ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Цель работы: экспериментальное исследование статических и астатических систем управления на их математических моделях, реализованных с помощью применения управляющей лабораторной установки СУЛ-3. На этой установке необходимо провести теоретическое и экспериментальное исследование влияния отдельных параметров системы автоматического управления на устойчивость и точность её работы с применением различных критериев качества. В итоге необходимо освоить методику определения оптимальных параметров САУ на основе интегральной оценки качества. Продолжительность работы: 8 часов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Для нормального функционирования САУ прежде всего необходимо обеспечить устойчивость ее движения. Однако устойчивость есть необходимое, но недостаточное условие, которое отвечало бы требованиям, предъявляемым к качеству систем автоматического управления. Задача исследования САУ заключается в определении косвенных или прямых показателей их качества, таких, например, как время переходного процесса t_n, максимальное перерегулирование $\sigma\%$, оценка точности работы системы и др.

На рис. 1 представлена типичная переходная характеристика $h(t)$, по которой можно определить основные показатели качества:

1) установившуюся ошибку

$$e_{уст} = e(\infty) = x_{уст} - y_{уст} = 1 - h(\infty);$$

2) перерегулирование

$$\sigma\% = [(y_{max} - y_{уст})/ y_{уст}\}100\%;$$

3) время переходного процесса t_n – время, в течение которого отклонение выходного сигнала достигает величины, не превосходящей заданного допустимого значения $e_{доп}$.

В более общем случае критерием качества может служить минимум некоторого критерия оптимальности, чаще всего задаваемого в виде интегрального квадратичного функционала от функции ошибки системы.

В лабораторной работе исследуется САУ, структурная схема которой представлена на рис. 2.

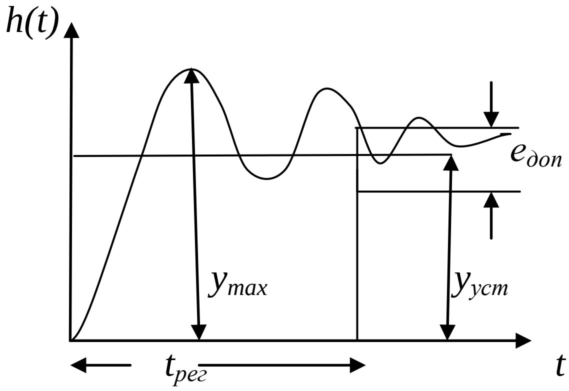

Рис. 1. Переходная характеристика линейной системы

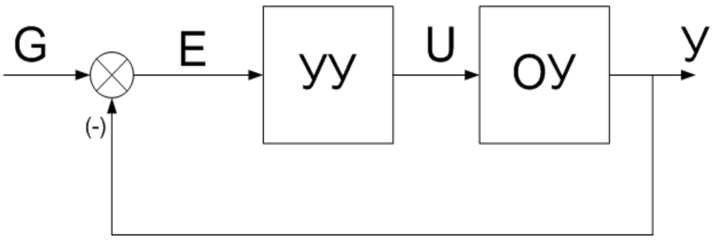

Рис. 2. Структурная схема САУ

Объект управления (ОУ) описывается передаточной функцией вида

$$W_0(s) = K_0/[(T_1s+1)(T_2s+1)].$$

В качестве управляющего устройства (УУ) поочередно используются три типа регуляторов:

♦ пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор, имеющий передаточную функцию и уравнение

$$W_p(s) = U(s)/E(s) = K_П + 1/T_иs;$$

$$U(t) = K_П\, e(t) + 1/T_и\int_0^t e(t)dt;$$

$$e(t) = g(t) – y(t);$$

♦ интегральный (И) регулятор:

$$W_p(s) = U(s)/E(s) = 1/T_иs;$$

$$U(t) = 1/T_и\int_0^t e(t)dt;$$

♦ пропорциональный (П) регулятор:

$$W_p(s) = U(s)/E(s) = Kn;$$

$$U(t) = Kn\ e(t).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При исследовании САУ на основе интегрального критерия важно не только установить, устойчива ли система или нет, но и определить граничные значения параметров управляющего устройства (параметры объекта управления считаются неизменными), при которых сохраняется устойчивость системы, а также наметить пути устранения неустойчивости.

При решении этой задачи для линейных систем используется алгебраический критерий устойчивости Гурвица, представляющий собой формулировку необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять определенные соотношения между коэффициентами характеристического уравнения САУ

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \quad + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Условия устойчивости, вытекающие из критерия Гурвица для системы с характеристическими уравнениями второй и третьей степени, могут быть записаны:

$$\text{для } n = 2 \qquad a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 >; \tag{1}$$

$$\text{для } n = 3 \quad a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0; \tag{2а}$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \tag{2б}$$

Определим условия устойчивости САУ для указанных типов регуляторов при неизменной передаточной функции объекта регулирования. Для этого запишем характеристическое уравнение замкнутой системы с ПИ-регулятором:

$$T_u T_1 T_2 s^3 + T_u(T_1 + T_2)s^2 + T_u(1 + K_n K_0)s + K_0 = 0.$$

Поскольку все параметры САУ положительны, то необходимое условие устойчивости – положительность всех коэффициентов (2а), выполнено для всех типов регуляторов. Если коэффициент передачи выбран заранее (например, из условий технической реализации регулятора), для обеспечения устойчивости системы требуется подобрать, постоянную времени интегратора T_u из условия (2б).

$$T_u > \frac{K_0\, T_1\, T_2}{(T_1+T_2)(1 + K_n K_0)}. \qquad (3)$$

Получим условие устойчивости при использовании И-регулятора. Характеристическое уравнение в этом случае будет:

$$T_u T_1 T_2 s^3 + T_u(T_1 + T_2)s^2 + T_u s + K_0 = 0.$$

Область возможных значений постоянной времени интегратора определяется неравенством:

$$T_u > \frac{K_0\, T_1\, T_2}{T_1+T_2}. \qquad (4)$$

Из сопоставления неравенств (3) и (4) следует, что для системы с ПИ-регулятором данные условия (4) являются менее жесткими, т.е. постоянная времени интегратора может меняться в более широких пределах при сохранении её устойчивости.

При включении П-регулятора характеристическое уравнение системы имеет второй порядок, и согласно критерию Гурвица (1) система устойчива при любых значениях параметров.

Следовательно, с точки зрения устойчивости, система с объектом второго порядка с П-регулятором имеет предпочтение перед системами с И- и ПИ-регуляторами, которые, повышая порядок системы, ограничивают область устойчивости.

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Одним из показателей качества САУ является точность, которая определяется величиной ошибки e(t) при различных режимах работы системы. Однако из-за сложности определения e(t) в любой момент времени точность принято оценивать по величине установившейся ошибки $e_{уст} = \boldsymbol{lim_{t\to\infty}\, e(t)}$.

В зависимости от наличия установившейся ошибки в системе различаются статические и астатические САУ.

<u>Статическими САУ называют такие, в которых при различных постоянных внешних воздействиях на объект управления регулируемая</u>

величина принимает по окончании переходного процесса определённые значения, зависящие от величины этого воздействия.

Астатическими называют такие САУ, в которых при различных постоянных внешних воздействиях на объект управления отклонения регулируемой величины от требуемого значения становятся равными нулю по окончании переходного процесса.

Величину установившейся ошибки можно вычислить, используя теорему о конечном значении преобразования Лапласа, по формуле:

$$e_{уст} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\Phi_e(s),$$

где $E(s)$ – изображение ошибки;

G(s) – изображение входного сигнала, в качестве которого примем ступенчатое входное воздействие $g(t) = A\ 1(t)$

$$G(s) = L\{\ A\ 1(t)\ \} = A/s;$$

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)\ W_o(s)}$$ – передаточная функция ошибки.

Запишем выражения передаточной функции ошибки для различных видов регуляторов:

• для ПИ-регулятора:

$$\Phi_e(s) = \frac{T_u s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{T_u s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_0(K_n T_u s + 1)};$$

• для И-регулятора:

$$\Phi_e(s) = \frac{T_u s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{T_u s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_0};$$

• для П-регулятора:

$$\Phi_e(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_0 K_n}.$$

Вычислим $e_{уст}$ для различных регуляторов.

Для ПИ-регулятора и И-регулятора

$$e_{уст} = \lim_{s\to 0} s(A/s\,.)\Phi_e(s) = 0,$$

то есть система является астатической.

Для П-регулятора:

$$e_{уст} = 1/(1 + K_0K_p),$$

то есть система является статической.

Следовательно, при ступенчатом воздействии система является астатической, если ее передаточная функция содержит хотя бы одно интегрирующее звено. Поэтому, с точки зрения точности, система с И- и ПИ-регуляторами предпочтительнее системы с П-регулятором. С точки зрения устойчивости, более предпочтительны системы с П-регулятором.

Таким образом, требование к САУ по устойчивости и точности противоречивы. Задачей синтеза САУ является выбор таких параметров их математических моделей, которые при выполнении условия устойчивости обеспечивали бы заданную точность системы.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА САУ

Указанная выше задача решается на основе интегральной оценки качества. Интегральная оценка качества относится к аналитическим методам исследования качества системы и даёт общую оценку скорости затухания и отклонения управляемой величины в совокупности, без определения данных этих параметров в отдельности.

Простейшей интегральной квадратичной оценкой качества является оценка вида:

$$I_0 = \int_0^t e^2(t)dt,$$

где $e(t) = g(t) - y(t)$ – ошибка системы;

$g(t)$ – управляющее воздействие;

$y(t)$ – регулируемая величина.

Если $e(t)$ имеет постоянную составляющую в виде установившегося значения $e_{уст}=e(\infty)$, то интеграл I_0 будет расходящимся, поэтому в качестве ошибки берут динамическую ошибку системы $e(t)$, т.е. отклонение регулируемой величины $y(t)$ от её установившегося значения:

$$e_1(t) = y_{уст} - y(t).$$

Интегральная квадратичная оценка может быть определена по изображению ошибки:

$$I_0 = \int_0^{\infty} e_1^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{e-j\omega}^{e+j\omega} E_1(s)E_1(-s)ds\,. \qquad (5)$$

Для практических целей более удобной является формула Релея, которая получается из (5) заменой $s = j\omega$:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} |E_1(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_0(j\omega)|^2 |\mathrm{G}(j\omega)|^2 d\omega\,. \qquad (6)$$

Если подынтегральное выражение представить в виде:

$$|E_1(j\omega)|^2 = |\Phi_0(j\omega)|^2 |\mathrm{G}(j\omega)|^2 = \frac{B(j\omega)}{|A(j\omega)|^2} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)}\ ,$$

где

$$A(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_{\text{n-1}}(j\omega)^n + a_n\,; \qquad (7)$$

$$B(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \ldots + b_{\text{n-2}}(j\omega)^2 + b_{n-1}\,, \qquad (8)$$

то интеграл (6) вычисляется по формуле:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(j\omega)}{|A(j\omega)|^2} d\omega = \frac{(-I)^{n+1}M_n}{2a_0\Delta_n}\,,$$

где $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$ – старший определитель Гурвица;

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ПО МИНИМУМУ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

При заданной структуре САУ задача выбора её параметров сводится к следующему. Необходимо отыскать такие значения изменяющихся параметров, при которых квадратичная интегральная оценка становится минимальной.

В типовой системе автоматического управления, математические модели которых исследуются в лабораторной работе, переменным параметром является постоянная времени интегратора $T_и$. управляющего устройства. Все остальные постоянные времени и коэффициенты передачи считаются постоянными. Следовательно, задача состоит в определении оптимального значения $T_и$, при котором $I_0 = min$. В качестве управляющих устройств рассматриваются И- и ПИ-регуляторы. Запишем изображения ошибки для И- и ПИ-регуляторов соответственно при $T1=T_2$.

Для И-регулятора:

$$E_1(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{1+W_0(s)W_p(s)} = \frac{T_И T_1^2 s^2 + 2T_И T_1 s + T_И}{T_И T_1^2 s^3 + 2T_И T_1 s^2 + T_И s + K_0}.$$

Для ПИ-регулятора:

$$E_1(s) = \frac{T_И T_1^2 s^2 + 2T_И T_1 s + T_И}{T_И T_1^2 s^3 + 2T_И T_1 s^2 + T_И (1+K_П K_0) s + K_0}.$$

Составим выражение для квадратичной интегральной оценки при использовании в системе ПИ-регулятора и определим полиномы A(jω) и B(jω) согласно уравнениям (7) и (8):

$$A(j\omega) = T_И T_1^2 (j\omega)^3 + 2T_И T_1 (j\omega)^2 + T_И (1+K_П K_0)(j\omega) + K_0; \qquad (10)$$

$$B(j\omega) = T_И^2 T_1^4 (j\omega)^4 - 2T_И^2 T_1^2 (j\omega)^2 + T_И^2. \qquad (11)$$

Из выражений (10) и (11) найдем коэффициенты a_i и b_i:

$$a_0 = T_И T_1^2; \quad a_1 = 2T_И T_1; a_2 = T_И (1+K_П K_0)\ a_3 = K_0;$$

$$b_0 = T_И^2 T_1^4; \quad b_1 = -2T_И^2 T_1^2; \quad b_2 = T_И^2.$$

При подстановке данных коэффициентов в (9) получим выражение интегральной квадратичной оценки для ПИ-регулятора:

$$I_0 = \frac{T_И\left[2T_И + (3 + K_П K_0)K_0 T_1\right]}{2K_0\left[2T_И + (1 + K_П K_0) - K_0 T_1\right]}. \tag{12}$$

Выражение для И-регулятора получается из (12) как частный случай подстановкой $K_0 = 0$:

$$I_0 = \frac{T_И\left[2T_И + 3K_0 T_1\right]}{2K_0\left[2T_И - K_0 T_1\right]}. \tag{13}$$

Искомое значение $T_{иопт}$, при котором квадратичная оценка имеет минимум, найдём дифференцируя (12) и (13) по $T_и$ и, приравнивая производную нулю, окончательно имеем:

- для ПИ-регулятора:

$$T_{Иопт} = \frac{(3 + K_П K_0)K_0 T_1}{2K_0\left[1 + K_П K_0\right]}; \tag{14}$$

- для И-регулятора:

$$T_{Иопт} = 1{,}5 K_0 T_1. \tag{15}$$

При схемотехнической и программной реализации рассмотренных регуляторов удобно пользоваться коэффициентом передачи интегрирующего блока, который является обратной величиной по отношению к $T_и$.

В управляющей системе СУЛ-3 суммарный коэффициент передачи интегрирующего блока определяется двумя параметрами $K_и$ и $C_и$:

$$K_{И\Sigma} = K_И C_И = T_И^{-1}.$$

Исходя из выражений (14) и (15), получим значение оптимального коэффициента передачи интегрирующего блока.

При использовании ПИ-регулятора он равен:

$$K_{И\sum} = \frac{2(1 + 3K_{П\Sigma} K_{0\Sigma})}{K_{П\Sigma} T_{01}\left[3 + 3K_{П\Sigma} K_{0\Sigma}\right]}.$$

Для И-регулятора оптимальный коэффициент передачи интегрирующего блока равен:

$$K_{И\sum} = \frac{0{,}67}{K_{0\Sigma} T_{01}}.$$

ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАДАНИЕ

1. Собрать схему моделирования линейной САУ (рис. 3), задав параметры в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Тип регулятора	Параметр САУ				
	$К_{ПΣ}$	$К_{ИΣ}$	$К_{ОΣ}$	$Т_{01}$	$Т_{02}$
П	0,05 - 1	0	10	1с	1с
И	1	0,05-10$с^{-1}$	1	1с	1с
ПИ	1	0,05-10$с^{-1}$	1	1с	1с

2. Рассчитать область возможных значений суммарного коэффициента передачи интегрирующего блока $К_И$, при которых выполняется условие устойчивости САУ. Расчет выполнить отдельно для И- и ПИ-регуляторов с учетом приведенных в таблице параметров.

3. Для САУ с П-регулятором рассчитать установившуюся ошибку $e_{уст}$. Построить график зависимости $e_{уст} = f(К_{ПΣ}\}$, где $К_{ПΣ}= С_п К_п$.

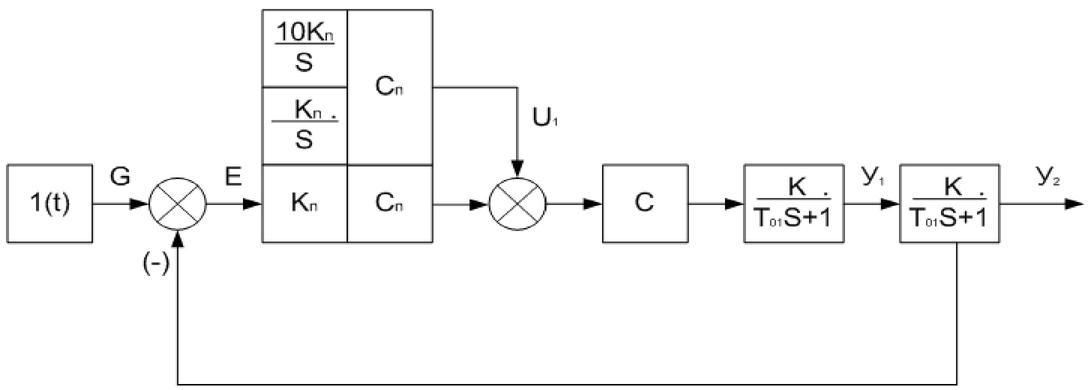

Рис. 3. Схема моделирования

4. Снять экспериментально зависимость $e_{уст} = f(К_{ПΣ})$ для САУ с П-регулятором. Сравнить результаты эксперимента с расчетными данными. Пронаблюдать величину установившейся ошибки при использовании И- и ПИ-регуляторов.

5. Проверить экспериментально выполнение условий устойчивости для И- и ПИ-регуляторов.

6. Рассчитать оптимальные значения суммарного коэффициента передачи интегрирующего блока $К_{И\Sigma}$ для И- и ПИ-регуляторов. Проверить выполнение условий устойчивости при $K_{И\Sigma} = K_{И\Sigma опт}$.

7. Определить экспериментально зависимость интегральной оценки от суммарного коэффициента передачи $К_{И\Sigma}$ и представить полученные результаты в виде графика $I_0 = f(K_{И\Sigma} / K_{И\Sigma опт})$.

8. Для САУ с И и ПИ -регуляторами экспериментально исследовать переходный процесс и определить величину перерегулирования и время переходного процесса при следующих значениях суммарного коэффициента передачи интегрирующего блока:

$$K_{И\Sigma} = 0{,}2\, K_{И\Sigma опт},\ K_{И\Sigma} = K_{И\Sigma опт},\ K_{И\Sigma} = 2K_{И\Sigma опт}.$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. При задании суммарных коэффициентов передачи

$$K_{П\Sigma} = C_n K_n.,\ K_{И\Sigma} = C_u K_u$$

следует учитывать, что постоянные коэффициенты имеют значения

$$K_n = 1, K_u = 1\, c^{-1}.$$

Коэффициенты передачи потенциометров C_n и C_u могут задаваться в пределах от 0,05-1.

2. Интегрирующий блок имеет два диапазона: $К_и$ и $10К_и$**,** то есть позволяет получить постоянные коэффициенты передачи $1\,c^{-1}$ и $10\,c^{-1}$.

3. При подготовке схемы моделирования следует отключить ненужные блоки путем установки потенциометров C_N, Cg в положение нулевого значения коэффициента передачи. Тумблеры в цепях обратной связи объекта управления и выходного сигнала управляющего устройства следует поставить в нижнее положение, т.е. отключить.

4. Для всех экспериментов следует выбрать задающее воздействие $g(t)=0{,}5\times 1(t)$. Величину задающего воздействия следует отрегулировать задающим потенциометром после подачи команды «ПУСК».

5. При определении времени переходного процесса переключатель секундомера следует установить в положение «*от е*».

6. При определении квадратичной оценки могут использоваться два диапазона (*J или 10J*) вычислителя оценки. При выборе диапазона следует руководствоваться удобством отсчета значений при отсутствии зашкаливания измерительного прибора.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1 Структурная схема исследуемой системы автоматического управления.

2. Расчеты условий устойчивости, установившейся ошибки и интегральной оценки.

3. Графики:

- теоретическая и экспериментальная зависимости $e_{уст} = f(K_{П\Sigma})$;
- экспериментальная зависимость $I_0 = f(K_{И\Sigma} / K_{И\Sigma опт})$;
- переходные процессы по пункту 8 лабораторного задания.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение статической и астатической системы.
2. Определите связь установившейся ошибки с передаточной функцией системы и выходным сигналом.
3. Определите влияние параметров П-, ПИ- и И-регуляторов на переходной процесс системы.
4. Сформулируйте оценки качества переходного процесса.
5. Проанализируйте результаты эксперимента. Объясните причину возникновения экстремума оценки.
6. Объясните влияние типа регулятора на устойчивость и ошибки системы.
7. Определите регуляторы, которые делают систему астатической.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов В.В.. Теория автоматического управления. – М.: МИИ ГА, 1996. – Ч. I.
2. Солодовников В.В., Плотников ВН., Яковлев А.П. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1985.
3. Теория автоматического управления: учеб. пособие / под ред. акад. А.А. Воронова. – М: Высшая школа, 1986. – Ч. I, – Ч. II.
4. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование // Теория и элементы систем. – М.: Машиностроение, 1978.
5. Задачник по теории автоматического управления / под ред. А.С. Шаталого. – М.: Энергия, 1977.

Редактор Е.В. Гаранина

Подписано в печать 28.02.13 г.

Печать офсетная	Формат 60х84/16	0,82 уч.-изд. л.
0,93 усл.печ.л.	Заказ № 1567/	Тираж 120 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а