МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Ю. И. Дементьев, Е. Н. Кушнер, В. А. Ухова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

для студентов II курса
по направлению 162500
заочного обучения

Москва – 2013

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Ю. И. Дементьев, Е. Н. Кушнер, В. А. Ухова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

для студентов II курса
по направлению 162500
заочного обучения

Москва – 2013

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, доцент В. В. Солодов

Высшая математика. Пособие по выполнению контрольных работ и варианты заданий для студентов 2 курса по направлению 162500 заочного обучения.

Пособие издаётся в соответствии с рабочей программой дисциплины „Высшая математика“ по рабочему учебному плану направления 162500.

Пособие охватывает разделы математики, изучаемые студентами на втором курсе.

В пособии содержатся варианты контрольных работ и образцы их решения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры от 21 января 2013 года и методического совета от 26 марта 2013 года.

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для студентов 2 курса по направлению 162500. В пособии содержатся варианты контрольных работ и образцы их решения.

Студенты заочного отделения специальности 162500 изучают математику на первом и втором курсах.

Распределение часов по видам занятий и формы контроля

Период обучения	Часы на дисциплину				Форма контроля
	общие	самост. работа	лекции	практ. занятия	
Курс 1 Семестр 1	252	218	18	16	зачёт
Курс 1 Семестр 2	216	192	12	12	экзамен
Курс 2	144	118	12	14	экзамен
Всего часов	612	528	42	42	

Каждое лекционное и практическое занятие длится по 2 часа.

Контрольные работы

На втором курсе студенты должны выполнить контрольную работу №4 и контрольную работу №5.

Контрольная работа №4 содержит следующие темы. Числове ряды. Степенные ряды. Приложения рядов. Ряды Фурье.

Контрольная работа №5 содержит следующие темы. Теория вероятностей. Математическая статистика.

В конце второго курса перед экзаменом происходит собеседование по контрольным работам.

Указания по выполнению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради печатными буквами должны быть написаны фамилия, имя и отчество студента, учебный номер (шифр), название дисциплины, семестр или курс обучения, номер контрольной работы и номер варианта.

3. В работе необходимо решить все задания, указанные в контрольной работе. Тетради, содержащие не все задания контрольной работы, а также задания не своего варианта, не зачитываются.

4. Номера заданий, которые студент должен выполнить в контрольной работе, определяются по таблице вариантов (см. ниже). Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента, при этом цифра 0 соответствует варианту 10.

Номера заданий для выполнения контрольных работ

Вариант	Контрольная работа №4	Контрольная работа №5
1	1.1 2.1 3.1 4.1	5.1 6.1 7.1 8.1 9.1 10.1 11.1 12.1
2	1.2 2.2 3.2 4.2	5.2 6.2 7.2 8.2 9.2 10.2 11.2 12.2
3	1.3 2.3 3.3 4.3	5.3 6.3 7.3 8.3 9.3 10.3 11.3 12.3
4	1.4 2.4 3.4 4.4	5.4 6.4 7.4 8.4 9.4 10.4 11.4 12.4
5	1.5 2.5 3.5 4.5	5.5 6.5 7.5 8.5 9.5 10.5 11.5 12.5
6	1.6 2.6 3.6 4.6	5.6 6.6 7.6 8.6 9.6 10.6 11.6 12.6
7	1.7 2.7 3.7 4.7	5.7 6.7 7.7 8.7 9.7 10.7 11.7 12.7
8	1.8 2.8 3.8 4.8	5.8 6.8 7.8 8.8 9.8 10.8 11.8 12.8
9	1.9 2.9 3.9 4.9	5.9 6.9 7.9 8.9 9.9 10.9 11.9 12.9
10	1.10 2.10 3.10 4.10	5.10 6.10 7.10 8.10 9.10 10.10 11.10 12.10

5. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к собеседованию по контрольной работе, к сдаче зачёта или экзамена.

6. Решения заданий надо располагать в порядке возрастания их номеров.

7. Перед решением каждого задания необходимо написать её номер и полностью переписать условие. В случае, если несколько заданий, из которых студент выбирает задания своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задания, заменить общие данные конкретными, взятыми из своего варианта.

8. Решения заданий следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

9. После получения прорецензированной работы, как незачтённой, так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решения заданий те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на неё. Поэтому при выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

Задание 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.1. а) $a_n = \dfrac{n}{n^4+3}$, б) $a_n = \dfrac{n!}{5^n}$

1.2. а) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, б) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

1.3. а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$, б) $a_n = \dfrac{n^2}{3^n}$

1.4. а) $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2+3n+1}$, б) $a_n = \dfrac{e^n}{n}$

1.5. а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+3)}$, б) $a_n = \dfrac{3^n}{n^n}$

1.6. а) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{2n+1}\right)^{3n}$, б) $a_n = \dfrac{n\,2^n}{3^n}$

1.7. а) $a_n = \dfrac{n^2+5}{n^3+3n^2+4}$, б) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

1.8. а) $a_n = \dfrac{3n+2}{4n-1}$, б) $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$

1.9. а) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$, б) $a_n = \dfrac{3^n}{4^n n!}$

1.10. а) $a_n = \dfrac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}}$, б) $a_n = \dfrac{n!}{\sqrt{2^n}}$

Задание 2. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Исследовать сходимость на концах интервала.

2.1. $a_n = \dfrac{1}{n^3}$

2.2. $a_n = \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$

2.3. $a_n = \dfrac{1}{2^n\cdot(n+1)}$

2.4. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

2.5. $a_n = \dfrac{3^n}{n}$

2.6. $a_n = \dfrac{n}{6^n}$

2.7. $a_n = \dfrac{n}{2n+3}$

2.8. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2.9. $a_n = \dfrac{1}{3^n\cdot\sqrt{n}}$

2.10. $a_n = \dfrac{2^n}{3^n}$

Задание 3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^b f(x)\,dx$ с точностью до $0,001$.

3.1. $f(x) = x^2\,e^{-x}$, $b = 0,5$

3.2. $f(x) = x^3\,\cos x$, $b = 1$

3.3. $f(x) = x\ \cos\sqrt{x}$, $b = 1$

3.4. $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$, $b = 0,5$

3.5. $f(x) = e^{-2x^2}$, $b = 0,5$

3.6. $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$, $b = 0,5$

3.7. $f(x) = \sin x^2$, $b = 1$

3.8. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $b = 1$

3.9. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$, $b = 0,5$

3.10. $f(x) = x\ \ln\left(1+x^2\right)$, $b = 0,5$

Задание 4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном интервале.

4.1. $f(x) = x - 1$, на интервале $(-1;\ 1)$

4.2. $f(x) = x + 4$, на интервале $(-2;\ 2)$

4.3. $f(x) = \begin{cases} x, & -3 < x < 0 \\ 0, & 0 \leqslant x < 3 \end{cases}$, на интервале $(-3;\ 3)$

4.4. $f(x) = x$, на интервале $(-5;\ 5)$

4.5. $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$, на интервале $(-1;\ 1)$

4.6. $f(x) = 2x + 3$, на интервале $(-\pi;\ \pi)$

4.7. $f(x) = 1 - x$, на интервале $(-\pi;\ \pi)$

4.8. $f(x) = x + 1$, на интервале $(-2;\ 2)$

4.9. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$, на интервале $(-\pi;\ \pi)$

4.10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 2x, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$, на интервале $(-\pi;\ \pi)$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №4

Задача 1. Числовые ряды

Для исследования сходимости или расходимости числового ряда используется один или несколько признаков сходимости. В данном разделе приведены все встречающиеся в вариантах контрольных работ признаки сходимости, а также разобраны примеры на каждый признак. Приведённые признаки будут применяться и при решении следующего задания контрольной работы.

1. Общие понятия.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — произвольные числа. Числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, а выражение a_n как функция числа n — общим членом ряда. Если вместо n в формулу общего члена ряда подставлять значения $1, 2, 3, \ldots$, то можно найти сколько угодно членов ряда.

Сумма n первых членов ряда (1) называется n-й частичной суммой ряда и обозначается через S_n, то есть

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Частичная сумма S_n является функцией натурального числа n. Исходя из определения частичной суммы, имеем

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1, \\ S_2 & = & a_1 + a_2, \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \end{array}$$

Если бесконечная последовательность частичных сумм ряда (1)

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$$

имеет конечный предел, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то говорят, что этот ряд сходится. В этом случае число S называется суммой сходящегося ряда (1). Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (1) называется расходящимся. В этом случае не имеет смысла говорить о его сумме.

2. Необходимый признак сходимости ряда.

Если ряд (1) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2}$$

При решении примеров часто удобно пользоваться следствием этого признака: если предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$$

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

то необходимое условие (2) сходимости ряда не выполняется. Следовательно, данный ряд расходится.

Пример. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \dfrac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то необходимое условие сходимости ряда выполнено.

Замечание. Из выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд, рассмотренный в предыдущем примере, называется гармоническим. Этот ряд расходится, хотя для него выполняется необходимое условие сходимости.

3. Первый признак сравнения.

Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{4}$$

Если для рядов (3) и (4) при всех натуральных значениях n выполнены неравенства $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, то

1) если сходится ряд (4), то сходится и ряд (3);

2) если расходится ряд (3), то расходится и ряд (4).

Замечание. Признак сравнения остаётся верным для любых рядов (3) и (4), если для некоторого числа n_0 при всех натуральных $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^{n-1}} + \ldots$$

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \dfrac{1}{n^{n-1}}$. Сравним данный ряд с геометрической прогрессией

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \tag{5}$$

Ряд (5) сходится, так как знаменатель прогрессии $q = \dfrac{1}{2} < 1$. Члены исходного ряда не превосходят соответствующих членов геометрической прогрессии (5), так как $\dfrac{1}{n^{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ при $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ больше общего члена гармонического ряда $b_n = \dfrac{1}{n}$, который, как было сказано выше, расходится. Следовательно, данный ряд также расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 5^n} + \ldots$$

Решение. Сравним данный ряд с бесконечной геометрической прогрессией

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots$$

Так как эта прогрессия сходится, а $\dfrac{1}{n \cdot 5^n} < \dfrac{1}{5^n}$, то по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

4. Второй признак сравнения.

Если ряды (3) и (4) являются строго положительными ($a_n > 0$, $b_n > 0$ при всех значениях n) и для членов рядов выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

где k — конечное (отличное от нуля) число, то ряды (3) и (4) либо оба сходятся, либо оба расходятся, то есть эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} + \ldots + \sin\frac{1}{n} + \ldots$$

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \sin\dfrac{1}{n}$. Общий член расходящегося гармонического ряда $b_n = \dfrac{1}{n}$. Применяем второй признак сравнения. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left({}^1\!/_n\right)}{{}^1\!/_n} = 1 \neq 0$$

(первый замечательный предел),то исследуемый ряд расходится.

Пример. Известно, что числовой ряд, общий член которого $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, сходится. Доказать сходимость ряда с общим членом $b_n = \dfrac{1}{n\cdot(2n+1)}$.

Решение. Применяем второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{{}^1\!/_{n^2}}{{}^1\!/_{(n\cdot(2n+1))}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(2n+1)}{n^2} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, ряд с общим членом $b_n = \dfrac{1}{n\cdot(2n+1)}$ сходится.

Пример. Доказать сходимость ряда с общим членом $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$, зная, что ряд с общим членом $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Решение. Применяем второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+{}^1\!/_{n^2}\right)}{{}^1\!/_{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right] = \ln e = 1 \neq 0$$

(второй замечательный предел). Следовательно, исследуемый ряд также сходится.

5. Эталонные ряды.

Следующие ряды часто используют для сравнения с другими рядами при исследовании вопроса о сходимости.

Геометрическая прогрессия $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ $\begin{cases} q<1 & \text{сходится } (q>0),\\ q\geqslant 1 & \text{расходится,}\end{cases}$

Ряд Дирихле $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p\leqslant 1 & \text{расходится,}\\ p>1 & \text{сходится.}\end{cases}$

6. Признак сходимости Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_n > 0, \tag{6}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то

1) при $q < 1$ ряд (6) сходится,

2) при $q > 1$ или $q = +\infty$ ряд (6) расходится,

3) при $q = 1$ о сходимости или расходимости ряда (6) ничего сказать нельзя и в этом случае надо применить другой признак сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Решение.

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Применим признак Даламбера

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так как $q = 0 < 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot (n+1)}.$$

Решение.

$$a_n = \frac{5^n}{n \cdot (n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)}.$$

Применим признак Даламбера

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+2} = 5.$$

Так как $q = 5 > 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots$$

Решение.

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Применим признак Даламбера

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \frac{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot n^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Так как $q = e > 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд расходится.

7. Признак сходимости Коши.

Если для ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_n \geqslant 0, \tag{7}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то

1) при $q < 1$ ряд (7) сходится,

2) при $q > 1$ или $q = +\infty$ ряд (7) расходится,

3) при $q = 1$ о сходимости или расходимости ряда (7) ничего сказать нельзя и в этом случае надо применить другой признак сходимости.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Решение.

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Применим признак Коши

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Так как $q = 0 < 1$, то по признаку Коши исследуемый ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n.$$

Решение.
$$a_n = \left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n.$$
Применим признак Коши
$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n-5} = 3.$$
Так как $q = 3 > 1$, то по признаку Коши исследуемый ряд расходится.

8. Интегральный признак Коши — Маклорена.

Если функция $f(x)$ на промежутке $[1; +\infty)$ является непрерывной, положительной и невозрастающей, то числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \text{ где } a_n = f(n),$$
сходится или расходится одновременно с интегралом
$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Замечание. В этом интеграле в качестве нижнего предела можно брать любое число, большее или равное 1.

Пример. Исследовать на сходимость ряд
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{1+n^2} + \ldots$$

Решение. Применим интегральный признак сходимости Коши — Маклорена. Чтобы составить функцию $f(x)$, достаточно в формуле общего члена ряда заменить n на x. Таким образом, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Так как функция $f(x)$ на промежутке $[1; +\infty)$ является непрерывной, положительной и убывающей, то можем воспользоваться интегральным признаком Коши — Маклорена. Рассмотрим соответствующий несобственный интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_1^A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$
Так как несобственный интеграл сходится, то по признаку Коши — Маклорена сходится и исследуемый ряд.

Пример. Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+3)}.$$

Решение. Применим интегральный признак сходимости Коши — Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot (x+3)}$. Тогда,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+3)} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x \cdot (x+3)} = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{3} \int\limits_1^{A} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{A \to +\infty} \Big[\ln x - \ln(x+3\,) \Big]_1^A = \frac{1}{3} \lim_{A \to +\infty} \left[\ln \frac{x}{x+3} \right]_1^A =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{A \to +\infty} \left(\ln \frac{A}{A+3} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \ln 4 = \ln \sqrt[3]{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то по признаку Коши — Маклорена сходится и исследуемый ряд.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$$

Решение. Применим интегральный признак сходимости Коши — Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_2^{A} \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{A \to +\infty} \Big[\ln \ln x \Big]_2^A =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} (\ln \ln A - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то по признаку Коши — Маклорена ряд расходится и исследуемый ряд.

Пример. Исследовать сходимость ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

где p — любое действительное число.

Решение. Общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n^p}$. Если $p \leqslant 0$, то общий член ряда a_n не будет стремиться к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда, ряд в этом случае будет расходиться. Для $p > 0$ применим признак Коши — Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Рассмотрим отдельно три случая.

1. Пусть $p = 1$. Тогда общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n}$, этот ряд называется гармоническим. Имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \Big[\ln x\Big]_1^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty.$$

   Следовательно, по интегральному признаку Коши — Маклорена гармонический ряд расходится.

2. Пусть $p > 1$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} x^{-p} dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^A =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^A = \frac{1}{1-p} \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{A^{p-1}} - 1\right) = \frac{1}{p-1}.$$

   Следовательно, по интегральному признаку Коши — Маклорена ряд Дирихле при $p > 1$ сходится.

3. Пусть $p < 1$. Тогда, по аналогии с пунктом 2, получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{A^{p-1}} - 1\right) = \frac{1}{1-p} \lim_{A\to+\infty} \left(A^{1-p} - 1\right) = +\infty$$

   и несобственный интеграл расходится.

Таким образом, ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

9. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Если среди членов данного ряда имеются как положительные, так и отрицательные (причём и тех и других бесконечное число), то такой ряд называется знакопеременным. Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если любые два рядом стоящие члена имеют противоположные знаки. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \qquad (8)$$

или так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n} a_n + \ldots, \qquad (9)$$

где все числа a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ положительны.

Для знакочередующихся рядов справедлив признак сходимости Лейбница: знакочередующийся ряд (8) или (9) сходится, если

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

2) $a_n > a_{n+1}$ для всех n.

При этом, для ряда (8), сумма ряда положительна и не превосходит a_1, а для ряда (9), сумма ряда отрицательна.

Пример. Доказать сходимость ряда Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Решение. Данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{и} \quad 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$$

Следовательно, по признаку Лейбница этот ряд сходится.

Задача 2. Степенные ряды

Если члены ряда являются степенными функциями аргумента x, то ряд называется степенным, то есть степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \quad (10)$$

где x_0 — фиксированное число, называемое центром ряда, а $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ — известные числовые коэффициенты. В частности, если $x_0 = 0$, то получаем степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (11)$$

Заметим, что степенные ряды (10) и (11) всегда сходятся при $x = x_0$ или $x = 0$ соответственно.

Каждый степенной ряд (10) сходится внутри интервала сходимости $\{x:\ |x-x_0| < R\}$. Множество сходимости ряда (10) или совпадает с интервалом сходимости, или получается добавлением к нему одной или обеих концевых точек.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда. Если $R = 0$, то множество сходимости ряда состоит из одной точки $x = x_0$. Если $R = +\infty$, то множеством сходимости ряда является вся числовая прямая, то есть ряд сходится при любом $x \in (-\infty; +\infty)$. Если $R > 0$, то множество сходимости этого ряда представляет собой интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$, возможно, с добавлением к нему одной или обеих концевых точек.

Радиус сходимости R определяется по формуле Коши — Адамара
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{(если предел существует).} \tag{12}$$
Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{(если предел существует).} \tag{13}$$
При $R \neq 0$ сходимость ряда (10) в точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ проверяется отдельно.

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда
$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \qquad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Решение. а) Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}.$$
В данном случае $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$, $x_0 = 0$. Применим формулу (12).
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = 3 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{3}.$$
Для полного определения множества сходимости исследуем поведение этого ряда в точках $x = -\dfrac{1}{3}$ и $x = \dfrac{1}{3}$. Пусть $x = -\dfrac{1}{3}$, тогда $a_n x^n = \dfrac{3^n}{n^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница. Теперь пусть $x = \dfrac{1}{3}$, тогда $a_n x^n = \dfrac{3^n}{n^2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{n^2}$. Полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле при $p = 2 > 1$).

Таким образом, множество сходимости данного ряда представляет собой отрезок $\left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right]$.

б) Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$
У этого ряда $a_n = \dfrac{1}{n}$. Применим формулу (13). Радиус сходимости
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале $(-1;1)$. Теперь исследуем поведение ряда на границах найденного интервала, то есть при $x=-1$ и при $x=1$. Если $x=-1$, то получаем ряд Лейбница, который является сходящимся (см. выше). Если $x=1$, то ряд из условия примера превращается в гармонический ряд, который расходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $[-1;1)$.

в) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Для данного ряда

$$a_n=\frac{1}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Применим формулу (13). Радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$$

Так как $R=+\infty$, то исследуемый ряд сходится при любом значении переменной x.

Задача 3. Приложения рядов

Для разложения конкретной функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$ пользуются разложениями основных функций. После каждой формулы указано множество сходимости ряда.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad |x|<\infty,$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$
$$|x|<\infty,$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$
$$|x|<\infty,$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$
$$-1<x\leqslant 1,$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right),$$
$$-1\leqslant x<1,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n =$$
$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad m \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

Напомним, что факториал натурального числа n определяется формулой

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

например, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Отметим, что по определению $0! = 1$.

Разложения основных элементарных функций в степенной ряд можно использовать для приближённого вычисления значений этих функций.

Пусть надо найти $f(x_0)$ для функции $f(x)$, которая раскладывается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R, \quad x_0 \in (-R; R). \tag{14}$$

Тогда

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

Заменяя значение $f(x_0)$ суммой n членов этого ряда

$$S_n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1},$$

получаем приближённое значение $f(x_0)$, при этом ошибка равна

$$|r_n(x_0)| = |a_n x_0^n + a_{n+1} x_0^{n+1} + \ldots|. \tag{15}$$

В силу сходимости ряда (14) в точке $x = x_0$, при достаточно большом n эта ошибка станет сколь угодно малой и S_n даёт значение $f(x_0)$ с любой наперёд заданной точностью. Для вычисления $f(x_0)$ с заданной точностью надо уметь производить оценку остатка (15), что позволяет брать требуемое число членов в S_n.

Оценка остатка ряда особенно проста, если ряд удовлетворяет признаку Лейбница. В этом случае остаток имеет знак своего первого члена и по абсолютной величине меньше его.

Задание 3. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{3}}\, dx.$$

Разложим подынтегральную функцию вида $(1+x)^m$ в степенной ряд (в данном случае $m = -\dfrac{1}{3}$) и заменим x на x^2.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \ldots$$

Так как отрезок интегрирования $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ принадлежит области сходимости полученного ряда $(-1; 1)$, то можно интегрировать почленно в указанных пределах

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{9} + \frac{2x^5}{45} - \frac{14x^7}{567} + \ldots\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} - \frac{7}{36288} + \ldots$$

В полученном знакочередующемся ряде четвёртый член по абсолютному значению меньше 0,001. Следовательно, требуемая точность будет обеспечена, если учитывать только первые три члена ряда.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} = \frac{39}{80} = 0{,}4875.$$

Так как первый из отброшенных членов имеет знак минус, то полученное приближённое значение будет с избытком. Поэтому ответ с точностью до 0,001 равен 0,487.

Задача 4. Ряды Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l; l)$ называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{16}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{17}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18}$$

В случае, когда $l = \pi$, то есть $f(x)$ задана на интервале $(-\pi;\pi)$, ряд Фурье функции $f(x)$ записывается в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right), \tag{19}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{20}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{21}$$

В частности, если функция $f(x)$ чётная на $(-l;l)$, то все коэффициенты b_n равны нулю, так как в формуле (18) интеграл берётся от нечётной функции по симметричному относительно нуля интервалу. В формуле (17) в этом случае интеграл берётся от чётной функции по симметричному относительно нуля интервалу, поэтому этот интеграл равен удвоенному интегралу от той же функции по интервалу $(0;l)$.

Итак, в случае чётной функции $f(x)$ на интервале $(-l;l)$ имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Аналогично, если функция $f(x)$ является нечётной на интервале $(-l;l)$, то получаем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Задание 4.

а) Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 3, & \text{если } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

б) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-2;2)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 < x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Решение. а) Для функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Чтобы найти коэффициент a_0, применяем формулу (20) при $n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\,dx + \int_{0}^{\pi} 3\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left([-2x]_{-\pi}^{0} + [3x]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(-2\pi + 3\pi) = 1.$$

Теперь находим коэффициенты a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ по формуле (20).

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 3\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-2\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{3\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}\right) = 0.$$

Пользуясь формулой (21) определим коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 3\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{2\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{-3\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}(2 - 2\cos(-n\pi) - 3\cos n\pi + 3) =$$

$$= \frac{5}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{5}{n\pi} 2\sin^2\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \dfrac{10}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном}, \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном}. \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты a_n и b_n в формулу (19), получим следующее разложение в ряд Фурье данной функции $f(x)$ на заданном интервале $(-\pi;\pi)$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{10}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right).$$

Полученное равенство справедливо при любом значении x, из промежутка $(-\pi;\pi)$ исключаем точку разрыва $x=0$, в которой сумма ряда равна $\dfrac{-2+3}{2}=\dfrac{1}{2}$, то есть равна среднему арифметическому значений данной функции слева и справа от точки разрыва.

б) Для вычисления коэффициентов Фурье применим формулы (17) и (18), подставив в них $l=2$ и учитывая при этом, что функция задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения переменной x.

$$a_0=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}0\,dx+\int\limits_{0}^{2}x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=1,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}0\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int\limits_{0}^{2}x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=\frac{1}{2}\left[x\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{2}}{\dfrac{n\pi}{2}}+\frac{\cos\dfrac{n\pi x}{2}}{\dfrac{n^2\pi^2}{4}}\right]_0^2=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2} & \text{при } n \text{ нечётном},\\ 0 & \text{при } n \text{ чётном},\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}0\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int\limits_{0}^{2}x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=\frac{1}{2}\left[-x\frac{\cos\dfrac{n\pi x}{2}}{\dfrac{n\pi}{2}}+\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{2}}{\dfrac{n^2\pi^2}{4}}\right]_0^2=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном},\\ -\dfrac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ чётном}.\end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (16), получим искомое разложение заданной функции $f(x)$.

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{2}+\ldots\right).$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5

Задание 5. В коробке лежат девять карточек, на которых написаны цифры от 1 до 9. Последовательно, одну за другой, вынимают две карточки и кладут их рядом — получают двузначное число. Например, вынуты карточки с числами 1 и 3 — получили число 13, вынуты карточки с числами 3 и 1 — получили число 31. Найдите вероятность события A.

5.1. A — число является полным квадратом;
5.2. A — число четное;
5.3. A — число меньше сорока пяти;
5.4. A — сумма цифр числа меньше восьми;
5.5. A — число не содержит четных цифр;
5.6. A — цифры числа отличаются на единицу;
5.7. A — сумма цифр числа больше двенадцати;
5.8. A — одна из цифр числа равна единице;
5.9. A — первая цифра числа больше второй;
5.10. A — число делится на девять.

Задание 6. В урне a белых и b черных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что:

1) оба шара белые;
2) ровно один из вынутых шаров белый;
3) хотя бы один из вынутых шаров белый.

6.1. $a = 4,\ b = 5;$
6.2. $a = 6,\ b = 4;$
6.3. $a = 7,\ b = 3;$
6.4. $a = 5,\ b = 3;$
6.5. $a = 3,\ b = 6;$
6.6. $a = 7,\ b = 4;$
6.7. $a = 6,\ b = 5;$
6.8. $a = 5,\ b = 7;$
6.9. $a = 4,\ b = 6;$
6.10. $a = 3,\ b = 7;$

Задание 7.

7.1. На складе имеется 20 телефонных аппаратов корейского производства и 30 — немецкого. В среднем, 5% корейских аппаратов и 2% немецких имеют брак.
1) Найти вероятность того, что случайно выбранный аппарат бракованный.
2) Случайно выбранный аппарат бракованный. С какой вероятностью этот аппарат был немецким?

7.2. Упаковка сосисок производится двумя автоматами с одинаковой производительностью. Доля брака, допускаемого первым автоматом, равна 5%, а вторым автоматом — 7%.
1) Найти вероятность того, что наудачу взятая упаковка окажется бракованной.
2) Наудачу взятая упаковка оказалась бракованной. С какой вероятностью эта упаковка произведена первым автоматом?

7.3. Из 10 стрелков три стрелка попадают в мишень с вероятностью $0,8$, пять стрелков — с вероятностью $0,7$, два стрелка — с вероятностью $0,6$.
1) Найти вероятность того, что случайно выбранный стрелок попал в цель.
2) Случайно выбранный стрелок попал в цель. С какой вероятностью этот стрелок принадлежит второй группе?

7.4. В сеансе одновременной игры в шахматы с гроссмейстером играют 10 перворазрядников, 15 второразрядников и 20 третьеразрядников. Вероятность того, что перворазрядник выиграет у гроссмейстера равна $0,2$, для второразрадника эта вероятность равна $0,1$, а для третьеразрядника — $0,05$.

1) Найти вероятность того, что случайно выбранный участник выиграет.

2) Случайно выбранный участник выиграл. С какой вероятностью это был третьеразрядник?

7.5. В цехе фабрики 30% продукции производится на первом станке, на втором — 25%, а остальная продукция — на третьем станке. Первый станок дает 1% брака, второй — 2%, третий — 3%.

1) Найти вероятность того, что случайно выбранная единица продукции оказалась бракованной.

2) Случайно выбранная единица продукции оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена на третьем станке.

7.6. В специализированную больницу поступают больные с тремя болезнями: в среднем 50% больных с первой болезнью, 30% — со второй, 20% — с третьей. Вероятности излечения первой, второй и третьей болезни равны $0,7$, $0,8$, $0,9$ соответственно.

1) Найти вероятность того, что поступивший в больницу больной выздоровел.

2) Поступивший в больницу больной выздоровел. Найти вероятность того, что он болел первой болезнью.

7.7. По каналу связи с вероятностью $0,4$ передается сигнал «0», и с вероятностью $0,6$ передается сигнал «1». Из-за помех возможны ошибки. Вероятность принять «1», когда передавался сигнал «0» равна $0,05$. Вероятность принять «0», когда передавался сигнал «1» равна $0,1$.

1) Найти вероятность приема сигнала «1».

2) Принят сигнал «1». Найти вероятность того, что действительно передавался сигнал «1».

7.8. В первой урне содержится 5 белых и 6 черных шаров, во второй урне содержится 5 белых и 3 черных шара. Из первой урны наугад вынимают один шар и перекладывают его во вторую урну. Затем из второй урны вынимают один шар.

1) Найти вероятность того, что этот шар белый.

2) Вынутый шар оказался белым. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен черный шар.

7.9. Из деталей высокого качества собирается 60% всех телевизоров, при этом вероятность благополучной эксплуатации телевизора в течение времени T равна $0,95$. Для телевизора, собранного из обычных деталей, эта вероятность равна $0,7$.

1) Найти вероятность того, что наугад выбранный телевизор проработает без поломок в течение времени T.

2) Найти вероятность того, что телевизор, проработавший без поломок в течение времени T, собран из деталей высокого качества.

7.10. ОТК проводит контроль выпускаемых приборов. Приборы содержат скрытые дефекты с вероятностью $0,15$. При проверке наличие дефекта обнаруживается с вероятностью $0,9$. Кроме того, с вероятностью $0,05$ исправный прибор может быть ошибочно признан дефектным. При обнаружении дефекта прибор бракуется.

1) Найти вероятность того, что наугад выбранный прибор будет забракован.

2) Найти вероятность того, что забракованный прибор действительно имеет дефект.

Задание 8. В большой партии изделий $r\%$ изделий высшего качества и $s\%$ бракованных. Найти вероятность того, что:

1) из m наугад отобранных изделий

а) ровно два высшего качества;

б) не более двух высшего качества;

2) среди 500 наугад отобранных изделий количество изделий высшего качества лежит в промежутке $[a,\, b]$;

3) среди 500 наугад отобранных изделий не более двух бракованных.

8.1.	$r = 40\%$,	$s = 0,5\%$,	$m = 5$,	$a = 180$,	$b = 210$
8.2.	$r = 50\%$,	$s = 0,4\%$,	$m = 4$,	$a = 230$,	$b = 260$
8.3.	$r = 60\%$,	$s = 0,3\%$,	$m = 6$,	$a = 280$,	$b = 310$
8.4.	$r = 70\%$,	$s = 0,1\%$,	$m = 4$,	$a = 330$,	$b = 360$
8.5.	$r = 80\%$,	$s = 0,2\%$,	$m = 5$,	$a = 380$,	$b = 410$
8.6.	$r = 40\%$,	$s = 0,3\%$,	$m = 6$,	$a = 180$,	$b = 210$
8.7.	$r = 50\%$,	$s = 0,2\%$,	$m = 5$,	$a = 230$,	$b = 260$
8.8.	$r = 60\%$,	$s = 0,1\%$,	$m = 5$,	$a = 280$,	$b = 310$
8.9.	$r = 70\%$,	$s = 0,2\%$,	$m = 6$,	$a = 330$,	$b = 360$
8.10.	$r = 55\%$,	$s = 0,4\%$,	$m = 4$,	$a = 255$,	$b = 285$

Задание 9. Дан закон распределения дискретной случайной величины.

1) Найти вероятность p.

2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3) Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9.1.

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,2	0,1	p	0,3	0,2

9.6.

x_i	-2	-1	1	3	4
p_i	0,3	0,1	0,2	p	0,1

9.2.

x_i	0	1	3	5	6
p_i	0,1	0,3	p	0,2	0,1

9.7.

x_i	1	2	4	6	8
p_i	0,2	0,3	p	0,2	0,1

9.3.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	p	0,1	0,2	0,3

9.8.

x_i	-2	2	3	5	6
p_i	0,2	0,4	p	0,2	0,1

9.4.

x_i	-2	0	2	4	6
p_i	0,1	0,2	p	0,2	0,1

9.9.

x_i	2	4	5	7	8
p_i	0,1	0,2	p	0,3	0,2

9.5.

x_i	1	2	4	5	6
p_i	0,2	0,1	p	0,2	0,3

9.10.

x_i	-1	1	2	4	6
p_i	0,2	0,3	0,3	p	0,1

Задание 10. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$.

1) Найти плотность вероятности $f(x)$;

2) Построить графики функции распределения и плотности вероятности;

3) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;

4) Найти вероятность события $X > M(X)$.

10.1. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{при } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

10.2. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1 \\ 1 - x^2 & \text{при } -1 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

10.3. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1 \\ x^3 + 1 & \text{при } -1 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

10.4. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1 \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

10.5. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{32} & \text{при } 2 < x \leqslant 6 \\ 1 & \text{при } x > 6 \end{cases}$$

10.6. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2 \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

10.7. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{2} & \text{при } 1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

10.8. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{8} & \text{при } 1 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

10.9. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0 \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$

10.10. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при } 0 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$

Задание 11. Пусть X — случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами a и σ.

1) Записать формулу плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X;

2) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;

3) Найти вероятность $P(\alpha < X < \beta)$;

4) Вычислив значения функции $f(x)$ в точках $x = a$ и $x = a \pm \sigma$, схематично построить график плотности вероятности;

5) Заштриховать область, площадь которой равна $P(\alpha < X < \beta)$.

11.1.	$a = 1,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 1,$	$\beta = 3$
11.2.	$a = 10,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 12,$	$\beta = 14$
11.3.	$a = 20,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 15,$	$\beta = 20$
11.4.	$a = 5,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 4,$	$\beta = 6$
11.5.	$a = 8,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 9,$	$\beta = 10$
11.6.	$a = 2,$	$\sigma = 0,5,$	$\alpha = 1,$	$\beta = 2$
11.7.	$a = 3,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 2,$	$\beta = 10$
11.8.	$a = 5,$	$\sigma = 1,$	$\alpha = 4,$	$\beta = 12$
11.9.	$a = 7,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 5,$	$\beta = 10$
11.10.	$a = 3,$	$\sigma = 2,$	$\alpha = 1,$	$\beta = 4$

Задание 12. Данные наблюдений случайной величины X представлены в виде интервального статистического ряда. Первая строка таблицы — интервалы наблюдавшихся значений случайной величины X, вторая — соответствующие им частоты.

1) Построить гистограмму и полигон относительных частот.

2) Найти числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение.

3) Предполагая, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону, найти параметры нормального закона, записать плотность вероятности случайной величины X и построить ее график на одном чертеже с гистограммой, вычисляя значения плотности в серединах интервалов.

4) Найти с надежностью (доверительной вероятностью) $\gamma = 0,95$ интервальную оценку параметра $a = M(X)$ случайной величины X.

12.1.

Интервалы	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)	[10,12)	[12,14]
Частоты	3	9	19	50	11	6	2

12.2.

Интервалы	[1,3)	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)	[11,13)	[13,15]
Частоты	5	15	23	27	20	6	4

12.3.

Интервалы	[2,6)	[6,10)	[10,14)	[14,18)	[18,22)	[22,26)	[26,30]
Частоты	7	13	20	30	13	10	7

12.4.

Интервалы	[5,9)	[9,13)	[13,17)	[17,21)	[21,25)	[25,29)	[29,33]
Частоты	6	7	10	40	20	12	5

12.5.

Интервалы	[0,6)	[6,12)	[12,18)	[18,24)	[24,30)	[30,36)	[36,42]
Частоты	5	9	25	24	22	10	52

12.6.

Интервалы	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10)	[10,11]
Частоты	7	10	15	40	16	7	5

12.7.

Интервалы	[3,7)	[7,11)	[11,15)	[15,19)	[19,23)	[23,27)	[27,31]
Частоты	2	3	20	40	30	3	2

12.8.

Интервалы	[1,5)	[5,9)	[9,13)	[13,17)	[17,21)	[21,25)	[25,29]
Частоты	7	15	20	25	15	12	6

12.9.

Интервалы	[0,9)	[9,18)	[18,27)	[27,36)	[36,45)	[45,54)	[54,63]
Частоты	4	5	25	30	25	6	5

12.10.

Интервалы	[3,6)	[6,9)	[9,12)	[12,15)	[15,18)	[18,21)	[21,24]
Частоты	4	8	20	25	24	15	4

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №5

Задача 5. События. Классическое определение вероятности

Пусть проводится некоторый эксперимент, исход которого предсказать заранее нельзя. Такие эксперименты называют случайными.

Случайным событием (или просто событием) называется любой исход эксперимента, который может произойти или не произойти. Случайные события обозначаются буквами A, B, C и так далее.

Событие, которое обязательно наступает в данном эксперименте, называется достоверным. Событие, которое заведомо не наступает в данном эксперименте, называется невозможным.

Суммой двух событий A, B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них, то есть A или B, или их обоих вместе.

Произведением двух событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в одновременном появлении и события A и события B.

Два события A и B называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же эксперименте (испытании).

Противоположным для события A называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло. События A и $\overline{A}$ являются несовместными.

События $A_1, A_2, \ldots, A_k$ образуют полную группу, если в результате эксперимента обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Пусть результат эксперимента можно представить в виде полной группы событий (исходов) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые попарно несовместны и равновозможны. Эти исходы называют элементарными событиями. Множество всех элементарных событий называется пространством элементарных событий и обозначается $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Пусть событие A происходит при осуществлении каких-то m элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ из множества Ω. Тогда говорят, что вероятность события A равна отношению числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n всех равновозможных, попарно несовместных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{22}$$

Следствие. Вероятность достоверного события равна единице (так как $m = n$), вероятность невозможного события равна нулю (так как $m = 0$), а для всех остальных событий A выполнено неравенство $0 < P(A) < 1$. Таким образом, вероятность любого случайного события A удовлетворяет неравенству $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Подсчет вероятности события сводится к подсчету числа благоприятствующих ему исходов. Делают это обычно комбинаторными способами. Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух важных правил, называемых правилом сложения и умножения.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект можно выбрать n_2 способами, то оба объекта можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект можно выбрать n_2 способами, то любой из этих объектов можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Задание 5. В коробке лежат девять карточек, на которых написаны цифры от 1 до 9. Последовательно, одну за другой, вынимают две карточки и кладут их рядом — получают двузначное число. Например, вынуты карточки с числами 1 и 3 — получили число 13, вынуты карточки с числами 3 и 1 —

получили число 31. Найдите вероятность события A — полученное число является полным кубом.

Решение: Все числа (исходы), которые могут быть получены в результате такого испытания, образуют пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{12,\, 13,\, 14,\, \ldots,\, 19,\, 21,\, 23,\, 24,\, \ldots,\, 29,\, \ldots,\, 91,\, 92,\, \ldots,\, 98\}.$$

Первую цифру двузначного числа можно выбрать девятью способами. После того, как первая цифра выбрана, вторую можно выбрать восемью способами. По правилу произведения множество Ω содержит $n = 9 \cdot 8 = 72$ числа. Так как появление всех элементов множества Ω равновозможно, то применим формулу классической вероятности (22).

В нашем случае благоприятные исходы — это числа $\{27,\, 64\}$, то есть $m = 2$, следовательно, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}.$$

Задача 6. Несовместные события. Условная вероятность

Для несовместных событий A и B вероятность их одновременного появления равна нулю, то есть $P(AB) = 0$.

Если события A и B несовместны, то вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{23}$$

Аналогичная формула справедлива для любого числа несовместных событий.

Для совместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{24}$$

События $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k$ образуют полную группу попарно несовместных событий, если они попарно несовместны и при осуществлении данного эксперимента обязательно произойдет одно из них.

Сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна 1.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1.$$

Следствие. События A и $\overline{A}$ несовместные, значит они образуют полную группу, поэтому их вероятности связаны соотношением $P(A)+P(\overline{A}) = 1$.

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что имело место некоторое другое событие A, называется условной вероятностью и обозначается $P(B|A)$.

Если появление события A не влияет на вероятность события B, то есть $P(B|A) = P(B)$, то события A и B называются независимыми.

Для зависимых событий выполняется следующее соотношение

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{25}$$

Для независимых событий

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{и} \quad P(AB) = P(A)P(B).$$

Это равенство представляет теорему умножения вероятностей независимых событий. Оно распространяется на любое число независимых событий.

Задание 6. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что:

1) оба шара белые;
2) ровно один из вынутых шаров белый;
3) хотя бы один из вынутых шаров белый.

Решение: При решении задачи можно считать, что шары вынимают из урны последовательно. Обозначим события: K_1 — первый вынутый шар белый, M_1 — первый вынутый шар черный, K_2 — второй вынутый шар белый, M_2 — второй вынутый шар черный. Заметим, что события K_1 и M_1, а также события K_2 и M_2 являются несовместными и взаимно противоположными, т.е.

$$P(K_1) = P(\overline{M_1}) = 1 - P(M_1) \text{ и } P(K_2) = P(\overline{M_2}) = 1 - P(M_2).$$

Поскольку в урне всего 11 шаров, из которых 5 белых, то

$$P(K_1) = \frac{m}{n} = \frac{5}{11}, \quad P(M_1) = \frac{6}{11}.$$

Событие K_2 можно рассматривать в двух ситуациях: когда первый вынутый шар белый и когда первый вынутый шар черный. Найдем вероятности этих событий.

Пусть первый вынутый шар белый. Поскольку перед выниманием второго шара в урне осталось 10 шаров, из которых 4 белых, вероятность вынуть белый шар равна

$$P(K_2|K_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Кроме того, вероятность вынуть черный шар равна

$$P(M_2|K_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Пусть первый вынутый шар черный. Поскольку перед выниманием второго шара в урне осталось 10 шаров, из которых 5 белых. Значит, вероятность вынуть белый шар равна

$$P(K_2|M_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, вероятность вынуть черный шар равна

$$P(M_2|M_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Тогда требуемые события можно представить как комбинацию, приведенных выше событий.

1) Событие A — оба шара белые — и первый шар белый и второй шар белый. Т.е. $A = K_1K_2$. По теореме об произведении вероятностей событий (25), имеем

$$P(A) = P(K_1K_2) = P(K_1)P(K_2|K_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{11}.$$

2) Событие B — ровно один из вынутых шаров белый — или первый шар белый, второй шар черный или первый шар черный, второй шар белый. Т.е. $B = K_1M_2 + M_1K_2$. События K_1M_2 и M_1K_2 несовместны, поэтому, согласно формулам (23) и (25) имеем

$$P(B) = P(K_1M_2 + M_1K_2) = P(K_1M_2) + P(M_1K_2) =$$
$$= P(K_1)P(M_2|K_1) + P(M_1)P(K_2|M_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{5} + \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{11}.$$

3) Событие C — хотя бы один из вынутых шаров белый — событие, противоположное событию «вынули два черных шара». Т.е. $C = \overline{M_1M_2}$. Таким образом, $P(C) = P(\overline{M_1M_2}) = 1 - P(M_1M_2)$. Поскольку,

$$P(M_1M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2|M_1) = \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{11},$$

то

$$P(C) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

Задача 7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу несовместных событий, то событие A можно представить как

$$A = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$$

и вероятность события A можно определить по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots$$
$$\ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i). \quad (26)$$

Условная вероятность события H_i в предположении, что событие A имело место, определяется по так называемой формуле Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (27)$$

Вероятности $P(H_i|A)$, вычисленные по формуле Байеса, часто называют вероятностями гипотез.

Задание 7. Известно, что 5% мужчин и 0,25% женщин — дальтоники.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный человек — дальтоник, если выбор производится из группы, содержащей равное число мужчин и женщин?

б) Случайно выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение: Рассмотрим два события: M — выбран мужчина, W — выбрана женщина. Так как в группе одинаковое число мужчин и женщин, то $P(M) = P(W) = \dfrac{1}{2}$. Поэтому события M и W образуют полную группу. Среди мужчин 5% дальтоники, то есть для события D — выбранный мужчина дальтоник — условная вероятность равна

$$P(D|M) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

Аналогично, поскольку среди женщин 0,25% дальтоники, то

$$P(D|W) = \frac{0,25}{100} = \frac{1}{400}.$$

а) Событие D — случайно выбранный человек — дальтоник. Вероятность этого события (если выбор производится из группы, содержащей равное число мужчин и женщин) найдем по формуле полной вероятности (26):

$$P(D) = P(M)\cdot P(D|M) + P(W)\cdot P(D|W) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{400} = \frac{21}{800} = 0,02625.$$

б) Событие K — случайно выбранный человек — дальтоник и при этом он оказался мужчиной. Вероятность этого события найдем по формуле Байеса (27):

$$P(K) = P(M|D) = \frac{P(M)P(D|M)}{P(D)} = \frac{0,5\cdot 0,05}{0,02625} = \frac{20}{21}.$$

Задача 8. Формулы Бернулли, Пуассона и Лапласа

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p. Тогда вероятность того, что событие A в этих n испытаниях появится m раз, обозначают $P_n(k)$ и вычисляют по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1-p, \text{ и } C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \tag{28}$$

Пользоваться формулой Бернулли при больших n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами.

Поэтому для больших n целесообразно пользоваться приближенной формулой Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np \ (p \neq 0, p \neq 1) \tag{29}$$

или приближенной формулой Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{30}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x)$ находятся из таблицы (см. Приложение 1). Пользуясь таблицей, необходимо учитывать, что $\varphi(x)$ четная функция.

Формула (29) применяется тогда, когда вероятность p крайне мала, то есть появление события A является редким, но количество испытаний n велико. При этом число успехов незначительно ($n \geqslant 40$, $npq \leqslant 10$).

Формула (30) применяется, если вероятность p не очень близка к 0 и 1, но количество испытаний n велико. При этом $npq \geqslant 10$.

Если событие A в n испытаниях появляется от a до b раз, то в этом случае применяют приближенную формулу Муавра-Лапласа (интегральную):

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{31}$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, для которой составлены таблицы значений (см. Приложение 2). Пользуясь таблицей, необходимо учитывать, что $\Phi(x)$ нечетная возрастающая функция, $\Phi(-\infty) = -0,5$, $\Phi(+\infty) = 0,5$ и при $x \geqslant 4$ можно считать, что $\Phi(x) = 0,5$.

Задание 8. В большой партии 40% изделий высшего качества и 0,4% бракованных.

1) Найти вероятность того, что из 4 наугад отобранных изделий: а) ровно два высшего качества; б) не более двух высшего качества.

2) Найти вероятность того, что среди 500 наугад отобранных изделий: а) количество изделий высшего качества лежит в промежутке [150, 180]; б) не более двух бракованных.

Решение: Рассмотрим четыре события: A — из 4 наугад отобранных изделий ровно два высшего качества, B — из 4 наугад отобранных изделий не более двух высшего качества, C — среди 500 наугад отобранных изделий количество изделий высшего качества лежит в промежутке [150, 180], D — среди 500 наугад отобранных изделий не более двух бракованных.

1а) Проверка изделий на высшее качество — это независимые испытания с вероятностью успеха $p = 0,4$ (40% всех изделий имеют высшее качество). Поэтому для вычисления вероятностей событий A и B можно применить формулу Бернулли (28). Вероятность того, что из 4 наугад отобранных изделий ровно два изделия высшего качества, равна

$$P(A) = P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,16 \cdot 0,36 = 0,3456.$$

1б) Вероятность того, что из 4 наугад отобранных изделий не более двух изделий высшего качества, равна

$$P(B) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) =$$
$$= C_4^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^4 + C_4^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^3 + C_4^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 =$$
$$= \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 1 \cdot 0,1296 + \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 0,4 \cdot 0,216 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,16 \cdot 0,36 =$$
$$= 0,3456 + 0,3456 + 0,1296 = 0,8208.$$

2а) Для события C имеем $n = 500$, $p = 0,4$, $q = 1 - p = 0,6$, $npq = 500 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 120$. Поскольку, $npq \geqslant 10$ применим приближенную формулу Муавра-Лапласа (31):

$$P(150 \leqslant S_{500} \leqslant 180) = \Phi\left(\frac{180-200}{\sqrt{120}}\right) - \Phi\left(\frac{150-200}{\sqrt{120}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi(-1,83) - \Phi(-4,56) = -\Phi(1,83) + \Phi(4,56) \approx$$
$$\approx -0,4664 + 0,5 = 0,0336.$$

2б) В следующем вопросе речь идет о бракованных изделиях, вероятность появления которых очень мала и равна p=0,004. Выражение

$$npq = 500 \cdot 0,004 \cdot 0,996 = 1,992 < 10$$

и применение формулы Муавра-Лапласа не обосновано. В этой ситуации для вычисления вероятностей Бернулли используют формулы Пуассона (29).

В нашем случае $a = 500 \cdot 0,004 = 2$ и

$$P(S_{500} \leqslant 2) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) =$$
$$= \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{5}{e^2} \approx 0,67667.$$

Задача 9. Дискретная случайная величина и её характеристики

Случайные величины, имеющие конечные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если задан закон распределения — соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде ряда распределения или таблицы распределения

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

(32)

причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

графически в виде многоугольника распределения или функцией распределения

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i.$$

Здесь для каждого значения x суммируются вероятности тех значений x_i, которые лежат левее точки x. График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. Важнейшие свойства $F(x)$:

1) $F(x)$ — неубывающая функция своего аргумента;
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математичесое ожидание дискретной случайной величины, заданной конечным рядом распределения (32), обозначается $M[x]$ и определяется по формуле

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{33}$$

$M[X]$ представляет собой среднее ожидаемое значение случайной величины. Оно обладает следующими свойствами:

1) $M[c] = c$, где $c = const$;
2) $M[cX] = cM[X]$;
3) $M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2]$ для любых X_1, X_2;
4) $M[X_1 X_2] = M[X_1] \cdot M[X_2]$, если X_1, X_2 — независимы.

Для оценки степени разбросанности значений случайной величины около её среднего значения $M[X] = a$ вводятся понятия дисперсии $D[X]$ и среднего квадратического отклонения $\sigma[X]$. Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, то есть

$$D[X] = M\left[(X - a)^2\right] =$$
$$= (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \ldots + (x_n - a)^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i,$$

или

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2 = M\left[X^2\right] - a^2 =$$
$$= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n - a^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - a^2. \tag{34}$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$ определяется формулой

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \tag{35}$$

Свойства дисперсии:
1) $D[c] = 0$, где $c = const$;
2) $D[cX] = c^2 D[X]$;
3) $D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2]$, если X_1 и X_2 независимы.
Заметим, что размерности $M[X]$, $\sigma[X]$ совпадают с размерностью самой случайной величины, а размерность $D[X]$ равна квадрату размерности X.

Задание 9. Дан закон распределения дискретной случайной величины X.

x_i	-2	-1	1	2	3
p_i	0,15	0,25	p	0,15	0,2

Найти: 1) вероятность p; 2) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; 3) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение: 1) Согласно свойству закона распределения сумма всех вероятностей равна единице. Имеем

$$0,15 + 0,25 + p + 0,15 + 0,2 = 1,$$

поэтому $p = 0,25$. Следовательно, закон распределения имеет вид:

x_i	-2	-1	1	2	3
p_i	0,15	0,25	0,25	0,15	0,2

2) По данному закону распределения составим функцию распределения, учитывая, что:
если $x \leqslant -2$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;
если $-2 < x \leqslant -1$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15$;
если $-1 < x \leqslant 1$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15 + 0,25 = 0,4$;
если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15 + 0,25 + 0,25 = 0,65$;
если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15 + 0,25 + 0,25 + 0,15 = 0,8$;
если $x > 3$, то $F(x) = 0,15 + 0,25 + 0,25 + 0,12 + 0,2 = 1$.
То есть функция распределения имеют вид указанный ниже, а ее график представлен на рисунке 1.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2 \\ 0,15 & \text{при } -2 < x \leqslant -1 \\ 0,4 & \text{при } -1 < x \leqslant 1 \\ 0,65 & \text{при } 1 < x \leqslant 2 \\ 0,8 & \text{при } 2 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

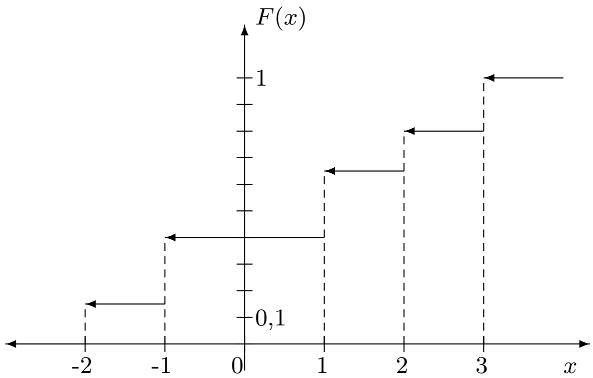


Рис. 1. График функции $F(x)$.

3) Найдем числовые характеристики заданной случайной величины.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i =$$
$$= -2 \cdot 0,15 + (-1) \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,2 = 0,6,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - M^2(X) =$$
$$= (-2)^2 \cdot 0,15 + (-1)^2 \cdot 0,25 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,2 - 0,6^2 =$$
$$= 0,6 + 0,25 + 0,25 + 0,6 + 1,8 - 0,36 = 3,14,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3,14} = 1,77.$$

Задача 10. Непрерывная случайная величина и её характеристики

Случайная величина X называется непрерывной, если все её возможные значения непрерывно заполняют целый интервал (α, β) или, более точно, её функция распределения $F(x) = P(X < x)$, непрерывная на (α, β), кусочно дифференцируемая функция с производной $F'(x)$, имеющей конечное число точек разрыва первого рода. Непрерывную функцию распределения удобно задавать функцией плотности вероятности $f(x)$, которая связана с интегральной функцией вероятности соотношением

$$F'(x) = f(x). \tag{36}$$

Свойства функции плотности вероятности:

1) $f(x) \geqslant 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет некоторое значение на интервале $(a; b)$, определяется формулой

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата её отклонения от её математического ожидания

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)\,dx.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины удобнее вычислять по формуле

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Все свойства математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения, сформулированные для дискретных случайных величин, сохраняются полностью для непрерывных случайных величин.

Задание 10. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{27}\cdot\left(-2x^3 + 3x^2 + 12x + 7\right) & \text{при } -1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

1) Найти плотность вероятности $f(x)$.

2) Построить графики функции распределения и плотности вероятности.

3) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, вероятность события $X > M(X)$.

Решение: 1) Плотность вероятности найдем по формуле (36)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1 \\ \dfrac{2}{9}\cdot\left(-x^2 + x + 2\right) & \text{при } -1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

2) Ниже приведены графики функции распределения $F(x)$ (см. рис. 2) и плотности распределения $f(x)$ (см. рис. 3) случайной величины X.

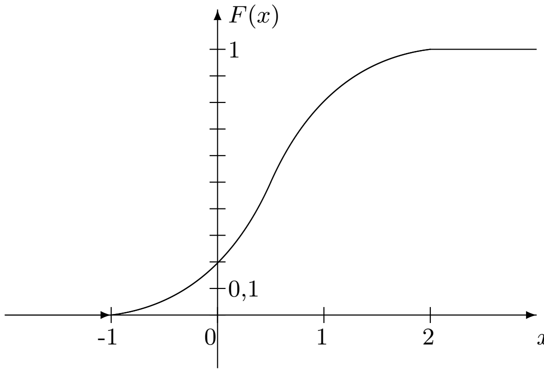


Рис. 2. График функции $F(x)$.

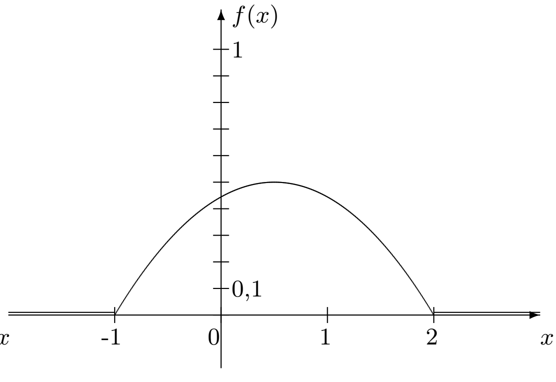


Рис. 3. График функции $f(x)$.

3) Найдем числовые характеристики заданной случайной величины.

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{2} x\,f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{2}\left(-\frac{2x^3}{9}+\frac{2x^2}{9}+\frac{4x}{9}\right)\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{18}+\frac{2x^3}{27}+\frac{2x^2}{9}\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\frac{8}{9}\right)-\left(-\frac{1}{18}-\frac{2}{27}+\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{2};$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx-M^2(X)=\qquad\int\limits_{-1}^{2} x^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(-x^2+x+2\right)\,dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\int\limits_{-1}^{2}\left(-x^4+x^3+2x^2\right)\,dx-\frac{1}{4}=\frac{2}{9}\cdot\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{2}-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{32}{5}+4+\frac{16}{3}\right)-\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{4}=\frac{2}{9}\cdot\frac{63}{20}-\frac{1}{4}=\frac{9}{20};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3}{10}\sqrt{5}=0,671.$$

Событие $X>M(X)$ противоположно событию $X\leqslant M(X)$, значит,

$$P(X>M(X))=1-P(X\leqslant M(X))=1-F(M(X)).$$

Поскольку $M(X)=\dfrac{1}{2}$ и

$$P(X\leqslant M(X))=\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\Big]_{-1}^{\frac{1}{2}}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(-1)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+12\left(\frac{1}{2}\right)+7\right)-0=\frac{1}{2},$$

то

$$P(X>M(X))=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Задача 11. Нормально распределенная случайная величина

Непрерывная случайная величина называется нормально распределенной, если она описывается плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a — математическое ожидание, а σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{37}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, для которой составлены таблицы значений (см. Приложение 2).

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения от математического ожидания меньше положительного числа δ, вычисляется по формуле

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности, если $a = 0$, то справедливо равенство

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если δ выразить в долях, то есть положить $\delta = \sigma t$, то получим

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t).$$

В частности, при $t = 3$ получаем важное правило трёх сигм:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973 \approx 1,$$

которое означает, что $99,73\%$ всех наблюдений для нормально распределенной случайной величины попадают в интервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Задание 11. Пусть X — случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами $a = 4$ и $\sigma = 3$.

1) Записать формулу плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X.

2) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3) Найти вероятность $P(2 < X < 9)$.

4) Вычислив значения функции $f(x)$ в точках $x = a$ и $x = a \pm \sigma$, схематично построить график плотности вероятности;

5) Заштриховать область, площадь которой равна $P(2 < X < 9)$.

Решение: 1) Случайная величина X распределена по нормальному закону, т.е. её плотность вероятности определяется выражением

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$

2) Числовые характеристики заданной случайной величины:

$$M(X) = a = 4; \quad \sigma(X) = \sigma = 3; \quad D(X) = (\sigma(X))^2 = 9.$$

3) Вероятность попадания случайной величины в промежуток найдём по формуле (37). В нашем случае,

$$P(2 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-4}{3}\right) \approx \Phi(1,67) - \Phi(-0,67) =$$
$$= \Phi(1,67) + \Phi(0,67) = 0,4525 + 0,2486 = 0,7011.$$

4) Вычислим значения функции $f(x)$ в точках $x = a$ и $x = a \pm \sigma$:

- при $x = a = 4$ имеем $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} \approx 0,133$;
- при $x = a \pm \sigma$ имеем $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi\, e}} \approx 0,081$.

5) Графики плотности вероятности и области, площадь которой равна

$$P(2 < X < 9),$$

представлены на рисунках 4 и 5.

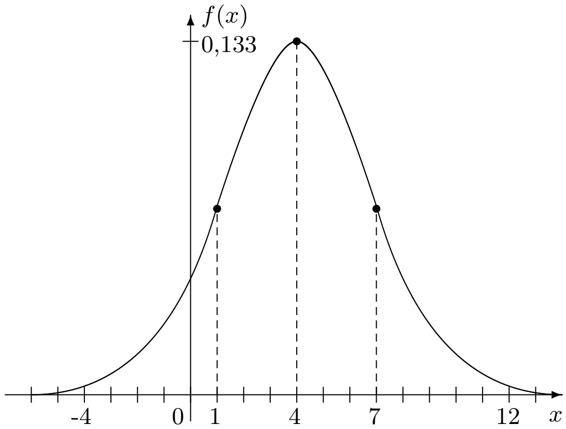


Рис. 4. График плотности вероятности.

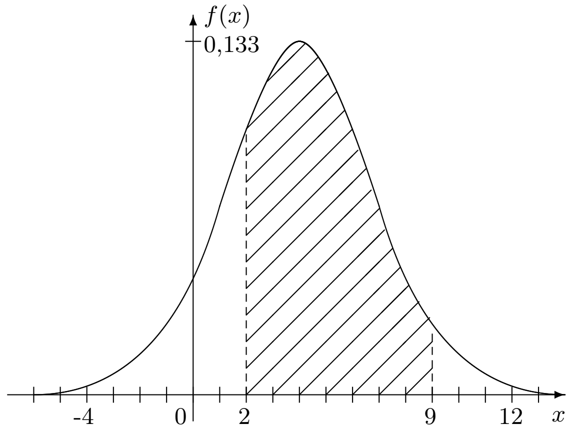


Рис. 5. Область, площадь которой равна $P(2 < X < 9)$.

Задача 12. Математическая статистика

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Наблюдавшиеся значения x_i признака X называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, — вариационным рядом.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему выборки n) или относительных частот

$$w_i = \frac{n_i}{n} \tag{38}$$

(сумма всех относительных частот равна единице).

Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты интервала принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1,\, n_1)$, $(x_2,\, n_2)$, $\ldots$, $(x_k,\, n_k)$, где x_i — варианты выборки и n_i — соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1,\, w_1)$, $(x_2,\, w_2)$, $\ldots$, $(x_k,\, w_k)$, где x_i — варианты выборки и w_i — соответствующие им относительные частоты.

Разобъем отрезок, содержащий все варианты на некоторое количество отрезков длиной Δ.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины Δ, а высоты равны отношению $\dfrac{n_i}{\Delta}$ (плотность частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна n_i — сумме частот вариант, попавших в i-ый интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки n.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины Δ, а высоты равны отношению $\dfrac{w_i}{\Delta}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна w_i — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.

Стандартными точечными оценками математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ изучаемой случайной величины X, являются выборочное среднее и выборочная дисперсия. При вычислении этих оценок по выборке, заданной интервальным статистическим рядом, предполагают, что все наблюдаемые значения выборки, попавшие в i-тый интервал, совпадают с его серединой x_i^*. Приведем формулы для точечных оценок:

выборочное среднее

$$\overline{x_B} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{8} x_i^* n_i}{n} = \sum_{i=1}^{8} x_i^* w_i, \tag{39}$$

выборочная дисперсия

$$D_B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{8} \left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} - \left(\overline{x_B}\right)^2, \tag{40}$$

выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 5,385, \tag{41}$$

исправленная выборочная дисперсия (применяется в случае малых выборок)

$$S^2 = \frac{n}{n-1}D_B = \frac{200}{199} \cdot 29 \approx 29,1, \tag{42}$$

исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2}. \tag{43}$$

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\overline{x_B}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$x_B - \frac{t \cdot \sigma_B}{\sqrt{n}} < a < x_B + \frac{t \cdot \sigma_B}{\sqrt{n}}, \tag{44}$$

где $\overline{x_B}$ — выборочное среднее, σ_B — выборочное среднее квадратическое отклонение, t — значение аргумента функции Лапласа $\Phi(x)$ (см. Приложение 2), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;

при неизвестном σ (и объеме выборки $n \leqslant 30$)

$$x_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < x_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}, \tag{45}$$

где $\overline{x_B}$ — выборочное среднее, $S = \sqrt{S^2}$ — исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ найденно по известным γ и n (см. Приложение 3).

Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$$S \cdot (1-q) < \sigma < S \cdot (1+q), \text{ при } q < 1, \tag{46}$$

$$0 < \sigma < S \cdot (1+q), \text{ при } q \geqslant 1, \tag{47}$$

где q находят по таблице значений (см. Приложение 4) по заданным γ и n.

Задание 12. Данные наблюдений случайной величины X представлены в виде интервального статистического ряда. Первая строка таблицы — интервалы $\Delta_i = [x_i,\, x_{i+1}]$ наблюдавшихся значений случайной величины X, вторая — соответствующие им частоты n_i.

Δ_i	[6,10)	[10,14)	[14,18)	[18,22)	[22,26)	[26,30)	[30,34)	[34,38]
n_i	4	15	38	58	50	26	8	1

1) Построить гистограмму и полигон относительных частот.

2) Найти числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение.

3) Предполагая, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону, найти параметры нормального закона, записать плотность вероятности случайной величины X и построить ее график на одном чертеже с гистограммой, вычисляя значения плотности в серединах интервалов.

4) Найти с надежностью (доверительной вероятностью) $\gamma = 0,95$ интервальную оценку параметра $a = M(X)$ случайной величины X.

Решение: 1) Найдем сумму частот

$$n = 4 + 15 + 38 + 58 + 50 + 26 + 8 + 1 = 200,$$

относительные частоты вычисляем по формуле

$$w_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, 8$$

(сумма относительных частот должна равняться единице), середины интервалов найдем по формуле

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Для построения гистограммы и полигона относительных частот над каждым интервалом статистического ряда построим прямоугольник, площадь которого равна соответствующей относительной частоте. Высоты этих прямоугольников определяем по формуле

$$h_i = \frac{w_i}{\Delta},$$

где $\Delta = 4$ — длина интервала в статистической таблице.

Внесем полученные данные в таблицу:

Δ_i	[6,10)	[10,14)	[14,18)	[18,22)	[22,26)	[26,30)	[30,34)	[34,38]
x_i^*	8	12	16	20	24	28	32	36
n_i	4	15	38	58	50	26	8	1
w_i	0,02	0,075	0,19	0,29	0,25	0,13	0,04	0,005
h_i	0,005	0,019	0,048	0,073	0,068	0,032	0,01	0,001

Гистограмму построим по первой и пятой строкам последней таблицы, полигон относительных частот построим по второй и пятой строкам таблицы (см. рис. 6).

2) Стандартными точечными оценками математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ изучаемой случайной величины X, являются выборочное среднее и выборочная дисперсия. При вычислении этих оценок по выборке, заданной интервальным статистическим рядом, предполагают, что все наблюдаемые значения выборки, попавшие в i-тый интервал, совпадают с его серединой x_i^* (вторая строка таблицы).

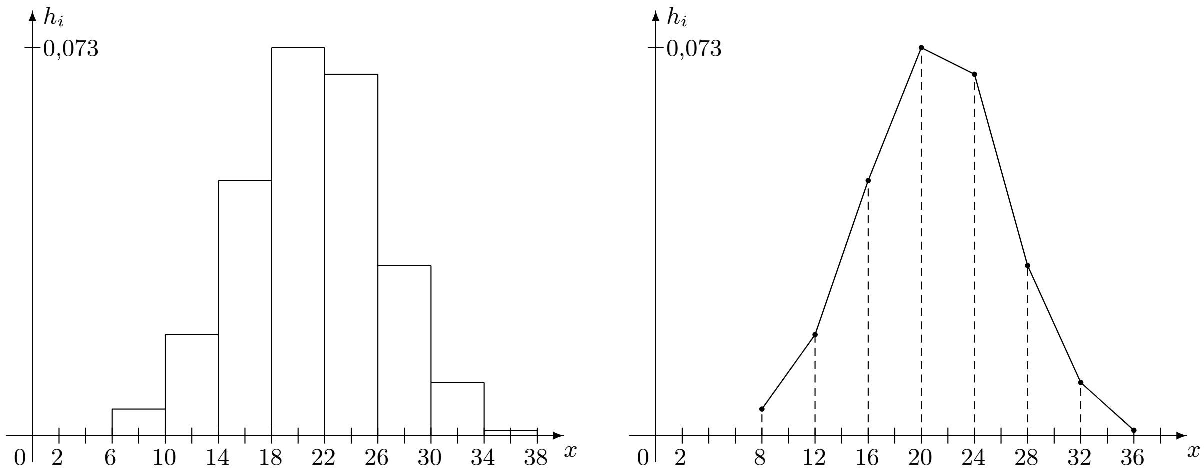


Рис. 6. Гистограмма (слева) и полигон (справа) относительных частот.

В итоге получаем, выборочное среднее

$$\overline{x_B} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{8} x_i^* n_i}{n} = \frac{1}{200}\,(8\cdot 4 + 12\cdot 15 + 16\cdot 38 + 20\cdot 58 + 24\cdot 50 + \\ + 28\cdot 26 + 32\cdot 8 + 36\cdot 1) = 21;$$

выборочная дисперсия

$$D_B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{8} \left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} - \left(\overline{x_B}\right)^2 = \frac{1}{200}\left(8^2\cdot 4 + 12^2\cdot 15 + 16^2\cdot 38 + \right. \\ \left. + 20^2\cdot 58 + 24^2\cdot 50 + 28^2\cdot 26 + 32^2\cdot 8 + 36^2\cdot 1\right) - 21^2 = 29,08;$$

выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 5,393;$$

исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_B = \frac{200}{199}\cdot 29 \approx 29,23.$$

3) Параметрами нормальной случайной величины являются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Оценки для них — это выборочное среднее $\overline{x_B} = 21$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_B = 5,393$. Таким образом, если исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону, то это закон с параметрами $a = 21$ и $\sigma = 5,393$.

В этом случае плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{5,393\cdot\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-21)^2}{2\cdot 5,393^2}}.$$

Для построения графика плотности вероятности случайной величины X найдем значения $f(x)$ в точках x_i^* и $x = 21$ — точке максимума функции $f(x)$. При вычислении воспользуемся таблицей значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

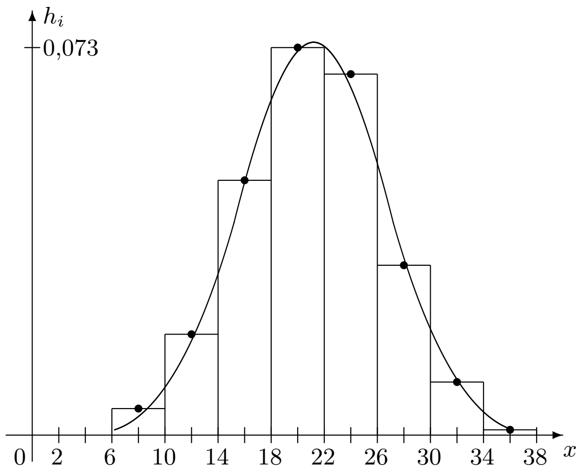
Очевидно, что

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(u), \quad u = \frac{x-a}{\sigma}.$$

Составим таблицу, учитывая, что функция $\varphi(x)$ является четной.

x_i^*	8	12	16	20	24	28	32	36
u_i	-2,411	-1,669	-0,927	-0,185	0,556	1,298	2,040	2,782
$\varphi(u_i)$	0,022	0,099	0,260	0,392	0,342	0,172	0,050	0,008
$f(x_i^*)$	0,004	0,018	0,048	0,073	0,063	0,032	0,009	0,002

Нанесем полученные точки на чертеж с гистограммой и соединим их гладкой кривой. Получили график плотности вероятности случайной величины X (график выравнивающей кривой). Видно, что график выравнивающей кривой хорошо согласуются с гистограммой, что подтверждает предположение о нормальном законе вероятности случайной величины X.



4) Доверительный интервал для математического ожидания имеет вид

$$\left(x_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},\, x_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\overline{x_B}$ — выборочное среднее, $S = \sqrt{S^2}$ — исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ — найденно по известным γ и n (см. Приложение 3).

В нашем случае,

$$\overline{x_B} = 21, \quad S = \sqrt{29,23} = 5,406, \quad t_\gamma = 1,96, \quad \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} = 0,749.$$

Следовательно, доверительный интервал для математического ожидания $M(X)$ равен $(21 - 0,749;\ 21 + 0,749) = (20,251;\ 21,749)$.

Это означает, что с надежностью $\gamma = 0,95$ можно утверждать, что $M(X)$ принадлежит интервалу $(20,251;\ 21,749)$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2007г.
2. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2006г.
3. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2005-2011г.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2000-2011г.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2000-2011г.

Приложение 1.

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли аргумента x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061

Приложение 1 (продолжение).

x	Сотые доли аргумента x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Для отрицательных значений x используется формула $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приложение 2.

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Сотые доли аргумента x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4485	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4924	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986

x	Сотые доли аргумента x					
	0	2	4	5	6	8
3,0	0,498650	0,498736	0,498817	0,498856	0,498893	0,498965
3,1	0,499032	0,499096	0,499155	0,499184	0,499211	0,499264
3,2	0,499313	0,499359	0,499402	0,499423	0,499443	0,499481
3,3	0,499517	0,499550	0,499581	0,499596	0,499610	0,499638
3,4	0,499663	0,499687	0,499709	0,499720	0,499730	0,499749
3,5	0,499767	0,499784	0,499800	0,499807	0,499815	0,499828
3,6	0,499841	0,499853	0,499864	0,499869	0,499874	0,499883
3,7	0,499892	0,499900	0,499908	0,499912	0,499915	0,499922
3,8	0,499928	0,499933	0,499938	0,499941	0,499943	0,499948
3,9	0,499952	0,499956	0,499959	0,499961	0,499963	0,499966
4,0	0,499968	0,499971	0,499973	0,499974	0,499975	0,499977
4,1	0,499979	0,499981	0,499983	0,499983	0,499984	0,499985
4,2	0,499987	0,499988	0,499989	0,499989	0,499990	0,499991
4,3	0,499991	0,499992	0,499993	0,499993	0,499993	0,499994
4,4	0,499995	0,499995	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996
4,5	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499998
4,6	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499999
4,7	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999
4,8	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999	0,499999
4,9	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000

Для отрицательных значений x используется формула $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Приложение 3.

Таблица значений функции $t_\gamma = t(\gamma,\, n)$

n	γ			n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,780	4,600	8,610	15	2,150	2,980	4,140	45	2,016	2,692	3,527
6	2,570	4,030	6,860	16	2,130	2,950	4,070	50	2,009	2,679	3,502
7	2,450	3,710	5,960	17	2,120	2,920	4,020	60	2,001	2,662	3,464
8	2,370	3,500	5,410	18	2,110	2,900	3,970	70	1,996	2,649	3,439
9	2,310	3,360	5,040	19	2,100	2,880	3,920	80	1,991	2,640	3,418
10	2,260	3,250	4,780	20	2,093	2,861	3,883	90	1,987	2,633	3,403
11	2,230	3,170	4,590	25	2,064	2,797	3,745	100	1,984	2,627	3,392
12	2,200	3,110	4,440	30	2,045	2,756	3,659	120	1,980	2,617	3,374
13	2,180	3,060	4,320	35	2,032	2,720	3,600	∞	1,960	2,576	3,291

Приложение 4.

Таблица значений функции $q = q(\gamma,\, n)$

n	γ			n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,370	2,670	5,640	15	0,460	0,730	1,150	45	0,220	0,320	0,460
6	1,090	2,010	3,880	16	0,440	0,70	1,070	50	0,210	0,3000	0,430
7	0,920	1,620	2,980	17	0,420	0,660	1,010	60	0,188	0,269	0,380
8	0,800	1,380	2,420	18	0,400	0,630	0,960	70	0,174	0,245	0,340
9	0,710	1,200	2,060	19	0,390	0,600	0,920	80	0,161	0,226	0,310
10	0,650	1,080	1,800	20	0,370	0,580	0,880	90	0,151	0,211	0,290
11	0,590	0,980	1,600	25	0,320	0,490	0,730	100	0,143	0,198	0,270
12	0,550	0,900	1,450	30	0,280	0,430	0,630	150	0,115	0,160	0,211
13	0,520	0,830	1,330	35	0,260	0,380	0,560	200	0,099	0,136	0,185
14	0,480	0,780	1,230	40	0,240	0,350	0,500	250	0,089	0,120	0,162

Содержание