

## Содержание

Введение.....	4
1. Основные сведения из теории упругости.....	5
1.1. Теория напряжений.....	5
1.2. Теория деформаций.....	9
1.3. Физические соотношения между напряжениями и деформациями.....	10
1.4. Классические методы решения задач теории упругости.....	11
1.4.1. Решение задач теории упругости в перемещениях.....	11
1.4.2. Решение задач теории упругости в напряжениях.....	12
1.5. Потенциальная энергия деформации.....	13
1.6. Вариационные методы решения задач теории упругости.....	14
1.6.1. Вариационный метод решения задач в перемещениях.....	15
1.6.2. Вариационный метод решения задач в напряжениях.....	17
1.7. Прикладные методы решения задач теории упругости.....	21
1.7.1. Метод Ритца–Тимошенко.....	21
1.7.2. Метод Бубнова–Галеркина.....	22
1.7.3. Метод конечных разностей.....	23
2. Расчет стержневых систем.....	26
2.1. Кинематический анализ стержневых систем.....	27
2.2. Расчет статически определимых ферм.....	29
2.3. Расчет статически неопределимых ферм.....	32
2.4. Матричный метод расчета стержневых систем.....	35
3. Расчет пластин.....	41
3.1. Уравнения теории тонких пластин.....	41
3.2. Плоское напряженное состояние пластин.....	47
3.2.1. Общие соотношения.....	47
3.2.2. Однородное плоское напряженное состояние.....	49
3.2.3. Концентрация напряжений в пластине с круглым отверстием.....	50
3.3. Изгиб пластин.....	56
3.3.1. Общие соотношения и граничные условия.....	56
3.3.2. Методы расчета пластин на изгиб.....	61
Вопросы для самопроверки.....	68
Литература.....	70

## Введение

Дисциплина «Динамика и прочность авиационных конструкций» посвящена изучению теоретических основ анализа прочности, жесткости, статической устойчивости и динамического поведения авиационных конструкций. Все эти задачи решаются наукой, которая называется **с т р о и т е л ь н о й м е х а н и к о й**. Главными объектами изучения строительной механики являются типовые элементы конструкций машин и сооружений – стержневые системы, пластины и оболочки. Строительная механика летательных аппаратов сосредоточена в основном на анализе тонкостенных конструкций, которые характерны для данного типа техники.

Дисциплина «Динамика и прочность авиационных конструкций» базируется на знаниях, полученных при изучении физики, высшей математики, теоретической механики, сопротивления материалов и является теоретической основой для таких дисциплин, как «Конструкция и прочность самолета», «Конструкция и прочность вертолета», «Конструкция и прочность двигателей» и др., предусмотренных учебным планом подготовки студентов по направлению 162300 – Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей.

Часть I настоящего учебного пособия посвящена изложению основных сведений из теории упругости, расчету стержневых систем, пластин и оболочек.

## 1. Основные сведения из теории упругости

Задачей теории упругости является определение напряженно-деформированного состояния упругого тела, т.е. определение полей напряжений и деформаций в упругом теле, возникающих под действием внешних сил.

В теории упругости предполагается, что исследуемое тело обладает свойствами сплошности, однородности, изотропности и упругости. Свойство сплошности состоит в том, что тело, непрерывное до деформации, остается непрерывным и после приложения нагрузки. Однородность тела говорит о том, что во всех точках тела под действием одинаковых сил возникают одинаковые деформации. Изотропность предполагает, что упругие свойства одинаковы по любому направлению, проведенному из данной точки тела. Упругостью называется свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после снятия внешней нагрузки.

### 1.1. Теория напряжений

Рассмотрим некое упругое тело, представленное на рис. 1.1. Выберем систему координат, связанную с этим телом:  $Oxyz$ .

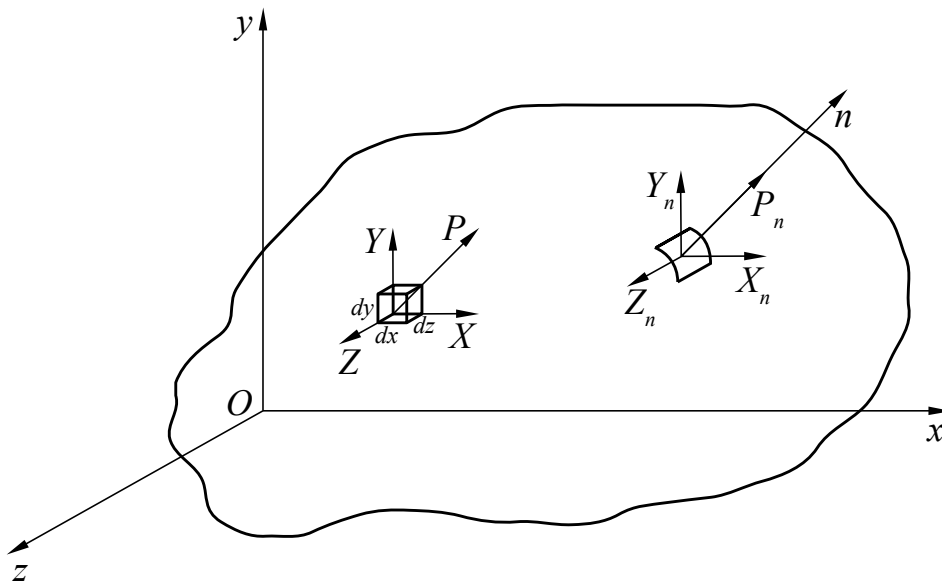


Рис. 1.1. Система координат упругого тела

Через произвольно выбранную точку на поверхности тела проведем нормаль  $n$  к этой поверхности. Вдоль этой нормали приложим к телу поверхностную (т.е. распределенную по поверхности) силу  $P_n$ , например, аэродинамическую. Ее проекции на оси координат будут равны:  $X_n$ ,  $Y_n$ ,  $Z_n$ .

В общем случае на тело может также действовать объемная (т.е. распределенная по объему) сила  $P$ , а ее проекции на оси выбранной системы координат будут равны:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . К объемным силам относятся массовые силы, т.е.

силы, связанные с массой и соответственно пропорциональные массе, например, вес и силы инерции.

Под воздействием указанных сил в теле возникнут напряжения. Под напряжением понимается внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади. Составляющая напряжения, действующая по нормали к грани выделенного элементарного объема, называется нормальным напряжением и обозначается  $\sigma$ . Составляющая напряжения, действующая в плоскости грани, называется касательным напряжением и обозначается  $\tau$ .

Выделим внутри тела элементарный (т.е. бесконечно малый) объем  $dV = dxdydz$  и рассмотрим условия его равновесия (рис. 1.2).

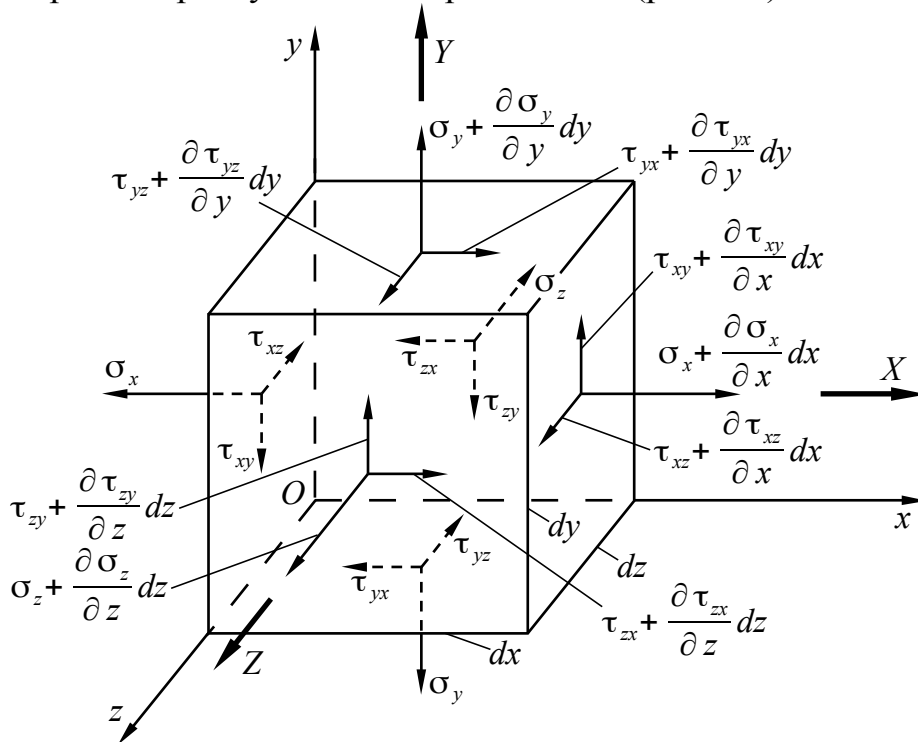


Рис. 1.2. Напряженное состояние элементарного объема

Рассмотрим равновесие сил. Для этого сначала составим уравнение проекций сил на ось  $Ox$ :

$$X dxdydz - \sigma_x dydz + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = 0. \quad (1.1)$$

После приведения подобных членов в этом уравнении и деления его на элементарный объем  $dxdydz$  получим:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0. \quad (1.2)$$

Проделав то же самое с проекциями сил на оси  $Oy$  и  $Oz$ , получим следующую систему дифференциальных уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Теперь рассмотрим равновесие моментов. Составим уравнение равновесия моментов относительно оси  $Oz$ :

$$\begin{aligned} & -Xdxdydz \frac{dy}{2} + Ydxdydz \frac{dx}{2} + \sigma_x dydz \frac{dy}{2} - \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dy}{2} - \\ & -\sigma_y dxdz \frac{dx}{2} + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dxdz \frac{dx}{2} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdzdy + \\ & + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydzdx + \tau_{zx} dxdy \frac{dy}{2} - \tau_{zy} dxdy \frac{dx}{2} + \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dxdy \frac{dx}{2} - \\ & - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

После приведения подобных членов, деления на элементарный объем, а также с учетом уравнений (1.3), получим:

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} = 0. \quad (1.5)$$

Последние два члена можно рассматривать как величины высокого порядка малости (чрезвычайно малые величины), что позволяет ими пренебречь. Тогда:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (1.6)$$

Для всех трех осей получим:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.7)$$

Полученная система уравнений (1.7) описывает закон парности касательных напряжений, в силу которого порядок индексов у касательных напряжений является безразличным.

Таким образом, напряженное состояние в произвольной точке тела с учетом закона парности касательных напряжений полностью определяется шестью компонентами напряжений:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ . Но система уравнений (1.3) включает только три уравнения. Следовательно, задача теории упругости является статически неопределимой.

Напомним, что статически неопределимыми называются такие задачи, когда число неизвестных сил или компонентов напряжений превышает число уравнений равновесия.

Рассмотрим условия равновесия на поверхности упругого тела. Для этого у его поверхности выделим элементарный тетраэдр, совместив его косую грань  $ABC$  с элементом поверхности тела (рис. 1.3).

Обозначим направляющие косинусы нормали  $n$  к этой поверхности:  $\cos(\widehat{x, n})=k$ ,  $\cos(\widehat{y, n})=l$ ,  $\cos(\widehat{z, n})=m$ . Площадь поверхности грани  $ABC$  обозначим  $dS$  и выразим через нее площади трех боковых граней:

$$F_{BOC}=k dS; F_{AOC}=l dS; F_{AOB}=m dS. \quad (1.8)$$

Рассмотрим равновесие выделенного тетраэдра. Найдем проекции сил на ось  $Ox$ :

$$X_n dS - \sigma_x k dS - \tau_{yx} l dS - \tau_{zx} m dS = 0. \quad (1.9)$$

Найдем проекции на другие две оси  $Oy$  и  $Oz$ , поделим полученные уравнения на  $dS$  и учтем закон парности касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sigma_x k + \tau_{xy} l + \tau_{xz} m; \\ Y_n &= \tau_{yx} k + \sigma_y l + \tau_{yz} m; \\ Z_n &= \tau_{zx} k + \tau_{zy} l + \sigma_z m. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

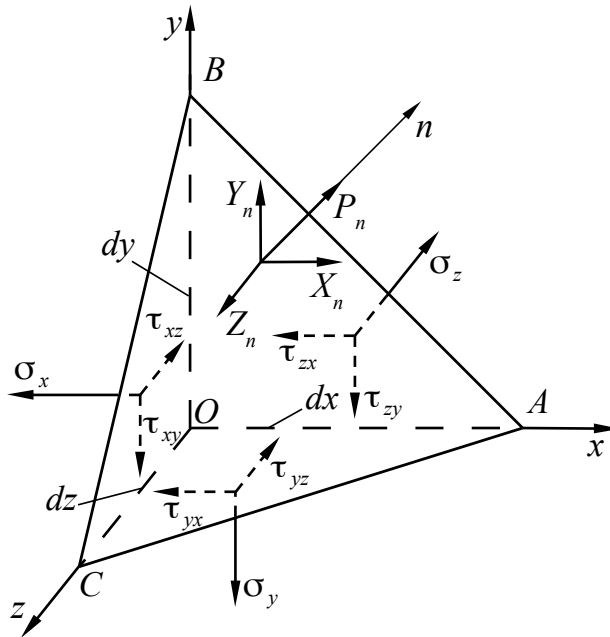


Рис. 1.3. Напряженное состояние элементарного тетраэдра

Полученная система уравнений (1.10) описывает граничные условия на поверхности. Эти граничные условия называются статическими граничными условиями.

Системы уравнений (1.3) и (1.10) описывают состояние равновесия элементов внутри и на поверхности тела. Следовательно, если компоненты напряжений удовлетворяют этим условиям, то все тело находится в равновесии. Однако данные уравнения не снимают статической неопределенности.

## 1.2. Теория деформаций

Рассмотрим элементарный объем (параллелепипед) упругого тела, вырезанный около точки  $A$ , который деформируется из-за различий перемещений его точек. При этом будут меняться длины ребер параллелепипеда и углы между ними. Составляющие вектора полного перемещения по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  обозначаются соответственно  $u$ ,  $v$  и  $w$ .

Рассмотрим два ребра  $AB$  и  $AC$  (рис. 1.4).

Длина проекции ребра  $AB$  на ось  $Ox$  после деформации будет равна:

$$A^*B^{**} = dx + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (1.11)$$

Проекция абсолютного удлинения ребра  $AB$  равна:

$$\Delta AB = A^*B^{**} - AB = \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (1.12)$$

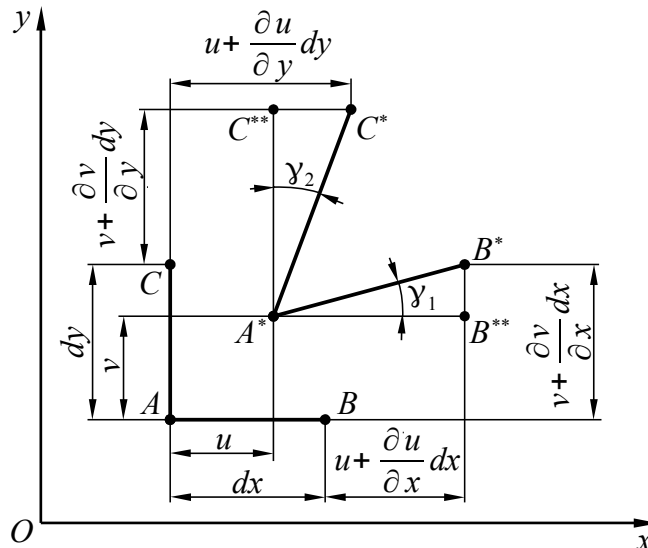


Рис. 1.4. Перемещения точек элементарного объема при деформации

Относительное удлинение ребра  $AB$  вдоль оси  $Ox$  равно:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Аналогичные действия можно проделать и для других ребер. В результате получим, что в проекциях на координатные оси компоненты линейной деформации определяются соотношениями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.14)$$

Теперь определим компоненты угловой деформации. Для этого найдем величину угла  $\gamma_1$  между отрезками  $A^*B^{**}$  и  $B^*B^{**}$  на рис. 1.4.

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{B^* B^{**}}{A^* B^{**}} = \frac{\left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx}, \quad (1.15a)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{(1 + \varepsilon_x)}. \quad (1.15b)$$

В теории упругости принимается, что деформации тел малы, т.е., например, относительные линейные деформации много меньше единицы ( $\varepsilon_x \ll 1$ ). Угловые деформации также невелики ( $\operatorname{tg} \gamma_1 \approx \gamma_1$ ). Учитывая это, получим:

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}. \text{ Аналогично: } \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Угловая деформация – это искажение прямого угла. Поэтому в данном случае угловая деформация будет равна:  $\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2$ . Отсюда компоненты угловой деформации будут определяться соотношениями:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (1.16)$$

Зависимости (1.14) и (1.16) называются формулами Коши. Они связывают шесть компонентов вектора деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  и три компонента вектора перемещений  $u, v, w$ . Однако компоненты вектора деформаций не являются независимыми друг от друга переменными и должны быть связаны между собой некоторыми соотношениями. Эти соотношения были получены Сен-Венаном и называются уравнениями совместности деформаций. Они выводятся из уравнений Коши путем исключения перемещений  $u, v, w$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

### 1.3. Физические соотношения между напряжениями и деформациями

Рассмотренные выше теории напряжений и деформаций в отдельности не решают задачу теории упругости, т.к. между ними отсутствует связь. В каче-



стве такой связи используются уравнения обобщенного закона Гука (здесь и далее температурное воздействие не учитывается):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где  $E$  – модуль упругости первого рода (модуль Юнга);

$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль упругости второго рода (модуль сдвига);

$\mu$  – коэффициент Пуассона.

#### 1.4. Классические методы решения задач теории упругости

Выше были получены уравнения равновесия сил (1.3), уравнения Коши (1.14) и (1.16), а также уравнения связи напряжений и деформаций, т.е. уравнения обобщенного закона Гука (1.18). Итого получено 15 уравнений, в которые входят 15 неизвестных ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, u, v, w$ ). Таким образом, задача теории упругости может быть решена путем интегрирования этих уравнений при удовлетворении граничным условиям. Для этого могут быть использованы статические граничные условия (1.10) или геометрические граничные условия, которые формулируются через перемещения.

Существует два основных метода решения задач теории упругости: в перемещениях и в напряжениях.

##### 1.4.1. Решение задач теории упругости в перемещениях

При решении задачи этим методом в качестве неизвестных принимаются компоненты вектора перемещений:  $u, v, w$ . С помощью уравнений обобщенного закона Гука (1.18) напряжения выражаются через деформации, которые в свою очередь выражаются через перемещения с помощью уравнений Коши (1.14) и (1.16). Полученные зависимости напряжений от перемещений подставляются в уравнения равновесия (1.3). В результате получаются три уравнения равновесия в перемещениях, которые называются уравнениями Ламе:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

где  $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$  – коэффициент Ламе;

$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  – относительная объемная деформация;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор дифференцирования.

Решения этих уравнений должны удовлетворять граничным условиям. Это могут быть геометрические граничные условия, которые накладываются непосредственно на перемещения, или статические граничные условия (1.10), которые по аналогии с уравнениями равновесия (1.3) записываются через перемещения с помощью уравнений Коши (1.14) и (1.16), а также с помощью уравнений закона Гука (1.18).

Далее по найденным из (1.19) перемещениям можно с помощью уравнений Коши (1.14) и (1.16) определить деформации, а затем и напряжения с использованием закона Гука (1.18). Таким образом, задача теории упругости оказывается полностью решена.

#### 1.4.2. Решение задач теории упругости в напряжениях

В данном случае в качестве неизвестных принимаются компоненты вектора напряжений:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ . Уравнения совместности деформаций Сен-Венана (1.17) выражаются с помощью закона Гука (1.18) через напряжения. В результате преобразования с помощью уравнений равновесия сил (1.3) они приводятся к следующему виду (при условии, что объемные силы отсутствуют):

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} &= 0; & (1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} &= 0; \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} &= 0; & (1+\mu)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial z} &= 0; \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} &= 0; & (1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

где  $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  – объемное напряжение.

Полученные зависимости называются уравнениями Бельтрами – М и т ч е л а . Таким образом, при решении задачи в напряжениях необходимо интегрировать девять уравнений: три уравнения равновесия сил (1.3) и шесть полученных уравнений совместности деформаций (1.20). Далее по полученным напряжениям с помощью закона Гука (1.18) определяются деформации, а затем из уравнений Коши (1.14) и (1.16) находятся перемещения. Полученное решение должно удовлетворять граничным условиям (геометрическим или статическим).

### 1.5. Потенциальная энергия деформации

Пусть на упругое тело действуют внешние силы. Под действием этих сил тело будет деформироваться. При этом внешние силы будут совершать работу  $A$ . Если затем убрать внешние силы, то тело вернется в исходное состояние. Таким образом, при деформации упругое тело накапливает энергию, которая численно равна работе внешних сил. Эта энергия называется потенциальной энергией деформации  $U$ .

Найдем потенциальную энергию деформации в элементарном объеме в случае линейного напряженного состояния. Пусть на грани  $dydz$  действует нормальное напряжение  $\sigma_x$  (рис. 1.5).

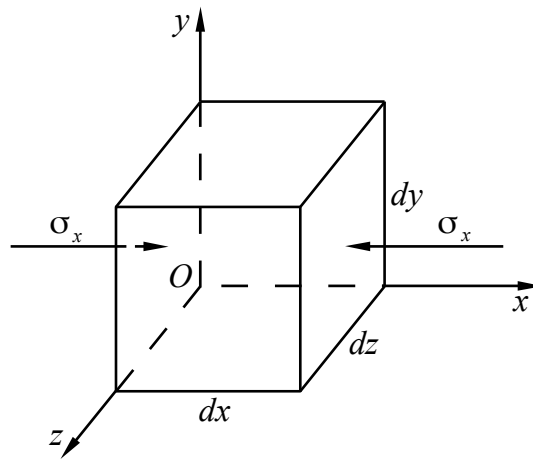


Рис. 1.5. К определению потенциальной энергии деформации элементарного объема

От действия силы  $\sigma_x dydz$  возникает деформация вдоль оси  $Ox$ . Абсолютная величина этой деформации равна  $\varepsilon_x dx$ . При этом совершится работа:

$$dA = \frac{1}{2} \varepsilon_x dx \sigma_x dydz. \quad (1.21)$$

В данную формулу входит коэффициент  $\frac{1}{2}$ , т.к. в соответствии с законом Гука при упругой деформации напряжения  $\sigma_x$  изменяются по линейному закону, а работа соответственно численно равна площади под прямой (рис. 1.6).

Поскольку работа внешних сил численно равна потенциальной энергии деформации, т.е.  $dA = dU$ , то можно записать:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz. \quad (1.22)$$

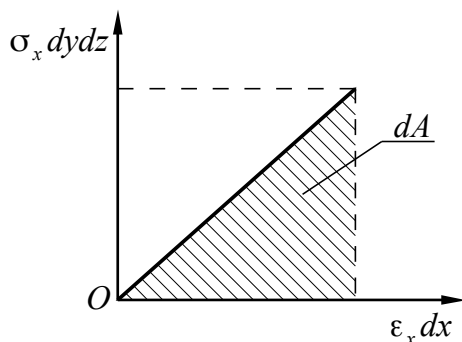


Рис. 1.6. К определению работы внешних сил

Если теперь перейти от линейного напряженного состояния к объемному и предположить, что на элементарный объем действуют все шесть компонентов напряжений ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ), то потенциальная энергия деформации элементарного объема будет равна:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz. \quad (1.23)$$

Отсюда потенциальная энергия деформации тела, имеющего конечный объем, будет равна:

$$U = \iiint \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz. \quad (1.24)$$

Если ввести понятие удельной потенциальной энергии деформации  $W$ , как энергии, отнесенной к единице объема и равной:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}), \quad (1.25)$$

то формулу (1.21) можно переписать короче:

$$U = \iiint W dx dy dz. \quad (1.26)$$

## 1.6. Вариационные методы решения задач теории упругости

Задачи теории упругости могут быть решены с помощью энергетических методов, которые позволяют избежать математических затруднений, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений. Данные методы опираются на раздел высшей математики, который называется **вариационным исчислением**, поэтому их называют вариационными методами.

В вариационном исчислении используется понятие **функционала** – переменной величины, зависящей от некоторого множества функций. Можно сказать, что функционал – это функция от функций. Чаще всего вариационное исчисление используется для отыскания функции, на которой данный функционал достигает экстремального (наибольшего или наименьшего) значения.

### 1.6.1. Вариационный метод решения задач в перемещениях

В вариационных методах теории упругости используются понятия возможного перемещения и возможной работы. Возможное (виртуальное) перемещение точки, принадлежащей некоторой механической системе, – это такое элементарное (бесконечно малое) перемещение, которое точка может совершать из занимаемого в данный момент времени положения, не нарушая наложенных на нее связей. Возможных перемещений точки может быть бесконечно много, а в действительности реализуется какое-то одно. Действительным перемещением точки называют такое элементарное перемещение, которое она фактически совершает за некоторый бесконечно малый промежуток времени при данных связях.

Действительное элементарное перемещение обозначается с помощью знака дифференциала  $d$ , например,  $dr$ . Возможное перемещение, чтобы отличать его от действительного, обозначается с помощью знака вариации  $\delta$ , например,  $\delta r$ . Для оператора  $\delta$  в вариационном исчислении приняты такие же математические правила, как и для оператора  $d$  в дифференциальном исчислении. По аналогии с оператором  $d$ , называемым первым дифференциалом, оператор  $\delta$  называется первой вариацией. Соответственно  $d^2$  – второй дифференциал, а  $\delta^2$  – вторая вариация и т.д.

Возможная (виртуальная) работа – это элементарная работа силы  $P$ , приложенной к точке, на возможном перемещении  $\delta r$ :

$$\delta \mathcal{E} = P \delta r \cos \alpha = P_r \delta r, \quad (1.27)$$

где  $\alpha$  – угол между силой  $P$  и возможным перемещением  $\delta r$ ;

$P_r$  – проекция силы  $P$  на направление возможного перемещения  $\delta r$ .

Существует принцип возможных перемещений, который гласит: для равновесия материальной точки, находящейся под действием активных сил и подчиненной идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил равнялась нулю на любом возможном перемещении точки:

$$\sum_i \delta \mathcal{E}_i = \sum_i P_{ri} \delta r = 0. \quad (1.28)$$

Данное выражение справедливо, в частности, при условии, что сумма проекций активных сил на любое направление равна нулю:

$$\sum_i P_{ri} = 0. \quad (1.29)$$

### Полная энергия упругой системы

Упругое тело можно рассматривать как систему материальных точек. Если упругое тело находится в покое под действием поверхностных и объем-

ных сил, то это значит, что на каждую его точку действуют уравновешенные силы. Если произошло возможное перемещение каждой из точек тела, то для выполнения условия равновесия тела общая возможная работа, произведенная всеми силами, должна быть равна нулю.

Выражение для потенциальной энергии деформации  $U$ , соответствующей работе внутренних сил, было получено выше. Найдем теперь выражение для работы внешних сил  $A$ , т.е. объемных и поверхностных сил.

При возможных перемещениях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  суммарная работа объемных и поверхностных сил равна:

$$\delta A = \iiint (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz + \iint (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) dS. \quad (1.30)$$

Когда система получает возможное перемещение, внешние силы считаются постоянными, поэтому оператор  $\delta$  можно вынести за знаки интегралов:

$$\delta A = \delta \left[ \iiint (X u + Y v + Z w) dx dy dz + \iint (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS \right]. \quad (1.31)$$

Тогда выражение для работы внешних сил будет иметь вид:

$$A = \iiint (X u + Y v + Z w) dx dy dz + \iint (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS. \quad (1.32)$$

Выше было отмечено, что работа всех активных сил  $\delta \mathcal{E}$ , произведенная на возможном перемещении, обращается в нуль. Поэтому:

$$\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta A = \delta(U - A) = 0. \quad (1.33)$$

Откуда:

$$\mathcal{E} = U - A. \quad (1.34)$$

Величина  $\mathcal{E}$  называется полной энергией упругой системы.

### Вариационный принцип Лагранжа

Вариационный принцип Лагранжа может быть сформулирован следующим образом: в упругой системе, находящейся под действием внешних сил, из всех кинематически возможных сочетаний перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в действительности реализуются лишь те, которые сообщают минимум полной энергии системы.

Под кинематически возможными здесь понимаются перемещения, которые удовлетворяют геометрическим граничным условиям на поверхности тела и связаны с относительными деформациями соотношениями Коши.

Таким образом, полная энергия упругого тела, в котором имеет место быть действительное поле перемещений, должна быть минимальной. Поскольку полная энергия  $\mathcal{E}$  выражается через интегралы (1.24) и (1.32), она является

функционалом. Согласно вариационному исчислению реализация принципа Лагранжа сводится, таким образом, к задаче минимизации функционала.

Если уравнения закона Гука (1.18) выразить в форме, разрешенной относительно напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\varepsilon; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\varepsilon; & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

а затем полученные выражения подставить в формулу для потенциальной энергии деформации (1.24), функции деформации выразить через перемещения с помощью соотношений Коши (1.14) и (1.16), а работу внешних сил взять в виде (1.32), то полную энергию упругой системы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \iiint \left\{ G \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{G}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz - \\ & - \iiint (X u + Y v + Z w) dx dy dz - \iint (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Минимизируя данный функционал, можно получить три уравнения относительно функций перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и граничные условия, совпадающие со статическими граничными условиями (1.10), которые записываются через перемещения. Таким образом, вариационный принцип Лагранжа является аналогом метода решения задачи теории упругости в перемещениях.

### 1.6.2. Вариационный метод решения задач в напряжениях

Для решения задач теории упругости вариационными методами можно рассматривать не вариации перемещений, а вариации напряжений. При этом необходимо помнить, что в этом случае требуется удовлетворение не только уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности тела, но и уравнениям совместности деформаций.

#### Дополнительная потенциальная энергия деформации

Введем понятие дополнительной потенциальной энергии деформации. По аналогии с (1.26) выражение для ее определения запишем в виде:

$$\bar{U} = \iiint \bar{W} dx dy dz. \quad (1.37)$$

Вариацию удельной дополнительной потенциальной энергии деформации свяжем с вариациями напряжений, основываясь на выражении (1.25):

$$\delta \bar{W} = \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz}. \quad (1.38)$$

Используя формулы закона Гука (1.18) и интегрируя, получим:

$$\bar{W} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \quad (1.39)$$

Чтобы показать соотношение удельной потенциальной энергией  $W$  с удельной дополнительной потенциальной энергией  $\bar{W}$ , рассмотрим одноосное растяжение стержня вдоль оси  $x$ . В этом случае все компоненты напряжений, кроме  $\sigma_x$ , обращаются в нуль. Поэтому для удельной потенциальной энергии имеем:

$$\delta W = \sigma_x \delta \varepsilon_x, \quad (1.40)$$

а для удельной дополнительной потенциальной энергии имеем:

$$\delta \bar{W} = \varepsilon_x \delta \sigma_x. \quad (1.41)$$

Учитывая соотношение закона Гука для рассматриваемого случая  $\sigma_x = E \varepsilon_x$ , получим:

$$W = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \delta \varepsilon_x = E \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x \delta \varepsilon_x = \frac{E \varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}, \quad (1.42)$$

$$\bar{W} = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x \delta \sigma_x = \frac{1}{E} \int_0^{\sigma_x} \sigma_x \delta \sigma_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}. \quad (1.43)$$

Таким образом, для линейно-упругого тела  $W = \bar{W}$ .

Из геометрического смысла интеграла (площадь под кривой) следует, что интегралы (1.42) и (1.43) представляют собой площади треугольников, показанных на рис. 1.7а. Для нелинейно-упругого тела  $W \neq \bar{W}$  (рис. 1.7б).

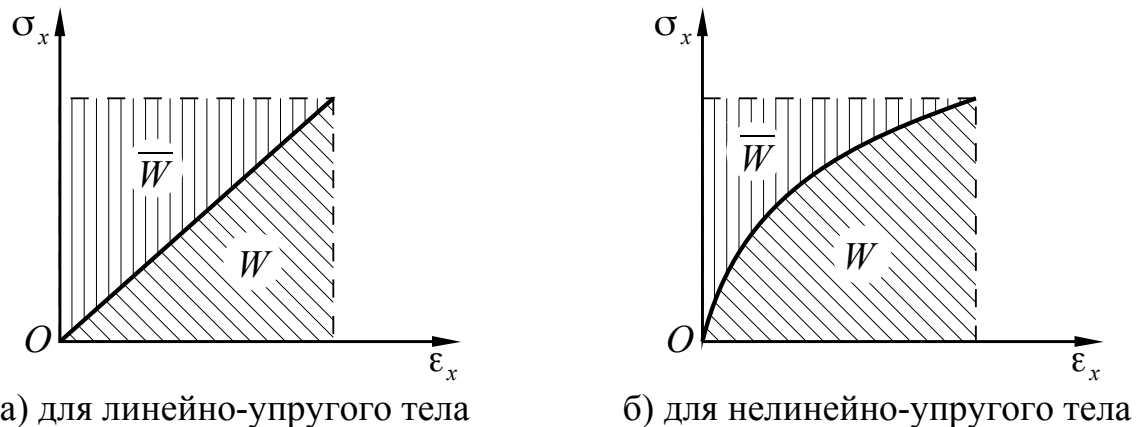


Рис. 1.7. Соотношение удельной потенциальной энергии и удельной дополнительной потенциальной энергии деформации при одноосном растяжении



### Вариационный принцип Кастильяно

Запишем по аналогии с (1.34) выражение для полной дополнительной энергии упругой системы:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{U} - A. \quad (1.44)$$

Вариационный принцип Кастильяно является законом, позволяющим строить решение задачи в напряжениях. Он может быть сформулирован следующим образом: из всех статически возможных систем напряжений в действительности в упругой системе возникают лишь те, которые сообщают стационарное (в данном случае минимальное) значение полной дополнительной энергии.

Напомним, что у функций могут быть точки, которые называются стационарными (особыми, критическими). Это точки, в которых дифференциал функции обращается в нуль, что является необходимым (но не достаточным) условием экстремума (минимума или максимума). Значение функции в данной точке называют стационарным (или критическим).

Функционалы по аналогии с функциями тоже могут иметь стационарные значения, которые им сообщают их аргументы-функции.

Поскольку полная дополнительная энергия есть функционал, то условием его стационарности является обращение в нуль первой вариации:

$$\delta \bar{\mathcal{E}} = 0. \quad (1.45)$$

Статически возможными называются системы напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия (1.3) и граничным условиям на поверхности (1.10). Для решения задачи в напряжениях необходимо также удовлетворить уравнениям совместности деформаций (1.17).

Из выражений (1.44) и (1.45) вытекает:

$$\delta \bar{\mathcal{E}} = \delta \bar{U} - \delta A = 0. \quad (1.46)$$

Раскроем вариацию дополнительной потенциальной энергии деформации с учетом (1.37) и (1.38), а вариацию работы внешних сил запишем по аналогии с (1.30) через вариации этих сил. Учтем при этом, что объемные силы  $X, Y, Z$  являются заданными и, следовательно, их вариации равны нулю:

$$\delta \bar{\mathcal{E}} = \iiint (\epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{xz} \delta \tau_{xz} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz}) dx dy dz - \iint (u \delta X_n + v \delta Y_n + w \delta Z_n) dS = 0. \quad (1.47)$$

### Принцип наименьшей работы

На практике обычно рассматривается случай, когда нагрузки на поверхности тела  $X_n, Y_n, Z_n$  заданы. Тогда их вариации равны нулю:  $\delta X_n = \delta Y_n = \delta Z_n = 0$

В этом случае вариация работы внешних сил, как это следует из уравнения (1.47), также будет равна нулю:  $\delta A=0$ . Тогда из формулы (1.46) вытекает:

$$\delta \bar{U}=0. \quad (1.48)$$

Это и есть принцип наименьшей работы, который иногда называют принципом минимума дополнительной потенциальной энергии, он формулируется следующим образом: из всех статически возможных систем напряжений, сводящихся на поверхности тела к заданным нагрузкам, в действительности в упругой системе возникают лишь те, которые сообщают минимальное значение дополнительной потенциальной энергии.

Для реализации данного принципа необходимо минимизировать функционал, который получается при подстановке (1.39) в (1.37):

$$\bar{U} = \iiint \left[ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] dx dy dz. \quad (1.49)$$

Входящие в формулу (1.49) функции напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия (1.3) и статическим граничным условиям (1.10). Минимизация данного функционала приводит к системе уравнений, которые являются уравнениями совместности деформаций, записанными через напряжения.

### Теорема Кастильяно

Пусть имеется упругая система, напряженное состояние которой определено. Требуется найти перемещение  $r$  некоторой точки этой системы по направлению, заданному направляющими косинусами:  $\cos(\widehat{x}, \widehat{r})=k$ ,  $\cos(\widehat{y}, \widehat{r})=l$ ,  $\cos(\widehat{z}, \widehat{r})=m$ . Приложим в данной точке неизвестную силу  $P_r$ , совпадающую по направлению с искомым перемещением. Проекция силы  $P_r$  на оси системы координат, связанной с рассматриваемой системой, будут равны:

$$P_{rx}=P_r k; P_{ry}=P_r l; P_{rz}=P_r m. \quad (1.50)$$

Работа сил на перемещениях  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будет равна:

$$A=P_r k u+P_r l v+P_r m w=P_r(ku+lv+mw). \quad (1.51)$$

Записанная в скобках величина является искомым перемещением:

$$r=ku+lv+mw. \quad (1.52)$$

Тогда работу можно записать в виде:

$$A=P_r r, \quad (1.53)$$

а ее вариацию следующим образом:

$$\delta A=r \delta P_r. \quad (1.54)$$

Дополнительная потенциальная энергия в рассматриваемом случае будет функцией силы  $P_r$ , а ее вариация будет иметь вид:

$$\delta \bar{U} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P_r} \delta P_r. \quad (1.55)$$

Используя вариационный принцип Кастильяно в форме (1.46), получим:

$$\left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial P_r} - r \right) \delta P_r = 0, \quad (1.56)$$

откуда в силу произвольности вариации  $\delta P_r$  получим:

$$r = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P_r}. \quad (1.57)$$

Полученное выражение формулируется в виде теоремы Кастильяно: частная производная от дополнительной потенциальной энергии по силовому фактору равна перемещению по направлению этого силового фактора.

В качестве силового фактора может рассматриваться сила или момент. Если в качестве  $P_r$  берется момент, то  $r$  будет углом поворота.

## 1.7. Прикладные методы решения задач теории упругости

Выведенные выше уравнения теории упругости являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Получение точного решения с помощью таких уравнений сопряжено с большими трудностями даже для очень простых расчетных моделей. В связи с этим на практике обычно используют приближенные методы. Эти методы условно делятся на три класса: континуальные, дискретные и дискретно-континуальные. В континуальных методах упругая система рассматривается как сплошная среда, а описывающие ее поведение функции являются непрерывными. В дискретных методах непрерывные функции заменяются конечным числом точек, в которых ищутся значения этих функций. Дискретно-континуальные методы совмещают оба вышеописанных приема. Ниже рассматриваются некоторые наиболее распространенные прикладные методы решения задач теории упругости.

### 1.7.1. Метод Ритца–Тимошенко

Этот метод относится к континуальным методам. Он позволяет получить приближенное решение задачи теории упругости в перемещениях на основе вариационного принципа Лагранжа.

В данном методе для построения приближенного решения перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  представляются в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_i A_i U_i(x, y, z); \\ v &= \sum_i B_i V_i(x, y, z); \\ w &= \sum_i C_i W_i(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

где  $U_i, V_i, W_i$  – аппроксимирующие функции;  
 $A_i, B_i, C_i$  – неизвестные коэффициенты.

Аппроксимирующие функции выбираются произвольно на основе опыта или интуиции, но с учетом определенных ограничений: они должны быть дифференцируемы и удовлетворять геометрическим граничным условиям.

Подставив (1.58) в выражение для полной энергии упругой системы (1.36) и выполнив интегрирование, получим:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(A_1, A_2, \dots, A_i, B_1, B_2, \dots, B_i, C_1, C_2, \dots, C_i). \quad (1.59)$$

Таким образом, полная энергия упругой системы превратилась в функцию от коэффициентов рядов (1.58). Тогда в соответствии с принципом Лагранжа условие минимума полной энергии будет реализовываться обращением в нуль всех ее производных по коэффициентам:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_i} = 0. \quad (1.60)$$

Из (1.36) видно, что полная энергия упругой системы есть квадратичная функция от перемещений. Следовательно, уравнения (1.60) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, причем число уравнений равно числу коэффициентов. Это значит, что из системы уравнений (1.60) можно найти коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$ , после чего подставить их в (1.58) и найти перемещения, а затем найти деформации и напряжения, т.е. полностью решить задачу.

### 1.7.2. Метод Бубнова–Галеркина

Этот метод также относится к континуальным методам. Он основан на принципе возможных перемещений. В данном методе, как и в предыдущем, перемещения задаются в виде рядов (1.58). Поскольку аппроксимирующие функции  $U_i, V_i, W_i$  должны удовлетворять геометрическим граничным условиям и быть дифференцируемы, а для этого они должны быть непрерывны внутри исследуемой области упругой системы, то они являются возможными формами перемещений ( $\delta u = U_i, \delta v = V_i, \delta w = W_i$ ) и могут быть использованы для записи возможной работы всех сил. Если при выборе аппроксимирующих функций потребовать также, чтобы они удовлетворяли статическим граничным условиям, то основываясь на вышеприведенных энергетических выражениях можно получить:

$$\left. \begin{aligned} \iiint \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) U_i dx dy dz = 0; \\ \iiint \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) V_i dx dy dz = 0; \\ \iiint \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) W_i dx dy dz = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

В уравнениях (1.61) функции напряжений в соответствии с законом Гука и формулами Коши заменяются функциями перемещений, которые представляются рядами (1.58). Далее из полученной системы уравнений определяются коэффициенты, после чего находятся перемещения, деформации и напряжения.

Данный метод значительно сокращает вычислительную работу, т.к. дифференциальные уравнения, с помощью которых составляется система уравнений (1.61), имеют более простой вид, чем выражение для потенциальной энергии, которое используется в методе Ритца–Тимошенко.

### 1.7.3. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей относится к дискретным методам. Этот метод широко используется при решении различных задач с применением компьютеров. Он позволяет найти приближенное решение для более широкого круга задач нежели континуальные методы.

Метод конечных разностей (или метод сеток) реализуется в следующем порядке. Сначала исследуемую область покрывают воображаемой сеткой, узлы которой нумеруются в определенном порядке. Таким образом, будущее решение представляется в виде дискретной совокупности узловых значений функции. Далее строится разностная система алгебраических уравнений. Для этого производные, входящие в исходное дифференциальное уравнение, и граничные условия заменяются соответствующими разностными соотношениями, а известные функции – их узловыми значениями. В итоге из полученной системы уравнений определяются числовые значения искомой функции в узлах сетки.

Рассмотрим в качестве примера плоскую область, покрытую прямоугольной сеткой с шагами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно (рис. 1.8). Пусть имеется некоторая дифференцируемая функция  $f(x, y)$ , которая описывает, например, силовые факторы упругой системы. Разложим данную функцию в направлении оси  $x$  в ряд Тейлора в окрестности некоторой заданной точки с номером  $ij$ , т.е. найдем значения функции  $f(x, y)$  в точках с номерами  $i(j-1)$  и  $i(j+1)$ :

$$f_{i(j-1)} = f_{ij} - \frac{\Delta x}{1!} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{ij} + \dots; \quad (1.62)$$

$$f_{i(j+1)} = f_{ij} + \frac{\Delta x}{1!} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{ij} + \dots \quad (1.63)$$

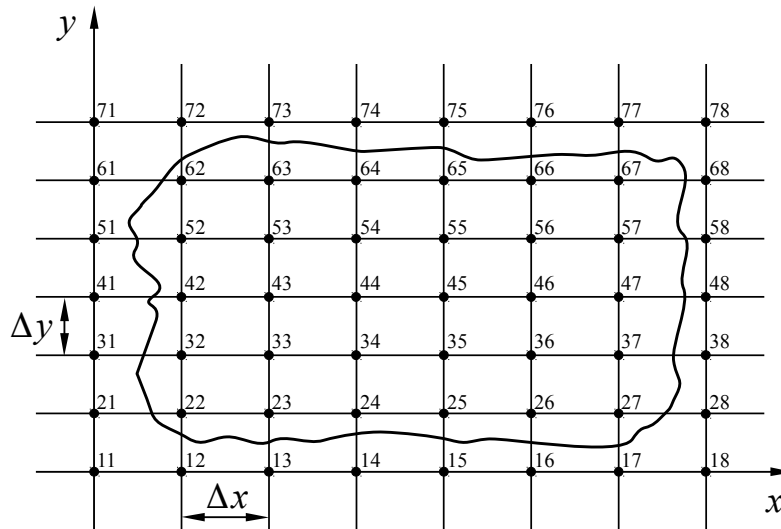


Рис. 1.8. Исследуемая плоская область, покрытая прямоугольной сеткой

Ограничиваясь первыми тремя членами в уравнениях (1.62), (1.63) и вычитая второе уравнение из первого, получим первую конечную разность, т.е. формулу для вычисления первой производной функции в центральных разностях:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{1}{2\Delta x} (f_{i(j+1)} - f_{i(j-1)}). \quad (1.64)$$

Эту же производную можно найти и в несимметричных конечных разностях из (1.62) или (1.63), ограничиваясь первыми двумя членами ряда, например:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{1}{\Delta x} (f_{ij} - f_{i(j-1)}). \quad (1.65)$$

Однако точность вычисления производной в этом случае будет ниже.

Складывая уравнения (1.62) и (1.63), получим вторую конечную разность, т.е. формулу для вычисления второй производной функции в центральных разностях:

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{ij} = \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i(j+1)} - 2f_{ij} + f_{i(j-1)}). \quad (1.66)$$

Такой же вид будут иметь формулы для вычисления производных в точке  $ij$  в направлении оси  $y$ .

Можно записать в конечных разностях производные функций любого порядка, входящих в различные выражения теории упругости, и решать алгебраические уравнения вместо дифференциальных уравнений. Получим в конечных

разностях производные, наиболее часто встречающиеся в задачах строительной механики. Для этого будем рассматривать производную как отношение приращения функции к приращению аргумента, где в качестве функции будет выступать конечная разность более низкого порядка. В соответствии с этим найдем третью конечную разность в направлении оси  $x$ , используя выражения (1.65) и (1.66):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{ij} &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i(j+1)} - 2f_{ij} + f_{i(j-1)}) - \frac{1}{\Delta x^2} (f_{ij} - 2f_{i(j-1)} + f_{i(j-2)}) \right], \\ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{ij} &= \frac{1}{\Delta x^3} (f_{i(j+1)} - 3f_{ij} + 3f_{i(j-1)} - f_{i(j-2)}). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Четвертую конечную разность в направлении оси  $x$  получим, используя (1.66):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{ij} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i(j+2)} - 2f_{i(j+1)} + f_{ij}) - \frac{2}{\Delta x^2} (f_{i(j+1)} - 2f_{ij} + f_{i(j-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta x^2} (f_{ij} - 2f_{i(j-1)} + f_{i(j-2)}) \right], \\ \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{ij} &= \frac{1}{\Delta x^4} (f_{i(j+2)} - 4f_{i(j+1)} + 6f_{ij} - 4f_{i(j-1)} + f_{i(j-2)}). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Соответствующие конечные разности вдоль оси  $y$  имеют вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{2\Delta y} (f_{(i+1)j} - f_{(i-1)j}); \quad (1.69)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta y} (f_{ij} - f_{(i-1)j}); \quad (1.70)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta y^2} (f_{(i+1)j} - 2f_{ij} + f_{(i-1)j}); \quad (1.71)$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta y^3} (f_{(i+1)j} - 3f_{ij} + 3f_{(i-1)j} - f_{(i-2)j}); \quad (1.72)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta y^4} (f_{(i+2)j} - 4f_{(i+1)j} + 6f_{ij} - 4f_{(i-1)j} + f_{(i-2)j}). \quad (1.73)$$

Смешанные конечные разности могут быть получены следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{1}{\Delta x} (f_{ij} - f_{i(j-1)}) - \frac{1}{\Delta x} (f_{(i-1)j} - f_{(i-1)(j-1)}) \right],$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} (f_{ij} - f_{i(j-1)} - f_{(i-1)j} + f_{(i-1)(j-1)}); \quad (1.74)$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{1}{\Delta x \Delta y} (f_{ij} - f_{i(j-1)} - f_{(i-1)j} + f_{(i-1)(j-1)}) - \frac{1}{\Delta x \Delta y} (f_{i(j-1)} - f_{i(j-2)} - f_{(i-1)(j-1)} + f_{(i-1)(j-2)}) \right],$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y} (f_{ij} - f_{(i-1)j} - 2f_{i(j-1)} + 2f_{(i-1)(j-1)} + f_{i(j-2)} - f_{(i-1)(j-2)}); \quad (1.75)$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{1}{\Delta x \Delta y} (f_{ij} - f_{i(j-1)} - f_{(i-1)j} + f_{(i-1)(j-1)}) - \frac{1}{\Delta x \Delta y} (f_{(i-1)j} - f_{(i-1)(j-1)} - f_{(i-2)j} + f_{(i-2)(j-1)}) \right],$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta x \Delta y^2} (f_{ij} - f_{i(j-1)} - 2f_{(i-1)j} + 2f_{(i-1)(j-1)} + f_{(i-2)j} - f_{(i-2)(j-1)}); \quad (1.76)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \frac{1}{\Delta x^2} (f_{(i+1)(j+1)} - 2f_{(i+1)j} + f_{(i+1)(j-1)}) - \frac{2}{\Delta x^2} (f_{i(j+1)} - 2f_{ij} + f_{i(j-1)}) + \frac{1}{\Delta x^2} (f_{(i-1)(j+1)} - 2f_{(i-1)j} + f_{(i-1)(j-1)}) \right],$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{ij} = \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2} (4f_{ij} - 2f_{(i+1)j} - 2f_{i(j+1)} - 2f_{i(j-1)} - 2f_{(i-1)j} + f_{(i+1)(j+1)} + f_{(i+1)(j-1)} + f_{(i-1)(j+1)} + f_{(i-1)(j-1)}). \quad (1.77)$$

Метод конечных разностей универсален и может использоваться для решения сложных, в том числе нелинейных задач теории упругости и других разделов строительной механики.

Еще один широко применяемый в настоящее время дискретный метод носит название метода конечных элементов (МКЭ), в котором упругая система условно разбивается на отдельные конструктивные элементы или фрагменты.

## 2. Расчет стержневых систем

Одним из типовых элементов конструкции летательного аппарата является стержневая система. Стержневые системы используются в конструкции силовых установок для крепления двигателей, в конструкции шасси, силовых эле-



ментов планера летательного аппарата. Основным элементом такой системы является стержень. С т е р ж н е м называется тело, у которого один размер значительно больше двух других. О с ь ю с т е р ж н я называется геометрическое место центров тяжести поперечных сечений стержня. Ось стержня может быть прямолинейной и криволинейной, а поперечное сечение может быть постоянным или переменным по длине стержня. Стержни могут работать на растяжение и сжатие, изгиб и кручение. Стержни, работающие в основном на изгиб, называются б а л к а м и .

В стержневых системах стержни соединяются друг с другом в узлах. Узлы могут быть шарнирными или жесткими. К стержневым системам относятся фермы, рамы и комбинированные системы, состоящие одновременно из ферменных и рамно-балочных элементов.

Стержневая система называется ф е р м о й , если допустимо считать, что узлами соединения стержней являются шарниры и нагрузки приложены только к узлам. Если оси стержней прямолинейны, то стержни при этих условиях будут работать только на растяжение-сжатие.

Стержневая система называется р а м о й , если узлы соединения стержней можно считать жесткими. Стержни в рамах кроме растяжения-сжатия работают также на изгиб, а в пространственных рамах – и на кручение.

## 2.1. Кинематический анализ стержневых систем

Задача кинематического анализа – определить, является ли рассматриваемая стержневая система геометрически неизменяемой, поскольку только геометрически неизменяемая стержневая система может воспринимать внешнюю нагрузку. Геометрически неизменяемой называется такая стержневая система, которая при воздействии внешней нагрузки изменяет свою конфигурацию только за счет деформации стержней.

Судить о геометрической изменяемости можно по числу степеней свободы стержневой системы. Для плоской системы число степеней свободы равно:

$$W = 3 D + 2 U - C, \quad (2.1)$$

где  $D$  – число плоских тел (их называют дисками);

$U$  – число узлов (в их число не входят опорные узлы и узлы, связанные с телами);

$C$  – число всех стержней.

Для пространственной стержневой системы:

$$W = 6 T + 3 U - C, \quad (2.2)$$

где  $T$  – число трехмерных тел.

Для плоских и пространственных тел ( $D=T=0$ ) уравнения (2.1) и (2.2) соответственно принимают вид:

$$W = 2 U - C, \quad (2.3)$$

$$W = 3U - C. \quad (2.4)$$

Очевидно, что возможны три следующие варианта:

- 1)  $W > 0$  – система не имеет достаточного числа связей для геометрической неизменяемости, т.е. является геометрически изменяемой;
- 2)  $W = 0$  – система имеет необходимое число связей для геометрической неизменяемости;
- 3)  $W < 0$  – система является геометрически неизменяемой, но имеет лишние связи.

Ниже рассматриваются только стержневые системы, у которых  $W \leq 0$ , что является необходимым условием геометрической неизменяемости. Однако это условие не является достаточным, т.к. геометрическая неизменяемость стержневой системы обеспечивается не только потребным количеством стержней, но и их расположением.

Рассмотрим для примера плоскую ферму, показанную на рис. 2.1.

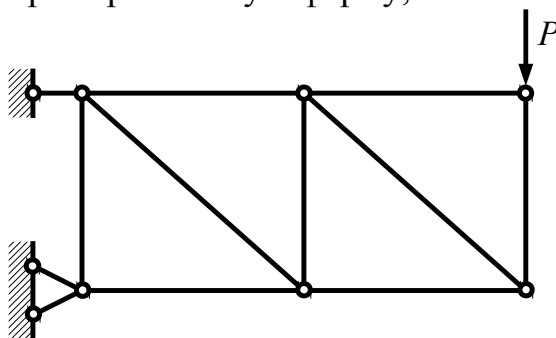


Рис. 2.1. Геометрически неизменяемая ферма

Найдем количество узлов и стержней:  $U=6$ ,  $C=12$ . По формуле (2.3) определим число степеней свободы:  $W=2 \cdot 6 - 12 = 0$ . Таким образом, ферма имеет необходимое число связей для геометрической неизменяемости.

Теперь переместим один из стержней, как показано на рис. 2.2. При этом число степеней свободы не изменится ( $W=2 \cdot 6 - 12 = 0$ ), но стержневая система станет геометрически изменяемой. Следовательно, условие  $W \leq 0$  не является достаточным условием геометрической неизменяемости стержневой системы.

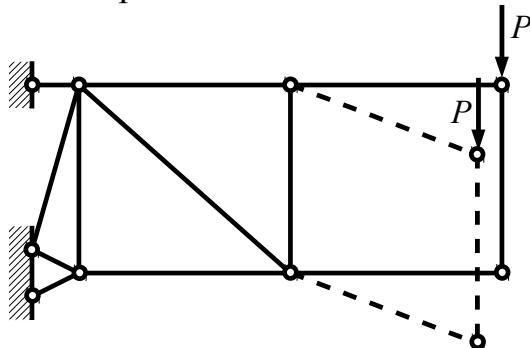


Рис. 2.2. Геометрически изменяемая ферма (механизм)

Из общих рассуждений вытекает, что геометрически неизменяемая элементарная часть (ячейка) плоской фермы образуется узлом с двумя присоеди-

ненными к нему стержнями, не лежащими на одной прямой. В случае пространственной фермы к узлу должны подходить три стержня, не лежащие в одной плоскости.

Это свойство используется в методе «разрушения» фермы, который заключается в последовательном мысленном отбрасывании элементарных ячеек фермы. Такое отбрасывание продолжается до тех пор, пока сложная для кинематического анализа ферма не превратится в простую, заведомо геометрически изменяемую или неизменяемую. Очевидно, что полученное свойство можно распространить и на исходную ферму.

Если в результате применения метода разрушения была получена геометрически неизменяемая стержневая система, то это дает достаточные основания считать, что вся система таковой и является.

Достаточным признаком геометрической неизменяемости стержневой системы является также ограниченность усилий в ее элементах при заданной внешней нагрузке.

Кроме этого, для обеспечения геометрической неизменяемости стержневой системы необходимо, чтобы ее опоры отвечали определенным требованиям. Плоская стержневая система должна иметь не менее трех опорных стержней-связей, поскольку она обладает тремя степенями свободы, а пространственная стержневая система должна иметь соответственно не менее шести опорных стержней. При этом все опорные стержни не должны пересекаться в одной точке, не должны быть параллельными и иметь точки крепления, лежащие на одной оси (последнее – для пространственных систем).

Если  $W = 0$ , то система статически определимая, а если  $W < 0$ , то она статически неопределимая, т.е. для ее расчета уравнений равновесия недостаточно.

В статически определимой ферме удаление даже одного стержня превращает ее в механизм. Следовательно, возможна замена имеющегося стержня на стержень другой длины без возникновения дополнительных напряжений в статически определимой стержневой системе. Это значит, что изменение температуры стержней, при котором меняется их длина, смещение опор, неточности изготовления не вызывают дополнительных усилий в статически определимой стержневой системе.

Существует множество методов расчета как статически определимых, так и статически неопределимых стержневых систем. Рассмотрим некоторые из них применительно к фермам.

## 2.2. Расчет статически определимых ферм

При рассмотрении статически определимых стержневых систем ( $W = 0$ ) число уравнений равновесия совпадает с числом неизвестных силовых факторов, что позволяет определить эти силовые факторы, используя только уравнения равновесия.

Для составления уравнений равновесия используется метод сечений, согласно которому стержневая система мысленно делится сечениями на части, при этом действие одной части на другую заменяется внутренними силовыми факторами, равными по величине и направленными в противоположные стороны. При расчете ферм такими силовыми факторами будут усилия в стержнях, которые при этом являются основными неизвестными.

### Метод вырезания узлов

Рассмотрим данный метод на примере исследования фермы, показанной на рис. 2.3. Из фермы последовательно вырезаются узлы и рассматривается их равновесие под действием внешних сил и усилий в стержнях. Усилия в стержнях пронумерованы двойными индексами: первый индекс указывает на номер рассматриваемого узла, а второй – на номер того узла, к которому крепится противоположный конец стержня. Усилие направляется в сторону от узла, что соответствует растяжению стержня.

При составлении и решении уравнений равновесия следует учитывать, что  $N_{ij} = N_{ji}$ , например,  $N_{12} = N_{21}$ .

Порядок рассмотрения узлов фермы целесообразно выбирать таким, чтобы составленные системы уравнений были взаимно независимыми. При этом расчет фермы рационально начинать с узла, в котором сходится минимальное число стержней. Например, расчет фермы, представленной на рис. 2.3, следует начать с узла 2. Уравнения равновесия этого узла (суммы проекций сил на оси  $x$  и  $y$ ) имеют вид:

$$\sum N_x = N_{21} = 0; \sum N_y = N_{23} = 0. \quad (2.5)$$

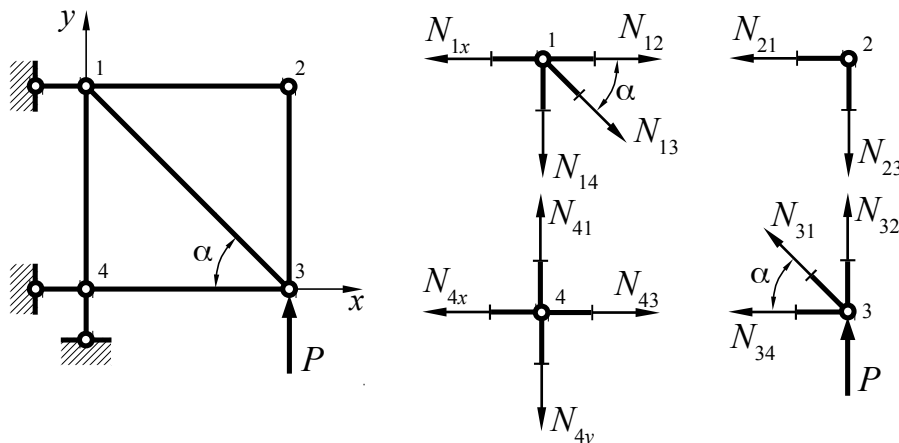


Рис. 2.3. К расчету статически определимой фермы

В качестве следующего для рассмотрения узла возьмем узел 3:

$$\sum N_x = N_{34} + N_{31} \cos \alpha = 0; \sum N_y = N_{32} + N_{31} \sin \alpha + P = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.5) следует, что  $N_{32}=N_{23}=0$ . С учетом этого уравнение проекций сил на ось  $y$  из (2.6) запишется в виде:  $\sum N_y = N_{31} \sin \alpha + P = 0$ . Тогда из (2.6) получим:  $\frac{N_{34}}{P} = \operatorname{ctg} \alpha$ . При  $\alpha = 45^\circ$   $N_{34} = P$ , а  $N_{31} = -P \sqrt{2}$ . Далее следует последовательно рассмотреть узлы 1 и 4. В результате будут определены усилия во всех стержнях, включая опорные стержни.

### Метод моментных точек (моментных осей)

При использовании этого метода ферма мысленно рассекается на части, после чего записываются уравнения сил и моментов отсеченной части относительно точек (или осей – для пространственных ферм), которые выбираются так, чтобы в каждое уравнение входило не более одного неизвестного.

### Определение перемещений узлов статически определимых ферм

При расчете стержневых систем обычно также стоит задача определения перемещений ее узлов под действием нагрузок. Такую задачу конечно можно решить, найдя удлинения всех стержней, а затем путем геометрических преобразований, установить новое положение узлов. Но этот способ весьма трудоемок. Проще решить данную задачу при помощи вышеизложенной теоремы Кастильяно.

Перемещение  $k$ -го узла фермы, состоящей из  $n$  стержней, в направлении действия внешней силы  $P_k$ , приложенной к этому узлу, найдем, используя выражение (1.57). В данном случае оно будет иметь вид:

$$r_k = \frac{\partial \bar{U}}{\partial P_k}, \quad (2.7)$$

где  $\bar{U} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\sigma_i^2 F_i}{2 E_i} dx = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2 E_i F_i}$ , что следует из выражения (1.49);

$l_i$  – длина  $i$ -го стержня;

$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}$  – нормальные напряжения в поперечном сечении стержня;

$N_i$  – усилие в  $i$ -ом стержне;

$F_i$  – площадь поперечного сечения  $i$ -го стержня;

$E_i$  – модуль упругости  $i$ -го стержня.

Если в узле, перемещение которого определяется, внешняя сила отсутствует, то в этом узле нужно приложить фиктивную единичную силу  $\Phi_k = 1$  в направлении искомого перемещения, продифференцировать выражение для дополнительной потенциальной энергии по этой силе, а затем приравнять ее к нулю ( $\Phi_k = 0$ ), поскольку фактически она отсутствует.

Для искомого перемещения:

$$r_k = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \Phi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{U}}{\partial N_i} \frac{\partial N_i}{\partial \Phi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i F_i} \frac{\partial N_i}{\partial \Phi_k}. \quad (2.8)$$

Запишем усилия  $N_i$  в форме:

$$N_i = N_i^{(P)} + N_i^{(k)} \Phi_k, \quad (2.9)$$

где  $N_i^{(P)}$  – усилие в  $i$ -ом стержне от действия реальной внешней нагрузки  $P$ ;  
 $N_i^{(k)}$  – усилие в  $i$ -ом стержне от единичной фиктивной силы  $\Phi_k = 1$ .

Тогда:

$$r_k = \sum_{i=1}^n \frac{(N_i^{(P)} + N_i^{(k)} \Phi_k) l_i}{E_i F_i} \frac{\partial (N_i^{(P)} + N_i^{(k)} \Phi_k)}{\partial \Phi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{(N_i^{(P)} + N_i^{(k)} \Phi_k) l_i}{E_i F_i} N_i^{(k)}. \quad (2.10)$$

Откуда с учетом того, что в действительности  $\Phi_k = 0$ , окончательно получим:

$$r_k = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^{(P)} N_i^{(k)} l_i}{E_i F_i}. \quad (2.11)$$

Посущество, формула (2.11) определяет проекцию полного перемещения  $k$ -го узла на направление единичной силы.

### 2.3. Расчет статически неопределимых ферм

Как было отмечено выше, у статически неопределимых стержневых систем число степеней свободы меньше нуля ( $W < 0$ ). Это говорит о том, что такие стержневые системы имеют так называемые «лишние» связи, удаление которых переводит систему в статически определимую.

Рассмотрим метод сил. Пусть имеется статически неопределимая ферма, у которой  $W = -m$ . Число  $m$  определяет степень статической неопределимости, т.е. число «лишних» связей, усилия в которых не могут быть определены только из уравнений равновесия системы. Для раскрытия статической неопределимости фермы переходят к так называемой основной системе, мысленно разрезав  $m$  стержней. Таким образом, основная система является статически определимой и обязательно должна быть геометрически неизменяемой.

В результате расчета основной системы находим усилия в стержнях от действия внешних нагрузок  $(N_i^{(P)})_0$  любым описанным выше методом расчета статически определимых ферм. Обозначим неизвестные усилия в разрезанных стержнях через  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Используем принцип независимости действия сил, который гласит, что если к системе приложено несколько сил, то можно определить внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации от каждой силы в отдельности, а затем результат действия всех сил

сложить. Тогда суммарные усилия в каждом  $i$ -ом стержне можно записать в виде:

$$N_i = (N_i^{(P)})_0 + \sum_{j=1}^m N_i^{(j)} X_j, \quad (2.12)$$

где  $N_i^{(j)}$  – усилие в  $i$ -ом стержне от единичной силы  $X_j=1$ , приложенной к  $j$ -му стержню.

Неизвестные усилия  $X_j$  находятся с использованием условия совместности деформаций, которое в данном случае эквивалентно условию неразрывности деформаций стержней в местах разрезов. Это значит, что взаимное перемещение частей каждого разрезанного стержня в месте разреза должно быть равно нулю, поскольку стержни разрезаются мысленно. Данное условие для каждого  $j$ -го усилия с использованием теоремы Кастильяно имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X_j} = 0. \quad (2.13)$$

Таким образом, для каждого усилия  $X_j$  нужно составить уравнение на основе условия (2.13). Для конкретного  $k$ -го рассматриваемого усилия  $X_k$ , которое является одним из  $X_j$ , по аналогии с (2.8) запишем:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{U}}{\partial N_i} \frac{\partial N_i}{\partial X_k} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i F_i} \frac{\partial N_i}{\partial X_k} = 0. \quad (2.14)$$

Подставим в (2.14) вместо  $N_i$  выражение (2.12), найдем частную производную  $\frac{\partial N_i}{\partial X_k}$  и в результате получим  $m$  так называемых канонических уравнений метода сил:

$$\sum_{j=1}^m r_{kj} X_j + r_{kP} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (2.15)$$

где  $r_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^{(j)} N_i^{(k)} l_i}{E_i F_i}$  – взаимное перемещение частей разрезанного стержня в месте разреза по направлению усилия  $X_k$  под действием силы  $X_j$ , если  $X_j=1$ ;

$r_{kP} = \sum_{i=1}^n \frac{(N_i^{(P)})_0 N_i^{(k)} l_i}{E_i F_i}$  – взаимное перемещение частей разрезанного стержня в месте разреза по направлению усилия  $X_k$  под действием внешней нагрузки.

В итоге получены  $m$  уравнений (2.15) для нахождения  $m$  неизвестных усилий  $X_j$ , которые после этого подставляются в выражения (2.12) для нахождения усилий во всех стержнях.

Проиллюстрируем это на примере. Рассмотрим простейшую плоскую статически неопределимую ферму (рис. 2.4).

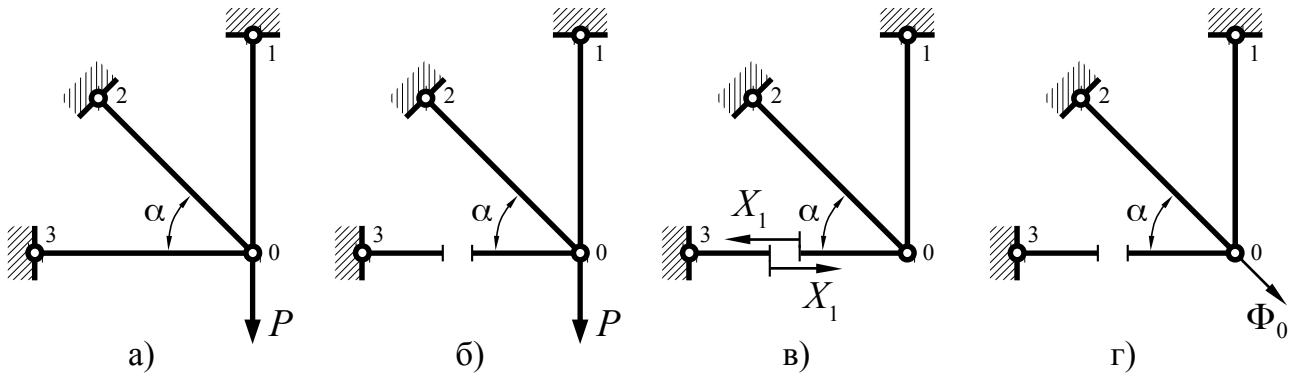


Рис. 2.4. К раскрытию статической неопределимости фермы

Найдем число степеней свободы фермы, представленной на рис. 2.4а:  $W = 2Y - C = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$ . Таким образом,  $m = 1$ , т.е. рассматриваемая ферма один раз статически неопределима. Построим основную систему, разрезав стержень 0-3 (рис. 2.4б). Уравнения равновесия дадут следующие усилия в стержнях:  $(N_{01}^{(P)})_0 = P$ ,  $(N_{02}^{(P)})_0 = 0$ ,  $(N_{03}^{(P)})_0 = 0$ . Усилия  $N_i^{(j)}$  найдем из условия приложения нагрузки  $X_j = 1$ . В рассматриваемом случае это единственная нагрузка  $X_1 = 1$  (рис. 2.4в). Таким образом, беря для простоты  $\alpha = 45^\circ$ , получим:  $N_{01}^{(1)} = 1$ ,  $N_{02}^{(1)} = -\sqrt{2}$ ,  $N_{03}^{(1)} = 1$ . Усилия  $N_i^{(k)}$  в данном случае совпадают с усилиями  $N_i^{(j)}$ , т.к. рассматривается только одна сила  $X_1$ . Каноническое уравнение будет иметь вид:  $r_{11} X_1 + r_{1P} = 0$ , где при одинаковых параметрах стержней (длине  $l$ , модуле упругости  $E$  и площади поперечного сечения  $F$ )  $r_{11} = \frac{l}{EF} [1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2] = \frac{4l}{EF}$ ,

$r_{1P} = \frac{Pl}{EF}$ . Откуда:

$$X_1 = -\frac{r_{1P}}{r_{11}} = -\frac{1}{4} P;$$

$$N_{01} = P + N_{01}^{(1)} X_1 = P - \frac{P}{4} = \frac{3}{4} P;$$

$$N_{02} = N_{02}^{(1)} X_1 = -\sqrt{2} X_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} P;$$

$$N_{03} = N_{03}^{(1)} X_1 = X_1 = -\frac{1}{4} P.$$

### Определение перемещений узлов статически неопределимых ферм

Для определения перемещений узлов статически неопределимых ферм используется та же формула, что и для определения перемещений узлов статически определимых ферм (2.11). При этом найденные ранее силы  $X_j$  относят к внешним нагрузкам, а вместо  $N_i^{(P)}$  используют  $N_i$ , которые определяются по формуле (2.12). Фиктивную единичную силу  $\Phi_k = 1$  следует прикладывать в



основной, т.е. в статически определимой системе, поэтому в формуле (2.11)  $N_i^{(k)} = (N_i^{(k)})_0$ . Таким образом, перемещение узла по выбранному направлению (направлению фиктивной единичной силы) будет равно:

$$r_k = \sum_{i=1}^n \frac{N_i (N_i^{(k)})_0 l_i}{E_i F_i}. \quad (2.16)$$

В рассмотренном выше примере найдем перемещение узла 0 по направлению, параллельному стержню 0-2 (рис. 2.4г). В заданном направлении приложим фиктивную единичную силу  $\Phi_0 = 1$ . Из рассмотрения равновесия вырезанного узла 0 получим:  $(N_{01}^{(0)})_0 = 0$ ,  $(N_{02}^{(0)})_0 = 1$ ,  $(N_{03}^{(0)})_0 = 0$ . Искомое перемещение узла будет равно:  $r_0 = \frac{N_{02} (N_{02}^{(0)})_0 l}{EF} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{Pl}{EF}$ .

## 2.4. Матричный метод расчета стержневых систем

Стержневые системы могут иметь большое число элементов, что приводит к значительным вычислительным трудностям при их расчете. В настоящее время решить эту проблему позволяет компьютерная техника. При этом алгоритмы расчетов обычно составляются с использованием алгебры матриц, поскольку в данном случае компьютерные программы получаются достаточно компактными.

Знание матричного метода расчета стержневых систем дает основу для понимания МКЭ, который в настоящее время широко применяется для расчета конструкций различных типов. Дискретизация стержневой системы и принципы составления матричных уравнений имеют много общего с МКЭ. Поэтому матричный метод расчета стержневых систем можно считать частным, наиболее простым случаем МКЭ.

Матричный метод универсален и применяется как для расчета статически определимых, так и для расчета статически неопределимых стержневых систем. Рассмотрим один из известных алгоритмов расчета стержневых систем с использованием матриц на примере расчета простой плоской статически неопределимой фермы, представленной на рис. 2.5.

Произведем кинематический анализ исследуемой фермы. Для этого найдем число ее степеней свободы:  $W = 2U - C = 2 \cdot 4 - 9 = -1 < 0$ . Данный анализ подтверждает, что задана статически неопределимая ферма.

Произведем разметку узлов и элементов (стержней). Цифрами без кружочков обозначим узлы, а цифрами в кружочках – стержни. Введем систему координат, приняв за ее начало узел 1. Для аналитического описания фермы составим структурную матрицу  $\bar{S}_c$  таким образом, чтобы число столбцов совпадало с числом стержней, а число строк – с числом узлов.

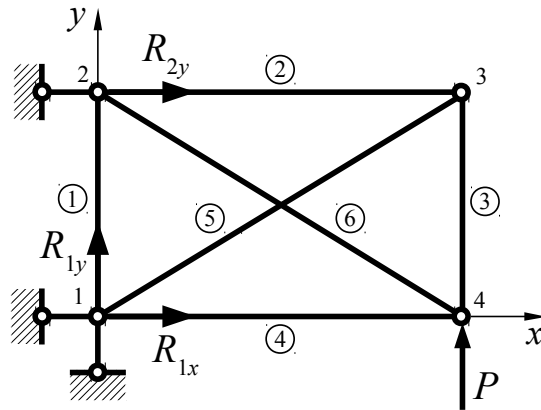


Рис. 2.5. К матричному методу расчета статически неопределимой фермы

Номер столбца должен соответственно совпадать с номером стержня, а номер строки – с номером узла. При этом значащие члены матрицы должны быть равны  $+1$ , если это начальный узел стержня (узел с меньшим номером) и  $-1$ , если это конечный узел стержня (узел с бóльшим номером). Для рассматриваемой фермы получим:

$$\bar{S}_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Таким образом, столбец № 5, например, показывает, что стержень № 5 начинается в узле № 1 и заканчивается в узле № 3.

Составим матрицу координат узлов, включающую векторы-столбцы координат каждого узла  $\vec{C}_i = \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$ :

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{C}_1 \\ \vec{C}_2 \\ \vec{C}_3 \\ \vec{C}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_4 \\ y_4 \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Стержень фермы имеет определенный угол наклона к осям выбранной системы координат. Составим диагональную матрицу направляющих косинусов стержней:

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{\alpha}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{\alpha}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{\alpha}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{\alpha}_6 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где  $\vec{\alpha}_j = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{jx} \\ \cos \alpha_{jy} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, 6.$

Для вычисления направляющих косинусов воспользуемся аналитической геометрией:

$$\vec{\alpha}_j = \frac{1}{l_j} \begin{pmatrix} l_{jx} \\ l_{jy} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

где  $l_j$  – длина стержня;  
 $l_{jx}, l_{jy}$  – длины проекций стержня на соответствующие оси системы координат.

Введем обозначение:

$$\vec{\pi}_j = \begin{pmatrix} l_{jx} \\ l_{jy} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Это матрица-вектор проекций  $j$ -го стержня. Матрица-вектор проекций всех стержней будет иметь вид:

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \vec{\pi}_1 \\ \vec{\pi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\pi}_6 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Эту матрицу можно легко получить, используя ранее составленную структурную матрицу (2.17) и матрицу координат узлов (2.18):

$$\vec{\pi} = -\bar{S}_c^T \vec{C}, \quad (2.23)$$

где  $\bar{S}_c^T$  – транспонированная структурная матрица  $\bar{S}_c$ .

Длины стержней можно определить следующим образом:

$$l_j = \sqrt{l_{jx}^2 + l_{jy}^2} = \sqrt{\vec{\pi}_j^T \vec{\pi}_j}. \quad (2.24)$$

Составим матрицу-вектор внешних нагрузок (сил в узлах фермы), в число которых должны быть включены также реакции опор (рис. 2.5):

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

где  $\vec{P}_i = \begin{pmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 4$ ;

$P_{ix}, P_{iy}$  – проекции внешней нагрузки в  $i$ -ом узле на соответствующие оси системы координат.

Составим матрицу-вектор неизвестных усилий в стержнях:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N}_3 \\ \vec{N}_4 \\ \vec{N}_5 \\ \vec{N}_6 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где  $\vec{N}_j = \begin{pmatrix} N_{jx} \\ N_{jy} \end{pmatrix}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ ;

$N_{jx}, N_{jy}$  – проекции неизвестных усилий в  $j$ -ом стержне на соответствующие оси системы координат.

Теперь можно записать уравнение равновесия в матричной форме:

$$(\bar{S}_c \bar{\alpha}) \vec{N} + \vec{P} = 0. \quad (2.27)$$

Данное уравнение содержит неизвестные в матрице-векторе  $\vec{N}$  и в матрице-векторе  $\vec{P}$  (опорные реакции). Для рассматриваемого примера уравнение (2.27) содержит 9 неизвестных (6 неизвестных усилий в стержнях и 3 реакции опор). Уравнений же равновесия, вытекающих из (2.27), получится 8.

С целью исключения неизвестных опорных реакций из уравнений равновесия используется так называемая «выметающая» матрица  $\bar{S}_0$ . Это такая матрица, построенная на основе единичной матрицы, из которой удалены строки с номерами как у опорных реакций в векторе-матрице (2.25). В рассматриваемом примере это будут строки с номерами 1, 2 и 3:

$$\bar{S}_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.28)$$

Умножим уравнение (2.27) на матрицу  $\bar{S}_0$ :

$$\bar{S}_0(\bar{S}_c \bar{\alpha}) \vec{N} + \vec{Q} = 0, \quad (2.29)$$

где  $\vec{Q} = \bar{S}_0 \vec{P}$ .

Однако и теперь в рассматриваемом примере число неизвестных (6 неизвестных усилий в стержнях) превышает число уравнений (5 уравнений равновесия, вытекающих из (2.29)). В связи с этим для раскрытия статической неопределенности необходимо использовать условие совместности деформаций: стержневая система, соединенная в узлах, должна оставаться соединенной в этих же узлах и после деформации. Это значит, что перемещения концов всех стержней, примыкающих к рассматриваемому узлу, а следовательно, и их проекции на оси системы координат, должны быть одинаковыми.

Рассмотрим  $k$ -ый стержень до и после деформации фермы (рис. 2.6а). Перемещения узла  $m$  вдоль оси  $x$  вследствие деформации фермы обозначим  $u_m$ , а вдоль оси  $y$  —  $v_m$ . Перемещения узла  $n$  соответственно будут:  $u_n$  и  $v_n$ . При этом стержень изменит свою длину на величину  $\Delta l_k$  (деформируется).

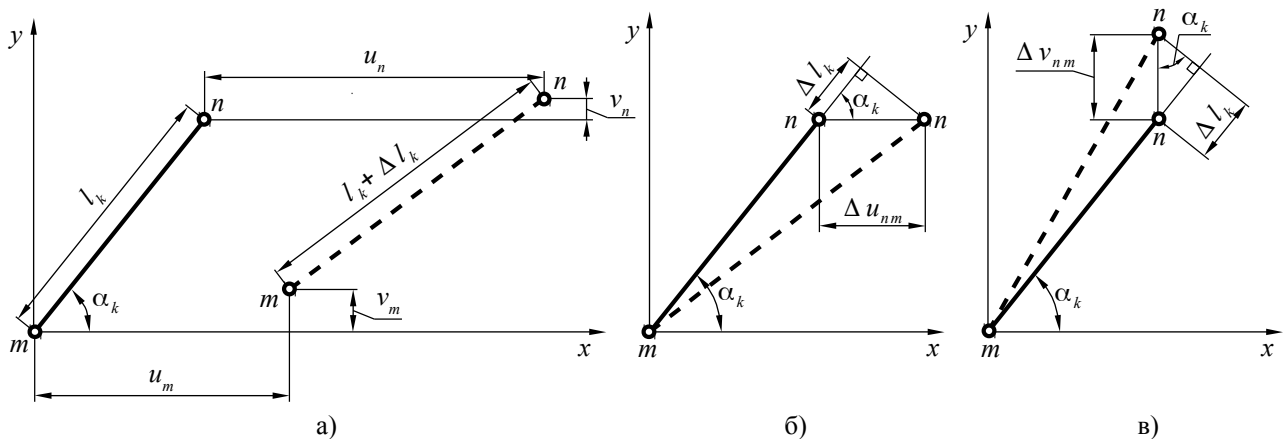


Рис. 2.6. К рассмотрению деформации стержня

Чтобы вывести зависимость деформации стержня от перемещений его концов, рассмотрим рис. 2.6б и 2.6в. На рис. 2.6б показано, как можно определить деформацию стержня, если перемещение его концов происходит только

вдоль оси  $x$ , а на рис. 2.6в – только вдоль оси  $y$ . При этом принято допущение о малости перемещений, что позволяет использовать тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Отсюда вытекает, что в общем случае при наличии перемещений вдоль обеих осей:

$$\Delta l_k = \Delta u_{nm} \cos \alpha_k + \Delta v_{nm} \sin \alpha_k, \quad (2.30)$$

где  $\Delta u_{nm} = u_n - u_m$ ;  $\Delta v_{nm} = v_n - v_m$ .

Но из теоремы Кастильяно вытекает:

$$\Delta l_k = \frac{N_k l_k}{E_k F_k}, \quad (2.31)$$

где  $E_k$  – модуль упругости  $k$ -го стержня;

$F_k$  – площадь поперечного сечения  $k$ -го стержня.

В матричной форме уравнения (2.30) и (2.31) для всех стержней фермы можно записать соответственно:

$$\vec{\Delta} = -\bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \vec{r}, \quad (2.32)$$

$$\vec{\Delta} = \bar{G} \vec{N}, \quad (2.33)$$

где  $\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{pmatrix}$  – матрица-вектор перемещений,  $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ ;

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_6}{E_6 F_6} \end{pmatrix}.$$

Из (2.32) и (2.33) вытекает:

$$\bar{G} \vec{N} = -\bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \vec{r}. \quad (2.34)$$

Отсюда можно выразить матрицу-вектор неизвестных усилий в стержнях:

$$\vec{N} = -\bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \vec{r}. \quad (2.35)$$

Подставим (2.35) в уравнение равновесия (2.29):

$$\bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} \bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \vec{r} = \vec{Q}, \quad (2.36)$$

Матрицу-вектор  $\vec{r}$  можно представить в следующем виде:

$$\vec{r} = \bar{S}_0^T \vec{\delta}, \quad (2.37)$$

где  $\vec{\delta}$  – матрица-вектор перемещений, из которой исключены заранее известные нулевые перемещения в опорных узлах фермы.

Тогда:

$$\bar{K} \vec{\delta} = \vec{Q}, \quad (2.38)$$

где  $\bar{K} = \bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} \bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \bar{S}_0^T$  – матрица жесткости.

Составив матрицу жесткости, обратим ее и получим матрицу гибкости:

$$\bar{L} = \bar{K}^{-1} = (\bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} \bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \bar{S}_0^T)^{-1}. \quad (2.39)$$

Теперь можно найти неизвестные перемещения узлов фермы без перемещений опорных узлов, которые известны и равны нулю:

$$\vec{\delta} = \bar{L} \vec{Q}. \quad (2.40)$$

Подставим полученную матрицу-вектор перемещений в уравнение (2.35) и найдем усилия в стержнях:

$$\vec{N} = -\bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \bar{S}_0^T \vec{\delta}. \quad (2.41)$$

Для определения опорных реакций можно воспользоваться уравнениями, «выметенными» с помощью матрицы  $\bar{S}_0$ . Однако это не всегда бывает выгодно с точки зрения трудоемкости. При расчетах вручную и небольшом числе точек крепления фермы рациональнее может оказаться метод вырезания узлов.

Таким образом, мы полностью решили задачу, используя универсальный алгоритм, пригодный для расчета как статически определимых, так и статически неопределимых стержневых систем.

### 3. Расчет пластин

#### 3.1. Уравнения теории тонких пластин

Плоские панели широко используются в конструкции летательных аппаратов. Их работа описывается теорией тонких пластин. П л а с т и н а – это тело, у которого два размера существенно больше третьего – толщины  $h$ . Толщина пластины считается постоянной. На рис. 3.1 показана система координат, связанная с пластиной.

Плоскость  $xOy$ , делящая толщину пластины пополам, называется с р е д и н н о й п о в е р х н о с т ь ю . Отрезок нормали  $mn$  к срединной поверхности назовем н о р м а л ь н ы м э л е м е н т о м . В общем случае на пластину может действовать система поверхностных нагрузок, система объемных и контурных сил, вызывающих в совокупности растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб пластины.

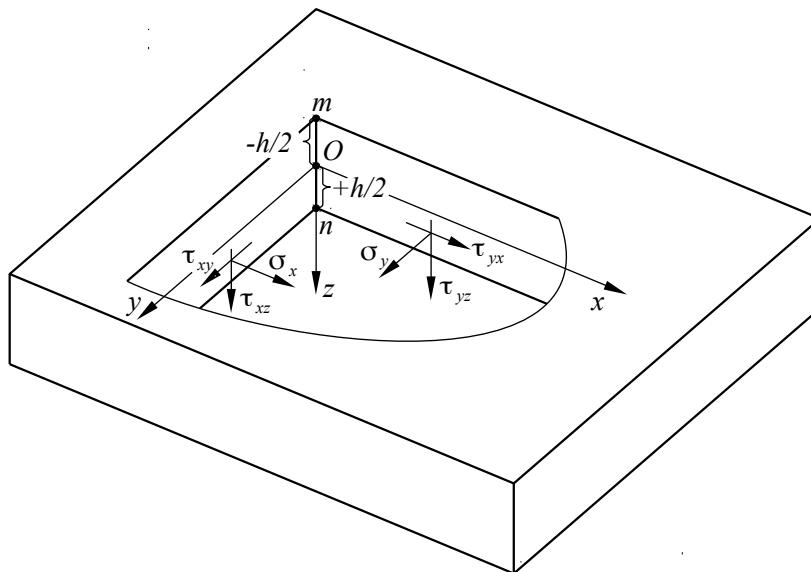


Рис. 3.1. Система координат пластины и действующие в ней напряжения

Пластина, как и любое упругое тело, описывается выведенными ранее общими уравнениями равновесия теории упругости, геометрическими соотношениями Коши и уравнениями обобщенного закона Гука. Статические граничные условия на поверхностях пластины имеют следующий вид (рис. 3.2):

- при  $z = -h/2$ :  $\tau_{xz} = -q_{x1}$ ,  $\tau_{yz} = -q_{y1}$ ,  $\sigma_z = -q_{z1}$ ;
- при  $z = +h/2$ :  $\tau_{xz} = -q_{x2}$ ,  $\tau_{yz} = -q_{y2}$ ,  $\sigma_z = -q_{z2}$ .

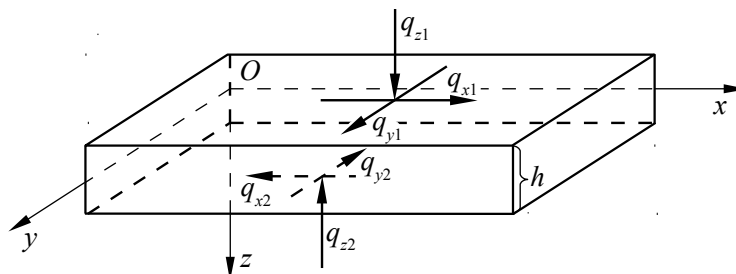


Рис. 3.2. Нагрузки на поверхностях пластины

То обстоятельство, что толщина пластины  $h$  мала по сравнению с двумя другими ее размерами, позволяет ввести ряд упрощающих гипотез, которые были предложены Кирхгофом:

1. Нормальный элемент  $mn$  в процессе деформации пластины не изменяет своей длины и остается прямым и нормальным к срединной поверхности после ее деформации;

2. Напряжения  $\sigma_z$  пренебрежимо малы.

Из первой гипотезы Кирхгофа о том, что нормальный элемент  $mn$  в процессе деформации не изменяет своей длины, следует, что  $\epsilon_z = 0$ , т. е.  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  и  $w = w(x, y)$ , т. е.  $w$  не зависит от  $z$ . Перемещение  $w$  является основной неизвест-



ной функцией в теории изгиба пластин и называется прогибом пластины. Из второй части первой гипотезы, где говорится о том, что нормальный элемент остается прямым и нормальным к срединной поверхности после ее деформации, следует, что деформаций сдвига в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  не будет:  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , т. е.  $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  и  $\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . Интегрируя эти соотношения по  $z$  с учетом того, что  $w$  не зависит от  $z$ , получим:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y). \quad (3.1)$$

Произвольные функции  $u_0(x, y)$  и  $v_0(x, y)$  представляют собой перемещения точек срединной поверхности ( $z = 0$ ) по осям  $x$  и  $y$ . Подставляя (3.1) в формулы Коши (1.14) и (1.16) для компонент линейной и угловой деформации соответственно, найдем деформации в плоскостях, параллельных срединной поверхности:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.2)$$

Теперь запишем с учетом второй гипотезы Кирхгофа ( $\sigma_z \approx 0$ ) соотношения, вытекающие из обобщенного закона Гука:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \quad (3.3)$$

С учетом (3.2) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]; \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Таким образом, распределение напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  по толщине пластины включает постоянную, не зависящую от  $z$  составляющую, которая эквивалентна распределенному усилию, а также линейно зависящую от  $z$  составляющую, которая эквивалентна моменту. Усилия и моменты можно вычислить по следующим формулам:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \quad (3.5)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.5) и (3.6) значения напряжений из (3.4), получим:

$$N_x = B(\varepsilon_{x0} + \mu \varepsilon_{y0}); N_y = B(\varepsilon_{y0} + \mu \varepsilon_{x0}); N_{xy} = \frac{B(1-\mu)}{2} \gamma_{xy0}; \quad (3.7)$$

$$M_x = D(\chi_x + \mu \chi_y); M_y = D(\chi_y + \mu \chi_x); M_{xy} = \frac{D}{2}(1-\mu)\chi_{xy}, \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x};$  (3.9)

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (3.10)$$

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}; \quad (3.11)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (3.12)$$

Здесь параметр  $B$  характеризует жесткость пластины при растяжении-сжатии. Параметр  $D$  характеризует изгибную жесткость пластины и называется цилиндрической жесткостью.

Соотношения (3.7) связывают нормальные  $N_x, N_y$  и сдвигающее  $N_{xy}$  усилия с относительными деформациями  $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}$  срединной поверхности. Соотношения (3.8) связывают изгибающие  $M_x, M_y$  и крутящий  $M_{xy}$  моменты с параметрами  $\chi_x, \chi_y$  и  $\chi_{xy}$ , характеризующими кривизну срединной поверхности после деформации.

Перепишем соотношения (3.4) с учетом (3.7) – (3.12):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{h} + \frac{12 M_x}{h^3} z; \\ \sigma_y &= \frac{N_y}{h} + \frac{12 M_y}{h^3} z; \\ \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{h} + \frac{12 M_{xy}}{h^3} z. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Таким образом, благодаря гипотезам Кирхгофа, трехмерная задача об определении перемещений  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  и  $w(x, y, z)$  сводится к двумерной: напряжения однозначно выражаются через усилия и моменты, которые, в свою очередь, выражаются через три перемещения  $u_0(x, y), v_0(x, y)$  и  $w(x, y)$ , зависящие только от двух переменных.

Выделим элемент срединной поверхности и приложим к нему усилия и моменты (рис. 3.3), направления которых соответствуют направлениям напряжений, показанным на рис. 3.1.

На рис. 3.3 введены новые усилия – поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ . Они являются равнодействующими касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  (рис. 3.1):

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (3.14)$$

Рассмотрим равновесие этого элемента. Найдем сначала суммы проекций действующих усилий на координатные оси системы. Составим уравнение проекций сил на ось  $Ox$ :

$$q_x dxdy - N_x dy + N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dxdy - N_{xy} dx + N_{xy} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dxdy = 0. \quad (3.15)$$

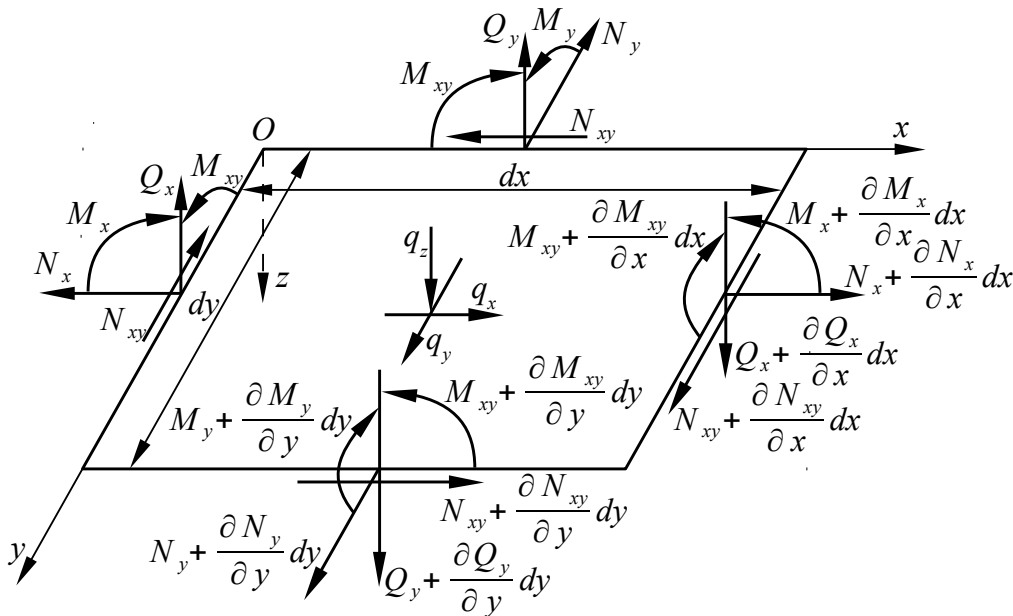


Рис. 3.3. Силовые факторы, действующие на элемент пластины

После приведения подобных членов и деления на элементарную площадь  $dxdy$  получим:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0. \quad (3.16)$$

Аналогичным образом получим уравнения равновесия вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0. \quad (3.18)$$

Из условия равновесия моментов относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  вытекают следующие уравнения:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (3.20)$$

Итак, у нас имеется 17 неизвестных функций переменных  $x$  и  $y$ :

- перемещения  $u_0, v_0, w$ ;
- относительные деформации  $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy}$ ;
- функции кривизны  $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ ;
- усилия  $N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y$ ;
- моменты  $M_x, M_y, M_{xy}$ .

Мы имеем также 17 уравнений, связывающих эти функции:

- пять уравнений равновесия (3.16) – (3.20);
- шесть физических соотношений (3.7), (3.8);
- шесть геометрических соотношений (3.9), (3.10).

Таким образом, задача расчета пластин может быть решена. Однако необходимо сделать следующее замечание. Как отмечалось выше, из гипотез Кирхгофа следует, что  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Тогда в соответствии с законом Гука ( $\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$ ,  $\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$ ) должно выполняться следующее равенство:  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Но в уравнения равновесия (3.18 – 3.20) входят поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , которые являются равнодействующими касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . Здесь имеется противоречие между уравнениями равновесия и законом Гука. Появление этого противоречия связано с упрощением физической картины явления, к которому приводит применение гипотез Кирхгофа. Поскольку условия равновесия должны выполняться обязательно, приходится признать, что в теории тонких пластин закон Гука для напряжений и деформаций с индексом  $z$  не выполняется. Напряжения  $\sigma_z, \tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  можно найти из полной системы уравнений равновесия теории упругости (1.3), подставив в них напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  из полученных ранее соотношений (3.13) и проинтегрировав их по  $z$  с учетом уравнений (3.18) – (3.20):

$$\tau_{xz} = \frac{6Q_x}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad \tau_{yz} = \frac{6Q_y}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad (3.21)$$

$$\sigma_z = -q \left( \frac{1}{2} + \frac{3z}{2h} - \frac{2z^3}{h^3} \right). \quad (3.22)$$

Уравнения (3.21) и (3.22) обычно используются в задачах изгиба пластин, поэтому при их выводе предполагалось, что на пластину действует только нагрузка  $q = q_{z1}$  (рис. 3.2), т. е.  $X = Y = Z = 0$ ,  $q_{x1} = q_{x2} = q_{y1} = q_{y2} = q_{z2} = 0$ .

Систему уравнений теории пластин, состоящую из семнадцати уравнений, можно разделить на две независимые подсистемы. Восемь уравнений (3.7), (3.9), (3.16) и (3.17), включающие восемь неизвестных  $u_0, v_0, \epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, N_x, N_y, N_{xy}$ , описывают напряженно-деформированное состояние в плоскости пластины, а остальные девять уравнений (3.8), (3.10) и (3.18) – (3.20), включающие девять неизвестных  $w, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ , описывают напряженно-деформированное состояние пластины при изгибе. Поэтому можно отдельно рассматривать задачи о нагружении пластины в ее плоскости и о ее изгибе.

## 3.2. Плоское напряженное состояние пластин

### 3.2.1. Общие соотношения

Рассмотрим пластину, нагруженную силами  $P_x$  и  $P_y$ , которые действуют по всему контуру пластины и лежат в ее срединной поверхности. Такие силы вызовут в пластине плоское напряженное состояние (рис. 3.4).

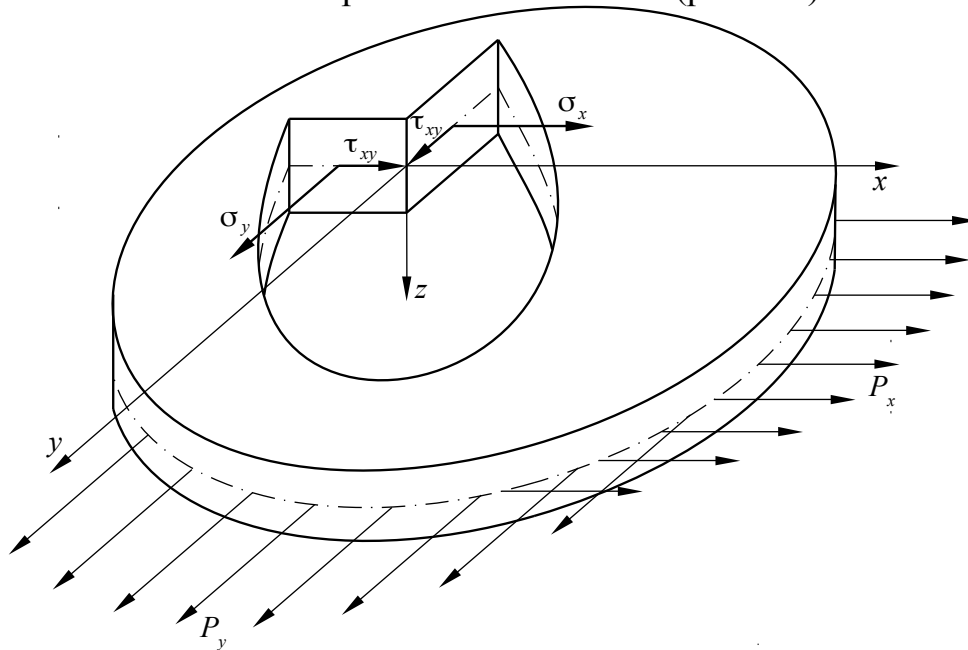


Рис. 3.4. Плоское напряженное состояние пластины

Для этого случая, когда нагрузок на поверхности пластины нет ( $q_x = q_y = 0$ ), уравнения равновесия (3.16) и (3.17) принимают вид:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (3.23)$$

В соответствии с уравнениями (3.13) при отсутствии моментов запишем:

$$N_x = \sigma_x h; \quad N_y = \sigma_y h; \quad N_{xy} = \tau_{xy} h. \quad (3.24)$$

Физические соотношения (3.7) запишутся в следующей форме:

$$N_x = B(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); N_y = B(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); N_{xy} = \frac{B(1-\mu)}{2} \gamma_{xy}, \quad (3.25)$$

$$\text{где } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (3.26)$$

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}.$$

В формулах (3.25), (3.26) индекс «0» у переменных, обозначающих перемещения и деформации, опускается, поскольку напряжения, перемещения и деформации равномерно распределены по толщине пластины.

Мы получили восемь уравнений (3.23), (3.25) и (3.26), содержащие восемь неизвестных  $u$ ,  $v$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ . Решим эту систему уравнений в функциях напряжений.

Запишем уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.27)$$

Это уравнение может быть получено из соотношений (3.26):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Перепишем выражение (3.27) с учетом (3.25):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x - \mu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_y - \mu N_x) = 2(1+\mu) \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.28)$$

Мы получили три уравнения (3.23) и (3.28), содержащие три неизвестных усилия  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ . Сведем эти три уравнения к одному, введя функцию напряжений Эри  $\varphi$ :

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (3.29)$$

Тогда уравнение совместности деформаций (3.28) можно переписать в виде:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (3.30)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор дифференцирования;

$$\nabla^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Полученное уравнение является основным уравнением задачи о плоском напряженном состоянии пластин.

Если известна функция Эри, то по формулам (3.29) можно найти усилия  $N_x, N_y, N_{xy}$ . Затем используя формулы (3.24), можно найти напряжения:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h}; \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h}; \quad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}. \quad (3.31)$$

### 3.2.2. Однородное плоское напряженное состояние

В некоторых случаях плоское напряженное состояние пластин можно считать однородным, т.е. не зависящим от координат (рис. 3.5).

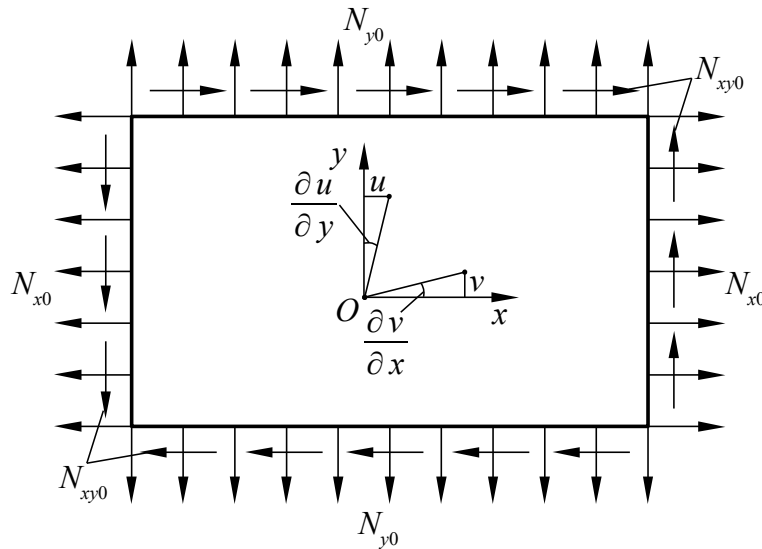


Рис. 3.5. Плоское однородное напряженное состояние пластины

Такое напряженное состояние описывается следующей функцией напряжений:

$$\varphi = \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2 - N_{xy0} xy. \quad (3.32)$$

Данная функция удовлетворяет уравнению (3.30), а из уравнений (3.29) вытекает, что:

$$N_x = N_{x0}; \quad N_y = N_{y0}; \quad N_{xy} = N_{xy0}. \quad (3.33)$$

Найдем перемещения точек пластины  $u$  и  $v$ , считая усилия  $N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0}$  заданными. Из уравнений (3.25) и (3.26) следует:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x); \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy0}. \quad (3.35)$$

Проинтегрировав уравнения (3.34) с учетом того, что усилия  $N_{x0}$  и  $N_{y0}$  постоянны, получим:

$$u = \frac{x}{Eh}(N_{x0} - \mu N_{y0}) + f_1(y); v = \frac{y}{Eh}(N_{y0} - \mu N_{x0}) + f_2(x), \quad (3.36)$$

где  $f_1(y)$  и  $f_2(x)$  – произвольные дифференцируемые функции.

Подставим полученные выражения (3.36) в (3.35):

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy0}. \quad (3.37)$$

Полученное равенство может быть выполнено, если функции  $f_1(y)$  и  $f_2(x)$  имеют вид:

$$f_1(y) = a_1 y + b_1; f_2(x) = a_2 x + b_2, \quad (3.38)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  – некоторые числа.

То есть:

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = a_1; \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = a_2; a_1 + a_2 = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy0}. \quad (3.39)$$

Тогда:

$$u = \frac{x}{Eh}(N_{x0} - \mu N_{y0}) + a_1 y + b_1; v = \frac{y}{Eh}(N_{y0} - \mu N_{x0}) + a_2 x + b_2. \quad (3.40)$$

Если принять, что  $u(0,0) = 0$  и  $v(0,0) = 0$ , т.е. считать, что начало системы координат, связанной с пластиной (рис. 3.5), неподвижно, то должно выполняться условие:  $b_1 = b_2 = 0$ .

Будем считать, что перемещения точек пластины, не совпадающих с началом координат, малы. Тогда и угол поворота пластины  $\gamma$  тоже будет мал:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3.41)$$

При  $\gamma = 0$  из (3.40) и (3.41) следует, что  $a_1 = a_2$ , т.е.:

$$u = \frac{x}{Eh}(N_{x0} - \mu N_{y0}) + \frac{(1+\mu)}{Eh} y N_{xy0}; v = \frac{y}{Eh}(N_{y0} - \mu N_{x0}) + \frac{(1+\mu)}{Eh} x N_{xy0}. \quad (3.42)$$

### 3.2.3. Концентрация напряжений в пластине с круглым отверстием

Теоретические исследования и практика эксплуатации летательных аппаратов и других машин показывают, что в местах резких изменений формы деталей (например, наличие отверстия, резкие переходы от одного диаметра к другому, острые внутренние углы и т.п.) возникают повышенные напряжения, ко-



торые значительно снижают долговечность деталей. Это явление называется концентрацией напряжений.

Рассмотрим для примера задачу о растяжении пластины с малым круговым отверстием – задачу Кирша (рис. 3.6).

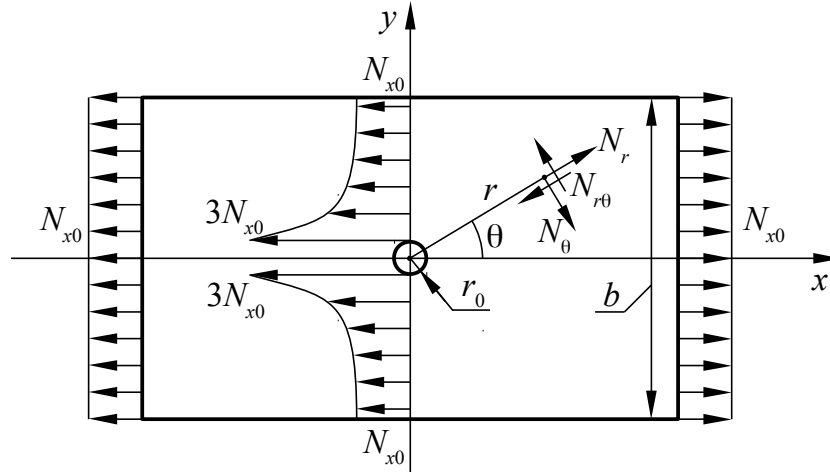


Рис. 3.6. Растяжение пластины с малым круговым отверстием

Введем для пластины полярную систему координат, в которой положение любой точки задается с помощью радиуса  $r$ , проведенного из начала координат (полюса) до рассматриваемой точки, и угла  $\theta$  между радиусом и заданной линией (полярной осью) – в данном примере осью  $x$  декартовой системы координат. Полярная система координат связана с декартовой системой следующими соотношениями:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right); \quad x^2 + y^2 = r^2. \quad (3.43)$$

Из данных соотношений получим:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta; \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (3.45)$$

Пусть некоторая функция  $f(x, y)$  является сложной функцией переменных  $r$  и  $\theta$ . Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cos \theta; \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}; \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}; \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}; \quad (3.50)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (3.51)$$

С учетом полученных выражений (3.46) – (3.51) основное уравнение задачи о плоском напряженном состоянии пластин (3.30) принимает вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (3.52)$$

Найдем связь между усилиями  $N_r$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{r\theta}$  (рис. 3.6) и функцией напряжений  $\varphi$ . Из рис. 3.6 вытекает, что при  $\theta=0$  усилия в полярной и декартовой системах координат совпадают:  $N_x = N_r$ ,  $N_y = N_\theta$ ,  $N_{xy} = N_{r\theta}$ . Используя формулы (3.29) с учетом выражений (3.46) – (3.51), при  $\theta=0$ , получим:

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad N_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad N_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \quad (3.53)$$

Функция напряжений, соответствующая равномерному растяжению вдоль оси  $x$  (рис. 3.6), согласно (3.32), имеет вид:

$$\varphi^*(x, y) = \frac{1}{2} N_{x0} y^2. \quad (3.54)$$

В полярной системе координат в соответствии с (3.43) эта функция будет иметь вид:

$$\varphi^*(r, \theta) = \frac{1}{2} N_{x0} r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} N_{x0} r^2 (1 - \cos 2\theta). \quad (3.55)$$

Данной функции соответствуют следующие усилия, полученные по формулам (3.53):

$$N_r^* = \frac{N_{x0}}{2}(1 + \cos 2\theta), N_\theta^* = \frac{N_{x0}}{2}(1 - \cos 2\theta), N_{r\theta}^* = -\frac{N_{x0}}{2} \sin 2\theta. \quad (3.56)$$

Однако полученные формулы (3.56) описывают равномерное нагружение пластины без учета концентрации напряжений. В связи с этим перейдем к получению формул, учитывающих это явление.

Зададим функцию напряжений в общем виде с учетом структуры формулы (3.55):

$$\varphi = f_1(r) + f_2(r) \cos 2\theta, \quad (3.57)$$

где  $f_1(r), f_2(r)$  – некоторые функции от  $r$ .

Подставим (3.57) в (3.52):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) + \\ & + \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{4}{r^2} f_2 \right) \cos 2\theta = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Это уравнение должно выполняться для всех значений  $\theta$ , тогда функции  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$  должны удовлетворять уравнениям:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) = 0; \quad (3.59)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \right) \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{4}{r^2} f_2 \right) = 0. \quad (3.60)$$

Общие решения этих уравнений приводят к следующей функции напряжений:

$$\varphi = (c_1 r^2 \ln r + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4) + \left( c_5 r^2 + c_6 r^4 + \frac{c_7}{r^2} + c_8 \right) \cos 2\theta, \quad (3.61)$$

где  $c_1, \dots, c_8$  – постоянные интегрирования.

Используем (3.61) для получения усилий по формулам (3.53):

$$\left. \begin{aligned} N_r &= c_1(1 + 2 \ln r) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} - \left( 2c_5 + \frac{6c_7}{r^4} + \frac{4c_8}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ N_\theta &= c_1(3 + 2 \ln r) + 2c_2 - \frac{c_3}{r^2} + \left( 2c_5 + 12c_6 r^2 + \frac{6c_7}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ N_{r\theta} &= \left( 2c_5 + 6c_6 r^2 - \frac{6c_7}{r^4} - \frac{2c_8}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

При большом удалении от отверстия ( $r \rightarrow \infty$ ) усилия (3.62) должны совпадать с (3.56). Для этого нужно, чтобы выполнялось условие:  $c_1 = c_6 = 0$ . Тогда:

$$\left. \begin{aligned} 2c_2 - 2c_5 \cos 2\theta &= \frac{N_{x0}}{2}(1 + \cos 2\theta); \\ 2c_2 + 2c_5 \cos 2\theta &= \frac{N_{x0}}{2}(1 - \cos 2\theta); \\ 2c_5 \sin 2\theta &= -\frac{N_{x0}}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

На контуре отверстия ( $r = r_0$ ) усилия  $N_r$  и  $N_{r\theta}$  должны обращаться в нуль. Тогда из (3.62) получим:

$$2c_2 + \frac{c_3}{r_0^2} - \left( 2c_5 + \frac{6c_7}{r_0^4} + \frac{4c_8}{r_0^2} \right) \cos 2\theta = 0; \quad 2c_5 - \frac{6c_7}{r_0^4} - \frac{2c_8}{r_0^2} = 0. \quad (3.64)$$

Из (3.63) и (3.64) получим:

$$c_2 = \frac{1}{4} N_{x0}; \quad c_3 = -\frac{r_0^2}{2} N_{x0}; \quad c_5 = -\frac{1}{4} N_{x0}; \quad c_7 = -\frac{r_0^4}{4} N_{x0}; \quad c_8 = \frac{r_0^2}{2} N_{x0}. \quad (3.65)$$

Окончательно усилия в пластине с малым круговым отверстием радиуса  $r_0$  при растяжении вдоль оси  $x$  декартовой системы координат (рис. 3.6) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{N_{x0}}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{N_{x0}}{2} \left( 1 + \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ N_{\theta} &= \frac{N_{x0}}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{N_{x0}}{2} \left( 1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ N_{r\theta} &= -\frac{N_{x0}}{2} \left( 1 - \frac{3r_0^4}{r^4} + \frac{2r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Из формул (3.66) вытекает, что в точках контура отверстия ( $r = r_0$ ):

$$N_r = N_{r\theta} = 0; \quad N_{\theta} = N_{x0}(1 - 2\cos 2\theta). \quad (3.67)$$

Это значит, что нормальные тангенциальные усилия  $N_{\theta}$  будут максимальными при  $\theta = 90^\circ$ , т.е. в точках контура отверстия, лежащих на оси  $y$  (рис. 3.6), причем  $N_{\theta}^{\max} = 3N_{x0}$ . Этот вывод также справедлив и для напряжений, поскольку распределенные усилия и напряжения связаны друг с другом соотношениями (3.31).

Основными показателями концентрации напряжений являются теоретические коэффициенты концентрации напряжений:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{НОМ}}}; \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{НОМ}}}, \quad (3.67)$$

где  $\sigma_{\max}, \tau_{\max}$  – максимальные напряжения;  
 $\sigma_{\text{НОМ}}, \tau_{\text{НОМ}}$  – номинальные напряжения.

Номинальные напряжения – это напряжения, определяемые в наиболее ослабленном сечении детали без учета эффекта концентрации напряжений. Для рассматриваемого примера (рис. 3.6) нормальные номинальные напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_{\text{НОМ}} = \frac{N_{x0} b}{h(b-2r_0)} = \frac{N_{x0}}{h \left(1 - \frac{d_0}{b}\right)}, \quad (3.68)$$

где  $b$  – ширина пластины;  
 $d_0 = 2r_0$  – диаметр отверстия.

Формулы (3.66) выведены в предположении, что ширина пластины достаточно велика. То есть, если  $\frac{d_0}{b} \rightarrow 0$ , то  $\sigma_{\text{НОМ}} \rightarrow \frac{N_{x0}}{h}$ . Поскольку  $\sigma_{\max} = \frac{N_{\theta}^{\max}}{h} = \frac{3 N_{x0}}{h}$ , то при данных условиях:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{НОМ}}} = \frac{3 N_{x0}}{h} \frac{h}{N_{x0}} = 3. \quad (3.69)$$

При увеличении диаметра отверстия или при уменьшении ширины пластины, т.е. при увеличении отношения  $\frac{d_0}{b}$  теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_{\sigma}$  будет уменьшаться. Зависимость  $\alpha_{\sigma}$  от  $\frac{d_0}{b}$  показана на рис. 3.7.

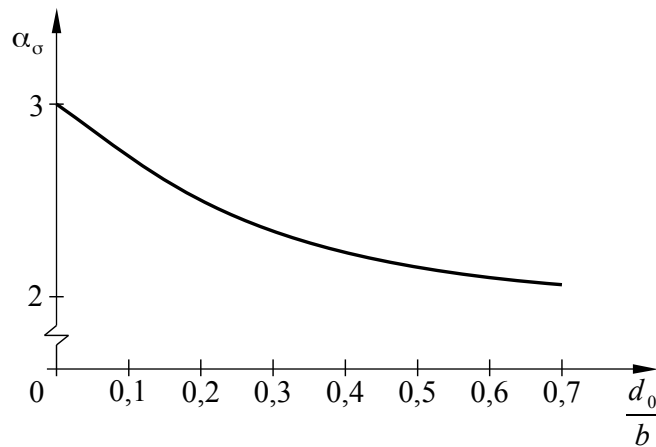


Рис. 3.7. Зависимость теоретического коэффициента концентрации напряжений от соотношения диаметра отверстия и ширины пластины

### 3.3. Изгиб пластин

#### 3.3.1. Общие соотношения и граничные условия

Рассмотрим нагружение пластины поперечной распределенной нагрузкой  $q(x, y)$  (рис. 3.8).

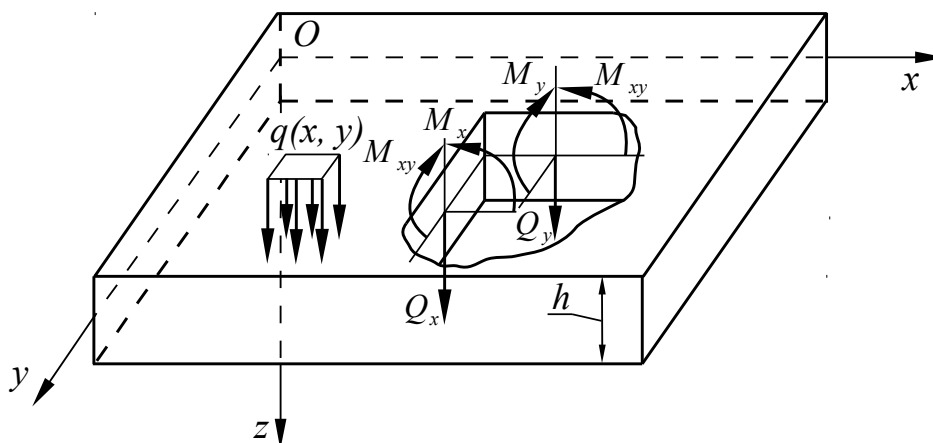


Рис. 3.8. Силовые факторы при изгибе пластины

Такое нагружение вызовет изгиб пластины. Поскольку в плоскости пластины внешних сил не приложено, то:  $u_0 = v_0 = 0$  и  $N_x = N_y = N_{xy} = 0$ . Таким образом, из перемещений остается только прогиб  $w(x, y)$ , а из силовых факторов – поперечные силы  $Q_x, Q_y$  и моменты  $M_x, M_y, M_{xy}$ .

Из уравнений (3.1) при условии  $u_0 = v_0 = 0$  вытекает, что перемещения точек пластины вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  определяются равенствами:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.70)$$

Почему точки пластины совершают перемещения вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  при отсутствии нагрузки в плоскости пластины, становится ясным при рассмотрении рис. 3.9.

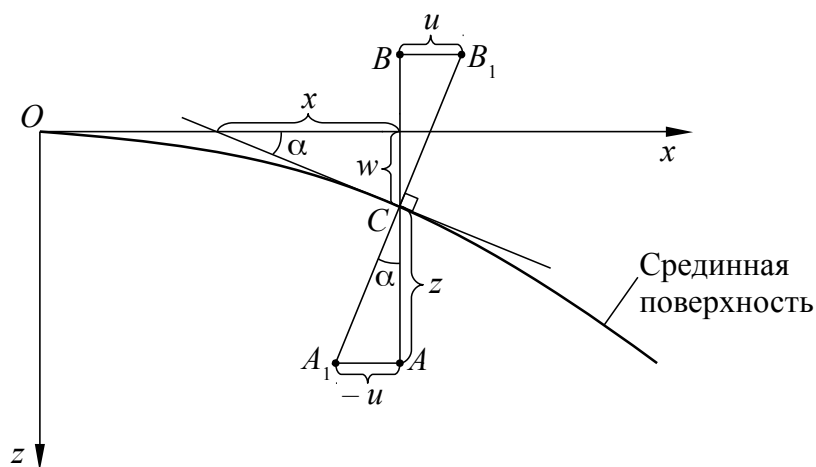


Рис. 3.9. Перемещения точек пластины при изгибе

Рассмотрим нормальный элемент  $AB$ , который в соответствии с гипотезами Кирхгофа остается прямым и нормальным к срединной поверхности после ее деформации (отрезок  $A_1B_1$ ). При изгибе пластины точка  $C$  (точка пересечения середины отрезка со срединной поверхностью) совершает перемещение  $w$  – возникает прогиб, а также возникает поворот нормального элемента на некоторый угол. Этот поворот приведет к перемещениям точек нормального элемента, не совпадающих с точкой  $C$ , вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . На рис. 3.9 рассматриваются перемещения точек пластины в плоскости  $xOz$  при условии, что эти перемещения малы. Малость перемещений позволяет допустить, что точки нормального элемента при его повороте на угол  $\alpha$ , например, его концы  $A$  и  $B$  совершают перемещения  $-u$  и  $+u$  соответственно только вдоль оси  $Ox$ . В реальности эти точки при повороте нормального элемента будут также совершать перемещения и вдоль оси  $Oz$ , но этим перемещением ввиду его чрезвычайной малости мы пренебрежем.

При принятых допущениях длина отрезка  $AA_1$  равна:  $AA_1 = -u = z \operatorname{tg} \alpha$ . Касательная к срединной поверхности, проходящая через точку  $C$ , также составит с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ . При этом в соответствии с геометрическим смыслом производной в точке  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$ . Откуда получаем, что  $u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$ . Аналогичные рассуждения можно проделать и для второй формулы (3.70), касающейся перемещения  $v$ . Таким образом, производные  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$  являются углами поворота нормали к срединной поверхности в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно при условии малости этих углов.

Изгибающие и крутящий моменты связаны с кривизной срединной поверхности при изгибе пластины выведенными выше соотношениями (3.8). Кривизна пластины выражается через прогиб  $w$  формулами (3.10). Имеются также уравнения равновесия (3.18) – (3.20). Таким образом, существует девять уравнений с девятью неизвестными:  $w, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ . Сведем эти уравнения к одному, включающему в качестве неизвестной только одну функцию  $w(x, y)$ . С этой целью подставим  $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$  из (3.10) в (3.8) и получим:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.71)$$

Из уравнений (3.19) и (3.20) выразим поперечные силы:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.72)$$

и перепишем с учетом (3.71):

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3.73)$$

Подставим (3.73) в (3.18) и в итоге получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{q}{D} \quad (3.74)$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}. \quad (3.75)$$

Полученное выражение называется уравнением Софи Жермен–Лагранжа и является основным уравнением теории изгиба пластин.

Если найден прогиб пластины, то с помощью формул (3.71) и (3.72) можно найти моменты и поперечные силы, а затем по формулам (3.13), (3.21) и (3.22) – напряжения.

Необходимо отметить, что решение уравнения (3.75) должно удовлетворять граничным условиям, отражающим характер закрепления или нагружения пластины по контуру. Рассмотрим несколько примеров граничных условий.

1. Жестко защемленный край (рис. 3.10).

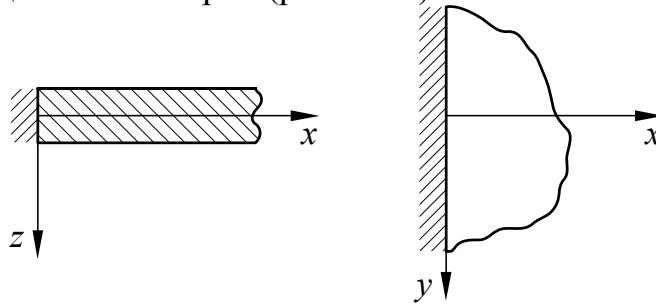


Рис. 3.10. Жестко защемленный край пластины

Рассмотрим жестко защемленный край при  $x = 0$ . В этом случае все перемещения у этого края должны быть равны нулю:  $u = v = w = 0$ . Из соотношений (3.70) следует, что  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  и  $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ . То есть на защемленных краях пластины обращаются в нуль прогиб и соответствующие углы поворота нормали к срединной поверхности. Граничные условия при этом имеют вид:

$$\text{при } x = \text{const } w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \text{ при } y = \text{const } w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3.76)$$

2. Шарнирно опертый край (рис. 3.11).

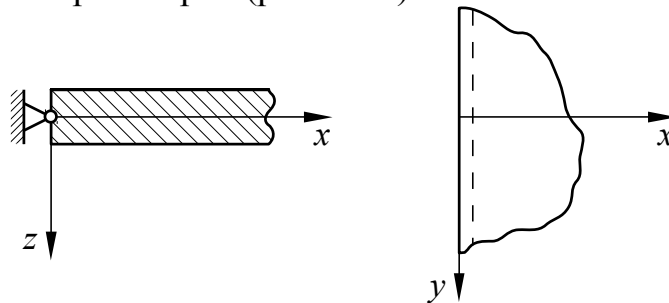


Рис. 3.11. Шарнирно опертый край пластины



На шарнирно опертом крае обращаются в нуль прогиб и изгибающий момент. Например, при  $x = 0$  необходимо, чтобы  $w = 0$  и  $M_x = 0$ . С учетом формул (3.71) граничные условия примут вид:

$$\text{при } x = \text{const } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \text{ при } y = \text{const } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.77a)$$

Однако для прямоугольной пластины эти граничные условия можно упростить. Рассмотрим край пластины при  $x = 0$ . Вдоль всего этого края в направлении оси  $y$  должно выполняться условие  $w = 0$ , т.к. опора считается абсолютно жесткой. Но это значит, что одновременно на этом крае должны также выполняться условия:  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ . Аналогично для края при  $y = 0$ :

$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ . Тогда граничные условия на шарнирно опертых краях прямоугольной пластины примут вид:

$$\text{при } x = \text{const } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \text{ при } y = \text{const } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (3.77б)$$

### 3. Свободный край (рис. 3.12).

На свободном крае, например, при  $x = 0$  должны отсутствовать напряжения  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ . Это значит, что в соответствии с формулами (3.13) и (3.21) должны выполняться условия  $M_x = M_{xy} = Q_x = 0$ . Эти три условия можно свести к двум, как и в предыдущих случаях.

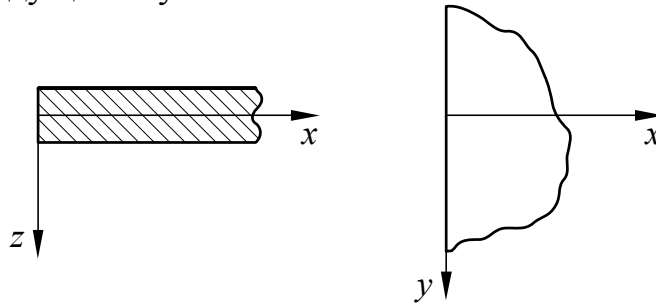


Рис. 3.12. Свободный край пластины

Крутящий момент на крае можно представить в виде пары эквивалентных поперечных сил. Рассмотрим край  $x = 0$ . Мы можем заменить момент  $M_{xy} dy$  на некотором элементарном участке  $AB = dy$  парой поперечных сил, приложенных в точках  $A$  и  $B$  (рис. 3.13а).

Эти поперечные силы будут численно равны распределенному моменту  $M_{xy}$ , который имеет размерность силы. На соседнем участке в точках  $B$  и  $C$  эквивалентные поперечные силы будут равны  $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ .

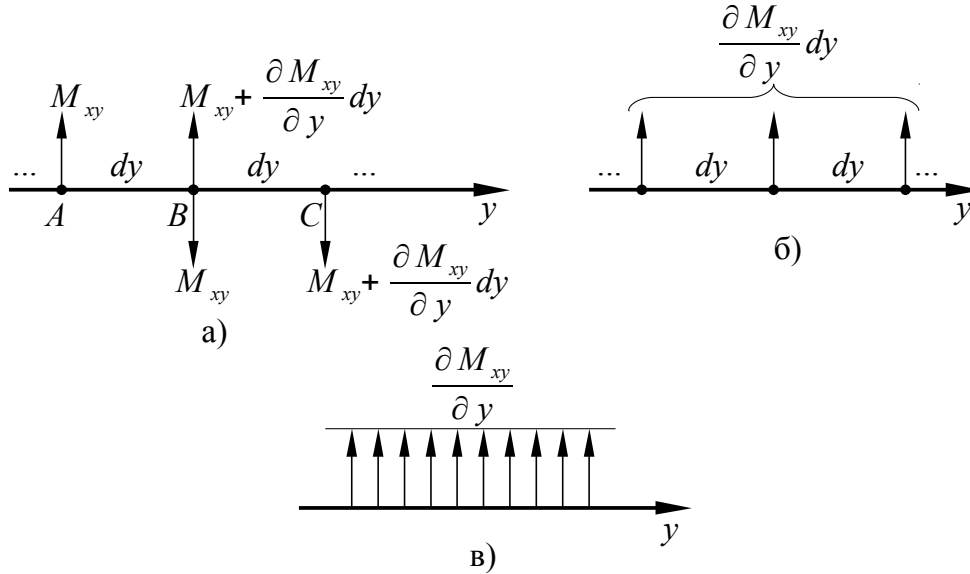


Рис. 3.13. К выводу формулы обобщенной поперечной силы Кирхгофа

В результате в точке  $B$  будет действовать поперечная эквивалентная сила  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ . Это справедливо и для любых других точек (рис. 3.13б), поскольку точка  $B$  является произвольной. От сосредоточенных поперечных сил перейдем к распределенной поперечной силе  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$  (рис. 3.13в), добавив которую к основной распределенной поперечной силе, получим обобщенную поперечную силу Кирхгофа:

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (3.78)$$

Аналогично для края  $y = 0$  запишем:

$$Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (3.79)$$

Таким образом, граничные условия на свободном крае будут иметь вид:

$$\text{при } x = \text{const } M_x = Q_x^* = 0; \text{ при } y = \text{const } M_y = Q_y^* = 0. \quad (3.80)$$

Эти граничные условия можно записать через прогиб  $w$ , используя соотношения (3.71) и (3.73):

$$\text{при } x = \text{const } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0; \quad (3.81a)$$

$$\text{при } y = \text{const } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0. \quad (3.81б)$$

Получим выражение для полной энергии изгибаемой пластины. Потенциальная энергия деформации (1.24) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$U = \iiint \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (3.82)$$

Из формул Коши (1.14) и (1.16) с учетом выражений (3.70) для перемещений точек пластины вдоль осей  $x$  и  $y$  получим:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.83)$$

Осуществляя интегрирование в (3.82) по  $z$  от  $-h/2$  до  $+h/2$  с учетом (3.6), получим:

$$U = \iint \frac{1}{2} \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy. \quad (3.84)$$

Работа поперечной нагрузки  $q$  на перемещении  $w$  имеет вид:

$$A = \iint qw dx dy. \quad (3.85)$$

Подставляя в формулу (1.34) для полной энергии упругой системы выражения (3.84) и (3.85) с учетом (3.71), окончательно получим:

$$\mathcal{E} = \iint \left\{ \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - qw \right\} dx dy. \quad (3.86)$$

### 3.3.2. Методы расчета пластин на изгиб

Рассмотрим некоторые методы расчета изгибаемых прямоугольных пластин. Точных методов решения данной задачи при любых условиях закрепления пластины в настоящее время неизвестно. На практике обычно используют приближенные методы, теоретические основы которых изложены выше в подразделе 1.7. Для некоторых частных случаев закрепления пластины существуют специальные методы, например, метод Навье.

#### Расчет пластин на изгиб методом Навье

Этот метод применяется для решения задачи об изгибе прямоугольной пластины, шарнирно опертой по всему контуру и нагруженной поперечной произвольно распределенной нагрузкой  $q(x, y)$  (рис. 3.14).

Разрешающим уравнением в данном случае будет уравнение (3.74), которое перепишем в виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (3.87)$$

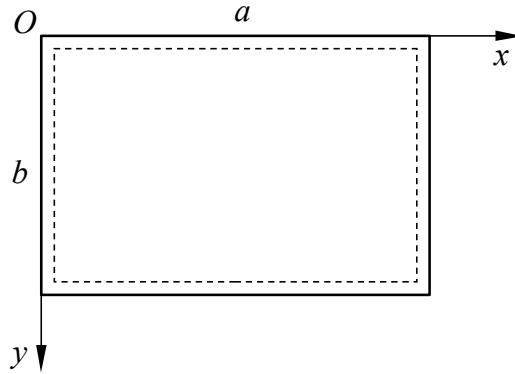


Рис. 3.14. Шарнирно опертая по контуру пластина

Граничные условия для шарнирного закрепления пластины по контуру имеют вид, соответствующий (3.77б):

$$\begin{aligned} - \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \\ - \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Пусть решение уравнения (3.87) имеет следующий вид, удовлетворяющий заданным граничным условиям:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.88)$$

где  $A_{mn}$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставим решение (3.88) в уравнение (3.87) и получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (3.89)$$

$$\text{где } a_{mn} = A_{mn} \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (3.90)$$

Умножим обе части равенства (3.89) на  $\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy$  ( $k, l = 1, 2, \dots$ ) и проинтегрируем его по  $x$  от 0 до  $a$  и по  $y$  от 0 до  $b$  с учетом свойства ортогональности тригонометрических функций, из которого следует:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 \text{ при } m \neq k; \\ a/2 \text{ при } m = k; \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 \text{ при } n \neq l; \\ b/2 \text{ при } n = l. \end{cases}$$

В результате получим:

$$a_{mn} = \frac{4}{abD} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (3.91)$$

Из (3.90) и (3.91) вытекает, что:

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^4 abD \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (3.92)$$

Таким образом, задача может быть решена с использованием выражений (3.88) и (3.92).

### Расчет пластин на изгиб методом Ритца–Тимошенко

В соответствии с (1.58) функцию прогиба можно представить в виде:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^k C_i W_i(x, y), \quad (3.93)$$

где  $W_i(x, y)$  – задаваемые аппроксимирующие функции, удовлетворяющие по крайней мере геометрическим граничным условиям.

Неизвестные коэффициенты  $C_i$  определяются на основании условия (1.60):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial C_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (3.94)$$

где полная потенциальная энергия  $\mathcal{E}$  вычисляется при подстановке (3.93) в (3.86).

Уравнение (3.94) приводит к системе линейных алгебраических уравнений, матричная форма которых имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

где

$$a_{ij} = D \iint \left\{ \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x \partial y} \right\} dx dy;$$

$$b_i = \iint q W_i dx dy \quad (i, j=1, 2, \dots, k).$$

Искомая функция прогибов  $w(x, y)$  получается после определения коэффициентов  $C_i$  из (3.95) и подстановки их в (3.93).

В качестве примера рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую по контуру пластину (рис. 3.14), нагруженную сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в точке с координатами  $x = x_P, y = y_P$ .

Искомую функцию прогибов представим в виде:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.96)$$

Аппроксимирующие функции  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  и  $\sin \frac{n\pi y}{b}$  выбраны таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям и обладали свойством ортогональности. Тогда матрица коэффициентов  $a_{ij}$  будет диагональной. Это значит, что нужно вычислить только коэффициенты  $a_{ij}$ , у которых  $i = j$ :

$$a_{ii} = D \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (3.97)$$

После интегрирования получим:

$$a_{ii} = \frac{\pi^4 a b D}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (3.98)$$

Коэффициенты  $b_i$  при действии сосредоточенной нагрузки  $P$  в точке с координатами  $(x_P, y_P)$  определяются по формуле:

$$b_i = P \sin \frac{m\pi x_P}{a} \sin \frac{n\pi y_P}{b}. \quad (3.99)$$

Неизвестные коэффициенты  $C_{mn} \equiv C_i$  найдем по формуле:

$$C_{mn} = \frac{4 P \sin \frac{m\pi x_P}{a} \sin \frac{n\pi y_P}{b}}{\pi^4 a b D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (3.100)$$

Искомая функция прогибов будет иметь вид:

$$w(x, y) = \frac{4 P}{\pi^4 a b D} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l \frac{\sin \frac{m\pi x_P}{a} \sin \frac{n\pi y_P}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.101)$$

### Расчет пластин на изгиб методом Бубнова–Галеркина

Решение задачи об изгибе пластины методом Бубнова–Галеркина сводится к решению разрешающего уравнения теории изгиба пластин (3.74), которое перепишем в виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = 0. \quad (3.102)$$

Решение этого уравнения представляется в виде ряда:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^k C_i W_i(x, y), \quad (3.103)$$

где  $W_i(x, y)$  – задаваемые аппроксимирующие функции, удовлетворяющие всем (геометрическим и статическим) граничным условиям.

Неизвестные коэффициенты  $C_i$  определяются из условий:

$$\iint \Phi(x, y, C_i, q/D) W_i dx dy = 0, \quad (3.104)$$

где  $\Phi(x, y, C_i, q/D)$  – функция, являющаяся результатом подстановки (3.103) в (3.102).

Условия (3.104) после вычисления интегралов дают систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_i$ , при решении которой они находятся.

В качестве примера рассмотрим прямоугольную жестко защемленную по контуру пластину (рис. 3.15), нагруженную равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q_0$ .

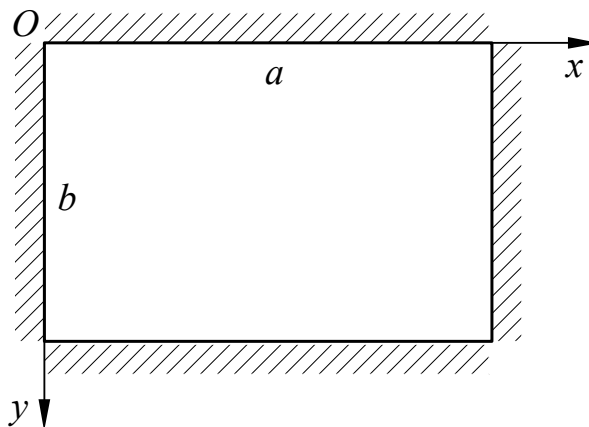


Рис. 3.15. Жестко защемленная по контуру пластина

Ограничимся в (3.103) первым членом ряда и представим аппроксимирующую функцию в виде:

$$W_1(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y), \quad (3.105)$$

где  $\varphi_1(x) = \frac{x^2}{a^4}(x-a)^2$ ,  $\psi_1(y) = \frac{y^2}{b^4}(y-b)^2$  – функции, представляющие собой формы прогибов полосок, вырезанных из пластины вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Эти функции составлены с учетом того, чтобы аппроксимирующая функция (3.105) удовлетворяла всем граничным условиям.

При данных условиях решение (3.103) примет вид:

$$w(x, y) = C_1 \frac{x^2}{a^4} (x-a)^2 \frac{y^2}{b^4} (y-b)^2. \quad (3.106)$$

Подставим решение (3.106) в (3.102) и получим:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, C_1, q/D) = & \frac{C_1}{a^4 b^4} [24x^2(x-a)^2 + \\ & + 8(6x^2 - 6ax + a^2)(6y^2 - 6by + b^2) + 24y^2(y-b)^2] - \frac{q_0}{D}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

На основании (3.104) составим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{C_1}{a^4 b^4} [24x^2(x-a)^2 + 8(6x^2 - 6ax + a^2)(6y^2 - 6by + b^2) + \right. \\ \left. + 24y^2(y-b)^2] - \frac{q_0}{D} \right\} \frac{x^2}{a^4} (x-a)^2 \frac{y^2}{b^4} (y-b)^2 dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.108)$$

После интегрирования будем иметь:

$$C_1 = \frac{7a^4 b^4 q_0}{8 \left( a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right) D}. \quad (3.109)$$

В итоге получим искомую функцию прогиба в виде:

$$w(x, y) = \frac{7x^2 y^2 (x-a)^2 (y-b)^2 q_0}{8 \left( a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right) D}. \quad (3.110)$$

### Расчет пластин на изгиб методом сеток

Этот метод относится к дискретным, конечно-разностным методам. На пластину наносится сетка, в узлах которой отмечаются и нумеруются точки (рис. 1.8). Тогда для каждой точки можно записать разрешающее уравнение теории изгиба пластин (3.74), представленное в виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (3.111)$$



с помощью формул для конечных разностей (1.68), (1.73) и (1.77). Например, для точки с номером  $i j$  получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^4} (w_{i(j+2)} - 4w_{i(j+1)} + 6w_{ij} - 4w_{i(j-1)} + w_{i(j-2)}) + \\ & + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} (4w_{ij} - 2w_{(i+1)j} - 2w_{i(j+1)} - 2w_{i(j-1)} - 2w_{(i-1)j} + \\ & \quad + w_{(i+1)(j+1)} + w_{(i+1)(j-1)} + w_{(i-1)(j+1)} + w_{(i-1)(j-1)}) + \\ & + \frac{1}{\Delta y^4} (w_{(i+2)j} - 4w_{(i+1)j} + 6w_{ij} - 4w_{(i-1)j} + w_{(i-2)j}) = \frac{q_{ij}}{D}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Однако если точка расположена менее чем за два шага от границы пластины, то для записи уравнения (3.112) потребуются прогибы в точках, которые находятся за границами пластины. Это так называемые законтурные (фиктивные) точки. Прогибы в этих точках определяются через прогибы в точках, принадлежащих пластине, с использованием граничных условий. Пусть линия 21...28 на рис. 1.8 является шарнирно опертым краем. Тогда прогиб, например, в точке 15 можно выразить через прогиб в точке 35 следующим образом. Поскольку точка 25 принадлежит шарнирно опертому краю, то, исходя из (3.77б), можно записать:

$$w_{25} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{25} = 0. \quad (3.113)$$

Тогда из (1.71) следует:

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{25} = \frac{1}{\Delta y^2} (w_{35} - 2w_{25} + w_{15}) = 0. \quad (3.114)$$

Откуда с учетом того, что из (3.113)  $w_{25} = 0$ :

$$w_{15} = -w_{35}. \quad (3.115)$$

В итоге мы можем получить разрешающую систему уравнений типа (3.112). Она должна содержать число уравнений, соответствующее числу неизвестных прогибов в точках пластины. Тогда задача будет решена.

### Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные допущения теории упругости.
2. Запишите условия равновесия элементарного объема упругого тела.
3. Запишите статические граничные условия на поверхности упругого тела.
4. Запишите геометрические соотношения Коши для упругого тела.
5. Как описывается связь компонентов вектора деформаций?
6. Запишите уравнения обобщенного закона Гука.
7. Что такое потенциальная энергия деформаций?
8. Что такое полная энергия упругой системы?
9. Сформулируйте вариационный принцип Лагранжа.
10. Что такое дополнительная потенциальная энергия деформаций?
11. Сформулируйте вариационный принцип Кастильяно.
12. Сформулируйте принцип наименьшей работы.
13. Сформулируйте теорему Кастильяно.
14. Изложите суть метода Ритца–Тимошенко.
15. Изложите суть метода Бубнова–Галеркина.
16. Изложите суть метода конечных разностей.
17. Что такое стержень? Какие виды стержней и стержневых систем вы знаете?
18. Какова задача кинематического анализа стержневых систем?
19. Что является необходимым условием геометрической неизменяемости стержневой системы?
20. Изложите основные положения метода вырезания узлов.
21. В чем суть метода моментных точек?
22. Как определить перемещения узлов статически определимой фермы с помощью теоремы Кастильяно?
23. Изложите порядок расчета статически неопределимых ферм по методу сил.
24. Как определить перемещения узлов статически неопределимой фермы?
25. В каком случае выгоден матричный метод расчета стержневых систем?
26. Можно ли применять матричный метод для расчета статически неопределимых стержневых систем?
27. Как составляется структурная матрица?
28. Как составляется «выметающая» матрица?
29. Как раскрывается статическая неопределимость стержневой системы в матричном методе?
30. Как соотносятся матрица жесткости и матрица гибкости стержневой системы?
31. Что такое пластина?

32. Что такое срединная поверхность пластины?
33. Что называется прогибом пластины?
34. Изложите гипотезы Кирхгофа.
35. Запишите уравнения равновесия элемента срединной поверхности пластины.
36. Приведите соотношения, описывающие плоское напряженное состояние пластины.
37. Что такое концентрация напряжений?
38. Как решается задача определения теоретического коэффициента концентрации напряжений в пластине с круглым отверстием.
39. Какие допущения принимаются при выводе уравнений теории изгиба пластин?
40. Запишите граничные условия для жестко защемленного, шарнирно опертого и свободного краев пластины.
41. Запишите выражение для полной энергии изгибаемой пластины.
42. Какие методы расчета пластин на изгиб вы знаете?

## Литература

1. **Бицено К.Б., Граммель Р.** Техническая динамика / пер. с нем. Я.И. Перельмана, Е.П. Попова / под ред. А.И. Лурье. – Л.–М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 900 с. – Т. 1.
2. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – изд. перераб. / под ред. Г. Гроше, В. Циглера / пер. с нем. – М.: Наука, 1980. – 976 с.
3. **Ван Цзи-Де.** Прикладная теория упругости / пер. с англ. И.Н. Землянских / под ред. А.С. Вольмира. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 400 с.
4. **Дарков А.В., Шапошников Н.Н.** Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов. – изд. 8-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 607 с.
5. **Демидов С.П.** Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 388 с.
6. **Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И.** Основы и методы прикладной теории упругости: учебное пособие для вузов. – Киев: Вища школа, 1981. – 328 с.
7. **Страхов Г.И., Чунарева Н.Н.** Строительная механика самолета. – М.: МИИГА, 1983. – 96 с.
8. **Строительная механика летательных аппаратов:** учебник для авиационных специальностей вузов / под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
9. **Феодосьев В.И.** Сопротивление материалов: учебник для втузов – изд. 9-е, перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 512 с.