СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выполнение лабораторных работ по дисциплине "Математические модели компьютерных сетей" направлено на приобретение студентами практических навыков в реализации математических моделей, используемых в решении проблем анализа и синтеза компьютерных сетей.

Реализация математической модели представляет собой программное отображение метода исследования на определенной совокупности исходных данных, обрабатываемых на ЭВМ. В зависимости от характера задачи, ставящейся на лабораторном занятии, студент должен освоить основные методы решения и вычислительные приемы, связанные с прогнозированием поведения системы, процесса или с выбором оптимальных значений системных параметров. Соответственно этому, учебный материал лабораторной работы можно отнести к решению задачи анализа, связанному с расчетом значений характеристик системы, т.е. с оценкой ее поведения, либо к решению оптимизационной задачи, связанной с расчетом (поиском) таких значений структурных параметров системы, которые удовлетворяют используемому системному критерию эффективности.

Лабораторные работы практикума взаимосвязаны в последовательности своего выполнения. Они направлены на оценку общесистемного **свойства** компьютерной сети – её реактивности, оцениваемой с помощью количественной **характеристики** – среднесетевой задержки передачи сообщений. Рассмотрение данной характеристики в качестве частного показателя эффективности сети приводит к изучению оптимизационной проблемы. Последняя связана с поиском оптимальной стратегии распределения пропускной способности – одного из конструктивных параметров сети. Достаточно редкая возможность получения решения этой задачи в аналитической форме обусловлена общим подходом, использованным к моделированию сети, основанном на применении метода динамики средних. Тем не менее, результаты вполне приемлемы **на этапе проектирования** компьютерных сетей.

Процесс моделирования, состоящий в программной реализации аналитических и алгоритмических методов исследования, не прерывается на протяжении всего практикума. Результаты, полученные при выполнении текущей лабораторной работы, становятся исходными данными для выполнения следующей. Таким образом, исключается возможность нарушения порядка выполнения лабораторных работ.

Результаты выполнения каждой работы отображаются в соответствующих формах интерактивного приложения. Поэтому выполнение заданий должно происходить в инструментальной среде программирования (например, Delphi, Visual Studio), предоставляющей возможности объектного программирования для быстрой разработки средств визуализации.

Лабораторная работа 1. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ МАРШРУТИЗАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ: МЕТОД Dijkstra

Цель работы:

• решение задачи поиска оптимальных путей передачи данных в сети.

Продолжительность выполнения работы - 4 часа.

1. Математическая модель.

1.1. Формализация описания сети для определения временных характеристик передачи сообщений.

Объектом рассмотрения является распределенная сеть передачи данных (СПД) с коммутацией пакетов. Математической моделью топологической структуры такой сети является неориентированный граф, изображенный на рис.1.

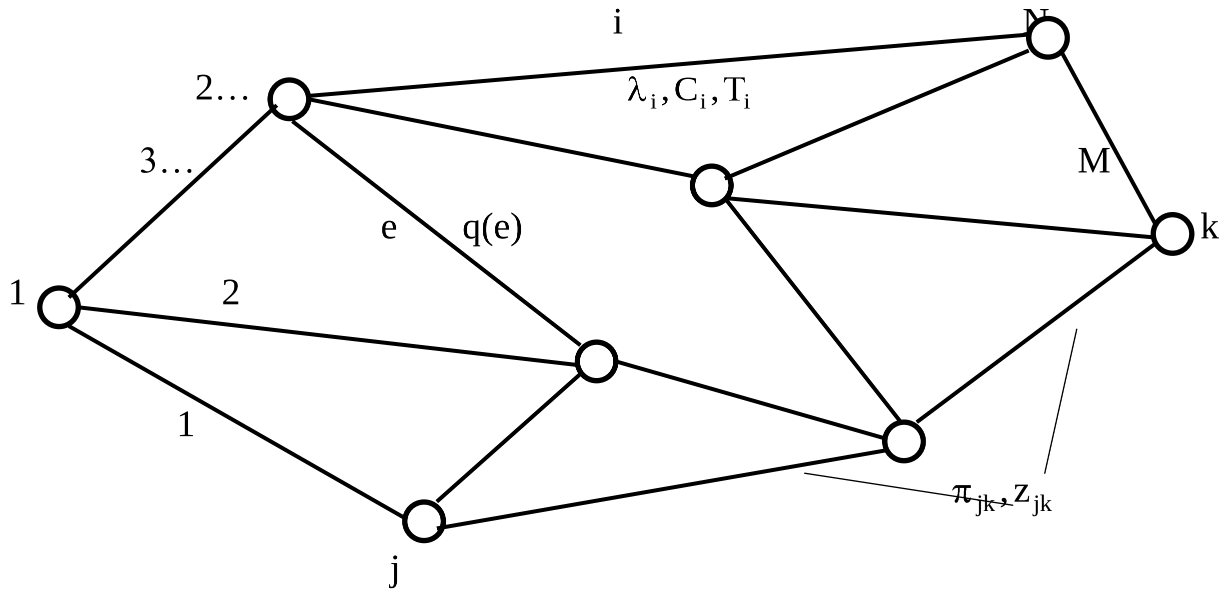


Рис. 1

Для работы с объектом примем следующие обозначения и условия, которыми в дальнейшем будем пользоваться при моделировании структуры СПД и процессов, связанных с передачей данных через сеть и представляющих непосредственный интерес для данного рассмотрения.

Пусть:

M – количество линий связи в сети;

N – количество узлов коммутации в сети.

Тогда математической моделью топологической структуры сети является граф G = < V, E, q >, где $V = \{v_1, v_2, ..., v_N\}$ – множество вершин графа;

$E = \{ e_1,\ e_2, \dots ,\ e_M \}$ – множество ребер графа;

q – весовая функция на множестве ребер графа;

$q\colon E \ \to\ \mathbf{R}^+$;

$e \mapsto q(e) = r^+,\ r^+ \in \mathbf{R}^+$.

Примем ряд упрощений, идеализирующих реальные каналы связи. Будем считать, что каналы связи бесшумны и абсолютно надежны.

$\mathbf{C_i}$ [дв.ед./с] – пропускная способность линии i (i = 1, 2, ..., M), состоящей из пучка каналов связи. Пропускная способность определяет максимальную производительность канала по передаче данных.

Все N узлов сети абсолютно надежны и выполняют функции коммутации пакетов. Время обработки сообщений в узле пренебрежимо мало в сравнении со временем передачи по каналу связи. В силу конечности значения C_i, канал может иметь очередь на входе. Последнее является причиной возможных задержек при передаче сообщения через сеть.

Входящий в сеть трафик (внешний трафик сети) создает сетевую **нагрузку** от внешних источников – терминалов, генерирующих пуассоновские потоки запросов на передачу своих сообщений через сеть, и образует пуассоновский процесс.

γ [c^{-1}] – интенсивность входного (в сеть) потока сообщений.

γ_{jk} [c^{-1}] – интенсивность входного (в узел j сети) потока сообщений, требующих передачи в узел k сети.

В этом случае вероятность появления в узле j за время t в точности s сообщений для передачи в узел k определяется по формуле Пуассона:

$$P_s(t) = \frac{(\gamma_{jk} t)^s}{s!} \cdot e^{-\gamma_{jk} t} .$$

L – длина сообщения, представляющая собой последовательность двоичных единиц (битов, к примеру), обрабатываемых в приемо-передающих модемах. Является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром μ:

$$F(\ell) = P(L < \ell) = 1 - e^{-\mu \ell};$$

$$f(\ell) = \mu \cdot e^{-\mu \ell}.$$

Понятно, что определенная таким образом “длина” сообщения косвенно характеризует длительность передачи по каналу, связанную с данным сообщением.

$1/\mu$ [дв.ед.] – средняя длина сообщения.

λ_i [c^{-1}] – интенсивность потока (внутреннего) сообщений, передаваемых в линии i сети.

T [c] – среднее время задержки при передаче сообщения через сеть (среднесетевая задержка).

π_{jk} – путь передачи сообщения из узла j в узел k сети, состоящий из последовательности тандемных каналов.

Z_{jk} – средняя задержка передачи сообщения из узла j в узел k сети.

T_i – средняя задержка передачи сообщения по каналу i.

С учетом введенных обозначений, можно записать очевидные модельные отношения для ряда характеристик.

Полный входящий в сеть поток сообщений (**внешний** поток):

$$\gamma = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{jk}. \qquad (1)$$

Полный **внутренний** поток в сети, получающийся в результате работы процедур маршрутизации:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{M}\lambda_i . \qquad (2)$$

Среднесетевая задержка передачи сообщений:

$$T = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_{jk}}{\gamma}\cdot Z_{jk}. \qquad (3)$$

В последнем выражении величина $\frac{\gamma_{jk}}{\gamma}$ – доля полного входящего трафика, передающегося по пути π_{jk} и имеющего задержку z_{jk}. Соотношение (3) представляет разложение среднесетевой задержки по парам “источник - адресат”.

Для передачи сообщения от источника к адресату будем считать, что в сети реализованы процедуры **фиксированной** маршрутизации (маршрутизация от источника), при которой найденный кратчайший путь π_{jk} для передачи трафика из узла j в узел k не изменяется во времени.

Поток γ_{jk}, передаваемый по пути (маршруту) π_{jk}, называется **маршрутным** потоком (или (j-k)-трафиком).

Поток, передаваемый в линии i, называется **линейным** потоком и определяется выражением:

$$\lambda_i = \sum_{j}\sum_{k}\gamma_{jk}, \qquad j, k:\ C_i \in \pi_{jk}. \qquad (4)$$

Из последнего выражения следует, что линейный поток является суммой маршрутных потоков, проходящих через линию (канал) i .

Средняя задержка передачи сообщения по маршруту π_{jk} может быть определена как сумма средних задержек в линиях (каналах), составляющих этот маршрут.

$$z_{jk} = \sum_{i} T_i, \qquad i\colon C_i \in \pi_{jk}. \qquad (5)$$

Условие " $i\colon C_i \in \pi_{jk}$ " означает, что маршрут π_{jk} проходит через канал i с пропускной способностью C_i.

1.2. Оценка среднесетевой задержки.

В качестве основных технологических характеристик для информационных систем обычно используются временные характеристики. В таком случае логично выбрать в качестве искомой характеристики среднесетевую задержку передачи сообщений – Т.

Конечной целью лабораторного практикума является решение оптимизационной задачи – задачи синтеза распределенной СПД, оптимальной по набору пропускных способностей линий связи сети. В качестве оптимизационного критерия (критерия эффективности) решаемой задачи будем использовать величину среднесетевой задержки. В качестве параметров-переменных будем использовать значения пропускных способностей линий связи – C_i. Необходимо получить явное выражение для критерия Т, как функцию переменной параметра C_i. Такое выражение можно получить из соотношения (3), учитывая соотношение (5):

$$T = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_{jk}}{\gamma}\sum_{i} T_i = \sum_{i=1}^{M}\frac{T_i}{\gamma}\sum_{j}\sum_{k}\gamma_{jk}, \quad i\colon C_i \in \pi_{jk}; \quad j,k\colon C_i \in \pi_{jk}.$$

Последние преобразования основаны на следующем. Изменен порядок суммирования. Поскольку ищется средняя оценка для всей сети, то внешнее суммирование ведется по всем каналам сети – от 1 до М. Для фиксированного значения i внутреннее суммирование ведется по тем (j-k)-маршрутам, которые включают в свой состав канал с пропускной способностью C_i.

Используя соотношение (4), получим:

$$T = \sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\gamma}T_i. \qquad (6)$$

Выражение (6) называют разложением среднесетевой задержки на компоненты, относящиеся к отдельным каналам. Тем не менее, данное выражение является совершенно общим. Необходимо выразить среднесетевую задержку через конструктивные характеристики каналов сети, в частности, через пропускные способности каналов связи. Для этой цели рассмотрим канал связи, “**глубоко погруженный в сеть**”. Такой тип каналов характерен для распределенных сетей, топология которых имеет связность, большую единицы, т.е. узлы таких сетей имеют более, чем один входной канал и более, чем один выходной канал. В действительности топологические структуры сетей передачи данных имеют связность, большую единицы для обеспечения требуемой структурной надежности.

Канал, глубоко погруженный в сеть, можно рассматривать как канал с пуассоновским потоком на входе, интенсивность которого равна интенсивности, задаваемой сетью. Времена обслуживания сообщений отдельными каналами являются независимыми случайными величинами. В силу этого, интервалы между моментами поступления сообщений в канал не зависят от времени их обслуживания в предыдущих (тандемных) каналах.

Возможность подобной модели канала связи в сети обоснована Л. Клейнроком в [1] и сформулирована в форме “**предположения о независимости**”. В поддержку такого решения выступает следующее рассуждение.

К зависимости **интервалов между поступлениями** сообщений в канал от времени их обслуживания в предыдущих каналах и, следовательно, к нарушению пуассоновости входного потока в канал, приводит поступление сообщений в данный узел в некоторой последовательности и уход к некоторому другому узлу в той же последовательности. Вместе с тем, если сообщения, уходящие из узла по данному каналу, пришли к узлу из разных каналов (рис. 2) или сообщения, пришедшие по одному и тому же каналу, отправляются из узла по разным каналам (рис. 3), или то и другое вместе, то можно считать, что указанная зависимость уменьшается.

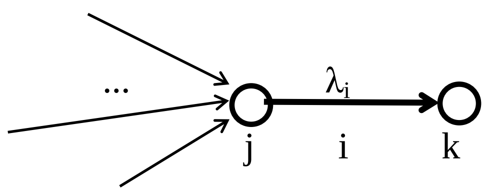


Рис. 2

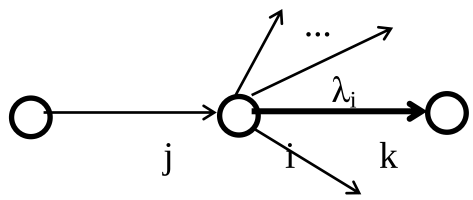


Рис. 3

Последнее согласуется с известным условием пуассоновского свойства случайного потока: чем больше источников-потребителей, тем ближе реальный поток к пуассоновскому потоку. Таким образом, для каналов, глубоко погруженных в сеть, характеризуемых числом входов-выходов, большим единицы, применимо предположение о независимости. Используя это предположение, одиночный канал можно представить моделью в виде системы массового обслуживания (СМО) типа M | M | 1.

На входе i-го канала – пуассоновский поток сообщений:

$$P_s(t) = \frac{(\lambda_i t)^s}{s!} e^{-\lambda_i t}.$$

Время обслуживания – Θ сообщения **каналом** определяется длиной сообщения и распределено по показательному закону:

$$F_i(\vartheta) = P(\Theta < \vartheta) = 1 - e^{-\mu C_i \vartheta}.$$

Почему так? Как уже говорилось выше, длина – L передаваемого сообщения является случайной величиной, распределенной показательно:

$$F(\ell) = P(L < \ell) = 1 - e^{-\mu\ell},$$

из чего следует, что средняя длина сообщений есть величина $1/\mu$ [дв. ед.].

Теоретическая модель в виде СМО исходит из того, что пропускная способность СМО есть величина C=1[ед. скорости], например, 1[бит/с], 1[байт/с], 1[сообщ./с]. Вообще, не привязываясь к какой-либо единице измерения длины, считают, что для СМО величина C=1 $[c^{-1}]$. В таком случае среднее время обслуживания сообщений длины $1/\mu$ в СМО будет $1/\mu : C = 1/\mu$ [с]. Одновременно эта величина определяет средний интервал времени между моментами окончания обслуживания. Поэтому интенсивность обслуживания составит $1[c] : 1/\mu[c] = \mu$. Тогда **для СМО** M | M | 1 функцию распределения времени обслуживания Θ можно записать в виде:

$$F(\vartheta) = P(\Theta < \vartheta) = 1 - e^{-\mu\vartheta}.$$

В отличие от теоретической модели СМО, i-й канал сети имеет вполне конкретное значение пропускной способности $C_i[c^{-1}]$, отличное от единицы. Поэтому среднее время обслуживания сообщений длины $1/\mu$ в канале будет в C_i раз меньше, чем в СМО, т.е. определяется величиной $1/\mu C_i$ [с]. Отсюда интенсивность обслуживания **в канале сети** будет μC_i, что и отражено выше в записи показательного закона для функции $F_i(\vartheta)$.

Средняя задержка T_i при передаче сообщения по каналу i определяется двумя составляющими:

$$T_i = [\text{время ожидания + время обслуживания}] = n\frac{1}{\mu C_i} + \frac{1}{\mu C_i},$$

где n – количество сообщений, стоящих в очереди перед данным сообщением.

По формуле Литтла $n = \lambda_i T_i$. Тогда, подставляя значение для n в выражение для T_i, получим:

$$T_i = \frac{\lambda_i T_i}{\mu C_i} + \frac{1}{\mu C_i},$$

откуда

$$T_i = \frac{1}{\mu C_i - \lambda_i}. \qquad (7)$$

Подставляя значение T_i в выражение (6), окончательно получим:

$$T = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\gamma}\left(\frac{1}{\mu C_i - \lambda_i}\right). \qquad (8)$$

1.3. Поиск кратчайших путей передачи данных: метод Dijkstra.

Вход: взвешенный ориентированный или неориентированный граф G с начальной вершиной v_0

$$G = < V, E, \mu, v_0 > .$$

Выход: помеченное дерево кратчайших путей с корнем v_0.

Метод:

Шаг 0. Пометим все вершины графа следующим образом. Положим $B(v_0) := 0$

для начальной вершины; $B(v) := \infty$ для всех остальных вершин $v \neq v_0$. Метку $B(v)$ назовем **временной** меткой.

Шаг 1. Положим $D(v_0) := 0$; $S := \{v_0\}$, где S – множество помеченных меткой $D(v)$ вершин. Метку $D(v)$ будем называть **постоянной**. $D(v)$ обозначает расстояние от вершины v_0 до v.

Положим $v_w := v_0$, где v_w – последняя (текущая) вершина, помеченная меткой $D(v)$.

Шаг 2. Для каждой, неотмеченной постоянно вершины, т.е. для вершины $v \in V \setminus S$, найдем новое значение временной метки $B(v)$, а именно

$$B(v) := \min(B(v), D(v_w) + \mu(v_w, v)),$$

где $\mu(v_w, v)$ – вес дуги $e = (v_w, v)$, если такая дуга имеется в графе G, и $\mu(v_w, v) = \infty$ – в противном случае.

Шаг 3. Если новое значение временной метки **для каждой** неотмеченной вершины есть ∞, то путей из отмеченных (т.е. из S) вершин в неотмеченные вершины не существует и алгоритм свою работу **завершает**.

В противном случае, из всех неотмеченных постоянно вершин выбираем вершину v_z с минимальной временной меткой $B(v_z)$, которая определяется как

$$B(v_z) = \min_{v \in V \setminus S} B(v).$$

Вершину v_z помечаем **постоянной** меткой

$$D(v_z) := B(v_z) .$$

Она становится новой последней, отмеченной постоянно вершиной, т.е.

$$v_w := v_z \quad \text{и} \quad S := S \bigcup \{v_z\}.$$

Кроме того, помечаем и вносим в **список дуг** дерева кратчайших путей дугу, для которой реализуется минимальное значение – $B(v_z)$.

Шаг 4. Если S = V, т.е. **все** вершины помечены **постоянными** метками $D(v)$, то алгоритм завершает работу. В противном случае перейти к шагу 2.

В результате работы алгоритма на основе полученного списка дуг формируется ориентированное дерево кратчайших путей, растущее из начальной вершины v_0, причем каждая вершина дерева имеет метку, означающую расстояние соответствующей вершины до начальной вершины.

Как следует из описания, алгоритм Дийкстры строит дерево кратчайших путей **последовательно**, присоединяя на каждом шаге одну вершину и дугу, заходящую в эту вершину, одновременно помечая присоединяемую вершину. Если последовательностью присоединяемых вершин является последовательность

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_N,$$

то их метки – $D(v_i)$ будут располагаться в возрастающем порядке

$$0 = D(v_0) \le D(v_1) \le \ldots \le D(v_N).$$

Присоединяемая на i-м шаге вершина является i-й, ближайшей к начальной вершиной. Присвоение меток вершинам графа продолжается до тех пор, пока не будут помечены все вершины из связанного множества вершин.

Многократное (по числу узлов в сети) применение алгоритма поиска кратчайших путей дает множество списков кратчайших путей. Элемент этого множества есть список (дерево) кратчайших путей для отдельного узла во все остальные.

2. Порядок выполнения лабораторной работы.

● Ознакомиться с описанием метода поиска кратчайших путей.

● Выбрать топологию распределенной СПД. Число узлов – не меньше 10. Число линий связи – не меньше 15. Связность сети – не меньше 2.

● Трафик (j-k) задается матрицей γ – требований на передачу, элемент γ_{jk} которой определяет интенсивность потока, требующего передачи из узла j в узел k.

Примечание 1. Линии связи – дуплексные. Если выбран симметричный трафик (что совсем необязательно), линии связи также можно считать симметричными по пропускной способности (т.е. в графе сети вместо дуг будут везде ребра).

● В качестве “веса” линии (j-k) использовать значение трафика из узла j в узел k, заданного в матрице γ.

● Маршрутизация в сети – фиксированная, задается **списком** путей (j-k) для передачи соответствующего трафика. Список путей (j-k) определить по дереву кратчайших путей.

● Для построения дерева кратчайших путей передачи воспользоваться методом Дийкстры. Разработать схему алгоритма процедуры и программу, используя высокоуровневые языковые средства.

● Сформировать **множество** (по числу узлов в сети) **списков** кратчайших путей, многократно используя программу Dijkstra для каждого узла сети.

● Выполнить “ручной” расчет по методу Дийкстры **для одного** из узлов сети, используя **табличное представление** работы алгоритма. Сопоставить с результатом работы программы для этого же узла сети с целью подтверждения правильности работы процедуры.

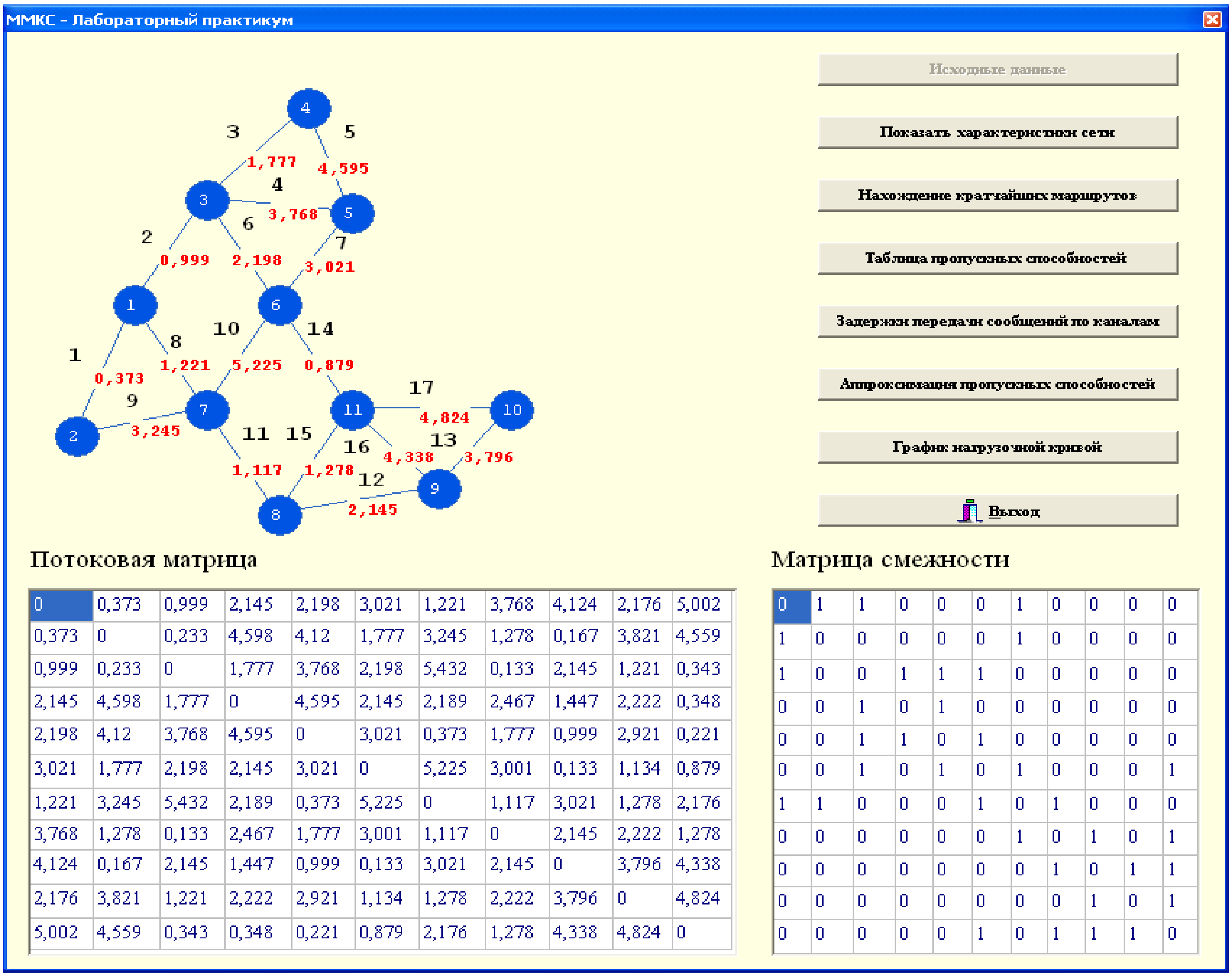
● Разработать **интерактивную форму** для визуализации исходных данных и результатов выполненной (**и последующих!**) лабораторных работ практикума. В качестве примера ниже приведены возможные фрагменты интерактивной формы: на рис.4 – форма основного модуля всего лабораторного практикума; на рис.5 – фрагмент интерактивной формы, содержащий результат выполнения текущей лабораторной работы.

● Подготовить отчёт по выполненной работе.

Примечание 2.Отчет по текущей лабораторной работе оформляется по стандарту и включает в себя:

- Задание на выполнение работы.
- Аналитические соотношения, на основе которых выполняются расчёты.
- Блок-схемы алгоритмов, реализующих методы моделирования.
- Экранные копии диалоговых окон.
- Откомментированные тексты исходных модулей программы.

Программный модуль очередной выполненной лабораторной работы включается в состав основного модуля лабораторного практикума. Таким образом, к моменту окончания последней лабораторной работы практикума интерактивная форма становится функционально завершенной.



Потоковая матрица

0	0,373	0,999	2,145	2,198	3,021	1,221	3,768	4,124	2,176	5,002
0,373	0	0,233	4,598	4,12	1,777	3,245	1,278	0,167	3,821	4,559
0,999	0,233	0	1,777	3,768	2,198	5,432	0,133	2,145	1,221	0,343
2,145	4,598	1,777	0	4,595	2,145	2,189	2,467	1,447	2,222	0,348
2,198	4,12	3,768	4,595	0	3,021	0,373	1,777	0,999	2,921	0,221
3,021	1,777	2,198	2,145	3,021	0	5,225	3,001	0,133	1,134	0,879
1,221	3,245	5,432	2,189	0,373	5,225	0	1,117	3,021	1,278	2,176
3,768	1,278	0,133	2,467	1,777	3,001	1,117	0	2,145	2,222	1,278
4,124	0,167	2,145	1,447	0,999	0,133	3,021	2,145	0	3,796	4,338
2,176	3,821	1,221	2,222	2,921	1,134	1,278	2,222	3,796	0	4,824
5,002	4,559	0,343	0,348	0,221	0,879	2,176	1,278	4,338	4,824	0

Матрица смежности

0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0

Рис. 4

3. Контрольные вопросы.

► Определите характеристику распределенной сети передачи данных, наиболее часто используемую в качестве критерия эффективности ее функционирования.

► Что является математической моделью топологической структуры распределенной сети передачи данных?

► Что является математической моделью трафика, входящего в сеть?

► Что называют (j-k)-трафиком в распределенной сети?

► Дайте определение "глубоко погруженного в сеть" канала связи.

► К какому типу параметров распределенной сети, как объекта математического моделирования, можно отнести алгоритм маршрутизации?

► Что физически определяет весовая функция, определенная на множестве каналов связи в сети?

► Что определяет элемент γ_{jk} матрицы γ?

► К какому классу из трех основных классов задач теории математического моделирования можно отнести задачу, решаемую методом Дийкстры?

► Что является результатом работы процедуры маршрутизации в данном узле распределенной сети, которая реализует алгоритм Дийкстры?

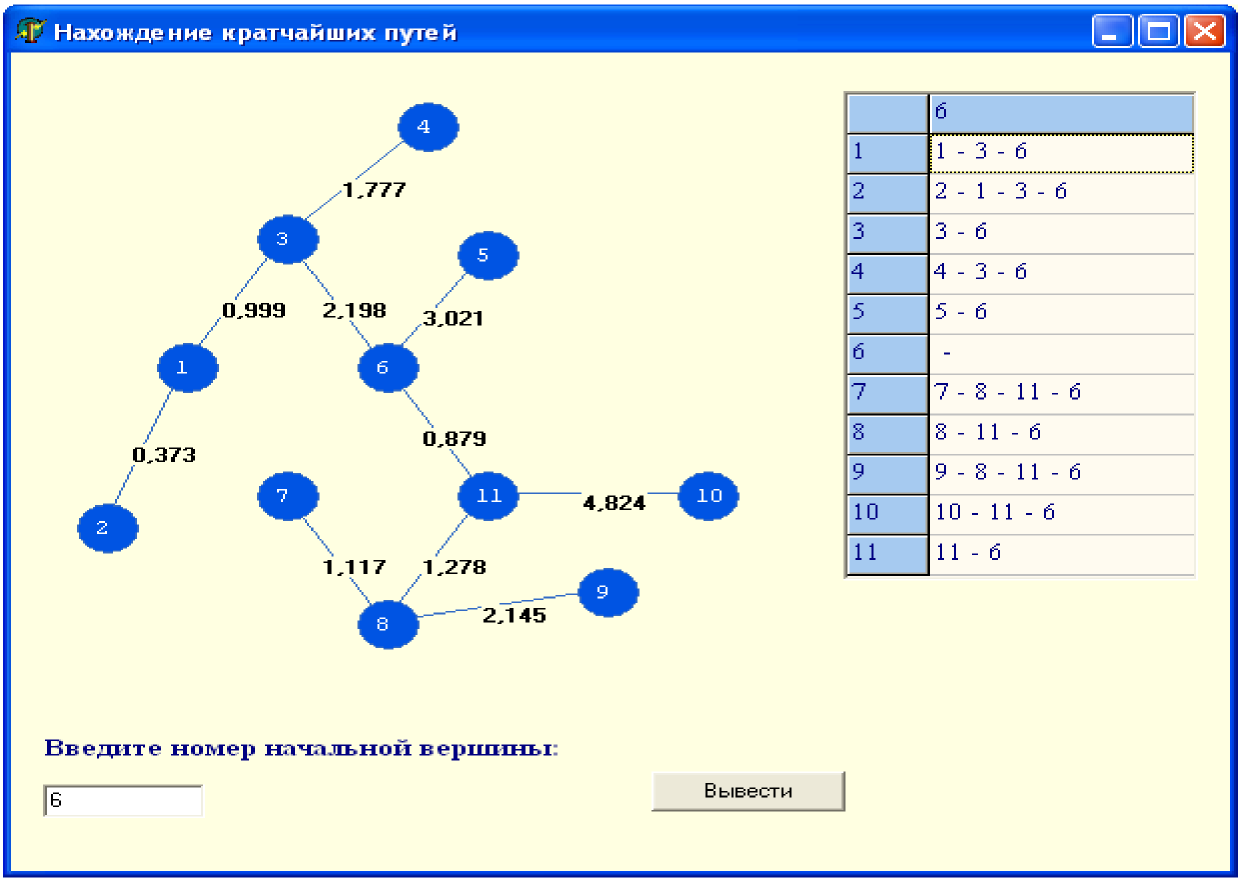


Рис. 5

Лабораторная работа 2. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТОКОВ В СЕТИ

Цель работы:

• выполнить расчет линейных потоков в сети на основе разработанного алгоритма.

Продолжительность выполнения работы – 4 часа.

1. Метод определения линейных потоков в сети.

Проиллюстрируем основные моменты метода определения линейных потоков для сети, конфигурация которой приведена на рис. 6.

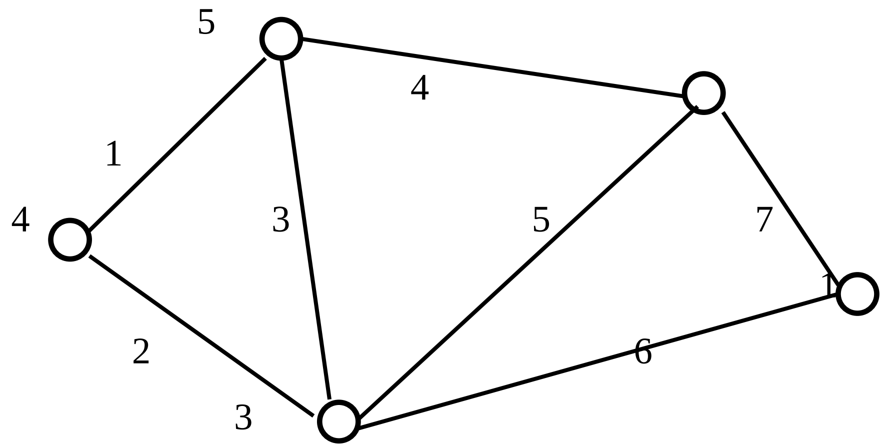


Рис. 6

Для выбранной топологии сети необходимо задать интенсивность (j-k)-трафика, передаваемого из узла j в узел k, а также процедуру маршрутизации сообщений, поступающих в узел-источник и направляемых в узел-адресат. Интенсивности γ_{jk} потоков внешнего трафика задаются потоковой матрицей γ:

$$\boldsymbol{\gamma} = \left\|\gamma_{jk}\right\| = \begin{bmatrix} 0.000 & 9.340 & 0.935 & 2.940 & 0.610 \\ 9.340 & 0.000 & 0.820 & 2.400 & 0.628 \\ 0.935 & 0.820 & 0.000 & 0.608 & 0.131 \\ 2.940 & 2.400 & 0.608 & 0.000 & 0.753 \\ 0.610 & 0.628 & 0.131 & 0.753 & 0.000 \end{bmatrix}$$

Элемент γ_{jk}, $j, k = \overline{1{,}5}$, определяет интенсивность потока передаваемых сообщений от j-го к k-му узлу.

Все семь линий предполагаются дуплексными с одинаковыми пропускными способностями для противоположных каналов одной и той же линии связи. Кроме того, трафик сети имеет симметричный характер – его средние характеристики в каждом направлении на определенной линии одинаковы. Это позволяет рассматривать трафик, идущий только в одном направлении, и тем самым уменьшить размерность задачи: вместо вычисления времени задержки для 14-ти однонаправленных линий расчет достаточно провести для 7-ми линий.

Общая интенсивность трафика, выходящего из одного любого узла сети, есть сумма элементов соответствующей строки матрицы γ. Общая интенсивность трафика, входящего в один любой узел сети, есть сумма элементов соответствующего столбца матрицы γ. Общая интенсивность трафика, поступающего в сеть, есть сумма всех элементов матрицы γ.

Следовательно, для рассматриваемого примера интенсивность полного внешнего потока, поступающего в сеть, будет вдвое больше общей интенсивности однонаправленного трафика.

Значение пропускной способности дуплексной линии связи будет вдвое больше ее найденного значения для соответствующих однонаправленных (симплексных) линий.

Теперь необходимо выбрать процедуру маршрутизации. Будем считать, что используется процедура фиксированной маршрутизации, которая направляет каждое сообщение по кратчайшему в некотором смысле маршруту π_{jk}.

Термин "кратчайший" определяется тем, какой физический смысл имеет весовая функция $q: E \to \mathbf{R}^+$, определенная на множестве E ребер графа G = < V, E, q >. Пусть в **данном примере** "вес" каждого ребра графа есть **географическая длина** соответствующей линии связи сети. Тогда процедура маршрутизации направляет сообщения для передачи по наиболее короткому в географическом отношении маршруту.

Если используется алгоритм Дийкстры, то результатом работы процедуры маршрутизации является дерево кратчайших маршрутов (путей) из некоторой вершины графа (соответственно, узла сети) во все остальные.

Пусть для рассматриваемого примера множество кратчайших путей будет таким, как показано на рис. 7.

Учитывая особенность, обусловленную симметрией трафика, дерево кратчайших путей для узла 5 можно не формировать, поскольку список узлов-адресатов, получаемых по одной из треугольных подматриц матрицы γ, к примеру, по верхней треугольной подматрице, будет пустым для узла 5. Если используется нижняя треугольная подматрица, то пустым будет список узлов-адресатов для узла 1.

Потоки γ_{jk}, передаваемые по путям π_{jk}, на рис. 7 обозначены соответствующими значениями, а линии, входящие в состав таких путей, обозначены в соответствии с рис. 6 номерами от 1 до 7.

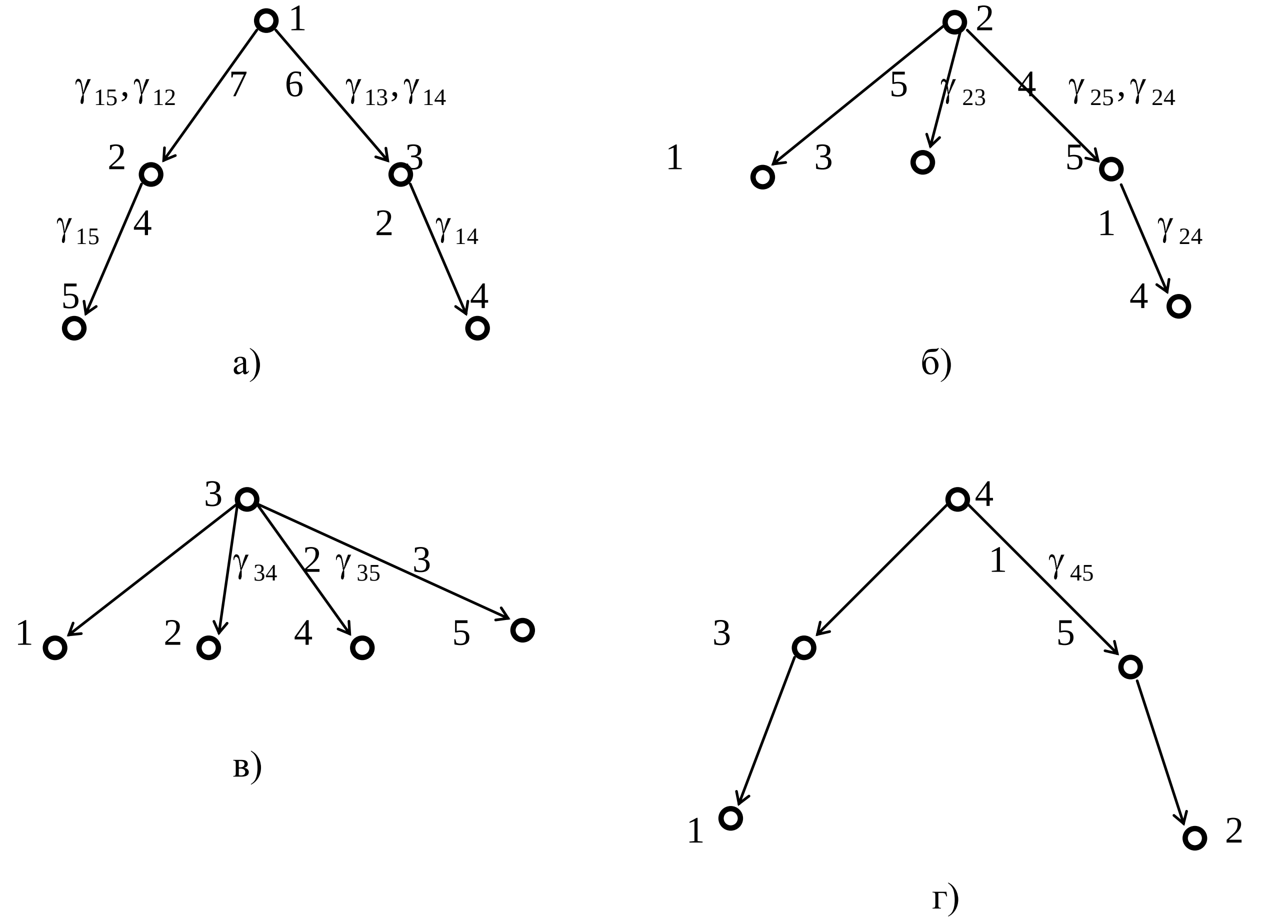


Рис. 7

Пользуясь исходными данными, определяемыми матрицей γ, получим значения интенсивностей внутреннего потока в сети, соответствующие занумерованным линиям:

$\lambda_1 = \gamma_{24} + \gamma_{45} = 3.153\ [c^{-1}]$, $\lambda_2 = \gamma_{14} + \gamma_{34} = 3.548[c^{-1}]$,

$\lambda_3 = \gamma_{35} = 0.131[c^{-1}]$, $\lambda_4 = \gamma_{15} + \gamma_{25} + \gamma_{24} = 3.638\,[c^{-1}]$,

$\lambda_5 = \gamma_{23} = 0.820\,[c^{-1}]$, $\lambda_6 = \gamma_{13} + \gamma_{14} = 3.875\,[c^{-1}]$,

$\lambda_7 = \gamma_{12} + \gamma_{15} = 9.950\,[c^{-1}]$.

Здесь отметим, что потоки γ_{24} и γ_{45} в линии 1 суммируются, несмотря на разнонаправленность. Фактически, при этом учитывается симметричный поток. Например, суммируя с потоком γ_{24} противоположный ему по направлению поток γ_{45}, тем самым учитывается поток γ_{54}, симметричный потоку γ_{45}.

Интенсивность полного потока в каждой линии будет вдвое выше полученных значений для однонаправленных потоков.

Интенсивность **внутреннего** потока в сети при **однонаправленном** трафике составляет величину

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i = 25.115\ [c^{-1}].$$

Интенсивность **внешнего** трафика, порождаемого треугольной подматрицей матрицы γ, найдем суммированием:

$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=j+1}^{5} \gamma_{jk} = 19.165 \ [c^{-1}].$$

Средняя длина пути, по которому передается сообщение в сети, составит величину

$$n = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{25.115}{19.165} = 1.3 \ [\text{линии}].$$

При экспоненциальном распределении длин сообщений **средняя длина сообщения** определится как $1/\mu$. Пусть средняя длина поступающих на передачу сообщений равняется 200 [бит].

Зададим величину **загрузки сети** – ρ. Пусть $\rho = 0.6$.

Тогда ресурс общей пропускной способности сети – С, которую предстоит оптимально распределить по линиям связи, имеет значение

$$C = \frac{\lambda}{\mu\rho},$$

что следует из определения загрузки системы в применении к сети:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu C}.$$

В нашем случае это составит величину

$$C_{\frac{1}{2}} = \frac{25,115}{0,6} 200 = 8371,6 \ [\text{бит/с}].$$

2. Порядок выполнения лабораторной работы.

• Подготовить исходные данные для выполнения расчетов, связанных с определением линейных потоков в сети, в числе которых:

○ сетевая топология;

○ матрица требований – γ на передачу данных;

○ множество списков, каждый из которых представляет дерево кратчайших путей из данной вершины во все остальные.

Перечисленные типы данных сформированы в лабораторной работе 1.

• Разработать схему алгоритма процедуры и программу, позволяющую вычисление линейных потоков в сети.

• Задать значение параметра ρ – загрузки сети по внутреннему потоку λ, из диапазона (0,1).

• Задать значение параметра $1/\mu$ [Кбит] – средней длины сообщения.

• Определить величину C [Кбит/с] – ресурс пропускной способности сети, подлежащий распределению по линиям связи сети.

• Результаты расчетов вывести по формату табл. 1а, приведенной ниже, в интерактивную форму, подготовленную в предыдущей лабораторной работе.

• Подготовить отчёт по выполненной работе.

Таблица 1а

Л и н и я			**Линейный трафик**	$(\mu\frac{C}{M} - \lambda_i)$
Номер	**У з е л**			
	нач.	**кон**	λ_i	**Равн. распределение**
1	4	5	3.153	2,827
2	3	4	3.548	2,432
3	3	5	0.131	5,849
4	2	5	3.638	2,342
5	2	3	0.820	5,160
6	1	3	3.875	2,105
7	1	2	9.950	**-3,970**
n =1.3	C=8371.6	γ =19.165	λ =25.115	ρ=0.6

Примечание 3. Наличие нулевых значений в предпоследнем или отрицательных значений в последнем столбцах таблицы 1а означает необходимость в параметрической коррекции модели сети (см. к тому же, **Примечание 4**). В данном случае необходимо вернуться к этапу формирования исходных данных и скорректировать значения элементов γ_{jk} матрицы γ в сторону большей однородности входных потоков: следует уменьшить различие в абсолютных величинах элементов γ_{jk}. Далее следует повторить моделирование с изменёнными исходными данными.

3. Контрольные вопросы.

► Что определяет следующее выражение:

$$\lambda_i = \sum_j \sum_k \gamma_{jk}, \qquad j,k : c_i \in \pi_{jk} \ ?$$

► Для какого типа процедуры маршрутизации рассчитываются линейные потоки в сети?

► Дайте определение параметра ρ – загрузки сети.

► Назовите количественный и качественный параметры модели сети, определяющие соотношение между внутренним и внешним потоком.

► Что определяет сумма элементов строки матрицы требований $\|\gamma\|$?

► Известно, что для фиксированной маршрутизации в заданной топологии распределенной сети, отношение полного внутреннего потока в сети к полному внешнему потоку есть величина постоянная. Что выражает указанная константа?

► Что нужно предпринять в том случае, если, в результате вычисления линейных потоков, их величины в некоторых линиях связи принимают нулевые значения?

Лабораторная работа 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ ЛИНИЙ СВЯЗИ: МЕТОД ЛАГРАНЖА

Цель работы:

• определить оптимальное распределение связного ресурса сети – пропускной способности по линиям связи, используя модельные отношения, полученные с использованием метода неопределённых множителей Лагранжа;

• выполнить сравнение с альтернативной стратегией распределения пропускных способностей.

Продолжительность выполнения работы – 4 часа.

1. Расчет оптимальных значений пропускных способностей $\mathbf{C_i}$ в случае линейной функции стоимости.

Решение задачи выбора пропускных способностей (ВПС) является **реализуемым**, если $C_i > \lambda_i / \mu$, $\forall i \quad (i = \overline{1, M})$, что следует из формулы (8).

Применим один из методов вариационного исчисления – метод неопределенных множителей Лагранжа. В соответствии с ним, для минимизации T составляется функционал Лагранжа:

$$G = T + \beta \left[\sum_{i=1}^{M} d_i C_i - D \right],$$

где β – неопределенный множитель Лагранжа. d_i – **стоимостный коэффициент**, линейно зависящий от пропускной способности. В таком случае d_i имеет смысл стоимости единицы пропускной способности.

Выражение в квадратных скобках учитывает соблюдение ограничений и тождественно равно нулю. Поэтому, минимизация функции T равносильна поиску минимума для функционала G, в ходе которого определяется значение β.

Введя в рассмотрение величину

$$D_e = D - \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\mu} d_i \tag{19}$$

как “добавочную” стоимость, **оптимальное** решение линейной задачи ВПС можно записать в виде:

$$C_{i\,opt} = \frac{\lambda_i}{\mu} + \frac{D_e}{d_i} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_i d_i}}{\sum_{j=1}^{M} \sqrt{\lambda_j d_j}}, \qquad i = \overline{1, M} \tag{20}$$

В формуле (20) числитель второго слагаемого-дроби относится к данному номеру i, а знаменатель – ко всем номерам линий связи.

Из выражения (20) следует, что каждая линия в сети будет иметь пропускную способность, по крайней мере, равную величине λ_i / μ – первое слагаемое, и, кроме того, некоторую дополнительную пропускную способность, величина которой определяется вторым слагаемым. Следовательно, величину λ_i / μ можно рассматривать как минимально необходимое значение пропускной способности линии i.

Стоимость минимальной пропускной способности для линии i есть величина. $\lambda_i \cdot d_i / \mu$. Аналогичная величина для всей сети может быть представлена в виде:

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\mu} d_i .$$

Очевидно, для того чтобы иметь возможность получить конечное значение среднесетевой задержки в сети, полная ее стоимость D должна быть больше вышевзятой суммы. В таком случае разность

$$D - \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\mu} d_i = D_e$$

и будет той добавочной стоимостью, определенной выражением (19), которая направлена на поддержание требуемой характеристики сети в реальных условиях эксплуатации. Эта добавочная стоимость после нормирования с помощью стоимостного коэффициента d_i (см. формулу (20)) распределяется по всем линиям сети пропорционально корню квадратному из взвешенной интенсивности трафика в линии – $\lambda_i d_i$.

Такой **оптимальный набор** пропускных способностей называется набором пропускных способностей, сформированным **по правилу квадратного корня.**

Подставив выражение для параметра C_i в формулу (8), получим экстремум (минимум) критерия оптимальности:

$$T_{\min} = \frac{n}{\mu D_e} \cdot \left[\sum_{i=1}^{M} \sqrt{\frac{\lambda_i d_i}{\lambda}} \right]^2 , \qquad (21)$$

здесь n – **средняя длина пути** в сети, определяемая соотношением: n = **λ / γ**.

При $D_e \to 0$ – среднесетевая задержка передачи сообщений неограниченно возрастает.

При $D_e > 0$ – задача ВПС имеет реализуемое решение, т.е. $T < \infty$.

При $D_e \leq 0$ – задача не имеет реализуемого решения.

Равенства (20) и (21) являются аналитическим решением задачи ВПС в случае **линейной** стоимостной функции.

Важный частный случай, позволяющий провести системный анализ результатов моделирования сети, состоит в том , что $d_i = d$, т.е. стоимость единицы пропускной способности одна и та же для любой линии сети. При этом, без потери общности, можно положить d = 1 ед. стоимости. В этом случае

$$D = \sum_{i=1}^{M} d_i C_i = \sum_{i=1}^{M} C_i \equiv C,$$

здесь C – общая пропускная способность сети.

Из последнего равенства следует, что в случае линейной зависимости, сохранение общей стоимости D на фиксированном уровне будет эквивалентно поддержанию общей пропускной способности также на некотором постоянном уровне.

Для рассматриваемого частного случая формулы (20) и (21) примут, соответственно, вид:

$$C_{i\ opt} = \frac{\lambda_i}{\mu} + C(1 - n\,r)\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sum_{j=1}^{M}\sqrt{\lambda_j}}, \qquad i = \overline{1, M}; \tag{20а}$$

$$T_{min} = \frac{n\left[\sum_{i=1}^{M}\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda}}\right]^2}{\mu C(1 - n\,r)}, \tag{21а}$$

где параметр

$$r = \frac{\gamma}{\mu C} \tag{22}$$

можно рассматривать как **загрузку сети**, создаваемую **внешним** трафиком γ на входах сети, **в отличие** от загрузки ρ = λ / μC, создаваемой **внутренним** трафиком λ в сети.

Из равенств (20а) и (21а) следует, что

$$D_e = C(1 - nr). \tag{23}$$

Действительно:

$$C(1-nr) = C\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\mu C}\right) = C - \frac{\lambda}{\mu} = C - \frac{\sum_{i=1}^{M}\lambda_i}{\mu} = D - \sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\mu} = D_e \;\Bigg|\; d = 1 \text{ [ед. стоим.]}$$

Из цепочки последних рассуждений также следует, что

$$D_e = C\left(1 - \frac{\lambda}{\mu C}\right) = C(1-\rho) = D(1-\rho), \tag{23а}$$

так как в силу рассматриваемого частного случая, $C \equiv D$.

Кроме того, сопоставляя равенства (23) и (23а), видим, что

$$D_e = C(1 - nr) = C(1 - \rho),$$

откуда следует, что

$$\rho = n \cdot r. \tag{23б}$$

Последнее означает, что нагрузка, создаваемая внутренним трафиком, в n раз превышает нагрузку, создаваемую внешним трафиком. Это превышение обусловлено результатом работы процедуры маршрутизации, которая увеличивает, в среднем, в n раз длину пути передачи сообщений в сети по сравнению с сетью, имеющей полносвязную топологическую структуру.

Кроме стратегии распределения связного ресурса сети – пропускной способности, именуемой правилом квадратного корня, примем во внимание две альтернативы:

○ стратегия **пропорционального** распределения.

Здесь величина C_i выбирается прямо пропорционально значению λ_i:

$$C_{i\ prop} = C\frac{\lambda_i}{\lambda};$$

○ стратегия **равномерного** распределения.

В этом случае общая пропускная способность сети распределяется поровну между всеми линиями, независимо от интенсивности трафика, проходящего по линии.

После этого, значение среднего времени задержки для линии i определяется по формуле (7), а значение среднесетевой задержки – по формуле (8).

Примечание 4. Сеть называется **сбалансированной**, если потоки γ_{jk} в основном не отличаются друг от друга. При использовании альтернативной стратегии распределения (особенно это относится к стратегии равномерного распределения), может оказаться, что решение задачи ВПС теряет свою реализуемость из-за того, что перестаёт выполняться условие $C_i > \lambda_i / \mu, \quad \forall i \ (i = \overline{1, M})$. В таком случае следует осуществить параметрическую коррекцию модели, приводящую к большей однородности трафика γ в смысле вышеприведенного определения.

2. Порядок выполнения лабораторной работы.

- Используя вычисленные в лабораторной работе 2 значения параметров модели сети, подготовить расчетные выражения для нахождения оптимального распределения пропускных способностей линий связи.
- Подготовить исходные данные для вычисления пропускных способностей линий связи для альтернативных стратегий распределения.
- Вычислить среднесетевые задержки передачи данных для оптимальной и альтернативных стратегий распределения – T_{opt}, $T_{проп.}$, $T_{равн.}$, используя разработанные для этих целей соответствующие процедуры.
- Результаты расчётов вывести на соответствующей вкладке основной интерактивной формы лабораторного практикума в формате табл. 1б. Для сравнения в табл. 1б представлены результаты расчета для одной из альтернативных стратегий – правила пропорционального распределения пропускных способностей.

• Провести сравнительный анализ результатов решения задачи ВПС для разных стратегий и сделать выводы.

• Подготовить отчёт по выполненной работе.

Таблица 1б

Л и н и я			**Линейный трафик**	**Правило выбора пропускной способности сети**			
Номер	**У з е л**			**Квадратный корень**		**Пропорцион-е распред-е**	
	нач.	**кон**	λ_i	C_i	T_i	C_i	T_i
1	4	5	3.153	1127.848	0.402	1050.992	0.476
2	3	4	3.548	1237.076	0.379	1182.658	0.423
3	3	5	0.131	127.555	1.972	43.666	11.494
4	2	5	3.638	1261.724	0.374	1212.658	0.412
5	2	3	0.820	417.582	0.789	273.331	1.828
6	1	3	3.875	1326.247	0.363	1291.658	0.387
7	1	2	9.950	2873.329	0.226	3316.644	0.151
ρ=0.6	**n** =1.3	γ=19.165	λ=25.115	**C**=8371.6	$T_{opt.}$=0.444	**C**=8371.6	$T_{проп.}$=0.546

3. Контрольные вопросы.

► Дайте определение термина "добавочная стоимость".

► Охарактеризуйте состояние сети при D_e=0.

► Сформулируйте правило "квадратного корня".

► Какое условие является необходимым для использования результатов решения задачи ВПС?

► Что определяет параметр $r = \gamma/\mu C$?

► Как изменяется среднесетевая задержка T при переходе от оптимальной стратегии распределения пропускных способностей к альтернативным стратегиям?

Лабораторная работа 4. АППРОКСИМАЦИЯ РАСЧЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ ЛИНИЙ СВЯЗИ

Цель работы:

• аппроксимировать расчетные значения пропускных способностей линий связи сети значениями из ряда стандартных значений.

Продолжительность выполнения работы – 4 часа.

1. Метод аппроксимации.

Выпускаемая промышленностью каналообразующая аппаратура ориентирована на фиксацию конечного числа дискретных значений пропускных способностей каналов связи, определяющих максимальные значения производительности каналов по передаче данных.

По этой причине, полученное расчётное (непрерывное) значение пропускной способности линии i заменяется одним или суммой дискретных значений пропускных способностей каналов связи из **стандартного ряда** так, чтобы получить максимально близкую к непрерывному значению величину реальной пропускной способности линии. Погрешность аппроксимации при этом минимизируется.

Погрешность аппроксимации пропускной способности i-й линии – δ_{C_i} рассчитывается по формуле:

$$\delta_{C_i} = \frac{C_i - C_i^*}{C_i} \cdot 100\% \ , \qquad (24)$$

здесь C_i^* – пропускная способность i-й линии, составленная из **дискретных** значений стандартного ряда.

Определение C_i^* производится по любому алгоритму, который обеспечивает минимальное значение погрешности аппроксимации:

$$|\delta_{C_i}| \to \min.$$

Результатом аппроксимации расчетного значения пропускной способности является количество стандартных (в тональном диапазоне частот, в нашем случае) каналов связи, пучок которых составляет данную линию связи.

Данные аппроксимации сводятся в табл. 2а для оптимального распределения пропускной способности по правилу квадратного корня и в табл. 2б – для альтернативного (пропорционального) распределения.

Таблица 2а

Л и н и я			**Правило выбора пропускной способности сети**				
Но-мер	**У з е л**		**К в а д р а т н ы й к о р е н ь**				
	нач.	**кон**	C_i	C_i^*	C_{stand}	Kol_{stand}	δ_{C_i}[%]
1	4	5	1127.848	1200	1200	1	-6.40
2	3	4	1237.076	1200	1200	1	3.00
3	3	5	127.555	600	600	1	-370.39
4	2	5	1261.724	1200	1200	1	4.89
5	2	3	417.582	600	600	1	-43.68
6	1	3	1326.247	1200	1200	1	9.52
7	1	2	2873.329	3000	2400,600	2	-4.41
			C = 8371.607	$C^*_{opt.}$ = 9000			δ_C = -7.51

Отрицательные значения погрешности указывают на "перерасход" ресурса в сравнении с теоретически требуемым значением, что обусловлено дискретностью ряда стандартных аппроксимирующих значений пропускной способности.

Очевидно, при аппроксимации непрерывных значений дискретными эквивалентами необходимо сохранение условия реализуемости решения задачи ВПС, т.е. должно выполняться:

$$C_i^* > \lambda_i / \mu.$$

Для пропорционального распределения пропускной способности аппроксимирующие значения – C_i^*, в рассматриваемом примере, остаются такими же, как и для правила квадратного корня.

Таблица 2б

Линия			Правило выбора пропускной способности сети				
Номер	Узел		Пропорциональное распределение				
	нач.	кон	C_i	C_i^*	C_{stand}	Kol_{stand}	δ_{C_i} [%]
1	4	5	1050.992	1200	1200	1	-14.18
2	3	4	1182.658	1200	1200	1	-1.47
3	3	5	43.666	600	600	1	-1274.07
4	2	5	1212.658	1200	1200	1	1.04
5	2	3	273.331	600	600	1	-119.51
6	1	3	1291.658	1200	1200	1	7.10
7	1	2	3316.644	3000	2400,600	2	9.55
			C = 8371.607	$C^*_{проп.}$ = 9000			δ_C= -7.51

Однако пропорциональное распределение усиливает неравенство между пропускными способностями сильно и слабо загруженных линий связи, что отражается на распределении относительных погрешностей – δ_{C_i}.

Влияние аппроксимации на время задержки можно проследить, анализируя значения временных характеристик по табл. 3а и 3б, соответственно для оптимального и альтернативного распределения пропускных способностей.
В этих таблицах расчетные значения для T_i выбираются из соответствующих столбцов табл. 1б, а **дискретные** значения для T_i^* рассчитываются для каждой стратегии распределения пропускной способности по формуле (7) путем подстановки в нее соответствующих дискретных значений C_i^*, т.е.

$$T_i^* = \frac{1}{\mu C_i^* - \lambda_i}.$$

Для определения **среднесетевой** задержки T^*, полученной после аппроксимации дискретными значениями пропускных способностей, в каждом из рассматриваемых случаев стратегий распределения используется формула (6) в модификации:

$$T^* = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\gamma} T_i^*.$$

Таблица 3а

Линия			Правило выбора проп.спос-ти сети		
Номер	Узел		Квадратный корень		
	нач.	кон	T_i	T_i^*	δ_{T_i} [%]
1	4	5	0.402	0.351	12.69
2	3	4	0.379	0.408	-7.65
3	3	5	1.972	0.349	82.30
4	2	5	0.374	0.423	-13.10
5	2	3	0.789	0.459	41.83
6	1	3	0.363	0.471	-29.75
7	1	2	0.226	0.198	12.39
	C = 8371.607	$C^*_{opt.}$ = 9000	$T_{opt.}$=0.444	$T^*_{opt.}$=0.434	δ_T=2.25

Относительная погрешность аппроксимации рассчитывается по формуле:

$$\delta_{T_i} = \frac{T_i - T_i^*}{T_i} \cdot 100\% \ .$$

Отрицательные ее значения указывают на ухудшение временных характеристик в результате аппроксимации.

Таблица 3б

Линия			Правило выбора проп.спос-ти сети		
Номер	Узел		Пропорцион-е распределение		
	нач.	кон	T_i	T_i^*	δ_{T_i} [%]
1	4	5	0.476	0.351	26.26
2	3	4	0.423	0.408	3.55
3	3	5	11.494	0.349	96.96
4	2	5	0.412	0.423	-2.67
5	2	3	1.828	0.459	74.89
6	1	3	0.387	0.471	-21.71
7	1	2	0.151	0.198	-31.13
	C = 8371.607	$C^*_{проп.}$ = 9000	$T_{проп.}$=0.546	$T^*_{проп.}$=0.434	δ_T=20.51

Как следует из двух последних таблиц, наибольшую погрешность аппроксимация вносит в неоптимальную (альтернативную) стратегию распределения. Следует отметить очень частный характер одного результата (полученного на основе рассмотрения лишь единственного примера). Для получения каких-либо обобщающих выводов, требуется определенная статистика.

2. Порядок выполнения лабораторной работы.

- Ознакомиться с методикой перехода от расчётных (непрерывных) значений пропускных способностей линий связи сети, полученных в лабораторной работе 3, к дискретным значениям.

- Выбрать в качестве стандартного ряда дискретных значений пропускных способностей последовательность от 64 до 2048 [Кбит/с] для цифровых каналов связи, формируемую с шагом 64 [Кбит/с]:

64, 128, 192, 256, 320, 384,..., 1024, 1088,..., 1984, 2048 [Кбит/с].

- Разработать алгоритм аппроксимации, минимизирующий её погрешность и выполняющий проверку условия реализуемости полученного решения.
- Подготовить исходные данные для процедур аппроксимации пропускных способностей линий связи для оптимальной и альтернативных стратегий распределения.
- Вычислить дискретные значения для T_i^* и среднесетевые задержки передачи данных для оптимальной и альтернативных стратегий распределения – T^*_{opt}, $T^*_{\text{проп.}}$, $T^*_{\text{равн.}}$, используя разработанные для этих целей соответствующие процедуры.
- Результаты работы процедур аппроксимации вывести на соответствующей вкладке основной интерактивной формы лабораторного практикума в формате табл. 2а, 2б. Для сравнения в табл. 2б представлены результаты аппроксимации для одной из альтернативных стратегий – правила пропорционального распределения пропускных способностей.
- Результаты работы процедур вычисления дискретных временных характеристик вывести на соответствующей вкладке основной интерактивной формы в формате табл. 3а, 3б. Для сравнения в табл. 3б представлены результаты вычисления для одной из альтернативных стратегий – правила пропорционального распределения.
- Провести сравнительный анализ влияния аппроксимации на временные характеристики для разных стратегий и сделать выводы.
- Подготовить отчёт по выполненной работе.

3. Контрольные вопросы.

► В чём причина аппроксимации аналитических результатов решения задачи ВПС?

► Как оценивается погрешность используемого метода аппроксимации?

► Какое условие необходимо соблюдать при замене непрерывных значений пропускных способностей линий связи их дискретными эквивалентами?

► Как по знаку погрешности аппроксимации определить степень использования ресурса пропускной способности и характер изменения временной характеристики?

Лабораторная работа 5. АНАЛИЗ СРЕДНЕСЕТЕВОЙ ЗАДЕРЖКИ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТА НАГРУЗОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Цель работы:

• построить графические кривые нагрузочных характеристик – среднесетевой задержки T(ρ) и T(γ) для анализа зависимости состояния сети от значений системных параметров.

Продолжительность выполнения работы - 4 часа.

1. Анализ зависимости среднесетевой задержки от рабочей нагрузки.

1.1. Пороговая модель зависимости T(ρ) и T(γ).

Задача состоит в изучении зависимости среднесетевой задержки – T от параметров: ρ – загрузки и γ – входного потока, определяющих рабочую нагрузку сети, режим устойчивой работы сети и её перегрузку. Рассматривая модельное отношение (8), можно сделать количественные предсказания и некоторые выводы в отношении среднесетевой задержки сообщений СПД.

В том случае, если множество $\{C_i\}$ неоднородно, что характерно для СПД – каждая линия имеет собственное значение пропускной способности, возможна ситуация, когда поток в одной из линий достигнет пропускной способности этой линии, являющейся “узким” местом в сети. В этом случае соответствующая компонента суммы в выражении (8) становится доминирующей вследствие бесконечного значения задержки передачи сообщений по данной линии. В результате вся сумма – среднесетевая задержка бесконечно растет.

Таким образом, выражение для среднесетевой задержки определяется компонентой T_i. Величина T имеет "порог", до которого она остается относительно постоянной, а при приближении к нему неограниченно возрастает.

Выражение (8) для оптимальной стратегии распределения пропускных способностей можно преобразовать к виду:

$$T(\rho)=\frac{1}{(1-\rho)}\frac{n}{\mu C}\left[\sum_{i=1}^{M}\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda}}\right]^2, \qquad (25)$$

позволяющему получить графическое представление зависимости T(ρ).

На рис. 8 такая зависимость построена в применении к примеру сети на рис. 6. Для сравнения здесь же приведен график для одной из альтернативных стратегий – пропорционального распределения. В качестве значений для ресурса пропускной способности – C использованы расчетные (до аппроксимации) значения.

Анализ поведения графических кривых подтверждает сделанные выше предположения:

• при $\rho\to 1$ среднесетевая задержка $T\to\infty$, что является следствием попытки использовать систему в режиме, близком к ее пропускной способности;

• резкий переход в область асимптотических значений T для СПД обусловлен неоднородностью значений во множестве $\{C_i\}$;

• существует диапазон загрузки на сеть, в котором среднесетевая задержка остается относительно постоянной – устойчивый режим работы сети; величина этого диапазона определяется степенью неоднородности во множестве $\{C_i\}$.

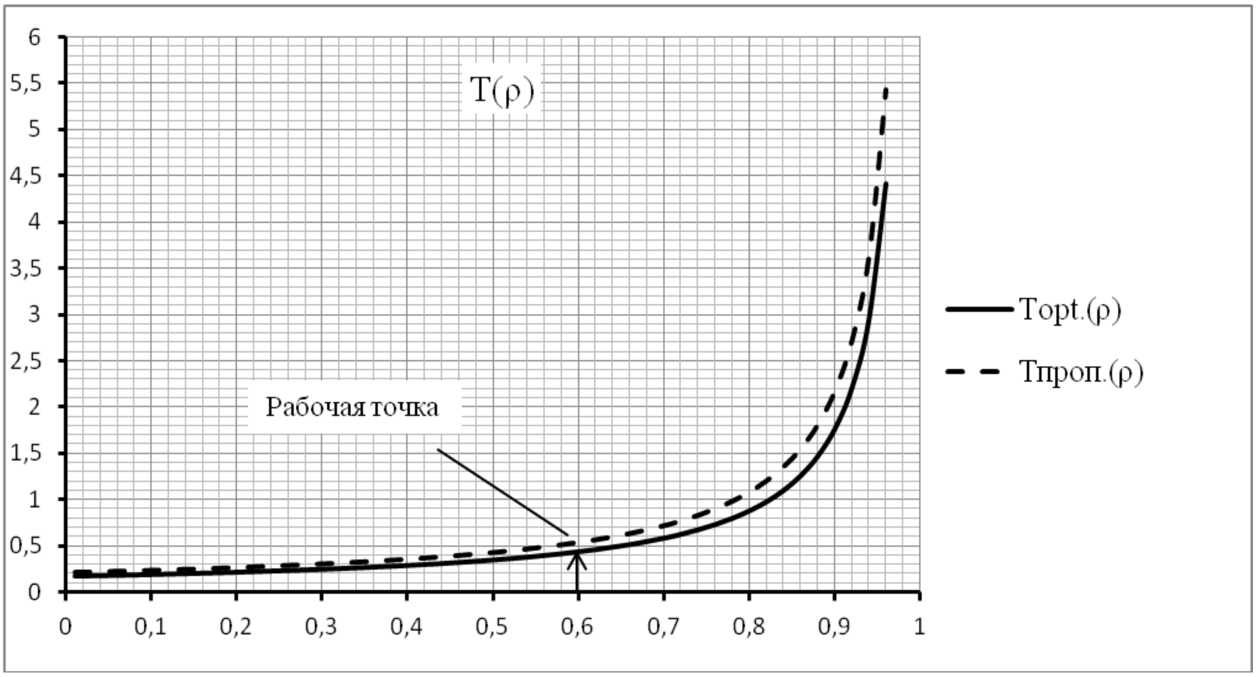


Рис. 8

Пороговое поведение значений среднесетевой задержки приводит к упрощенной **модели зависимости** $T = T(\rho)$, что иллюстрируется на рис. 9.

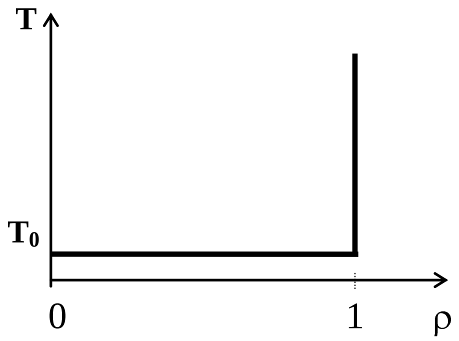


Рис. 9

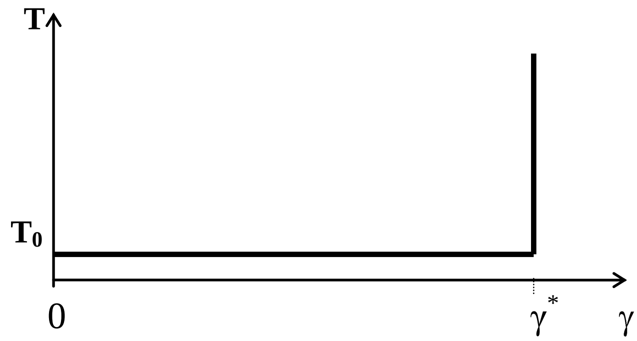


Рис. 10

Существенным для такой модели является то, что среднесетевая задержка до некоторого порогового значения загрузки относительно постоянна, а затем неограниченно возрастает. Здесь T_0 – постоянная среднесетевая задержка, характеризующая область устойчивой работы сети, т.е. при $\rho < 1$.

Очевидно, загрузка ρ сети определяется скоростью поступления сообщений в сеть, т.е. интенсивностью γ входного потока сообщений, создающего рабочую нагрузку на сеть. Тогда можно перейти к зависимости $T = T(\gamma)$, которая будет отличаться от зависимости $T = T(\rho)$ лишь масштабом изображения (рис. 10). В самом деле:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu C} = \frac{1}{\mu C}\sum_{i=1}^{M}\lambda_i = \frac{1}{\mu C}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j}\sum_{k}\gamma_{jk} = \frac{1}{\mu C}H\gamma \;,$$

$$j,k{:}C_i \in \pi_{jk},$$

здесь C – общая пропускная способность сети, т.е.

$$C = \sum_{i=1}^{M} C_i \;.$$

H – некоторая константа, характеризующая отношение полного внутреннего потока – λ в сети к внешнему потоку γ, обусловленная маршрутизацией потоков γ_{jk}.

В таком случае $\rho = \mathrm{const}\cdot\gamma$, а зависимости $T(\rho)$ и $T(\gamma)$ являются **качественно идентичными**. На рис.10 параметр γ^* представляет критическое значение (для режима работы сети, фиксируемого матрицей требований) скорости поступления сообщений в сеть, обусловливающее нагрузку насыщения сети, при которой $T \to \infty$.

На рис. 11 зависимость T(γ) построена для оптимальной стратегии распределения пропускных способностей в рассматриваемом примере. Для сравнения здесь же приведен график для пропорционального распределения.

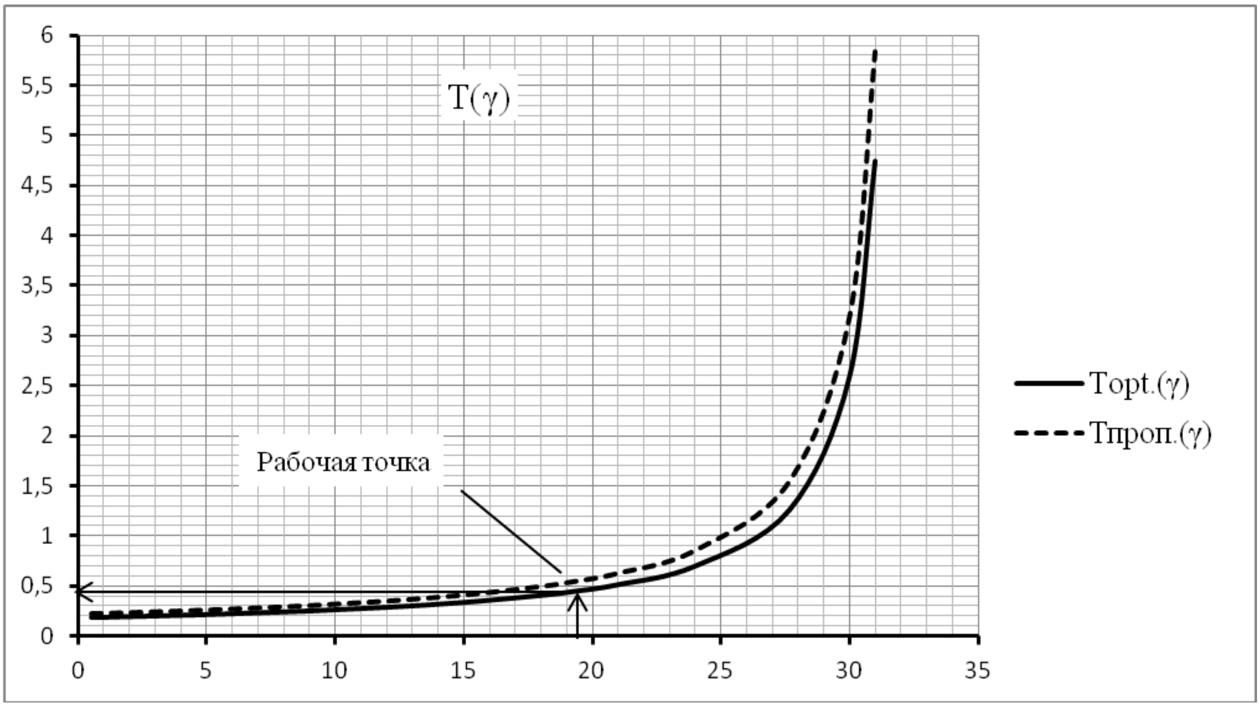


Рис. 11

1.2. Расчет значений T_0 и γ^* в особых точках пороговой модели зависимости $T(\gamma)$.

Обозначим через n_{jk} длину (в числе каналов связи) пути π_{jk}, определяемого процедурой маршрутизации в сети. Пусть также n – средняя длина пути в сети. Тогда можно записать:

$$n = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_{jk}}{\gamma}n_{jk}. \qquad (11)$$

Определим внутренний поток λ_{jk} в сети, направляемый из узла j в узел k.

Очевидно

$$\lambda_{jk} = \gamma_{jk}n_{jk}. \qquad (12)$$

Теперь полный внутренний поток в сети можно выразить соотношением:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\lambda_{jk} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_{jk}n_{jk}. \qquad (13)$$

Тогда

$$n = \frac{\lambda}{\gamma}. \qquad (11а)$$

Из последнего равенства следует, что $\lambda = n\cdot\gamma$. Значит константа H, введенная в рассмотрение выше и характеризующая соотношение между полным внутренним потоком λ в сети и внешним потоком γ, есть ни что иное, как средняя длина пути n, которая , в свою очередь, определяется топологией сети и процедурой маршрутизации.

Учитывая введенные обозначения, **задержку при бесконечно малой нагрузке** – T_0 будем вычислять, используя предельную форму при γ, λ_i, стремящихся к нулю:

$$T_0 = \lim_{\lambda_i,\gamma\to 0}\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\gamma}\left(\frac{1}{\mu C_i - \lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\mu C_i}\lim_{\lambda_i,\gamma\to 0}\frac{\lambda_i}{\gamma} =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\mu C_i}\lim_{\lambda_i,\gamma\to 0}\frac{\lambda_i}{\lambda}n = n\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\lambda}\frac{1}{\mu C_i}. \qquad (14)$$

Последнее равенство возможно потому, что отношение λ_i/λ остается постоянным и не зависит от нагрузки в сети – γ. Оно является лишь функцией процедуры маршрутизации. Это подтверждается соотношением (11а), из которого следует: $\lambda = n\cdot\gamma$, т.е. при фиксированной (n = const) маршрутизации изменению внешнего потока в некоторое число раз соответствует изменение внутреннего потока во столько же раз, а отношение λ_i / λ будет постоянным, независящим от γ.

Значение **критической нагрузки** – γ^* находится из следующих рассуждений.

1. При заданной фиксированной процедуре маршрутизации с помощью формулы (4) определяется множество $\{\lambda_i\}$ потоков в сети при некотором значении γ.

2. Просматриваются все отношения $\lambda_i / \mu C_i$ и определяется некоторый индекс i_0 по наибольшему из этих отношений, характеризующий наиболее "узкое" место в сети, т.е. $\max_i \rho_i$:

$$\max_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu C_i} \right) = \frac{\lambda_{i_0}}{\mu C_{i_0}}.$$

3. Критическая точка, определяющая потерю устойчивого режима сети, описывается уравнением:

$$h\lambda_{i_0} = \mu C_{i_0}, \qquad h > 1,$$

здесь h – **коэффициент нагрузки**, показывающий, во сколько раз можно увеличить действующую нагрузку в наиболее узком месте (канале i_0), чтобы сеть вошла в режим перегрузки – начала терять устойчивость ($T \to \infty$).

4. Так как для параметров λ_i, λ и γ коэффициент нагрузки будет одним и тем же, то искомое значение γ^* находится в результате решения уравнения:

$$h = \frac{\mu C_{i_0}}{\lambda_{i_0}} \Big| \gamma = \gamma^*.$$

Окончательно находим искомое значение критической нагрузки:

$$\gamma^* = h \cdot \gamma. \tag{15}$$

Определим значения параметров T_0 и γ^* для рассматриваемой сети.

Задержка передачи в условиях бесконечно малой нагрузки вычисляется в соответствии с формулой (14):

$$T_0 = n \sum_{i=1}^{7} \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot \frac{1}{\mu C_i} = 0{,}186\ [c^{-1}].$$

Для определения γ^* предварительно установим, что

$$\max_i \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu C_i} \right\} = \frac{\lambda_7}{\mu C_7} = 0{,}692.$$

Нагрузочный коэффициент h находится из соотношения:

$$h \cdot \lambda_7 = \mu \cdot C_7,$$

откуда

$$h = \frac{\mu C_7}{\lambda_7} = \frac{2873{,}329}{200 \cdot 9{,}950} = 1{,}444.$$

Окончательно,

$$\gamma^* = h \cdot \gamma = 1{,}444 \cdot 19{,}165 = 27{,}674\ [c^{-1}].$$

Отметим, что рассмотренная двухпараметрическая пороговая модель для оценки среднесетевой задержки, описывает поведение сети в первом приближении. Использованный метод вычисления максимальной (критической) нагрузки на сеть не эквивалентен отысканию максимального потока, который может перенести сеть в действительности. Величина γ^* является несколько заниженной и вот почему.

В реальной сети передачи данных процедура маршрутизации обычно зависит от текущего трафика, т.е. является адаптивной. В результате, если какой-либо отдельный канал достигает точки насыщения, трафик перенаправляется к месту назначения по другим путям в сети.

Тем не менее, оценка γ^* изложенным методом используется на этапе проектирования сети с целью выявления “узких” мест.

2. Порядок выполнения лабораторной работы.

- Подготовить **расчётные выражения** для построения графических зависимостей $T(\rho)$ и $T(\gamma)$, которые должны быть **отражены в отчете**.
- Построить графики зависимостей $T(\rho)$ и $T(\gamma)$для оптимальной стратегии распределения пропускных способностей и для одной из альтернативных стратегий, используя для этих целей разработанную процедуру.
- Выполнить расчет параметров T_0, γ^* пороговой модели нагрузочной кривой – $T(\gamma)$.
- По графику зависимостей $T(\gamma)$, $T(\rho)$ найти значение среднесетевой задержки для рабочего режима сети, определяемого используемыми исходными данными. Сравнить с расчетным значением из табл. 1б.
- По графику зависимости $T(\gamma)$, $T(\rho)$ определить значение T_0. Сопоставить с расчётным значением.
- Подготовить спецификацию переменных, используемых в программных модулях лабораторного практикума, определяющую соответствие имен переменных именам физическим величин. Включить спецификацию в **сводную таблицу** (см. табл. 4).
- Подготовить сводную таблицу исходных данных и результатов выполненного лабораторного практикума, которую представить на отдельной вкладке интерактивной формы в формате табл. 4.
- Подготовить отчёт по выполненной работе, содержащий аналитические выводы по результатам решения оптимизационной задачи ВПС.

Примечание 5. В сводной таблице числовые значения в столбце 4 выводить с точностью до трёх знаков дробной части. Содержимое столбцов 2 и 3 не зависит от варианта выполняемого задания и повторяет (в написании и порядке следования) содержимое соответствующих столбцов табл. 4. Содержимое столбца 1 табл. 4 носит рекомендательный характер и допускает произвольные, синтаксически корректные (с точки зрения используемого программного кода) идентификаторы.

Таблица 4

Переменная в программном модуле	**Физическая величина**	**Обозначе-ние**	**Значение**
1	**2**	3	4
Gamma	**Интенсивность внешнего потока**	γ	19,165
n	**Средняя длина пути**	n	1,3
Lyambda	**Интенсивность внутреннего потока**	λ	25,115
L	**Средняя длина сообщения**	$1/\mu$	200
Ro	**Загрузка сети**	ρ	0,6
C	**Ресурс пропускной способности**	**C**	8371,667
CoptA	**Ресурс пропускной способности для оптимального распределения (после аппроксимации)**	$\mathbf{C^{*}_{opt.}}$	9000,000
CpropA	**Ресурс пропускной способности для пропорционального распределения (после аппроксимации)**	$\mathbf{C^{*}_{проп.}}$	9000,000
De	**Добавочная стоимость**	$\mathbf{D_e}$	3348,667
Topt	**Среднесетевая задержка для оптимального распределения (расчетная)**	$T_{\mathbf{opt}.}$	0,444
ToptA	**Среднесетевая задержка для оптимального распределения (после аппроксимации)**	$T^{*}_{\mathbf{opt}.}$	0,434
Tprop	**Среднесетевая задержка для пропорционального распределения (расчетная)**	$T_{\mathbf{проп.}}$	0,546
TpropA	**Среднесетевая задержка для пропорционального распределения (после аппроксимации)**	$T^{*}_{\mathbf{проп.}}$	0,434
To	**Среднесетевая задержка при бесконечно малой нагрузке**	$\mathbf{T_0}$	0,186
h	**Коэффициент нагрузки**	**h**	1,444
GammaK	**Критическая нагрузка**	γ^*	27,674

3. Контрольные вопросы.

► В чём особенность пороговых моделей нагрузочных графиков сети?

► Почему графики $T = T(\gamma)$ и $T = T(\rho)$ отличаются друг от друга только масштабом изображения?

► Какие зависимости определяют модельные отношения:

$$T(\rho) = \frac{1}{(1-\rho)} \cdot \frac{n}{\mu C}\left[\sum_{i=1}^{M}\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda}}\right]^2; \quad T(\gamma) = \frac{1}{\left(\frac{\mu C}{n} - \gamma\right)} \cdot \left[\sum_{i=1}^{M}\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda}}\right]^2.$$

► Какие параметры определяет пороговая модель зависимости $T = T(\gamma)$?

► Для какой стратегии распределения пропускных способностей характерны следующие модельные отношения:

$$T(\rho) = M \cdot \frac{n}{\mu C} \cdot \frac{1}{(1-\rho)}; \quad T(\gamma) = M \cdot \frac{1}{\frac{\mu C}{n} - \gamma}.$$

► Как определить значение критической нагрузки?

► Укажите условие реализуемости для следующего решения:

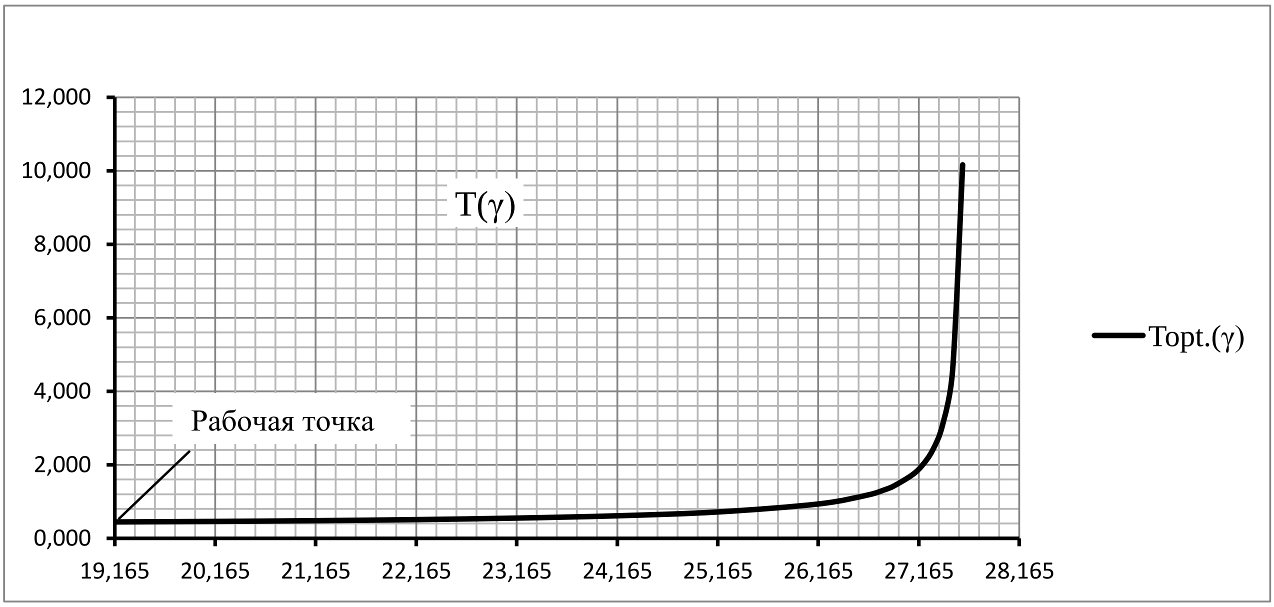
$$T(\rho) = \sum_{i=1}^{M} n \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{\rho M} - \lambda_i\right)}.$$

► Какой физический смысл имеет коэффициент нагрузки?

► Назовите правило распределения связного ресурса сети, для которого выполняется модельное отношение:

$$T(\gamma) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\gamma} \cdot \frac{1}{\left(\mu \frac{C}{M} - \lambda_i\right)}.$$

► Какое состояние сети характеризует графическая зависимость:



ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979.

2. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003.

3. Моделирование систем с использованием теории массового обслуживания: учеб. пособие / под ред. Д.Н. Колесникова. – СПб.: СПб ГПУ, 2003.

4. Олзоева С.И. Моделирование и расчет распределенных информационных систем: учеб. пособие. – Улан-Удэ: ВСГТУ, 2004.