. ТАБЛИЦА ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА……………………………………… 19

10. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ……………………………………… 22

10.1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА.. 22

10.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.. 22

10.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.. 29

10.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.. 32

10.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 ……………………………………... 36

10.6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 ……………………………………... 36

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие содержит общие рекомендации по изучению дисциплины "Методы и алгоритмы обработки статистических данных" для студентов II курса направления образования 280700 дневного обучения МГТУ ГА: цели и задачи дисциплины, описание ее структуры, программу дисциплины с методическими указаниями по изучению ее разделов, список рекомендуемой литературы, контрольные вопросы, а также указания к выполнению лабораторных работ, практических занятий и домашних заданий.

В связи с ограниченным количеством учебников по данной дисциплине самостоятельная работа студентов по ее освоению должна проводиться с помощью предлагаемой основной литературы [1, 2], которая содержит необходимый минимум материала по дисциплине. При работе с другой литературой следует учитывать особенности применяемой терминологии и опираться на основную рекомендуемую литературу.

2. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью преподавания дисциплины "Методы и алгоритмы обработки статистических данных " является формирование у студентов знаний основ прикладных методов математической статистики и возможностях обработки многопараметрической информации, о процессах и системах в гражданской авиации, обработки результатов натурных и вычислительных экспериментов, а также планирования экспериментов для получения научно обоснованных и достоверных выводов.

Задачи изучения дисциплины (минимально необходимый комплекс знаний и умений):

– иметь представление об основах и особенностях математического моделирования больших систем, о методах статистического анализа, об основах статистического контроля качества, о прикладных возможностях методов статистического анализа, о принципах и методах планирования эксперимента, что необходимо для решения производственных, эксплуатационных и исследовательских задач гражданской авиации;

– знать основные понятия теории моделирования, математической статистики, теории эксперимента;

– уметь проводить дисперсионный и регрессионный анализ, определять необходимый объем эксперимента, составлять простейшие планы эксперимента для дисперсионного и регрессионного анализа, делать выводы по результатам статистического анализа экспериментальных данных.

3. СТРУКТУРА КУРСА

На дневном отделении Московского государственного технического университета гражданской авиации дисциплина " Методы и алгоритмы обработки статистических данных " направления обучения 280700 обеспечивается в течение четвертого семестра 14 лекциями, 3 домашними заданиями,12 практическими занятиями, 4 лабораторными работами и завершается сдачей экзамена.

Лекции предназначены для первичного ознакомления с материалом в методически правильной постановке и последовательности. И хотя дисциплина насыщена математическими формулами, на лекциях следует стремиться не столько к точному их конспектированию, сколько к пониманию логических связей отдельных элементов курса, разделов, методов. Поэтому рекомендуется составлять конспект лекций на одной (правой) стороне разворота тетради, оставляя другую (левую) для последующей самостоятельной работы. В процессе самостоятельной работы с учебными пособиями и другой литературой можно восполнить пробелы конспекта, дополнить его новым материалом, а также зафиксировать свои собственные мысли. Все это позволит в дальнейшем продуктивно использовать конспект в качестве справочника.

Лабораторные работы предназначены для ознакомления с методами планирования эксперимента и обработки данных для получения достоверного результата, для изучения приемов регрессионного и дисперсионного анализа. Лабораторные работы выполняются на компьютерах с помощью специального программного обеспечения. Отчет о выполненной лабораторной работе защищается у преподавателя.

Практические занятия и домашние задания предназначены для приобретения навыков планирования экспериментов и обработки результатов и "иммунитета" к поверхностному, нестрогому подходу к решаемым практическим проблемам, для изучения методов построения контрольных карт, определения необходимого объема эксперимента. Они выполняются студентами самостоятельно и защищаются у преподавателя после рецензирования.

Экзамен проводится после успешного выполнения всего учебного плана (после защиты всех лабораторных работ, выполнения практических занятий и домашних заданий) с помощью контролирующей программы на компьютерах в объеме контрольных вопросов каждого раздела программы дисциплины.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Прикладные возможности первичной обработки информации.

4.1.1. Введение в основы моделирования, обработка информации и планирование эксперимента.

Реальность, познанное, абстракции, модель. Множественность моделей. "Хорошо" и "плохо" организованные системы. Законы и закономерности. Цели научных и инженерных исследований. Планирование, моделирование, обработка информации.

Методические указания к изучению раздела.
Литература: [1, введение, с. 6-8].
Центральные вопросы раздела: Соотношение познанного и реальности. "Хорошо" и "плохо" организованные системы. Обработка информации.

Контрольные вопросы:
1. Почему результаты наблюдения нельзя считать истиной?
2. Особенности "хорошо организованных систем".
3. Особенности "плохо организованных систем".
4. Различие законов и закономерностей.
5. Цель научных исследований.
6. Цель инженерных исследований.
7. Обработка информации.
8. Планирование научных исследований и экспериментов.

4.1.2. Сбор и обработка информации.
Математическая статистика – аппарат сбора и обработки информации. Проблемы сбора и обработки информации. Пример зависимости результата от способа отбора. Отбор информации важен, но не объективен. Виды отбора информации.

Методические указания к изучению раздела.
Литература: [2, §5.2: с. 5, 12-14].
Центральные вопросы раздела: Математическая статистика. Виды отбора информации.
Контрольные вопросы:
1. Основные проблемы сбора и обработки информации.
2.Что такое естественный отбор?
3. Что такое искусственный отбор?
4. Что такое пристрастный отбор?
5. Что такое случайный отбор?
6. Что такое типический отбор?
7. Что такое репрезентативный отбор?
8. Что такое расслоенный отбор?

4.1.3. Основы теории вероятностей и математической статистики.
Основные термины теории вероятностей и математической статистики. Числовые характеристики случайных величин. Система обозначений.

Методические указания к изучению раздела
Литература: [2, § 5.1: с. 5-10].
Центральные вопросы раздела: Статистическое определение вероятности. Выборка и генеральная совокупность.

Контрольные вопросы:

1. Понятие события.
2. Невозможное и достоверное событие.
3. Классическое определение вероятности.
4. Случайная величина.
5. Закон распределения случайной величины.
6. Интегральная и дифференциальная функции распределения вероятностей, их свойства.
7. Понятие математического ожидания.
8. Понятие дисперсии и среднего квадратического отклонения.
9. Понятие медианы.
10. Понятие моды.
11. Понятие размаха.
12. Понятие ковариации и коэффициента корреляции.

4.1.4. Методы математической статистики.

Статистическое определение вероятности. Понятие о математической статистике. Выборка и генеральная совокупность. Последовательность применения методов математической статистики. Первичная обработка информации. Статистический анализ. Цель статистического анализа.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 5.1: с. 10-12].

Центральные вопросы раздела: Методы математической статистики. Статистический анализ.

Контрольные вопросы:

1. Статистическое определение вероятности.
2. Выборка и генеральная совокупность.

4.1.5. Точечные оценки.

Обобщенное понятие точечных оценок. Метод моментов. Свойства точечных оценок. Метод наибольшего правдоподобия. Число степеней свободы.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 5.3: с. 14-19].

Центральные вопросы раздела: Понятие точечных оценок. Свойства точечных оценок. Методы вычисления точечных оценок.

Контрольные вопросы:

1. Обобщенное понятие точечных оценок.
2. Что и как определяет точечная оценка?
3. Как проводится точечная оценка?
4. Какие точечные оценки необходимы для анализа случайной величины?
5. Какие характеристики случайных величин можно получить с помощью точечных оценок?

6. Что такое свойство несмещенности точечной оценки?
7. Что такое свойство состоятельности точечной оценки?
8. Что такое свойство эффективности точечной оценки?
9. Основная идея метода моментов.
10. Основной недостаток метода моментов.
11. Основное достоинство метода моментов.
12. Какое свойство точечных оценок обеспечивает метод моментов?
13. Основная идея метода наибольшего правдоподобия.
14. Основной недостаток метода наибольшего правдоподобия.
15. Что такое функция наибольшего правдоподобия?
16. Что такое робастность?
17. Что характеризует число степеней свободы?

4.1.6. Законы распределения.

Фундаментальность нормального закона распределения. Выборочные функции. Таблица законов распределения выборочных функций случайных величин.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 5.4: с. 20-23].

Центральные вопросы раздела: Нормальный закон распределения. Понятие выборочных функций.

Контрольные вопросы:

1. В чем проявляется фундаментальность нормального закона распределения?
2. Что описывает нормальный закон распределения?
3. Что такое выборочные функции?
4. Для чего строятся выборочные функции.
5. Основная цель использования выборочных функций.

4.1.7. Интервальные оценки.

Понятие об интервальных оценках – доверительных интервалах. Общий принцип построения доверительных интервалов. Применение доверительных интервалов для оценки точности информации и необходимого ее объема.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 5.5: с. 23-25].

Центральные вопросы раздела: Общий принцип построения доверительных интервалов.

Контрольные вопросы:

1. Общее понятие доверительного интервала для точечных оценок.
2. Роль выборочных функций в построении доверительных интервалов.
3. Что необходимо знать для построения доверительного интервала?

4. Как доверительный интервал определяет точность оценки?

5. Связь доверительного интервала, точности и объема информации.

4.1.8. Основы статистического контроля качества технологических процессов.

Регулирование качества технологических процессов на основе текущего контроля. Доверительные интервалы – основа метода контрольных карт. Распространенные виды контрольных карт. Приемочный контроль. Однократные и многократные выборки. Два уровня качества.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 5.8: с. 39-45].

Центральные вопросы раздела: Статистические основы метода контрольных карт.

Контрольные вопросы:

1 Что лежит в основе метода контрольных карт?

2. Что такое контрольная карта?

3. Какой контроль позволяют осуществлять контрольные карты?

4. Какой метод лежит в основе приемочного контроля?

5. Какие уровни качества лежат в основе определения приемочного числа?

4.2. Прикладные возможности многофакторного статистического анализа.

4.2.1. Задачи многомерного статистического анализа.

Объект исследования. Термины. Виды задач изучения многофакторных систем. Назначение статистического анализа. Задачи статистического анализа. Многовариантность элементов статистического анализа. Анализ ковариации для двух случайных величин. Соотношение зависимости и коррелированности. Коэффициент корреляции как оценка связи факторов. Корреляционная модель. Корреляционный анализ. Оценка тесноты связи факторов. Алгоритм корреляционного анализа.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 6.1, 6.2: с. 46-53].

Центральные вопросы раздела: Смысл среднеквадратического отклонения и коэффициента корреляции.

Контрольные вопросы:

1. Основные вопросы, решаемые многофакторным статистическим анализом.

2. Прикладной смысл среднего квадратического отклонения и коэффициента корреляции.

3. Ковариация как характеристика тенденции связи случайных величин.

4. Какой характер имеет соотношение коррелированности с зависимостью?

5. Основная задача корреляционного анализа.
6. Основная задача регрессионного анализа.
7. Основная задача конфлюэнтного анализа.
8. Основная задача дисперсионного анализа.

4.2.2. Понятие о дисперсионном анализе.

Основная идея дисперсионного анализа (без упоминания конфлюэнтного анализа). Существенные предположения дисперсионного анализа. Однофакторный эксперимент. Разбиение дисперсионной суммы и дисперсии. Основное уравнение дисперсионного анализа. Критерий Р. Фишера. Пример. Многофакторные дисперсионные модели. Обеспечение предположений дисперсионного анализа. Алгоритм дисперсионного анализа.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 6.3: с. 53-59].

Центральные вопросы раздела: Разбиение дисперсии. Критерий Фишера.

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается основная идея дисперсионного анализа?
2. Существенные предположения дисперсионного анализа.
3. На какие части можно разбить дисперсию результатов однофакторного эксперимента?
4. Что характеризует остаточная дисперсия?
5. Что характеризует межгрупповая дисперсия?
6. Какой вывод можно сделать из сравнения составляющих дисперсий?
7. Как проверяется условие независимости факторов?
8. Какой критерий лежит в основе оценки влиянии исследуемого фактора?
9. Как обеспечивается близость распределения исследуемых факторов нормальному распределению?

4.2.3. Понятие о регрессионном анализе.

Понятие о регрессионном анализе. Регрессия. Регрессионная модель. Виды регрессионных моделей. Алгоритм регрессионного анализа. Необходимость учета физических свойств явления. Метод наименьших квадратов как частный случай метода наибольшего правдоподобия. Исследование вида и формы связи параметров по статистическим данным с помощью регрессионного анализа. Эквивалентность понятий регрессии, сглаживания и аппроксимации. Примеры проведения регрессионного анализа.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 6.4: с. 59-64].

Центральные вопросы раздела: Понятие регрессии. Необходимость учета физических свойств явления.

Контрольные вопросы:

1. Что такое линия регрессии?
2. Из каких соображений выбирается вид линии регрессии?
3. Для чего нужна проверка гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции?
4. Каким методом находятся параметры линии регрессии?
5. Частным случаем какого метода является метод наименьших квадратов?
6. Какой физический смысл имеет метод наименьших квадратов?
7. Что характеризуют частные дисперсии, исследуемые при построении линии регрессии?

4.2.4. Применение регрессионного анализа. Понятие о конфлюэнтном анализе.

Пример регрессионного анализа. Замечания. Примеры решения реальных задач. Представление параметров в конфлюэнтном анализе. Структурные и стохастические компоненты. Связь с шумом и ненаблюдаемыми параметрами.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 6.4, 6.5: с. 64-68].

Центральные вопросы раздела: Вид представления параметров в конфлюэнтном анализе.

Контрольные вопросы:

1. Какие компоненты определяют связь факторов в конфлюэнтном анализе?
2. Каково математическое ожидание у стохастических компонент?

4.3. Планирование эксперимента.

4.3.1. Проблемы построения эксперимента.

Сложные системы. Место эксперимента. Терминология теории эксперимента. Проблемы постановки эксперимента. Принципы планирования эксперимента. Цель планирования эксперимента. Пример выгоды планирования эксперимента.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 7.1, 7.2: с. 72-78].

Центральные вопросы раздела: Основные термины и понятия теории эксперимента. Принципы планирования экспериментов.

Контрольные вопросы:

1. Определение эксперимента.
2. Для чего предназначен эксперимент?
3. Определение опыта.
4. Что такое активный и пассивный эксперименты?

5. Определение плана эксперимента.
6. Какие факторы задаются в плане эксперимента?
7. Смысловое содержание дисперсионной модели.
8. Смысловое содержание регрессионной модели.
9. Что такое планирование эксперимента?
10. В чем состоит принцип отказа от полного перебора?
11. В чем состоит принцип последовательного планирования?
12. В чем состоит принцип сопоставления с шумом?
13. В чем состоит принцип рандомизации?
14. В чем состоит принцип оптимальности плана?

4.3.2. Назначение плана эксперимента.

Рандомизация. Полный план, сбалансированный, блочный, латинские квадраты. Подходы к планированию объема эксперимента. Пример решения практической задачи.

Методические указания к изучению раздела.

Литература: [2, § 7.2, 7.3: с. 78-84].

Центральные вопросы раздела: Назначение плана эксперимента.

Контрольные вопросы:

1. Цель планирования эксперимента.
2. Каким условиям должна удовлетворять информация, полученная в результате правильно спланированного эксперимента?
3. Как можно управлять эффективностью экспериментальных оценок?
4. Общий вид латинских квадратов.

5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Кубланов М.С. Математическое моделирование // Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов: учеб. пособие. - 3-е изд. – М.: МГТУ ГА, 2004. – Ч. I.

2. Кубланов М.С. Математическое моделирование // Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов: учеб. пособие. – 3-е изд. – М.: МГТУ ГА, 2004. – Ч. II.

Учебно-методическая литература:

3. Кубланов М.С. Планирование экспериментов и обработка результатов измерений: пособие к изучению дисциплины, выполнению лабораторных работ и домашних заданий. – М.: МГТУ ГА, 2005.

Дополнительная литература

4. Савченко А.А. Введение в математическую статистику с применением в гражданской авиации. – Киев: КИИ ГА, 1975.

5. Савченко А.А. Многомерный статистический анализ для инженеров гражданской авиации. – М.: МИИ ГА, 1976.

6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964.

7. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968.

8. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Иностранная литература, 1956.

9. Шторм Р. Теория вероятностей // Математическая статистика // Статистический контроль качества. – М.: Мир, 1970.

10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973.

11. Хикс Ч.Р. Основные принципы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1967.

12. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971.

13. Бернацкий Ф.И. Планирование экспериментов в инженерных исследованиях. – Владивосток, 1986.

14. Красовский Г.И., Филаретов Г.Ф. Планирование эксперимента. – Минск: БГУ, 1982.

15. ГОСТ 24026–80. Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1980.

16. Бормотов М.Ю., Гуров А.Г., Корунов С.С. и др. Экспертные методы прогнозирования. – М.: МАИ, 1985.

17. Добров Г.М., Ершов Ю.В., Левин Е.И. и др. Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. – Киев: Наукова Думка, 1974.

18. Шилейко А.В., Кочнев В.Ф., Химушин Ф.Ф. Введение в информационную теорию систем. – М.: Радио и связь, 1985.

19. Барзилович Е.Ю. Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения (теоретические основы эксплуатации авиационных систем по состоянию). – Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996.

6. ПРАКТИЧЕСКИЕ И СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ

6.1. Прикладные возможности первичной обработки информации (4 часа).

6.1.1. Необходимость и возможность проверки гипотез в статистическом анализе. Виды критериев. Параметрические критерии. Значение функции правдоподобия при проверке гипотез. Четыре возможных исхода. Уровень значимости.

6.1.2. Четыре вида альтернативных гипотез и их графическая интерпретация. Алгоритм проверки статистических гипотез. Прием последовательного анализа. Критерий Вальда. Непараметрические критерии. Критерий знаков. Критерий К. Пирсона χ^2.

6.2. Прикладные возможности многофакторного статистического анализа (8 часов).

6.2.1. Задачи, решаемые с помощью корреляционного анализа.
6.2.2. Задачи, решаемые с помощью регрессионного анализа.
6.2.3. Задачи, решаемые с помощью дисперсионного анализа.
6.2.4. Анализ распространенных ошибок.

6.3. Планирование эксперимента (12 часов).

6.3.1. План однофакторного эксперимента для дисперсионного анализа.
6.3.2. Выявление влияния фактора с помощью дисперсионного анализа.
6.3.3. Неполноблочный сбалансированный план двухфакторного четырехуровневого эксперимента.
6.3.4. Модели и планы трехфакторного четырехуровневого эксперимента.
6.3.5. План трехфакторного двухуровневого эксперимента.

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

К № 1. Требуется разработать контрольную карту средних значений контролируемого параметра $\bar{x}$, определяемых по данным N = 5 замеров, для текущего контроля качества технологического процесса. Нижнюю и верхнюю контрольные границы определить по значениям соответствующих уровней значимости (вероятностей ошибок I рода в нижнюю и верхнюю стороны): $\alpha^- = 0{,}11$ и $\alpha^+ = 0{,}105$. Номинальное значение контролируемого параметра составляет: a = 0,0450, а среднее квадратическое отклонение: $\sigma = 0{,}02$.

В основе разработки контрольных карт [2, § 5.8] для $\bar{x}$ лежат доверительные интервалы с опорной точкой в a и определяемые заданной доверительной вероятностью γ:

$$P\{a - \delta^- < \bar{x} < a + \delta^+\} = \gamma .$$

Преобразуем это выражение, вычтя из всех трех частей неравенства величину a и поделив полученное на $\sigma / \sqrt{N}$:

$$P\left\{-\frac{\delta^-}{\sigma}\sqrt{N} < \frac{\bar{x} - a}{\sigma}\sqrt{N} < \frac{\delta^+}{\sigma}\sqrt{N}\right\} = \gamma .$$

В нашем несимметричном случае, когда заданы вероятности ошибок в каждую сторону, следует строить доверительный интервал из двух неравных частей:

$$P\left\{-\frac{\delta^-}{\sigma}\sqrt{N} < \frac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{N} < 0\right\} = \gamma^- \text{ и } P\left\{0 < \frac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{N} < \frac{\delta^+}{\sigma}\sqrt{N}\right\} = \gamma^+,$$

где $\gamma^- + \gamma^+ = \gamma$. Вероятность ошибки I рода в нижнюю сторону представляет собой вероятность **не**попадания в левый доверительный полуинтервал $\alpha^- = 0{,}5 - \gamma^-$, откуда $\gamma^- = 0{,}5 - \alpha^- = 0{,}39$. Аналогично: $\gamma^+ = 0{,}5 - \alpha^+ = 0{,}395$.

Как известно [2, § 5.4], выборочная функция $\frac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{N}$ распределена по нормированному нормальному закону, что позволяет для вычисления вышеуказанных вероятностей попадания в интервал использовать функцию Лапласа, таблица которой приведена в разделе 9. С помощью этой таблицы по известным значениям функции (вероятностям $\gamma^- = 0{,}39$ и $\gamma^+ = 0{,}395$) найдем значения аргумента (крайних значений интервала):

$$-\frac{\delta^-}{\sigma}\sqrt{N} = -1{,}23 \text{ и } \frac{\delta^+}{\sigma}\sqrt{N} = 1{,}25.$$

Отсюда, вычисляя δ^- и δ^+, определяем контрольные границы:

$$a - \delta^- = a - 1{,}23\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0{,}0450 - 0{,}0110 = 0{,}0340;$$

$$a + \delta^+ = a + 1{,}25\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0{,}0450 + 0{,}0112 = 0{,}0562.$$

Таким образом, средняя величина 5 замеров контролируемого параметра должна удовлетворять условию:

$$0{,}0340 < \bar{x} < 0{,}0562.$$

К № 2. Требуется определить необходимый объем летных испытаний для решения вопроса о возможности эксплуатации самолета на аэродроме с располагаемой посадочной дистанцией $L_{а/д}$. Допускается погрешность до $\delta = 50$ м и вероятности: ошибочного отвергания возможности эксплуатации до $\alpha = 0{,}1$ % и ошибочного принятия – до $\beta = 0{,}01$ %. В качестве значения среднеквадратического отклонения величины единичной посадочной дистанции принять $\sigma = 50$ м.

I способ – с помощью одностороннего доверительного интервала [2, § 7.3]. Так как отклонения значений посадочной дистанции в меньшую сторону для целей нашей практической задачи несущественны, то достаточно построить **односторонний** доверительный интервал: от $-\infty$ до $L_{а/д}$. Не входящая в него часть числовой оси правее $L_{а/д}$ представляет собой область риска принять неверное решение. Т.е. вероятность попадания истинного значения посадочной дистанции в эту область не должна превышать $\alpha = 0{,}1$ %. В предположении, что центр распределения находится левее $L_{а/д}$ на 50 м: $a_0 = L_{пос} = L_{а/д} - \delta$, среднее арифметическое значение $\overline{L}$ посадочных дистанций при N посадках должно удовлетворять условию:

$$P\left\{\overline{L} > a_0 + \delta = L_{а/д}\right\} = 0{,}001.$$

После простых преобразований дополнительная к этой вероятность:

$$P\left\{\frac{\overline{L} - a_0}{\sigma}\sqrt{N} < \frac{\delta}{\sigma}\sqrt{N}\right\} = 0{,}999 =$$

$$= P\left\{\frac{\overline{L} - a_0}{\sigma}\sqrt{N} < 0\right\} + P\left\{0 < \frac{\overline{L} - a_0}{\sigma}\sqrt{N} < \frac{\delta}{\sigma}\sqrt{N}\right\} = 0{,}5 + 0{,}499$$

с помощью таблицы функции Лапласа (см раздел 9) по значению функции 0,499 дает значение аргумента:

$$\frac{\delta}{\sigma}\sqrt{N} > 3{,}09, \qquad \text{т.е.} \qquad N > \frac{3{,}09^2 50^2}{50^2} = 9{,}55.$$

Таким образом, при этом способе оценки объема эксперимента необходимо произвести 10 посадок.

II способ – с помощью альтернативной гипотезы вида: H_1: $a = a_1$.

Проанализируем требование точности. Заданная погрешность δ = 50 м может интерпретироваться, как величина уверенного (с некоторой вероятностью) **различения** двух значений $L_{пос}$. Тогда в качестве a_1 и a_0 следует рассматривать значения, различающиеся на эту величину: $a_1 = a_0 + \delta$.

Погрешность δ = 50 м, рассматриваемая как расстояние между центрами двух однотипных распределений, выразится суммой расстояний по оси абсцисс до границы критической области x^* от центров a_1 и a_0, т.е. суммой величин:

$$u_{0,5-\alpha} = \frac{x^* - a_0}{\sigma/\sqrt{N}} \quad \text{и} \quad u_{0,5-\beta} = \frac{a_1 - x^*}{\sigma/\sqrt{N}}.$$

Тогда, исключая x^*, можно получить выражения для необходимого объема эксперимента N:

$$N > (u_{0,5-\beta} + u_{0,5-\alpha})^2 \times \frac{\sigma^2}{(a_1 - a_0)^2}.$$

Расчеты для рассматриваемого примера дают: по таблице функции Лапласа (см. раздел 9) $u_{0,5-\alpha} = 3{,}09$, $u_{0,5-\beta} = 3{,}72$, откуда $N > 46{,}38$. Т.е. на практике следовало бы по результатам 47 посадок вычислить среднюю величину посадочной дистанции $\overline{L}$ и принять ее в качестве a_0, выдвинув тем самым гипотезу H_0: $a = a_0$. Если вычисленная после этого граница критической области x^* окажется правее полученной величины $\overline{L}$ и левее $L_{а/д}$, то не будет оснований отвергать гипотезу H_0, т.е. можно разрешить эксплуатацию нового типа самолета на данном аэродроме.

<u>К № 3</u>. Требуется построить дробный план 2^{4-1} четырехфакторного двухуровневого эксперимента.

Для построения дробного плана 2^{f-k} f-факторного эксперимента можно взять полный план (f–k)-факторного эксперимента и добавить k столбцов любых взаимодействий (парных, тройных и т.д.). Такая конструкция обеспечивает ортогональность [2, § 7.6], т.е. возможность определения всех коэффициентов линейной регрессии.

Полный план можно составлять, руководствуясь следующим правилом, обеспечивающим полный перебор всевозможных комбинаций двух уровней основных факторов (кроме фиктивного x_0, который присутствует во всех опытах). В первом столбце знаки меняют через один. Во втором знаки встречаются парами, т.е. чередуются через 2. В третьем – четверками, чередуясь через 4. Далее, если необходимо, – через следующие степени 2. Построенный по этому правилу полный план всегда обладает свойствами симметричности и ортогональности, что проверяется непосредственно.

В табл. 1 показан составленный по этому правилу полный план 2^3 трехфакторного двухуровневого эксперимента.

Для построения дробного плана 2^{4-1} четырехфакторного эксперимента достаточно добавить к этому плану один столбец взаимодействия, например, $x_4 = x_1x_2$, составив его из произведений соответствующих уровней факторов x_1 и x_2. Итоговый дробный план 2^{4-1} четырехфакторного двухуровневого эксперимента приведен в табл. 2.

Таблица 1

№ опыта	Факторы			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	+1	+1	+1	+1
2	+1	–1	+1	+1
3	+1	+1	–1	+1
4	+1	–1	–1	+1
5	+1	+1	+1	–1
6	+1	–1	+1	–1
7	+1	+1	–1	–1
8	+1	–1	–1	–1
		план		

Таблица 2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1	+1	+1	+1	+1	+1
2	+1	–1	+1	+1	–1
3	+1	+1	–1	+1	–1
4	+1	–1	–1	+1	+1
5	+1	+1	+1	–1	+1
6	+1	–1	+1	–1	–1
7	+1	+1	–1	–1	–1
8	+1	–1	–1	–1	+1

8. ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

№ 1. Требуется разработать контрольную карту средних значений контролируемого параметра $\overline{x}$, определяемых по данным N = 4 замеров, для текущего контроля качества технологического процесса. Нижнюю и верхнюю контрольные границы определить по значениям соответствующих уровней значимости (вероятностей ошибок I рода в нижнюю и верхнюю стороны): α^- и α^+. Номинальное значение контролируемого параметра составляет a, а дисперсия σ.

Индивидуальные данные варианта составлять следующим образом:

a = 0, последние 3 цифры № зачетки;

σ = 0,0 последняя 1 значащая цифра № зачетки;

α^- = 0,0 последние 2 цифры № зачетки (00 заменять на 10);

α^+ = 0,000 последние 2 цифры № зачетки (00 заменять на 10).

№ 2. Требуется **двумя способами** (с помощью одностороннего доверительного интервала и альтернативной гипотезы вида: H_1: a = a_1**)** определить необходимый объем летных испытаний для решения вопроса о возможности эксплуатации самолета нового типа на аэродроме с располагаемой посадочной дистанцией $L_{а/д}$. Допускаются погрешность δ и вероятности: ошибочного отвергания возможности эксплуатации до α и ошибочного принятия – до β. В качестве значения среднеквадратического отклонения величины единичной посадочной дистанции принять σ.

Индивидуальные данные варианта выбирать следующим образом:

δ = последняя 1 значащая цифра № зачетной книжки **и 0** (десятки м);

σ = **пред**последняя 1 значащая цифра № зачетной книжки **и 0** (десятки м);

α = 0, последние 2 цифры № зачетной книжки (в **%**) (00 заменять на 10);

β = 0,0 последние 2 цифры № зачетной книжки (в **%**, в 10 раз меньше α) (00 заменять на 10).

№ 3. Требуется построить дробный план 2^{f-k} f-факторного двухуровневого эксперимента.

Индивидуальные данные варианта выбирать по таблице:

последняя цифра № зачетки	f	k	последняя цифра № зачетки	f	k
0	10	6	5	5	1
1	11	7	6	6	2
2	5	2	7	7	3
3	6	3	8	8	4
4	7	4	9	9	5

9. ТАБЛИЦА ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt - 0{,}5$$

u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)
0.00	0.0000000	0.40	0.1554217	0.80	0.2881445	1.20	0.3849302
0.01	0.0039894	0.41	0.1590970	0.81	0.2910298	1.21	0.3868604
0.02	0.0079783	0.42	0.1627572	0.82	0.2938918	1.22	0.3887674
0.03	0.0119665	0.43	0.1664021	0.83	0.2967305	1.23	0.3906513
0.04	0.0159534	0.44	0.1700314	0.84	0.2995457	1.24	0.3925122
0.05	0.0199388	0.45	0.1736447	0.85	0.3023373	1.25	0.3943501
0.06	0.0239222	0.46	0.1772418	0.86	0.3051053	1.26	0.3961652
0.07	0.0279032	0.47	0.1808224	0.87	0.3078497	1.27	0.3979575
0.08	0.0318814	0.48	0.1843862	0.88	0.3105702	1.28	0.3997273
0.09	0.0358564	0.49	0.1879330	0.89	0.3132669	1.29	0.4014745
0.10	0.0398278	0.50	0.1914624	0.90	0.3159397	1.30	0.4031994
0.11	0.0437953	0.51	0.1949742	0.91	0.3185886	1.31	0.4049019
0.12	0.0477584	0.52	0.1984681	0.92	0.3212135	1.32	0.4065823
0.13	0.0517168	0.53	0.2019440	0.93	0.3238143	1.33	0.4082407
0.14	0.0556700	0.54	0.2054014	0.94	0.3263911	1.34	0.4098772
0.15	0.0596177	0.55	0.2088402	0.95	0.3289437	1.35	0.4114919
0.16	0.0635595	0.56	0.2122602	0.96	0.3314722	1.36	0.4130849
0.17	0.0674949	0.57	0.2156611	0.97	0.3339766	1.37	0.4146564
0.18	0.0714237	0.58	0.2190426	0.98	0.3364568	1.38	0.4162065
0.19	0.0753454	0.59	0.2224046	0.99	0.3389128	1.39	0.4177354
0.20	0.0792597	0.60	0.2257468	1.00	0.3413446	1.40	0.4192432
0.21	0.0831662	0.61	0.2290690	1.01	0.3437522	1.41	0.4207300
0.22	0.0870644	0.62	0.2323710	1.02	0.3461356	1.42	0.4221960
0.23	0.0909541	0.63	0.2356526	1.03	0.3484949	1.43	0.4236413
0.24	0.0948349	0.64	0.2389136	1.04	0.3508299	1.44	0.4250662
0.25	0.0987063	0.65	0.2421538	1.05	0.3531408	1.45	0.4264706
0.26	0.1025681	0.66	0.2453730	1.06	0.3554276	1.46	0.4278548
0.27	0.1064199	0.67	0.2485710	1.07	0.3576902	1.47	0.4292190
0.28	0.1102612	0.68	0.2517477	1.08	0.3599288	1.48	0.4305632
0.29	0.1140919	0.69	0.2549028	1.09	0.3621433	1.49	0.4318877
0.30	0.1179114	0.70	0.2580362	1.10	0.3643338	1.50	0.4331927
0.31	0.1217195	0.71	0.2611478	1.11	0.3665003	1.51	0.4344781
0.32	0.1255158	0.72	0.2642374	1.12	0.3686430	1.52	0.4357444
0.33	0.1293000	0.73	0.2673048	1.13	0.3707617	1.53	0.4369915
0.34	0.1330717	0.74	0.2703499	1.14	0.3728567	1.54	0.4382197
0.35	0.1368306	0.75	0.2733725	1.15	0.3749279	1.55	0.4394291
0.36	0.1405764	0.76	0.2763726	1.16	0.3769754	1.56	0.4406199
0.37	0.1443087	0.77	0.2793499	1.17	0.3789994	1.57	0.4417923
0.38	0.1480273	0.78	0.2823044	1.18	0.3809997	1.58	0.4429464
0.39	0.1517317	0.79	0.2852360	1.19	0.3829767	1.59	0.4440825

Продолжение таблицы функции Лапласа

u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)
1.60	0.4452006	2.05	0.4798177	2.50	0.4937903	2.95	0.4984111
1.61	0.4463009	2.06	0.4803007	2.51	0.4939634	2.96	0.4984618
1.62	0.4473837	2.07	0.4807738	2.52	0.4941322	2.97	0.4985110
1.63	0.4484491	2.08	0.4812372	2.53	0.4942968	2.98	0.4985587
1.64	0.4494973	2.09	0.4816910	2.54	0.4944573	2.99	0.4986051
1.65	0.4505284	2.10	0.4821355	2.55	0.4946138	3.00	0.4986501
1.66	0.4515427	2.11	0.4825708	2.56	0.4947664	3.01	0.4986938
1.67	0.4525402	2.12	0.4829969	2.57	0.4949150	3.02	0.4987361
1.68	0.4535212	2.13	0.4834141	2.58	0.4950600	3.03	0.4987772
1.69	0.4544859	2.14	0.4838226	2.59	0.4952012	3.04	0.4988171
1.70	0.4554344	2.15	0.4842223	2.60	0.4953388	3.05	0.4988558
1.71	0.4563669	2.16	0.4846136	2.61	0.4954729	3.06	0.4988933
1.72	0.4572837	2.17	0.4849965	2.62	0.4956035	3.07	0.4989297
1.73	0.4581847	2.18	0.4853712	2.63	0.4957307	3.08	0.4989650
1.74	0.4590704	2.19	0.4857378	2.64	0.4958547	3.09	0.4989992
1.75	0.4599407	2.20	0.4860965	2.65	0.4959754	3.10	0.4990324
1.76	0.4607960	2.21	0.4864474	2.66	0.4960929	3.11	0.4990646
1.77	0.4616363	2.22	0.4867906	2.67	0.4962074	3.12	0.4990957
1.78	0.4624619	2.23	0.4871262	2.68	0.4963189	3.13	0.4991260
1.79	0.4632729	2.24	0.4874545	2.69	0.4964274	3.14	0.4991553
1.80	0.4640696	2.25	0.4877755	2.70	0.4965330	3.15	0.4991836
1.81	0.4648520	2.26	0.4880893	2.71	0.4966358	3.16	0.4992111
1.82	0.4656204	2.27	0.4883962	2.72	0.4967359	3.17	0.4992378
1.83	0.4663749	2.28	0.4886961	2.73	0.4968333	3.18	0.4992636
1.84	0.4671158	2.29	0.4889893	2.74	0.4969280	3.19	0.4992886
1.85	0.4678431	2.30	0.4892758	2.75	0.4970202	3.20	0.4993129
1.86	0.4685571	2.31	0.4895559	2.76	0.4971099	3.21	0.4993363
1.87	0.4692580	2.32	0.4898295	2.77	0.4971972	3.22	0.4993590
1.88	0.4699459	2.33	0.4900969	2.78	0.4972820	3.23	0.4993810
1.89	0.4706209	2.34	0.4903581	2.79	0.4973646	3.24	0.4994023
1.90	0.4712833	2.35	0.4906132	2.80	0.4974449	3.25	0.4994230
1.91	0.4719333	2.36	0.4908625	2.81	0.4975229	3.26	0.4994429
1.92	0.4725710	2.37	0.4911059	2.82	0.4975988	3.27	0.4994623
1.93	0.4731965	2.38	0.4913436	2.83	0.4976726	3.28	0.4994810
1.94	0.4738101	2.39	0.4915758	2.84	0.4977443	3.29	0.4994991
1.95	0.4744119	2.40	0.4918024	2.85	0.4978140	3.30	0.4995166
1.96	0.4750020	2.41	0.4920237	2.86	0.4978818	3.31	0.4995335
1.97	0.4755807	2.42	0.4922397	2.87	0.4979476	3.32	0.4995499
1.98	0.4761482	2.43	0.4924506	2.88	0.4980116	3.33	0.4995658
1.99	0.4767044	2.44	0.4926563	2.89	0.4980738	3.34	0.4995811
2.00	0.4772498	2.45	0.4928572	2.90	0.4981342	3.35	0.4995959
2.01	0.4777843	2.46	0.4930531	2.91	0.4981928	3.36	0.4996103
2.02	0.4783082	2.47	0.4932443	2.92	0.4982498	3.37	0.4996242
2.03	0.4788217	2.48	0.4934308	2.93	0.4983052	3.38	0.4996376
2.04	0.4793248	2.49	0.4936128	2.94	0.4983589	3.39	0.4996505

Продолжение таблицы функции Лапласа

u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)
3.40	0.4996631	3.85	0.4999409	4.30	0.4999915	4.75	0.4999990
3.41	0.4996752	3.86	0.4999433	4.31	0.4999918	4.76	0.4999990
3.42	0.4996869	3.87	0.4999456	4.32	0.4999922	4.77	0.4999991
3.43	0.4996982	3.88	0.4999478	4.33	0.4999925	4.78	0.4999991
3.44	0.4997091	3.89	0.4999499	4.34	0.4999929	4.79	0.4999992
3.45	0.4997197	3.90	0.4999519	4.35	0.4999932	4.80	0.4999992
3.46	0.4997299	3.91	0.4999539	4.36	0.4999935	4.81	0.4999992
3.47	0.4997398	3.92	0.4999557	4.37	0.4999938	4.82	0.4999993
3.48	0.4997493	3.93	0.4999575	4.38	0.4999941	4.83	0.4999993
3.49	0.4997585	3.94	0.4999593	4.39	0.4999943	4.84	0.4999994
3.50	0.4997674	3.95	0.4999609	4.40	0.4999946	4.85	0.4999994
3.51	0.4997759	3.96	0.4999625	4.41	0.4999948	4.86	0.4999994
3.52	0.4997842	3.97	0.4999641	4.42	0.4999951	4.87	0.4999994
3.53	0.4997922	3.98	0.4999655	4.43	0.4999953	4.88	0.4999995
3.54	0.4997999	3.99	0.4999670	4.44	0.4999955	4.89	0.4999995
3.55	0.4998074	4.00	0.4999683	4.45	0.4999957	4.90	0.4999995
3.56	0.4998146	4.01	0.4999696	4.46	0.4999959	4.91	0.4999995
3.57	0.4998215	4.02	0.4999709	4.47	0.4999961	4.92	0.4999996
3.58	0.4998282	4.03	0.4999721	4.48	0.4999963	4.93	0.4999996
3.59	0.4998347	4.04	0.4999733	4.49	0.4999964	4.94	0.4999996
3.60	0.4998409	4.05	0.4999744	4.50	0.4999966	4.95	0.4999996
3.61	0.4998469	4.06	0.4999755	4.51	0.4999968	4.96	0.4999996
3.62	0.4998527	4.07	0.4999765	4.52	0.4999969	4.97	0.4999997
3.63	0.4998583	4.08	0.4999775	4.53	0.4999971	4.98	0.4999997
3.64	0.4998637	4.09	0.4999784	4.54	0.4999972	4.99	0.4999997
3.65	0.4998689	4.10	0.4999793	4.55	0.4999973	5.00	0.4999997
3.66	0.4998739	4.11	0.4999802	4.56	0.4999974		
3.67	0.4998787	4.12	0.4999811	4.57	0.4999976		
3.68	0.4998834	4.13	0.4999819	4.58	0.4999977		
3.69	0.4998879	4.14	0.4999826	4.59	0.4999978		
3.70	0.4998922	4.15	0.4999834	4.60	0.4999979		
3.71	0.4998964	4.16	0.4999841	4.61	0.4999980		
3.72	0.4999004	4.17	0.4999848	4.62	0.4999981		
3.73	0.4999043	4.18	0.4999854	4.63	0.4999982		
3.74	0.4999080	4.19	0.4999861	4.64	0.4999983		
3.75	0.4999116	4.20	0.4999867	4.65	0.4999983		
3.76	0.4999150	4.21	0.4999872	4.66	0.4999984		
3.77	0.4999184	4.22	0.4999878	4.67	0.4999985		
3.78	0.4999216	4.23	0.4999883	4.68	0.4999986		
3.79	0.4999247	4.24	0.4999888	4.69	0.4999986		
3.80	0.4999277	4.25	0.4999893	4.70	0.4999987		
3.81	0.4999305	4.26	0.4999898	4.71	0.4999988		
3.82	0.4999333	4.27	0.4999902	4.72	0.4999988		
3.83	0.4999359	4.28	0.4999907	4.73	0.4999989		
3.84	0.4999385	4.29	0.4999911	4.74	0.4999989		

10. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

10.1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА

Согласно рабочей программе дисциплины лабораторный практикум состоит из четырех лабораторных работ, выполняемых на компьютерах студентами в индивидуальном порядке.

Программное обеспечение (ПО) практикума разработано для IBM-совместимых компьютеров любого типа, со средой MS-DOS любой редакции с кириллицей. ПО запускается как с дискет, так и с винчестера и не предъявляет каких-либо требований к наименованию директории, где оно располагается.

ПО состоит из командного файла pelab.bat, выполняемых файлов mmk1.exe, mmk3.exe, pek3.exe, askk.exe, ncview.exe и текстовых файлов краткого описания лабораторных работ pe1.txt, pe2.txt, pe3.txt. Для входа в практикум и проведения любой лабораторной работы следует запустить на выполнение лишь командный файл pelab.bat – дальнейшие действия запрашиваются в диалоге со студентом.

Программное обеспечение работает в диалоге – внимательно следуйте подсказкам на экране. В случае появления непонятных сообщений следует немедленно обратиться к преподавателю, ведущему занятия.

Ввести число – означает набрать с клавиатуры число в предписанном формате **И** нажать клавишу "Enter" ("Ввод").

НАЖАТЬ КЛАВИШУ – означает только ОДНО это действие.

В режиме просмотра текста или результатов листание осуществляется клавишами "PgUp" и "PgDn" или "↑" и "↓". Для окончания просмотра следует нажать клавишу "F10" или "Esc".

Все результаты выполнения лабораторной работы высвечиваются на экране, а также записываются в файл "labrez.dat", который можно просмотреть после выхода из расчетной части работы. Продолжение расчетов после выхода невозможно, поэтому ВСЮ ПРОГРАММУ расчетов надо выполнить за один вход в расчетную часть.

10.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Оценка адекватности результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта

<u>Цель лабораторной работы</u>: оценка адекватности результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта с помощью оценки точности и непротиворечивости.

Теоретические основы.

В теории математического моделирования под адекватностью результатов, полученных с помощью математической модели, понимают их соответствие поведению оригинала. Для выявления этого соответствия необходимо сравнивать отдельные параметры объекта, полученные в расчетах и зарегистрированные при наблюдении за оригиналом в одних и тех же условиях. Очевидно, что сравнивать следует лишь соответствующие друг другу параметры между собой и только в той области функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать. Таким образом, необходимо исследовать величину рассогласования результатов контрольного вычислительного эксперимента с результатами натурного наблюдения в тех же условиях: $\Delta v = v_{модели} - V_{оригинала}$.

Если моделируется процесс или множество состояний системы, то величина рассогласования принимает множество значений. Поэтому возникает необходимость применения статистических методов.

Для получения этого множества значений рассогласования необходимо иметь:

- исчерпывающую информацию о поведении оригинала в конкретном случае;
- исчерпывающие данные результатов контрольного вычислительного эксперимента, воспроизводящего тот же случай поведения объекта;

а для оценки адекватности с точки зрения целей исследования необходимо иметь:

- критерии оценки адекватности.

Цели исследования бывают самыми разнообразными, поэтому возможен выбор различных критериев. Для технических систем и процессов наиболее важными факторами при оценке **АДЕКВАТНОСТИ** необходимо считать **ТОЧНОСТЬ** и **НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ**.

Для большинства случаев исследований этих двух составляющих адекватности достаточно, поскольку в технике используются в основном подобные детерминированные математические модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием.

ТОЧНОСТЬ означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т.е. идентичный вид основных свойств функциональных зависимостей на отдельных участках траектории, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п.

В математической статистике известно несколько объектов, которые могут характеризовать точность и непротиворечивость.

Как известно даже на бытовом уровне, для повышения **ТОЧНОСТИ** измерений проводят не одно измерение, а несколько. Это делается не из-за того, что какое-то из них может оказаться ошибочным, а из-за замечательного свойства дисперсии средней арифметической величины измерений: уменьшаться с ростом числа повторений опытов:

$$D_N = \frac{D}{N} \qquad или \qquad \sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где D и σ – дисперсия и среднее квадратическое отклонение в одном опыте (измерении); D_N и σ_N – дисперсия и среднее квадратическое отклонение результата осреднения замеров по N опытам. Поэтому с помощью бóльшего числа опытов достигают меньшего РАССЕИВАНИЯ (среднего квадратического отклонения) данных, т.е. большей точности.

Поэтому для оценки точности математической модели по сравнению с данными наблюдения за оригиналом можно использовать величину среднего квадратического отклонения, статистическую оценку s которого можно получить непосредственно из результатов сравнения. Однако такая оценка страдает неполнотой, так как не учитывает, насколько часто встречаются большие и малые, положительные и отрицательные рассогласования. Величина статистического среднего рассогласований $\overline{\Delta v}$ страдает теми же недостатками, но может быть использована в качестве оценки СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ погрешности.

Так как точность следует определять единой оценкой всего множества наблюдаемых значений случайной величины рассогласования результатов вычислительного эксперимента и "истинного" значения наблюдаемой величины, то в качестве такой оценки должно выступать m – математическое ожидание рассогласования. Какое истинное значение оно имеет, нам знать не дано, но его можно оценить с помощью ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РАССОГЛАСОВАНИЯ m оцениваемых параметров – этот подход дает возможность не только учесть все виды рассогласования, но и получить вероятностную характеристику точности. Так, например, может звучать вывод о точности в этом случае: с доверительной вероятностью 0,98 гарантируется рассогласование не более 0,3 м. Критерием оценки точности тогда является соблюдение этой пары значений, приемлемой с точки зрения целей исследования.

Поэтому наиболее полную оценку точности (вернее, погрешности) вычислительного эксперимента дает доверительный интервал для математического ожидания рассогласования: интервал, внутрь которого с заданной доверительной вероятностью попадает "истинное" значение m рассогласования:

$$\overline{\Delta v} - t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} < m < \overline{\Delta v} + t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}};$$

$$\overline{\Delta v} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{r} N_i \Delta v_{i;} \qquad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{r} N_i \left(\Delta v_i - \overline{\Delta v}\right)^2},$$

где t(γ,N) определяется по распределению Стьюдента в случае нормального распределения рассогласования Δv при заданной доверительной вероятности γ и числе степеней свободы N; N_i – число попаданий в i-й интервал наблюдаемых рассогласований Δv; N – общее число наблюдаемых значений Δv. Центр этого доверительного интервала определяется значением средней статистической величины рассогласования $\overline{\Delta v}$. РАЗМЕР ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ТЕМ МЕНЬШЕ, ЧЕМ МЕНЬШЕ ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ γ И ЧЕМ БОЛЬШЕ ЧИСЛО ОПЫТОВ N.

Естественно, при планировании вычислительного эксперимента следует стремиться к тому, чтобы такая оценка погрешности (т.е. доверительный интервал) не выходила за границы требуемой с точки зрения целей исследования погрешности $\pm\delta$, чего можно добиться разумным увеличением числа опытов и уменьшением доверительной вероятности. Иными словами, следует стремиться к тому, чтобы доверительный интервал целиком укладывался внутри допустимой погрешности (от $-\delta$ до $+\delta$).

Если такого условия не удается выполнить на данной серии опытов, то следует или увеличить число опытов N, или уменьшить доверительную вероятность γ. Однако последнее значительно слабее влияет на результат, тем более, что значения доверительной вероятности $\gamma < 0{,}7$ применять не желательно, так как это означает, что почти треть значений рассогласований будет выходить за границы доверительного интервала (и будет трудно уследить за поведением исследуемого параметра).

Единственным практическим недостатком такой оценки может быть лишь необходимость знать закон распределения исследуемого рассогласования.

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ погрешность свидетельствует о закономерности рассогласования между моделью и оригиналом и не позволяет пользоваться ею. Для оценки систематической погрешности, как указано выше, можно исследовать величину статистического среднего рассогласований $\overline{\Delta v}$. Для этого тоже необходимо знать закон распределения рассогласования. Наличие существенной систематической ошибки, подчиняющейся нормальному закону распределения, проверяется с помощью критерия Стьюдента, по которому сравниваются две величины:

$$t = \frac{\overline{\Delta v}}{s}\sqrt{N} \quad \text{и} \quad t_{\text{крит.}}(1-\alpha, N-1).$$

Здесь $t_{\text{крит.}}(1-\alpha, N-1)$ определяется по таблице распределения Стьюдента при уровне значимости α (вероятности совершить ошибку первого рода: отвергнуть верную гипотезу) с $N-1$ степенями свободы.

Если $|t| < t_{\text{крит.}}$, то систематическая ошибка НЕЗНАЧИМА, т.е. несущественна и может быть принята нулевой. В случае противоположного неравенства: $|t| > t_{\text{крит.}}$ – систематическая ошибка ЗНАЧИМА, т.е. не может считаться нулевой.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ со статистической точки зрения может означать незначимость каждого отдельного значения рассогласования по сравнению с общим ходом отображаемой зависимости, иными словами, неподверженность рассогласования каким-либо закономерностям, непринципиальность – случайность. Последний термин и служит идеологической основой для построения критерия оценки непротиворечивости. Как известно, нормальный закон распределения характерен для случайной ошибки измерений. Поэтому достаточно проверить статистическую гипотезу о подчиненности рассогласования данных эксперимента и реального поведения объекта НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ распределения с нулевым математическим ожиданием m = 0 (как у простой ошибки измерений без систематической погрешности). По критерию Пирсона χ^2 для этого сравниваются две величины:

$$\chi^2_{\text{наблюдаемое}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad \text{и} \quad \chi^2_{\text{крит.}}(\alpha, n),$$

где p_i – вероятность попадания в i-й интервал нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием m = 0 и среднеквадратическим отклонением $\sigma = s$), а $\chi^2_{\text{крит.}}(\alpha, n)$ определяется по таблице распределения χ^2 при уровне значимости α (вероятности совершить ошибку первого рода: отвергнуть верную гипотезу) с $n = r–2$ степенями свободы.

Если $\chi^2_{\text{наблюдаемое}} < \chi^2_{\text{крит.}}(\alpha, n)$, то различие статистического и гипотетического (нормального) законов распределения НЕЗНАЧИМО. Т.е. при заданном уровне значимости α гипотезу о поведении рассогласования между экспериментом и "истиной", как случайной ошибки измерений, можно принять и можно считать результаты вычислительного эксперимента не противоречащими реальности. В случае противоположного неравенства: $\chi^2_{\text{наблюдаемое}} > \chi^2_{\text{крит.}}(\alpha, n)$ расхождение ЗНАЧИМО (не может считаться случайным) и гипотезу следует отвергнуть, т.е. результаты вычислительного эксперимента противоречат реальному поведению объекта.

Только в том случае, когда выполнены условия И требуемой ТОЧНОСТИ, И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ, можно считать результаты вычислительного эксперимента АДЕКВАТНЫМИ реальности с доверительной вероятностью γ и уровнем значимости α в эксперименте из N опытов.

Условия точности и непротиворечивости можно проверить с помощью статистических критериев по следующему алгоритму, предварительно задав допустимую погрешность $\Delta v_{\text{доп}}$, уровни значимости и доверительную вероятность, исходя из целей исследования. В данной лабораторной работе за $\Delta v_{\text{доп}}$ принимается значение около 0,1, что соответствует 10 % относительной погрешности. Уровни значимости и доверительную вероятность в лабораторной работе следует подбирать. В этом алгоритме строго соблюдается последовательность проверки статистических критериев, каждый следующий из которых опирается на вывод предыдущего. Действительно: для построения доверительного интервала и проверки гипотезы о нулевой систематической ошибке необходимо быть уверенным, что рассогласование подчиняется нормальному закону распределения, что может быть проверено по критерию Пирсона вначале алгоритма.

Алгоритм:

1► Выбирается один из параметров объекта, для которого есть результаты наблюдения $\{V_k\}$ в N точках, и соответствующий параметр $\{v_k\}$, полученный в контрольном вычислительном эксперименте в тех же условиях в тех же точках.

Вычисляются разности $\Delta v_k = v_k - V_k$.

Вся область значений Δv разбивается на r интервалов таким образом, чтобы в каждый из них попало не менее пяти значений Δv_k.

Производится расчет количества попадания Δv_k в каждый i-й ($1 \le i \le r$) интервал – частот N_i.

Определяются статистические оценки параметров распределения случайной величины Δv: выборочное среднее $\overline{\Delta v}$ и несмещенная оценка дисперсии s^2.

Этот пункт алгоритма выполняется компьютером без участия студента при запуске расчетной части программного обеспечения.

2► Для проверки **непротиворечивости**, т.е. подчиненности рассогласования нормальному закону распределения, применяется критерий согласия Пирсона χ^2. Уровень значимости α достаточно проверить только для двух крайних (рекомендуемых компьютером) значений. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}(\alpha; r-2)$, то распределение Δv незначимо отличается от нормального, т.е. результаты вычислительного эксперимента можно считать НЕ ПРОТИВОРЕЧАЩИМИ реальному поведению оригинала. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}(\alpha; r-2)$, то значимое отличие распределения Δv от нормального свидетельствует о ПРОТИВОРЕЧИИ результатов вычислительного эксперимента реальному поведению оригинала и исследования адекватности следует прекратить.

3► Для оценки **систематической ошибки** проверяется гипотеза о равенстве нулю математического ожидания ($m = 0$) рассогласования Δv с помощью критерия Фишера. Уровень значимости α достаточно проверить только для двух крайних (рекомендуемых компьютером) значений. Если $|t| > t(1 - \alpha_m; N - 1)$, то дальнейшие исследования адекватности нужно прекратить, так как это означает существование систематической погрешности между результатами вычислительного эксперимента и реальным поведением оригинала. Если $|t| < t(1 - \alpha_m; N - 1)$, то систематическая погрешность отсутствует и можно продолжать исследования.

Замечание. Вывод об отсутствии систематической ошибки ($a = 0$) лишь **подтверждает** возможность исследования непротиворечивости в п. 2, а противоположный вывод – опровергает, т.е. делает его ничтожным.

4► Для оценки **точности** математической модели строится доверительный интервал для математического ожидания рассогласования при заданной доверительной вероятности γ. Если наиболее удаленный от нуля конец доверительного интервала не выходит по модулю за допустимую погрешность $\Delta v_{доп} = 0{,}1$, то математическую модель можно считать достаточно точной по отношению к оригиналу. Для выполнения этого условия следует подобрать выгодное (наибольшее) значение доверительной вероятности от 0,7 до 0,999.

5► Если по п. 7 можно считать математическую модель не противоречащей оригиналу, а по п. 8 и достаточно точной, то результаты расчетов адекватны реальному поведению оригинала.

Замечание. Если оценка точности математической модели оказывается во много раз лучше допустимой (иными словами, погрешность практически неразличима), то даже в отсутствии непротиворечивости математическую модель можно признать адекватной.

Программное обеспечение.

Лабораторная работа № 1 выполняется с помощью имитатора результатов вычислительного эксперимента на математической модели. Он позволяет сымитировать "точные значения реального объекта" и данные "неточного вычислительного эксперимента" на модели, а также:

– определить выборочные характеристики рассогласования (среднего выборочного и выборочную оценку среднеквадратического отклонения);

– проверить гипотезу о нормальном законе распределения рассогласования результатов вычислительного эксперимента с поведением реального объекта с помощью статистического критерия согласия Пирсона;

– проверить гипотезу о равенстве нулю математического ожидания рассогласования результатов вычислительного эксперимента с поведением реального объекта с помощью статистического критерия Стьюдента;

– построить доверительный интервал для математического ожидания рассогласования (погрешности).

Порядок выполнения работы.

1. Получить выборочные оценки параметров распределения рассогласования между моделью и оригиналом по данным 120 опытов (результат появляется на экране монитора сразу после входа в режим выполнения расчетов лабораторной работы).

2. Исходя из требуемой обоснованной последовательности действий, провести весь алгоритм оценки адекватности с помощью статистических критериев.

3. Если какие-то результаты проверки критериев Вас не удовлетворяют, повторить исследования с другими значениями уровней значимости, доверительной вероятности или допустимой погрешности. Следует учесть, что необходимость уменьшения доверительной вероятности вплоть до 0,7 свидетельствует о недопустимо низком качестве вычислительного эксперимента. Естественно, следует стремиться к как можно большему значению доверительной вероятности при соблюдении требуемой погрешности.

4. Основываясь на данных проверки статистических гипотез, сформулировать выводы о наличии систематической погрешности математической модели,

о ее непротиворечивости и точности, а также в целом об адекватности математической модели реальному поведению оригинала.

Форма отчетности: значения основных точечных характеристик распределения рассогласования, итоговые выбранные значения уровней значимости, доверительной вероятности и допустимой погрешности, результаты проверки статистических гипотез, доверительный интервал для рассогласования, выводы о наличии систематической погрешности математической модели, о ее непротиворечивости и точности, а также в целом об адекватности математической модели реальному поведению оригинала.

10.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Гладкая аппроксимация экспериментальной зависимости

Цель лабораторной работы: выбор наилучшей аппроксимации экспериментальной поляры самолета Ту-134А полиномами (многочленами) 2-й, 3-й и 4-й степени.

Теоретические основы.

Аппроксимация функции – это приближенная замена заданной сложной функциональной зависимости более простой функцией: алгебраическим полиномом (многочленом), тригонометрическим полиномом, или какой-либо другой функцией, которую можно построить с помощью метода наименьших квадратов. Но в любом случае подбор подходящего класса (вида) функциональной зависимости осуществляется исходя из ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ аппроксимируемой зависимости.

Метод наименьших квадратов основан на отыскании таких значений параметров **a** функциональной зависимости $\varphi(x,\mathbf{a})$ заданного вида, которые минимизируют величину суммы квадратов отклонений вычисленных значений функции от соответствующих наблюдаемых значений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \varphi(x_i, \mathbf{a})\right]^2 \to \min .$$

Поэтому все параметры a_j функции $\varphi(x,\mathbf{a})$ определяются из условия минимума функции нескольких аргументов, т.е. из системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \varphi(x_i, \mathbf{a})\right]\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial a_j} = 0, \qquad j = 0,1,2,\ldots,m .$$

В важном частном случае полиномиальной аппроксимации (многочленами)

$$y = \varphi(x, \mathbf{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

в результате несложных преобразований получается "система нормальных уравнений метода наименьших квадратов":

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,m,$$

которая в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \quad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \qquad\qquad . \\ +a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^m . \end{cases}$$

Таким образом, задача аппроксимации, например, экспериментальной зависимости полиномом n-й степени сводится к решению системы неоднородных линейных алгебраических уравнений с n+1 неизвестными коэффициентами полинома.

Полярой самолета называется графическое изображение взаимной зависимости коэффициента аэродинамической подъемной силы c_{ya} и коэффициента аэродинамического лобового сопротивления c_{xa} (рис. 1). Поляра характеризует летные качества самолета и имеет некоторые характерные свойства.

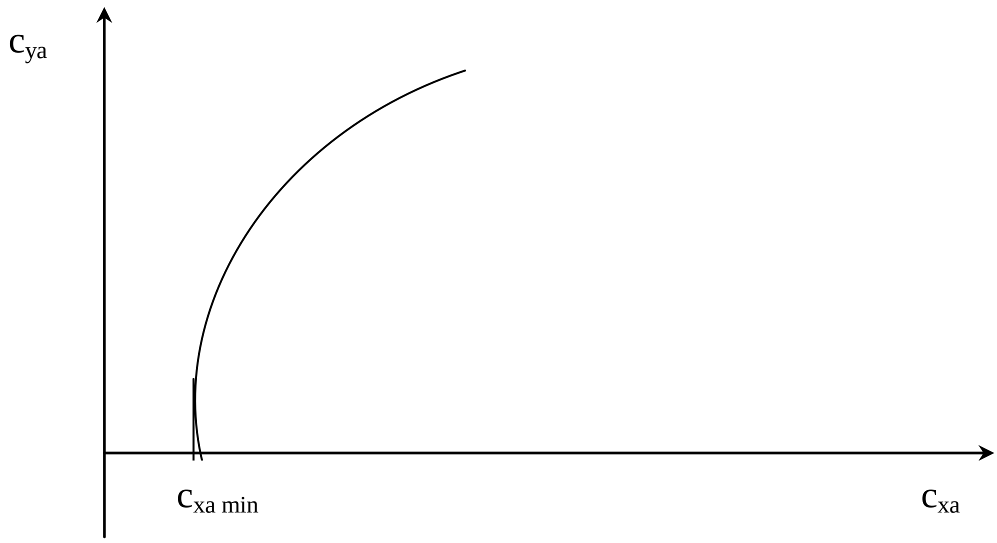


Рис. 1

Во-первых, поляра – выпуклая кривая, т.е. у нее нет точек перегиба. Во-вторых, у нее есть точка минимального значения c_{xa}. Эту точку аэродинамики-экспериментаторы называют "носиком поляры".

Наличие минимального значения c_{xa} означает возможность использовать соответствующую ориентацию самолета относительно воздуха для того, чтобы производить полет на выгодном режиме с минимальным сопротивлением.

Обычно такой режим близок к крейсерскому, совершаемому на большой высоте с большой скоростью V. Большая скорость полета соответствует большому значению числа Маха $M = \frac{V}{a}$, где a – скорость звука.

Однако основным условием полета самолета на любых режимах является уравновешивание веса подъемной силой Y_a, рассчитываемой в аэродинамике по следующей формуле:

$$mg = Y_a = c_{ya}\frac{\rho V^2}{2}S,$$

где mg – вес самолета; S – площадь крыла; ρ – плотность воздуха. Поэтому для того, чтобы летать на выгодных режимах с минимальным c_{xa}, необходимо иметь достаточное для выбранной скорости полета положительное значение c_{ya}. Так как крейсерский полет совершается на большой скорости, то "носик поляры" располагается при небольших значениях коэффициента подъемной силы c_{ya}.

Экспериментальная поляра самолета получается продувками модели в аэродинамической трубе. В каждой продувке после вывода установки на режим заданного числа Маха замеры сил производятся на всех возможных углах атаки модели. В реальном полете далеко не весь этот диапазон может быть реализован. Так, например, при больших числах Маха (при большой скорости полета) нельзя реализовать большие значения коэффициента подъемной силы c_{ya}, так как возникающая при этом большая подъемная сила (больше веса) создает большую перегрузку, угрожающую разрушением конструкции самолета. При малых числах Маха невозможен полет на малых c_{ya}, так как недостаток подъемной силы приведет к падению самолета. Поэтому для расчетов используется лишь та часть полученного в экспериментах диапазона значений коэффициента подъемной силы c_{ya}, которая соответствует числу Маха.

Таким образом, аппроксимация экспериментальной поляры, призванная играть роль модели, **ДОЛЖНА ОБЛАДАТЬ ВСЕМИ НЕОБХОДИМЫМИ ХАРАКТЕРНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОЛЯРЫ ЛИШЬ В ТОЙ ЧАСТИ, ДЛЯ КОТОРОЙ ОНА СЛУЖИТ.**

Программное обеспечение.

Лабораторная работа № 2 выполняется с помощью учебной программы, реализующей метод наименьших квадратов для отыскания коэффициентов аппроксимирующего полинома 2-й, 3-й и 4-й степеней по "экспериментальной" зависимости.

Порядок выполнения работы.

1. С помощью программы получить результаты аппроксимации поляры самолета Ту-134А полиномами 2-й, 3-й и 4-й степени.

2. Проанализировать пригодность каждой из них с точки зрения физичности отображаемой зависимости, свойств аппроксимирующей зависимости и точности приближения. При этом обратить внимание на:

– диапазон эксплуатационных значений c_{ya} (оценивается по числу М и составляет не менее 6 точек из представленной таблицы – сверху, снизу или в середине);

– положение точек перегиба на аппроксимациях;

– положение точек экстремумов на аппроксимациях;

– положение экстремума на экспериментальной поляре;

– погрешности аппроксимации;

– простоту расчетов аппроксимирующего многочлена.

3. Оценить степень достоверности отдельных точек в экспериментальной зависимости (например, если для всех полиномов погрешность высока – более 5 % – и имеет один знак, то доверие к такой экспериментальной точке невелико, и на ее основе делать выводы не следует).

4. Определить наиболее приемлемую по совокупности качеств аппроксимацию и предложить аргументированное обоснование.

Форма отчетности: итоговая таблица аппроксимации НА ЭКРАНЕ ДИСПЛЕЯ и аргументированные выводы по результатам анализа приближения с записью аналитического выражения выбранной аппроксимации.

10.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
Дисперсионный анализ результатов измерений

Цель лабораторной работы: проведение дисперсионного анализа результатов дефектоскопии размера трещины с целью выявления ее роста в течение срока эксплуатации.

Теоретические основы.

После обнаружения трещины в некотором силовом элементе планера самолета проводится плановая ее дефектоскопия после каждых 2 посадок. В данной лабораторной работе таких плановых работ проводится 9 ($m = 9$). Каждый раз замеры трещины проводятся 5-кратно (все $N_i = n = 5$) для определения среднего значения. Результаты приводятся к начальному размеру трещины, т.е. фиксируются относительные значения роста трещины.

Для эксплуатации ЛА важно знать, растет ли со временем трещина. Если роста сверх допустимого размера нет, то эксплуатация безопасна. Если рост заметен, то при достижении трещиной определенного размера необходимо проводить ремонтные работы. Непосредственно по результатам замеров установить факт роста трещины на практике чрезвычайно трудно. Это объясняется значительной погрешностью приборов и слабой скоростью развития трещины. Поэтому необходимо проведение статистического анализа.

Дисперсия некоторого объема данных характеризует разброс, "размазанность" значений вокруг среднего. Поэтому выявление факта зависимости результатов такого однофакторного эксперимента от исследуемого фактора (числа посадок) осуществляется с помощью дисперсионного анализа. Для этого результаты замеров располагают в виде матрицы (y_{ij}), где каждая строка соответствует определенному циклу замеров (после 2-х, после 4-х и т.д. посадок), а номер позиции в строке соответствует порядковому номеру единичного замера из 5 в цикле.

По элементам этой матрицы рассчитываются частные дисперсии: МЕЖГРУППОВАЯ, отражающая разброс средних (по циклам замеров) экспериментальных данных между собой из-за **влияния исследуемого фактора**:

$$s_A^2 = \frac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2,$$

и ОСТАТОЧНАЯ, отражающая разброс результатов единичных опытов вокруг средних по циклам экспериментальных данных каждого цикла, обусловленная **неконтролируемой погрешностью эксперимента**:

$$s_0^2 = \frac{1}{m(n-1)}\cdot\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 .$$

Оценку значимости исследуемого фактора (времени эксплуатации) получают с помощью критерия Фишера для сравнения двух дисперсий при заданном уровне значимости α:

– если межгрупповая дисперсия ЗНАЧИМО БОЛЬШЕ остаточной:

$$\frac{s_A^2}{s_0^2} > F_{1-\alpha}[m-1, m(n-1)],$$

то влияние фактора существенно и его необходимо учитывать;

– если межгрупповая дисперсия ЗНАЧИМО МЕНЬШЕ остаточной:

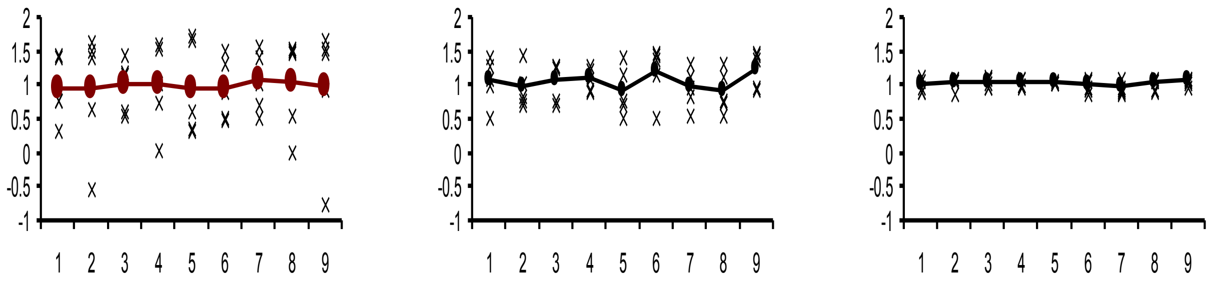
$$\frac{s_0^2}{s_A^2} > F_{1-\alpha}[m(n-1), m-1],$$

то влияние фактора несущественно и им можно пренебречь;

– в остальных случаях, когда нельзя говорить о ЗНАЧИМОМ превосходстве одной из дисперсий над другой, влияние исследуемого фактора сравнимо с погрешностью эксперимента или влиянием неучтенных факторов, поэтому конкретный вывод невозможен.

На рис. 2 показаны примеры различных случаев экспериментальных данных, характеризующихся различными соотношениями дисперсий. По оси абсцисс отложены лишь **номера** уровней исследуемого входного фактора, но не его физическая величина – так обычно строятся исследования в дисперсионном анализе, чтобы не привносить лишней информации.

Основываясь лишь на зрительном восприятии этого рисунка, нельзя сказать, существует ли зависимость функции, отложенной по ординате, от параметра, отложенного по абсциссе. Этого нельзя сказать даже в том случае, если расположить очередность уровней исследуемого входного фактора в порядке возрастания частных средних, соответствующих этим уровням, которые на рисунке обозначены кружочками и соединены сплошной линией. Несмотря на это дисперсионный анализ позволяет сделать достаточно уверенный вывод о влиянии исследуемого входного фактора на выходной.



а б в

Рис. 2

В случае "а" бóльшая дисперсия – остаточная (внутренняя): $\frac{s_0^2}{s_A^2} = 8{,}07 > F_{1-\alpha}(N-k, k-1) = 5{,}15$, что свидетельствует о значительном влиянии **неучтенных** факторов, которые "забивают" возможную зависимость от исследуемого входного фактора. В этих условиях естественно считать эту зависимость несущественной.

В случае "б" больше уже межгрупповая дисперсия, но отношение дисперсий не достигает критического значения по критерию Фишера: $\frac{s_A^2}{s_0^2} = 1{,}21 < F_{1-\alpha}(k-1, N-k) = 3{,}04$, следовательно, сделать уверенный вывод о влиянии или невлиянии исследуемого входного фактора нельзя.

В случае "в" межгрупповая дисперсия не только больше, но и **значимо** больше остаточной: $\frac{s_A^2}{s_0^2} = 9{,}02 > F_{1-\alpha}(k-1, N-k) = 3{,}04$, поэтому необходимо сделать вывод о существенности влиянии исследуемого входного фактора.

Значимое превосходство одной из дисперсий определяется с помощью таблицы распределения Фишера, в которой приведены критические значения ОТНОШЕНИЯ БОЛЬШЕЙ ДИСПЕРСИИ К МЕНЬШЕЙ для уровня значимости 0,01 и двух чисел степеней свободы f_1 и f_2. Для межгрупповой дисперсии число степеней свободы определяется величиной $(m - 1)$, а для остаточной – величиной $m \cdot (n - 1)$. Таким образом, о значимом превосходстве одной из дисперсий можно говорить, когда соответствующее их расчетное отношение превышает критическое, определенное по таблице распределения Фишера.

Таблица критических значений распределения Фишера

f_2 – число степеней свободы для меньшей дисперсии	f_1 – число степеней свободы для большей дисперсии	
	8	36
8	6,03	5,15
36	3,04	2,21

Программное обеспечение.

Лабораторная работа № 3 выполняется с помощью имитатора результатов дефектоскопии. Он позволяет:

– сымитировать данные замеров трещины;

– вычислить средние значения замеров в цикле дефектоскопии;

– вычислить межгрупповую и остаточную дисперсии;

– вычислить их отношения друг к другу.

Порядок выполнения работы.

1. Получить с помощью расчетной части программы результаты замеров и их обработки.
2. Выявить бóльшую дисперсию и выписать в отчет соответствующее отношение дисперсий (большее 1).
3. Определить числа степеней свободы для каждой из полученных дисперсий.
4. По таблице, приведенной в описании лабораторной работы, найти критическое значение критерия Фишера.
5. Обосновать вывод о наличии или отсутствии роста трещины.

<u>Форма отчетности</u>: формулы для межгрупповой и остаточной дисперсий; числа степеней свободы межгрупповой и остаточной дисперсий; выражение критерия Фишера и числовые значения его частей; вывод о наличии или отсутствии роста трещины.

10.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4
Изучение структуры неполных планов

10.6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
Ознакомление с программой GARLINA для приема зачета

Цель лабораторной работы: Ознакомиться и отработать навыки работы с программой GARLINA для приема зачета.

Порядок выполнения работы.

Работа проводится в компьютерном классе в режиме, имитирующем зачет.

Отчетность не требуется.