**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

---

**Кафедра экономики ГА**

В.В. Андрианов

# УПРАВЛЕНЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

ПОСОБИЕ
по проведению практических занятий

*для студентов IV курса
специальности 080507
дневного обучения*

**Москва - 2012**

ББК 33.05
А65

Рецензент канд. экон. наук, доц. Н.И. Степанова

Андрианов В.В.

А65 Управленческие решения: Пособие по проведению практических занятий. – М.: МГТУ ГА, 2012. – 52 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Управленческие решения» по Учебному плану для студентов IV курса специальности 080507 дневного обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 22.03.12 г. и методического совета 12.04.12 г.

## Практическое занятие № 1

# РАЗРАБОТКА УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ (УР) АЛГОРИТМАМИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

### Постановка задачи 1

Предприятие выпускает 3 продукта и состоит из 3-х цехов: двух основных и вспомогательного. Каждый цех выпускает один продукт. В табл. 1.1 приведены коэффициенты расхода (прямые затраты) $A = a_{ij}$ - единиц продукции i-го цеха на выпуск единицы продукции и число реализуемых единиц продукции $y_i$ i-го цеха (конечный продукт). Экономико-математическая модель (ЭММ) баланса производства и потребления имеет вид

$$x_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3) = y_i \qquad (1.1)$$

или в векторном виде

$$X – A * X = Y . \qquad (1.2)$$

**Таблица 1.1**

**Расходные коэффициенты**

| Цех | Прямые затраты матрица $A = a_{ij}$ | | | Конечный продукт $y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0 | 0.2 | 0.0 | 350 |
| 2 | 0.1 | 0.0 | 0.3 | 250 |
| 3 | 0.0 | 0.4 | 0.0 | 350 |

В табл. 1.2 приведены нормы расхода ресурсов: сырья а, сырья б, топлива и трудозатрат на 1 ед. продукции каждого цехам, а также с - стоимость единицы каждого ресурса.

**Таблица 1.2**

**Нормы расхода и стоимости единицы ресурсов**

| Вид ресурса | Нормы расхода ресурсов $R=r_{ij}$ | | | Цена 1 ед. |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Сырье а | 1.1 | 1.0 | 0.6 | 2.0 |
| Сырье б | 0.2 | 0.5 | 1.0 | 5.0 |
| Топливо | 2.0 | 1.5 | 2.2 | 3.0 |
| Трудозатраты | 14.0 | 25.0 | 22.0 | 1.0 |

Необходимо определить:

X - валовой выпуск продукции для каждого цеха X = (x1, x2, x3);

Y - производственную программу цехов Y = (y1, y2, y3 );

K - коэффициенты косвенных затрат;
P - суммарный расход сырья а, сырья б, топлива и трудовых ресурсов;
RR - коэффициенты прямых затрат сырья **а**, сырья **б**, топлива и труда на единицу конечной продукции каждого цеха;
PC - расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;
PR - расходы по цехам на всю производственную программу;
PZ - производственные затраты на единицу конечной продукции.

Поскольку $X–A*X=Y$ и $(E-A)*X=Y$, то $X = (E-A)^{-1}*Y = S^{-1}*Y$. (1.3)

Матрица $S^{-1}=(E-A)^{-1}$ содержит коэффициенты полных производственных затрат $S=(E - A)$.

## Алгоритм решения задачи

**Шаг 1.** Вычисляем матрицу $S = (E - A)$. (1.4)

$$\begin{vmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.4 & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.00 & -0.2 & 0.0 \\ -0.1 & 1.00 & -0.3 \\ 0.0 & -0.4 & 1.00 \end{vmatrix}$$

**Шаг 2.** Вычисляем матрицу коэффициентов полных производственных затрат $S^{-1} = (E - A)^{-1}$, обращая (E - A) алгоритмом Жордана-Гаусса (рис. 1.1).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Матрица (E-A) | **[1.00]** | -0.20 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | Матрица E |
| | -0.20 | 1.00 | -0.30 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | |
| | 0.00 | -0.40 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | |
| Итерация 1 | 1.00 | -0.20 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | |
| | 0.00 | **[0.98]** | -0.30 | 0.10 | 1.00 | 0.00 | |
| | 0.00 | -0.40 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | |
| Итерация 2 | 1.00 | 0.00 | -0.06 | 1.02 | 0.20 | 0.00 | |
| | 0.00 | 1.00 | -0.31 | 0.10 | 1.02 | 1.00 | (1.5) |
| | 0.00 | 0.00 | **[0.88]** | 0.04 | 0.41 | 0.00 | |
| Итерация 3 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | **1.02** | **0.23** | **0.07** | Матрица $(E-A)^{-1}$ |
| | 0.00 | 1.00 | 0.00 | **0.12** | **1.16** | **0.35** | |
| | 0.00 | 0.00 | 1.00 | **0.05** | **0.47** | **1.14** | |

**Рис. 1.1.** Обращение матрицы (E-A) алгоритмом Жордана-Гаусса

**Шаг 3.** Вычисляем валовой выпуск продукции цехов $(E - A)^{-1} * Y = X$. (1.6)

| Расчеты на ЭВМ | | | | | | | Расчеты на калькуляторе |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.02 | 0.23 | 0.07 | | 350 | | 441 | 1.02*350+0.23*250+0.07*350=357+57.5+24.5 = **439** |
| 0.12 | 1.16 | 0.35 | * | 250 | = | 453 | 0.12*350+1.16*250+0.35*350=42+290+122.5 = **454** |
| 0.05 | 0.47 | 1.14 | | 350 | | 531 | 0.05*350+0.47*250+1.14*350=17.5+117.5+399=**534** |

**Шаг 4**. Вычисляем программу производства (табл. 1.3)

$$z_{ik}= \sum a_{ik*} x_{k.} \qquad (1.7)$$

**Таблица 1.3**

**Программа производства**

| Цех | Внутреннее потребление | | | Итого | Конечный продукт | Валовой продукт |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 0 | 91 | 0 | 91 | 350 | 441 |
| 2 | 51 | 0 | 152 | 203 | 250 | 453 |
| 3 | 0 | 181 | 0 | 181 | 350 | 531 |

**Шаг 5.** Находим матрицу коэффициентов косвенных затрат

$$(E-A)^{-1}-A=K. \qquad (1.8)$$

$$\begin{vmatrix} 1.02 & 0.23 & 0.07 \\ 0.12 & 1.16 & 0.35 \\ 0.05 & 0.47 & 1.14 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.00 & 0.20 & 0.00 \\ 0.10 & 0.00 & 0.30 \\ 0.00 & 0.40 & 0.00 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.02 & 0.03 & 0.07 \\ 0.02 & 1.16 & 0.05 \\ 0.05 & 0.07 & 1.14 \end{vmatrix}$$

**Шаг 6.** Вычисляем расход сырья а и в, топлива и труда

$$R*X=P. \qquad (1.9)$$

| Расчеты на ЭВМ | | | | | | | | Расчеты на калькуляторе |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 1.0 | 0.6 | | 441 | | 1257 | Сырье а | 1.1*439+1*454+0.6*534=482.5+439 + 320.4 = **1242** |
| 0.2 | 0.5 | 1.0 | * | 453 | = | 846 | Сырье б | 0.2*439+0.5*454+1*534=87.8+227+534 = **849** |
| 2.0 | 1.5 | 2.2 | | 531 | | 2731 | Топливо | 2*439+1.5*454+2.2*534=878+681+1174.8 = **2734** |
| 14 | 25 | 22 | | | | 29198 | Чел.-ч. | 14*439+25*454+22*534=6146+11350+11748= **29244** |

**Шаг 7.** Ищем расход ресурсов на ед. конечной продукции

$$R*(E -A)^{-1}=RR \qquad (1.10)$$

| Расчеты на ЭВМ | | | | | | | | | | | | Расчеты на калькуляторе | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 1.0 | 0.6 | * | 1.02 | 0.23 | 0.07 | = | 1.27 | 1.70 | 1.11 | | 1.272 | 1.695 | 1.111 |
| 0.2 | 0.5 | 1.0 | | 0.12 | 1.16 | 0.35 | | 0.31 | 1.09 | 1.33 | | 0.314 | 1.096 | 1.329 |
| 2.0 | 1.5 | 2.2 | | 0.05 | 0.47 | 1.14 | | 2.32 | 3.23 | 3.17 | | 2.330 | 3.234 | 3.173 |
| 14 | 25 | 22 | | | | | | 18.26 | 42.56 | 34.77 | | 18.38 | 42.56 | 34.87 |

**Шаг 8.** Вычисляем расход ресурсов по каждому из цехов

$$X^{\sim}*R=PC, \tag{1.11}$$

где $X^{\sim}$ - вектор-строка валовых выпусков продукции по цехам.

| | | | | | | | | Расчеты на ЭВМ | | | Расчеты на калькуляторе | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 441 | 453 | 531 | * | 1.1 | 1.0 | 0.6 | = | 485 | 453 | 319 | 483 | 454 | 320 |
| | | | | 0.2 | 0.5 | 1.0 | | 88 | 226 | 531 | 88 | 227 | 534 |
| | | | | 2.0 | 1.5 | 2.2 | | 882 | 680 | 1168 | 878 | 681 | 1175 |
| | | | | 14.0 | 25.0 | 22.0 | | 6174 | 11325 | 11682 | 6146 | 11350 | 11748 |

485 = 441 * 1.1;  453 = 453 * 1.0;   319 = 531 * 0.6;   и т.д.

**Шаг 9.** Находим расходы цехов

$$c^{\sim}*PC = PR, \text{ где } c^{\sim} \text{ - цены 1 ед. ресурсов.} \tag{1.12}$$

| | | | | | | | | | Расчеты на ЭВМ | | | Расчеты на калькуляторе | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 3 | 1 | * | 485 | 453 | 319 | = | 10231 | 15402 | 18479 | 10186 | 15436 | 18583 |
| | | | | | 88 | 226 | 531 | | | | | | | |
| | | | | | 882 | 680 | 1168 | | | | | | | |
| | | | | | 6174 | 11325 | 11682 | | | | | | | |

**Шаг 10.** Вычисляем затраты на 1 ед. конечной продукции

$$c^{\sim}*RR=PZ. \tag{1.13}$$

| | | | | | | | | | Расчеты на ЭВМ | | | Расчеты на калькуляторе | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 3 | 1 | * | 1.27 | 1.70 | 1.11 | = | 29.3 | 61.1 | 53.1 | 29.48 | 61.14 | 53.26 |
| | | | | | 0.31 | 1.09 | 1.33 | | | | | | | |
| | | | | | 2.32 | 3.23 | 3.17 | | | | | | | |
| | | | | | 18.26 | 42.56 | 34.77 | | | | | | | |

Данные вариантов задач приведены в табл. 1.4, ответы - в табл. 1.1 П. I .

**Таблица 1.4**

**Исходные данные вариантов задачи 1**

| | Вариант 1 | | | | Вариант 2 | | | | Вариант 3 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Цех 1 | 0.0 | 0.2 | 0.0 | 205 | 0.0 | 0.1 | 0.0 | 250 | 0.0 | 0.2 | 0.0 | 400 |
| Цех 2 | 0.1 | 0.0 | 0.1 | 110 | 0.3 | 0.0 | 0.3 | 120 | 0.4 | 0.0 | 0.3 | 200 |
| Цех 3 | 0.0 | 0.2 | 0.1 | 305 | 0.0 | 0.2 | 0.2 | 330 | 0.0 | 0.3 | 0.2 | 500 |
| Сырье а | 1.3 | 2.3 | 0.7 | 6 | 1.2 | 2.3 | 1.8 | 5 | 1.6 | 2.3 | 0.9 | 5 |
| Сырье а | 0.0 | 0.5 | 1.5 | 12 | 0.0 | 1.6 | 2.6 | 7 | 0.0 | 0.5 | 1.4 | 9 |
| Топливо | 2.1 | 1.7 | 2.1 | 3 | 2.2 | 1.8 | 3.2 | 2 | 1.5 | 1.4 | 2.1 | 1 |
| Труд ч-ч | 10 | 23 | 25 | 1.4 | 12 | 15 | 14 | 1.2 | 15 | 10 | 15 | 1.5 |
| | Вариант 4 | | | | Вариант 5 | | | | Вариант 6 | | | |
| Цех 1 | 0.0 | 0.3 | 0.0 | 505 | 0.0 | 0.6 | 0.0 | 250 | 0.0 | 0.1 | 0.0 | 600 |
| Цех 2 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 410 | 0.4 | 0.0 | 0.2 | 320 | 0.2 | 0.0 | 0.1 | 400 |
| Цех 3 | 0.0 | 0.2 | 0.3 | 505 | 0.0 | 0.5 | 0.1 | 430 | 0.0 | 0.3 | 0.2 | 300 |
| Сырье а | 1.2 | 2.1 | 0.5 | 4 | 0.1 | 2.5 | 1.4 | 1 | 1.3 | 2.1 | 0.6 | 5 |
| Сырье а | 0.1 | 0.2 | 1.4 | 13 | 0.2 | 1.3 | 2.3 | 13 | 02. | 0.2 | 1.5 | 13 |
| Топливо | 2.0 | 1.3 | 2.6 | 5 | 2.3 | 1.6 | 3.1 | 2 | 1.3 | 1.4 | 2.7 | 4 |
| Труд ч-ч | 10 | 20 | 15 | 1.1 | 12 | 13 | 14 | 1.1 | 15 | 10 | 15 | 1.2 |

## Практическое занятие № 2

## ОЦЕНКА ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ {X}

### Постановка задачи 2

Собрана выборка А из n=100 наблюдений $x_i$ - t подготовки самолетов к вылету (мин.) {X} = {187, 143, 250, 140, 131, 110, 90, 79, 199, 177, 143, 226, 150, 197, 144, 63, 144, 192, 200, 162 , 72, 171, 158, 156, 155, 91, 151, 140, 129, 121, 140, 125, 132, 203, 181, 150, 195, 243, 167, 242, 143, 116, 216, 182, 134, 148, 89, 152, 192, 236, 100, 220, 180, 175, 163, 163, 94, 156, 150, 175, 216, 240,108, 70, 164, 83, 170,156, 151, 173, 156, 66, 110, 66, 166, 86, 91, 128, 128, 105, 142, 130, 144, 125, 170, 155, 218, 201, 146, 64, 214, 131, 190, 191, 50, 112, 112, 155, 232, 144}, для которой вычислены:

1) $\mu^*$ - точечная оценка математического ожидания (МО) {X};

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, \qquad i=1,n; \qquad (2.1)$$

2) точечная оценка среднего квадратичного отклонения (СКО) {X}

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \mu^*)^2} = 45.9; \qquad (2.2)$$

3) максимальное и минимальное значения $x_i$ $x_{max}$=250 и $x_{min}$=50;
4) число интервалов $n_и$ разбиения упорядоченного от $x_{min}$ до $x_{max}$ ряда $\{x_i\}$

$$n_u = 5Log(n) = 5Log(100) = 10 \;; \qquad (2.3)$$

5) количество попаданий $n_i$ в интервалы (табл. 2.1).

**Таблица 2.1**

**Количество попаданий в интервалы**

| Интервал | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 8 | 8 | 11 | 20 | 20 | 10 | 8 | 5 | 4 |

Необходимо найти закон распределения {X}, оценив гипотезы о законах Пуассона, Гаусса и экспоненциальном законе.

**Алгоритм решения задачи**

Находим:

**Шаг 1**. Ширину интервала $\Delta x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{n_u} = \dfrac{250-50}{10} = 20$ . (2.4)

**Шаг 2.** Границы интервалов, начиная с $x_{min}$=50 до $x_{max}$=250 (табл. 2.2).

**Таблица 2.2**

**Границы интервалов**

| Интервал | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Граница левая<br>Граница правая | 50-<br>70 | 71-<br>91 | 92-<br>112 | 113-<br>133 | 134-<br>154 | 155-<br>175 | 176-<br>196 | 197-<br>217 | 218-<br>238 | 239-<br>259 |

**Шаг 3.** Вероятности попаданий $p^*_i$ {X} в i -й интервал $p_i^* = \dfrac{n_i^*}{n}$. (2.5)

**Шаг 4.** Оценки функции плотности распределения $f_x^* = \dfrac{p_i^*}{\Delta x}$. (2.6)

**Шаг 5.** Оценки функции распределения $F^*(x) = \sum p_i^*$ . (2.7)

Результаты расчетов в табл.2.3.

**Таблица 2.3**

**Расчетные значения $n_i$, $p^*_i$, $f^*(x)$, $F^*(x)$**

| Интервал | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Границы | 50-70 | 71-91 | 92-112 | 113-133 | 134-154 | 155-175 | 176-196 | 197-217 | 218-238 | 239-259 |
| $n_i$ | 6 | 8 | 8 | 11 | 20 | 20 | 10 | 8 | 5 | 4 |
| $p^*_i$ | 0.060 | 0.080 | 0.080 | 0.110 | 0.200 | 0.200 | 0.100 | 0.080 | 0.050 | 0.040 |
| $f^*_i$ | 0.003 | 0.004 | 0.004 | 0.005 | 0.010 | 0.010 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 |
| $F^*_i$ | 0.060 | 0.140 | 0.220 | 0.330 | 0.530 | 0.730 | 0.830 | 0.910 | 0.960 | 1.000 |

Гипотезы Но о распределении {X} по законам Пуассона, Гаусса и экспоненциальному закону оцениваем по параметрам законов табл. 2.4**:**

**Шаг 7.** Вычисляем параметры законов по моделям табл. 2.4.

**Шаг 8.** Находим теоретические точечные оценки $F_т(x)$ и $f_т(x)$ (табл. 2.4).

**Шаг 9.** Вычисляем теоретические вероятности попадания в i-й интервал

$$p_{т\,i} = F_т(x_i) - F_т(x_{i-1}) \quad , \tag{2.8}$$

где $F_т(x_i)$ и $F_т(x_{т\,i-1})$ - $F_т(x)$ вычислены по моделям табл. 2.4.

**Таблица 2.4**

**Модели законов распределения**

| | | |
|---|---|---|
| Закон Пуассона | $\lambda = \sum_{i=1}^{n}(i{*}n_i)/n$ | $F_т(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; $0<n<4$; $f_т(x) = \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}$; $k=0,1,2..n$; |
| Нормальный закон | $\mu=\mu^*$ <br> $\sigma^2=\sigma^{*2}$ | $F_т(x) = \int f(x)dx$; $0<x<4$; $f_т(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ |
| Экспоненциальный закон | $\lambda=1/\mu^*$ | $F_т(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $0<x<4$; $f_т(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; |

**Шаг 10.** Статистическую расчетную оценку $x^{2*}$

$$\chi^{2*} = \sum_{i=1}^{n_и} \frac{(n_i - np_{Tii})^2}{np_{Ti}}, \tag{2.9}$$

где $n_и$ - количество интервалов;

$p_{Ti}$ - теоретическая вероятность попадания в i-й интервал.

**Шаг 11.** Сравниваем

$$x^{2*} \le x^2_{v,p} \quad , \tag{2.10}$$

где $x^2_{v,p}$ - табличное значение критерия хи-квадрат, при $v=(n_и - n_p - 1)$ и $p=(1-p_d)$ (табл. 2.2. П. II);

$p_d$ - доверительная вероятность (рекомендуется $p_d$=95%);

$n_p$ - количество параметров в теоретической модели закона.

Гипотеза Ho не отвергается, если $x^{2*} \le x^2_{v,p}$.

**Оценка гипотезы Ho о распределении {X} по закону Гаусса**

1. Выдвигаем гипотезу Ho о нормальном законе распределения {X} с параметрами $\mu^*$=150.9 и $\sigma^*$=45.9. Модель закона см. в табл. 2.4.

2. Определяем теоретические $F_{тi}=\Phi(Z_i)$, где $Z_i=(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x})$ из табл. 2.1 П. II, в которой $\Phi(-Z_i) = 1 - \Phi(Z_i)$.

3. Определяем $p_{тi}$ по (2.8): $p_{т1}=F_{т1}$=0.039; $p_{т2}=F_{т2}-F_{т1}$=0.093-0.039=0.054 и т.д. Результаты расчетов записаны в табл. 2.5.

4. Находим теоретические $F_{тi}$ и $p_{тi}$ для закона Гаусса (табл. 2.5).

**Таблица 2.5**

**Теоретические $F_{тi}$ и $p_{тi}$ для закона Гаусса**

| Интервал | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Границы | 50 – 70 | 71 – 91 | 92 – 112 | 113 - 133 | 134 - 154 | 155 – 175 | 176-196 | 197 – 217 | 218-238 | 239-259 |
| $x_i - \mu$ | -80.92 | -60.92 | -40.92 | -20.92 | -0.92 | 19.08 | 39.08 | 59.08 | 79.08 | 99.08 |
| $Z_i$ | -1.76 | -1.33 | -0.89 | -0.46 | -0.02 | 0.42 | 0.85 | 1.29 | 1.72 | 2.16 |
| $F_{тi}$ | 0.039 | 0.093 | 0.188 | 0.328 | 0.496 | 0.665 | 0.805 | 0.903 | 0.958 | 0.985 |
| $p_{тi}$ | 0.039 | 0.054 | 0.095 | 0.139 | 0.168 | 0.169 | 0.141 | 0.097 | 0.056 | 0.026 |

5. Вычисляем

$$\chi^{2*}=\sum_{i=1}^{n_и}\frac{(n_i-np_{Tii})^2}{np_{Ti}}=\frac{(6-100*0.039)^2}{100*0.039}+\frac{(8-100*0.054)^2}{100*0.054}+\frac{(8-100*0.095)^2}{100*0.095}+..+..=6.60$$

6. Сравниваем $x^2_{v,p\ таб}$=14.07 ($v = n_и - n_p - 1$=10-2-1=7 и $p=1-p_d$ =(1- 0.95) =0.05, найденное в табл. 2.2 П. II, с расчетным $x^{*2}$=6.60.

Поскольку $x^{*2} = 6.60 < x^2_{v,p\ табл} = 14.07$, гипотеза Ho не отвергается.

**Оценка гипотезы Ho о законе Пуассона**

1. Выдвигаем гипотезу Ho о распределении X по закону Пуассона с параметром $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\frac{i*n_i}{n}=5.29$. По табл.2.2 П II. вычисляем $e^{-5.29} = 0.005$.

2. Определяем теоретические $F_{тi}$, вычисляя слагаемые модели

$$k=0;\ F_{\text{тi}}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=\frac{1}{1}0.005=0.005;$$

$$k=1;\ F_{\text{тi}}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^0}{0!}*\frac{\lambda}{1}*e^{-\lambda}=\frac{\lambda^0}{0!}*e^{-\lambda}*\frac{\lambda}{1}=0.005*\frac{\lambda}{1}=0.005*\frac{5.29}{1}=0.027;$$

$$k=2;\ F_{\text{тi}}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}*\frac{\lambda}{2}*e^{-\lambda}=\frac{\lambda^1}{1!}*e^{-\lambda}*\frac{\lambda}{2}=0.027*\frac{\lambda}{2}=0.071;$$

$$k=3;\ F_{\text{тi}}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=0.071*\frac{\lambda}{3}=0.124;\ k=4;\ F_{\text{тi}}=\sum_{k=0}^{n_u}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=0.124*\frac{\lambda}{4}=0.165;\ \text{и т.д.}$$

**Таблица 2.6**

**Теоретические $F_{\text{тi}}$ и $p_{\text{тi}}$ для закона Пуассона**

| Интервал | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_{\text{тi}}$ | 0.032 | 0.102 | 0.227 | 0.391 | 0.565 | 0.719 | 0.835 | 0.911 | 0.956 | 0.980 |
| $p_{\text{тi}}$ | 0.032 | 0.071 | 0.124 | 0.165 | 0.174 | 0.153 | 0.116 | 0.077 | 0.045 | 0.024 |

3. Находим

$$x^{*2}=2.52+0.13+1.58+1.81+0.39+1.41+0.22+0.01+0.05+1.09=9.22\ .$$

Поскольку $x^{*2}=9.22<x^2_{v,p\ \text{таб}}=15.5$ (при $v=10-1-1=8$ и $p=1-p_d=1-0.95=0.05$), гипотеза Но не отвергается.

**Оценка гипотезы Но об экспоненциальном законе**

1. Выдвигаем гипотезу Но об экспоненциальном законе распределения {X} с параметром $\lambda=1/\mu^* = 0.0066$.

2. Определяем теоретические $F_{\text{тi}}(x_i)$, подставляя $x_i$ правой границы интервалов в модель закона. Для i=1 $F_{\text{тi}}=1(x=50)=1-e^{-0.0066*50}=1-e^{-0.33}=0.375$.

3. Находим теоретические вероятности $p_{\text{тi}}=F_{\text{тi}}-F_{\text{тi-1}}$

$p_{\text{т1}}=F_{\text{т1}}=0.375$; $p_{\text{т2}}=0.46-0.375=0.085$ и т.д. Результаты в табл. 2.7.

**Таблица 2.7**

**Теоретические $F_{\text{тi}}$ и $p_{\text{тi}}$ для экспоненциального закона**

| Интервал | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_{\text{тi}}$ | 0.375 | 0.460 | 0.533 | 0.597 | 0.651 | 0.699 | 0.739 | 0.775 | 0.805 | 0.832 |
| $P_{\text{тi}}$ | 0.375 | 0.085 | 0.073 | 0.063 | 0.055 | 0.047 | 0.041 | 0.035 | 0.031 | 0.026 |

4. $x^{*2}=26.49+0.03+0.06+3.44+38.57+49.30+8.55+5.64+1.24+0.70=134.02$.

5. Поскольку $x^{*2}=134.02>x^2_{v,p}$ табл=15.51 (при $v=10-1-1=8$ и $p=1-p_d=$ $=1-0.95=0.05$), гипотеза Но об экспоненциальном законе отвергается.

**Вывод:** так как у закона Гаусса $x^{*2}=6.6<x^{*2}=9.22$ закона Пуассона, принимаем гипотезу о нормальном законе. Ответы задач табл. 2.8 в табл. 1.2 П.I.

**Таблица 2.8**

**Исходные данные вариантов задачи 2**

| $n_и$ | μ | σ | $x_{max}$ | $x_{min}$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ | $n_6$ | $n_7$ | $n_8$ | $n_9$ | $n_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 33.99 | 2.29 | 39 | 30 | 7 | 5 | 14 | 19 | 20 | 10 | 8 | 9 | 4 | 4 |
| 2 | 46.22 | 6.89 | 60 | 30 | 4 | 2 | 9 | 20 | 14 | 13 | 14 | 7 | 12 | 5 |
| 3 | 47.68 | 7.06 | 67 | 35 | 11 | 10 | 16 | 18 | 16 | 14 | 8 | 3 | 1 | 3 |
| 4 | 36.06 | 36.69 | 180 | 1 | 46 | 15 | 15 | 11 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 5 | 46.91 | 11.92 | 89 | 24 | 8 | 14 | 18 | 26 | 14 | 12 | 5 | 1 | 0 | 2 |
| 6 | 46.69 | 11.85 | 78 | 23 | 5 | 5 | 23 | 18 | 14 | 16 | 6 | 6 | 5 | 2 |
| 7 | 47.60 | 6.97 | 64 | 30 | 2 | 2 | 11 | 16 | 16 | 19 | 11 | 15 | 4 | 4 |
| 8 | 34.03 | 2.63 | 42 | 30 | 16 | 18 | 20 | 11 | 9 | 13 | 7 | 5 | 0 | 1 |
| 9 | 49.59 | 12.45 | 87 | 22 | 3 | 9 | 14 | 24 | 18 | 14 | 10 | 4 | 3 | 1 |
| 10 | 37.48 | 37.98 | 167 | 1 | 37 | 24 | 15 | 10 | 2 | 2 | 5 | 1 | 1 | 3 |

## Практическое занятие № 3

## ПРОГНОЗ СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ АВИАПРЕДПРИЯТИЯ АЛГОРИТМОМ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

### Постановка задачи

Дана матрица $A = \{a_{ij}\}$ i=1,m; j=1,n, где $a_{ij}$ - элементы структуры за n периодов наблюдений. Необходимо спрогнозировать структуру $\{a_{ij}\}$ на 2012 г. по данным за 2008-2011 г.г. (табл. 3.1) .

**Таблица 3.1**

**Численность работников по категориям**

| Категории работников \ Годы | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|
| Производственные рабочие | 266 | 267 | 268 | 269 |
| Вспомогательные рабочие | 114 | 120 | 127 | 132 |
| Инженерно-технические работники | 66 | 70 | 70 | 72 |
| Служащие и МОП | 32 | 33 | 35 | 41 |
| Итого: | 478 | 490 | 500 | 514 |

### Алгоритм решения задачи

**Шаг 1.** Вычисляем относительные доли $t_{ij}$ (табл. 3.2), разделив $a_{ij}$*100% на сумму элементов j-го столбца табл. 3.1 и переходя от $a_i$ к $t_{j\,m}$

$$t_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j} * 100\% \quad j=1,n. \qquad (3.1)$$

**Таблица 3.2**

**Относительные % доли структуры**

| Категории работников \ Годы | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|
| Производственные рабочие | 55.65 | 54.49 | 53.60 | 52.33 |
| Вспомогательные рабочие | 23.85 | 24.49 | 25.40 | 25.68 |
| Инженерно-технические работники | 13.81 | 14.29 | 14.00 | 14.01 |
| Служащие и МОП | 6.69 | 6.73 | 7.00 | 7.98 |
| Итого: | 100% | 100% | 100% | 100% |

**Шаг 2.** Вычисляем относительные изменения $c_{i,k}=t_{i,j+1}-t_{i,j}$ (табл.3.3).Например, 54.49-55.65=-1.16. Суммируем в столбцах $c_{ik}>0$ и записываем суммы внизу табл. 3.3. Положительные $c_{ik}$ в столбцах табл. 3.3 отображают прирост численности работников i-й категории в k-м периоде за счет уменьшения категорий с $c_{ik}<0$. Сумма $c_{ik}<0$ в столбцах табл. 3.3 равна сумме $c_{ik}>0$.

**Шаг 3.** Находим доли приростов численностей работников по категориям от года к году, вычисляя отношения $c_{ik}$ к суммам $c_{ik}>0$ в столбцах, например: 0.64/1.16=0.55; 0.48/1.16=0.41 и 0.04/1.16=0.03. Сумма 0.55+0.41+0.03=1.0 .

**Таблица 3.3**

**Относительные изменения**

| Годы | 08/09 | 09/10 | 10/11 |
|---|---|---|---|
| | @ -1.16 | @ -0.89 | @ -1.27 |
| | # 0.64 | # 0.91 | # 0.28 |
| | # 0.48 | @ -0.29 | # 0.01 |
| | # 0.04 | # 0.27 | # 0.98 |
| $\sum c_{ij+}$ | 1.16 | 1.18 | 1.27 |

**Таблица3.4**

**Доли общего прироста**

| Годы | 08/09 | 09/10 | 10/11 |
|---|---|---|---|
| | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| | 0.55 | 0.77 | 0.22 |
| | 0.41 | 0.00 | 0.01 |
| | 0.03 | 0.23 | 0.77 |
| | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

**Шаг 4.** Формируем матрицы D(k) изменений соседних пар лет наблюдений, фиксирующие изменения в структуре работников по категориям в k-м периоде от j-го к (j+1)-му году, используя табл. 3.3 и табл. 3.4. На диагонали (табл. 3.5) min $a_{ij}$ из табл. 3.2 для первой пары лет - 2008 и 209 г.г.

**Таблица 3.5**

**Матрица D(1)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 54.49 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 53.60 |
| #(+) | 0.64 | 23.85 | 0.22 | 0.00 | 25.40 |
| #(+) | 0.48 | 0.00 | 13.81 | 0.00 | 14.00 |
| #(+) | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 6.69 | 6.73 |
| | 54.49 | 23.85 | 13.81 | 6.69 | 100% |
| | @ (-) | | | | |

В столбце j=1 - доли прироста числа работников категорий i=2,3,4 на 0.64%, 0.48% и 0.04% за счет уменьшения числа работников категории j=1 на (0.64%+0.48%+0.04%)=1.16%. При отсутствии уменьшения работников j-й $D(k)_{ij}=0$. В D(1) записаны изменения в $\{a_{ij}\}$ за 2008-2009 г.г.

Суммы $a_{ij}$ по столбцам j=1,4 соответствуют структуре $\{a_{ij}\}$ в 2008 г, а суммы $a_{ij}$ по строкам i=1,4 - структуре $\{a_{ij}\}$ в 2009 г. Сумма $a_{ij}$ правого столбца и нижней строки равны 100%. Матрицы D(k) формируются для всех пар лет: 2008/2009 (табл. 3.5); 2009/2010 (табл. 3.6) и 2010/2011 г.г. (табл. 3.7).

**Таблица 3.6**

**Матрица D(2)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 53.60 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 53.60 |
| #(+) | 1.69 | 24.49 | 0.22 | 0.00 | 25.40 |
| | 0.00 | 0.00 | 14.00 | 0.00 | 14.00 |
| #(+) | 0.20 | 0.00 | 0.07 | 6.73 | 7.00 |
| | 54.49 | 24.49 | 14.29 | 6.73 | 100% |
| | @ (-) | | @ (-) | | |

**Таблица 3.7**

**Матрица D(3)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 52.33 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 52.33 |
| #(+) | 0.28 | 24.40 | 0.00 | 0.00 | 25.68 |
| #(+) | 0.01 | 0.00 | 14.00 | 0.00 | 14.01 |
| #(+) | 0.98 | 0.00 | 0.00 | 7.00 | 7.98 |
| | 53.60 | 25.40 | 14.00 | 7.00 | 100% |
| | @ (-) | | | | |

**Шаг 5.** Суммируя $d_{ij}$ матриц D(k), получаем матрицу кумулятивных перераспределений S (табл. 3.8) с информацией о всех изменениях за 2008-2011 г.г.

$$S_{ij}=d(1)_{ij}+d(2)_{ij}+..+d(n-1)_{ij};\ i=1,...m;\ j=1,...m. \tag{3.2}$$

**Шаг 6.** Разделив элементы $S_{ij}$ на суммы столбцов $S_{m+1j}$, получаем матрицу тенденций переходов $E_{ij}$ (табл.3.9) $E_{ij} = S_{ij}/S_{m+1j}$; $i=1,..m+1;\ j=1,..m$.

**Таблица 3.8**

**Матрица $S_{ij}$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 160.42 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.61 | 73.74 | 0.22 | 0.00 |
| 0.49 | 0.00 | 41.81 | 0.00 |
| 1.22 | 0.00 | 0.06 | 20.43 |
| 163.74 | 73.74 | 42.09 | 20.43 |

**Таблица 3.9**

**Матрица $E_{ij}$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.9798 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0098 | 1.0000 | 0.0053 | 0.0000 |
| 0.0030 | 0.0000 | 0.9932 | 0.0000 |
| 0.0074 | 0.0000 | 0.0015 | 1.0000 |
| 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

**Шаг 7.** Умножая $E_{ij}$ на табл. 3.2, получаем ретропрогноз $t_{ij}$ (табл. 3.10).

**Таблица 3.10**

**Ретропрогноз $t_{ij}$**

| Категории работников \Год | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|
| Производственные рабочие | 54.52 | 53.39 | 52.52 | 51.28 |
| Вспомогательные рабочие | 24.47 | 25.10 | 26.00 | 26.27 |
| Инженерно-технические работники | 13.88 | 14.35 | 14.06 | 14.07 |
| Служащие и МОП | 7.13 | 7.16 | 7.42 | 8.39 |

**Шаг 8.** Оцениваем точность отображения структуры за 2008-2011 г.г., вычитая из табл. 3.10 табл. 3.2 $D_{ij}=t^{p}_{ij}-t_{ij}$. Ошибки ретропрогноза в табл. 3.11.

**Таблица 3.11**

**Ошибки ретропрогноза $D_{ij}$**

| Категории работников \ Год | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|
| Производственные рабочие | -1.13 | -1.10 | -1.08 | -1.06 |
| Вспомогательные рабочие | 0.62 | 0.61 | 0.60 | 0.59 |
| Инженерно-технические работники | 0.07 | 0.06 | 0.06 | 0.06 |
| Служащие и МОП | 0.43 | 0.43 | 0.42 | 0.41 |

**Шаг 9**. Находим $D_{ij}$ - средние ошибки по годам: 0.56, 0.55, 0.54, 0.53.

**Шаг 10.** В табл. 3.11 находим min $D_{ij}$=0.06% и max $D_{ij}$=1.13%. Сложим $D_{ij.}$ и разделим их сумму на число наблюдений, находим $D_{ij}$=0.55%.

**Шаг 11.** Умножая матрицу Е на вектор ретропрогноза % на 2011 г. (табл. 3.11), получаем прогноз на 2012 г. Результаты в табл. 3.12.

**Таблица 3.12**

**Прогноз на 2012 г.**

| Категории работников / Год | % 2012 | Прогноз |
|---|---|---|
| Производственные рабочие | 50.24 | 264 |
| Вспомогательные рабочие | 26.85 | 141 |
| Инженерно-технические работники | 14.12 | 74 |
| Служащие и МОП | 8.79 | 46 |

**Шаг 12.** Точечный прогноз работников на 2012 г.- 525 чел.( 478, 490, 500, 514) умножаем на % доли табл. 3.12 и получаем точечные прогнозы работников по категориям (табл. 3.12). Ответы задач табл. 3.13 в табл. 1.3 П.I.

**Таблица 3.13**

**Исходные данные вариантов задачи 3**

| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 | Вариант 4 |
|---|---|---|---|
| 266 262 265 263 | 66 62 65 63 | 106 112 124 133 | 273 270 265 253 |
| 232 238 220 223 | 32 38 20 23 | 202 218 220 223 | 241 238 210 203 |
| 57 58 55 60 | 57 58 55 60 | 47 58 55 60 | 107 111 123 128 |
| 58 50 45 44 | 58 50 45 44 | 48 50 45 44 | 78 69 55 44 |
| 613 608 585 590 | 213 208 185 190 | 403 438 444 460 | 699 688 653 628 |
| **Вариант 5** | **Вариант 6** | **Вариант 7** | **Вариант 8** |
| 166 162 165 169 | 166 162 165 163 | 236 244 265 273 | 96 99 92 89 |
| 132 138 130 131 | 232 238 220 223 | 212 238 240 253 | 42 38 41 37 |
| 127 118 12 129 | 57 58 55 60 | 77 98 105 111 | 47 44 45 48 |
| 64 70 59 63 | 58 50 45 44 | 38 52 45 34 | 38 33 36 37 |
| 489 488 479 492 | 513 508 485 490 | 563 632 655 671 | 223 214 214 211 |

## Практическое занятие № 4

## РАЗРАБОТКА УР ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДРОБНЫХ РЕСУРСОВ АВИАПРЕДПРИЯТИЙ

### Постановка задачи 4.1

Предприятие имеет n видов ресурсов объемами $b_i$ $i=1,n$, из которых можно произвести m видов продукции. Известны: нормы расхода $a_{ij}$ i-го вида ресурса для производства 1 ед. продукции j-го вида; $c_j$ - доход от реализации 1 ед. j-го вида продукции. Найти $x_j$ $j=1,m$ - объемы выпуска продукции, обеспечивающие максимальные доходы.

Математическая модель задачи имеет вид

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \text{ --> } \max \qquad (4.1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad\quad + 2x_3 &\le 21; \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad &\le 19; \qquad (4.2) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 17; \\ x_{1,\,2,\,3} &\ge 0. \qquad (4.3) \end{aligned}$$

### Алгоритм решения задачи [1, с. 52.-57]:

**Шаг 1.** Приводим модель задачи к каноническому виду:

а) преобразуем неравенства (4.2) в уравнения, вводя $x_4$, $x_5$, $x_6$

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad 2x_3 + x_4 \quad &= 21; \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_5 \quad &= 19; \qquad (4.4) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad + x_6 &= 17; \end{aligned}$$

б) включаем $x_4$, $x_5$, $x_6$ в (4.3) и в Z с множителем 0

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6) \rightarrow \max. \qquad (4.5)$$

**Шаг 2.** Переносим правую часть (4.5) за (=) со знаком (-)

$$Z - 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 0(x_4 + x_5 + x_6) = 0. \qquad (4.6)$$

**Шаг 3.** Заполняем симплекс-таблицу (табл. 4.1).

**Шаг 4.** Поскольку в строке Z в столбцах $x_j$ есть $a_{ij} < 0$ - план не оптимален.

**Шаг 5.** В строке Z ищем min число<0 (-5) - оно в опорном столбце (j = p).

**Таблица 4.1**

**Опорный план задачи**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_4$ | 21 | 2.0 | 0.0 | 2.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 10.5 |
| $X_5$ | 19 | 1.0 | 2.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | ∞ |
| $X_6$ | 17 | 1.0 | 2.0 | **[2.0]** | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 8.5<-Опорная строка i=q |
| Z | 0 | -4.0 | -3.0 | **-5.0** | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |

**Шаг 6**. Делим элементы столбца свободных членов $a_{i0}$ на элементы опорного столбца $a_{ij}$ (j= p) $\Theta_i = \frac{a_{i0}}{a_{ij}} > 0$, $\{\frac{21}{2};\frac{19}{0};\frac{17}{2}\}$. Min $\Theta_i = \frac{17}{2} = 8.5$, стоит в опорной строке (i=q=3).

**Шаг 7**. На пересечении опорного столбца j = p =3 и опорной строки i = q= 3 находим опорный элемент $a_{i=q;j=p}$ $x_{[q,p]}=x_{[3,3]}=[2]$. Выполняем алгоритмом Жордана – Гаусса:

а) элементы опорной строки делим на опорный элемент и записываем их на те же самые места в табл. 4.2 $a_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{qp}}$ при j=1,m; i=q ; (4.7)

б) в опорном столбце все $a_{jp}$ кроме опорного равны $a_{jp}=0$; (4.8)

в) элементы вне опорной строки и опорного столбца ($i\neq q$, $j \neq p$) $a_{ij}'$, вычисляются по модели $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{qj}a_{ip}}{a_{qp}}$ $i\neq q$; $j \neq p$ , (4.9)

где $a_{ij}$,$a_{qj}$,$a_{ip}$,$a_{qp}$ - элементы на вершинах прямоугольника, соединив вершины которого $a_{ij}$ ($i\neq q, j \neq p$) с опорным элементом $a_{qp}$ прямой, считаем ее диагональю, строим вокруг неё прямоугольник и выполняем преобразования (4.9) (табл. 4.2а).

**Таблица 4.2 а**

**Мнемонический прямоугольник для $a_{10}$=21**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_4$ | 21 | **2.0** | 0.0 | **2.0** | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 10.5 |
| $X_5$ | 19 | 1.0 | 2.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | - Опорная |
| $X_6$ | 17 | 1.0 | 2.0 | **[2.0]** | 0.0 | 0.0 | 1.0 | $8.5_{min}$ строка i=q |
| Z | 0 | -4.0 | -3.0 | **-5.0** | 0.0 | 0.0 | 0.0 | |

Подставляем в (4.9) числа, с вершин прямоугольника. Например, для $a_{10}$=21 $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{qj}a_{ip}}{a_{qp}} = 21 - \frac{17*2}{2} = 21 - 17 = 4.$ По (4.7)-(4.9) преобразуем все числа табл. 4.2 а. Результаты в табл. 4.2 б.

**Таблица 4.2 б**

**Результаты 1-й итерации**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_4$ | 4.0 | **[1.0]** | -2.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | -1.0 | $4_{min}$ |
| $X_5$ | 19.0 | 1.0 | 2.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 19 |
| $X_3$ | 8.5 | 0.5 | 1.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.5 | 17 |
| Z | 42.5 | **-1.5** | 2.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 2.5 | - |

**Шаг 8.** Проверяем оптимальность плана. Поскольку в строке Z есть $a_{ij}$=-1.5<0 , то план не оптимален.

**Шаг 9.** Находим в строке Z min по $a_{ij}$ < 0 = -1.50 опорный столбец j=2.

**Шаг 10.** Вычисляем $\Theta_i = a_{i0} / a_{ij} > 0$ (j=p) для всех строк кроме Z $\{\Theta_1$=4/1; $\Theta_2$=19/1; $\Theta_3$=8.5/0.5=17$\}$. По min $\Theta_i$=4 находим опорную строку i=1.

**Шаг 11.** На пересечении опорного столбца и опорной строки находим опорный элемент $a_{qp}$ = x[1,1]= 1.00.

**Шаг 12.** Выполняем 2-ю итерацию (табл. 4.3).

**Таблица 4.3**

**Результаты 2-й итерации**

| Базис | ai0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 4.0 | 1.0 | -2.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | -1.0 | - |
| $X_5$ | 15.0 | 0.0 | 4.0 | 0.0 | -1.0 | 1.0 | 1.0 | 3.75 |
| $X_3$ | 6.5 | 0.0 | **[2.0]** | 1.0 | -0.5 | 0.0 | 1.0 | 3.25 $_{min}$ |
| Z | 48.5 | 0.0 | **-1.0** | 0.0 | 1.5 | 0.0 | 1.0 | - |

Так как в Z пока есть $a_{ij}$ <0 (-1.00), то план не оптимален. Повторяя Шаги 8-9, ищем опорный элемент [2.0] и выполняем 3-ю итерацию. Результаты в табл. 4.4.

**Таблица 4.4**

**Оптимальный план**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | **10.50** | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 | - |
| $X_5$ | **2.0** | 0.00 | 0.00 | -2.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | - |
| $X_2$ | **3.25** | 0.00 | 1.00 | 0.50 | -0.25 | 0.00 | 0.50 | - |
| Z | **51.75** | 0.00 | 0.00 | 0.50 | 1.25 | 0.00 | 1.50 | - |

Поскольку в Z все числа $\geq 0$ - план оптимален. В столбце $a_{i0}$ находится искомое оптимальное решение: Z *max=51.75 при $x_1^*$ =10.5, $x_2^*$ =3.25 и $x_5^*$ =2.0. Все остальные $x_i$, отсутствующие в базисе, равны нулю.

## Постановка задачи 4.2

В модель задачи 4.1 вводим условие равенства объема производства заданному значению

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \text{ ---> max}; \qquad (4.10)$$

при

$$x_1 + x_2 \geq 1;$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 16; \qquad (4.11)$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 13;$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10;$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0. \qquad (4.12)$$

Задачу решаем симплекс-методом с искусственным базисом [1, с. 58-59].

**Шаг 1.** Вводя $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, преобразуем неравенства в уравнения.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1; \qquad (4.13)$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 16;$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13; \qquad (4.14)$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 10;$$
$$x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0;\; x_3 \geq 0;\; x_4 \geq 0;\; x_5 \geq 0;\; x_6 \geq 0. \qquad (4.15)$$

**Шаг 2.** Вводим в (4.10) $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ с множителями 0

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \dashrightarrow \max. \qquad (4.16)$$

**Шаг 3.** В (4.13) при $x_3$ стоит знак минус (-), т.е. в задаче нет базиса.
**Шаг 4.** Формируем базис, вводя в (4.13) "искусственную" $x7' \geq 0$

$$x_1 + x_2 - 0x_3 + x_{7'} = 1; \qquad (4.17)$$
$$2x_1 + 5x_2 + 0x_4 = 16;$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13; \qquad (4.18)$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 10;$$
$$x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0;\; x_3 \geq 0;\; x_4 \geq 0;\; x_5 \geq 0;\; x_6 \geq 0;\; x_{7'} \geq 0. \qquad (4.19)$$

**Шаг 5.** Вводим в Z–>max неизвестную $x_{7'}$ с множителем M=-100

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 100x_{7'} \dashrightarrow \max.$$

**Шаг 6.** Заполняем симплекс-таблицу и ее строку (m+1) (табл.4.5):
1) m+1; $Z = (\sum C_i - a_{i0}) = (-100*1+0*16+0*13+0*10) = -100$;
2) m+1; $(\sum C_i - a_{i1}) - C_{i1} = (-100*1+0*2+0*3+0*3)-(5) = -100-5 = -105$ и т.д.

**Таблица 4.5**

**Опорный план**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 5.0 | 4.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -100 | |
| Базис | $C_{iб}$ | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\Theta_i$ |
| $X_7$ | - 100 | 1.0 | **[1.0]** | 1.0 | -1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 1.00 |
| $X_4$ | 0 | 16.0 | 2.0 | 5.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 3.20 |
| $X_5$ | 0 | 13.0 | 3.0 | 3.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 4.33 |
| $X_6$ | 0 | 10.0 | 3.0 | 2.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 | 5.00 |
| M+1 | | -100 | **-105** | -104 | 100 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | - |

Опорный столбец ! j=1

**Шаг 7.** По min (<0) числу в строке (m+1) находим опорный столбец j=1. По min $\Theta i = a_{io} / a_{ip} > 0$ $\{\Theta_1 = 1/1 = 1;\ \Theta_2 = 16/2 = 8;\ \Theta_3 = 13/3 = 4.3;\ \Theta_4 = 10/3 = 3.3\}$ - опорную строку i=1 и опорный элемент x[i=1,j=1]=1.

**Шаг 8.** Выполняем итерацию Жордана-Гаусса, вычисляем (m+1)-ю строку и определяем, что план не оптимален (табл. 4.6). Повторяем Шаги 7-8 , пока в (m+1)-й строке все $a_{ij} < 0$. Результаты в табл. 4.6.

**Таблица 4.6**

**Решение задачи 4.2**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -100 | |
| Базис | $C_{i\text{б}}$ | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\Theta_i$ |
| $X_1$ | 5 | 1.0 | 1.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | - |
| $X_4$ | 0 | 14.0 | 0.00 | 3.00 | 2.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -2.00 | 7.00 |
| $X_5$ | 0 | 10.0 | 0.00 | 0.00 | 3.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -3.00 | 3.33 |
| $X_6$ | 0 | 7.0 | 0.00 | -1.00 | **[3.00]** | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -3.00 | 2.33 min |
| m+1 | | 5.0 | 0 .00 | 1.00 | **-5.00** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 105 | - |
| $X_1$ | 5 | 3.33 | 1 .00 | 0.67 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.33 | - | 4.97 |
| $X_4$ | 4 | 9.33 | 0.00 | **[3.67]** | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.67 | - | 2.54<min |
| $X_5$ | 0 | 3.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | - | 3.00 - |
| $X_3$ | 0 | 2.33 | 0.00 | -0.33 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.33 | - | |
| m+1 | | 16.67 | 0.00 | **-0.67** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.67 | - | - |
| $X_1$ | 5 | 1.64 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.18 | 0 .00 | 0.45 | - | - |
| $X_2$ | 4 | 2.55 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.27 | 0.00 | -0.18 | - | - |
| $X_5$ | 0 | 0.45 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.27 | 1.00 | -0.82 | - | - |
| $X_3$ | 0 | 3.18 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.09 | 0.00 | 0.27 | - | - |
| m+1 | | 18.36 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.18 | 0.00 | 1.55 | - | - |

Поскольку в строке (m+1) все $a_{ij} \geq 0$ - план оптимален и Zmax*=18.36 при $x_1^*$ =1.64, $x_2^*$=2.55, $x_3^*$=3.18. Ответы задач в табл.1.4 и табл. 1.5 П. I .

**Таблица 4.7**

**Исходные данные вариантов задачи 4.1 (все $x_i \geq 0$)**

| | | |
|---|---|---|
| Вариант_1<br>$-2x_1+1x_2+0x_3 \leq 19;$<br>$3x_1-2x_2+1x_3 \leq 17;$<br>$4x_1+2x_2-1x_3 \leq 8;$<br>$Z=4x_1-3x_2+3x_3$->max; | Вариант_2<br>$3x_1+3x_2+2x_3 \leq 10;$<br>$3x_1+4x_2+0x_3 \leq 12;$<br>$4x_1+2x_2+5x_3 \leq 8;$<br>$Z=4x_1+3x_2-4x_3$->max; | Вариант_3<br>$-1x_1+2x_2+6x_3 \leq 20;$<br>$2x_1+5x_2-3x_3 \leq 22;$<br>$3x_1-2x_2+3x_3 \leq 18;$<br>$Z=5x_1+2x_2+3x_3$->max; |
| Вариант_4<br>$-2x_1+3x_2+5x_3 \leq 20;$<br>$2x_1+5x_2-2x_3 \leq 22;$<br>$4x_1-3x_2+2x_3 \leq 18;$<br>$Z=7x_1-2x_2+4x_3$->max; | Вариант_5<br>$-3x_1+1x_2+3x_3 \leq 30;$<br>$3x_1+3x_2-1x_3 \leq 32;$<br>$5x_1-2x_2+1x_3 \leq 18;$<br>$Z=6x_1-1x_2+4x$-$_3$>max; | Вариант_6<br>$-2x_1+1x_2+3x_3 \leq 10;$<br>$2x_1+2x_2-1x_3 \leq 12;$<br>$3x_1-2x_2+1x_3 \leq 18;$<br>$Z=3x_1-1x_2+4x_3$->max; |

**Таблица 4.8**

**Исходные данные вариантов задачи 4.2**

| Вариант_1 | Вариант_2 | Вариант_3 |
|---|---|---|
| $Z= 4x_1 - x_2 + 2x_3 \dashrightarrow \min;$ | $Z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \dashrightarrow \min;$ | $Z=-5x_1-2x_2+3x_3 \dashrightarrow \max;$ |
| $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4;$ | $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4;$ | $-2x_1 + x_3 = 6;$ |
| $x_1 + x_2 - x_3 \le 4;\ x_1 \ge 0;$ | $x_1 + x_2 - x_3 \le 4;\ x_2 \ge 0;$ | $6x_1 - x_2 + x_3 \le 2;\ x_1 \ge 0;$ |
| $3x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 12;\ x_3 \ge 0;$ | $3x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 14;\ x_3 \ge 0;$ | $3x_1 - x_3 \ge 6;\ x_3 \ge 0;$ |
| **Вариант_4** | **Вариант_5** | **Вариант_6** |
| $Z = 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \dashrightarrow \max;$ | $Z=-4x_1 + x_2 + 3x_3 \dashrightarrow \min;$ 2 | $Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \dashrightarrow \max$ |
| $2x_1 - x_2 + x_3 = 2;$ | $x_2 + x_3 = 0;$ | $2x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 5;$ |
| $x_1 + x_2 - 0.5x_3 \le 5;\ x_1 \ge 0;$ | $x_1 + x_2 - 0.5x_3 \le 5;\ x_1 \ge 0;$ | $x_1 + x_2 - x_3 \le 1;\ x_2 \ge 0;$ |
| $2x_2 - x_3 \ge 9;\ x_3 \ge 0;$ | $2x_2 - x_3 \ge 7;\ x_2 \ge 0;$ | $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \ge 6;\ x_3 \ge 0;$ |

## Практическое занятие № 5

## РАЗРАБОТКА УР ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РЕСУРСОВ АВИАКОМПАНИИ

### Постановка задачи 5.1

При целочисленной оптимизации используется алгоритм двойственного симплекс-метода, который допускает в правых частях ограничений $a_{ij}<0$, а опорный элемент <0. Решим задачу

$$Z = 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 \dashrightarrow \min \qquad (5.1)$$

при

$$\begin{aligned} 9.0x_1 - 2.0x_2 - 5.0x_3 &= -7.0; \\ 7.0x_1 + 4.0x_2 - 4.0x_3 &= 4.0 \qquad (5.2) \\ -4.0x_1 - 7.0x_2 + 4.0x_3 &= -6.0 \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

### Алгоритм решения задачи 5.1

**Шаг 1.** Вводим $x_4, x_5, x_6 \ge 0$ в ограничения и в Z

$$\begin{aligned} -9.0x_1 - 2.0x_2 - 5.0x_3 + x_4 &= -7.0; \\ 7.0x_1 + 4.0x_2 - 4.0x_3 + x_5 &= 4.0; \qquad (5.3) \\ -4.0x_1 - 7.0x_2 + 4.0x_3 + x6 &= -6.0; \end{aligned}$$

$$Z = 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 0(x_4 + x_5 + x6) \dashrightarrow \min. \qquad (5.4)$$

**Шаг 2.** Преобразуем Z (5.4) и записываем опорный план в табл. 5.1.

$$0 = -Z + 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6) \dashrightarrow \min, \qquad (5.5)$$

$$-Z + 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 0(x_4 + x_5 + x6) = 0. \qquad (5.6)$$

**Таблица 5.1**

**Опорный план**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_4$ | -7.00 | **[-9.00]** | -2.00 | -5.00 | 1 | 0 | 0 | 3.5 $_{max}$ |
| $X_5$ | 4.00 | 7.00 | 4.00 | -4.00 | 0 | 1 | 0 | - |
| $X_6$ | -6.00 | -4.00 | -7.00 | 4.00 | 0 | 0 | 1 | 1.5 |
| -Z | 0.00 | 7.00 | 3.00 | 6.00 | 0 | 0 | 0 | - |

**Шаг 3.** В строках с $a_{i0}<0$ вычисляем $\Theta_i = \{\frac{-7}{-9}; \frac{-7}{-2}; \frac{-7}{-5}\}; \{\frac{-6}{-4}; \frac{-6}{-7}\}$. По $\Theta_{i\,max} = \frac{-7}{-2}$ находим опорную строку i=1, в которой по $\Theta_{imin} = \frac{-7}{-9}$ =0.78 - опорный элемент $a_{qp}$=[-9.00]. Выполняем преобразования Жордана-Гаусса.

**Таблица 5.2**

**Итерация 1**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0.78 | 1.00 | 0.22 | 0.56 | -0.11 | 0.00 | 0 | - |
| $X_5$ | -1.44 | 0.00 | 2.44 | -7.89 | 0.78 | 1.00 | 0 | 0.18 |
| $X_6$ | -2.89 | 0.00 | **[-6.11]** | 6.22 | -0.44 | 0.00 | 1 | 6.57 $_{max}$ |
| -Z | -5.44 | 0.00 | 1.44 | 2.11 | 0.78 | 0.00 | 0 | |

В табл. 5.2 в строке $a_{i0}$ есть aij{-1.44, -2.89}<0, поэтому план не оптимален.

**Шаг 4.** Находим по $\Theta_{i=3max}$ =6.57 опорную строку i=3, в которой по min $\Theta_i$=0.47 опорный элемент $a_{qp}$=[-6.11]. Выполняем преобразования Жордана-Гаусса. Поскольку в табл. 5.3 строке Z есть $a_{i0}$=-2.60<0, план не оптимален.

**Таблица 5.3**

**Итерация 2**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $\Theta_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0.67 | 1.00 | 0.00 | 0.78 | -0.13 | 0.00 | 0.04 | - |
| $X_5$ | -2.60 | 0.00 | 0.00 | **[-5.40]** | 0.60 | 1.00 | 0.40 | 0.48 |
| $X_2$ | 0.47 | 0.00 | 1.00 | -1.02 | 0.07 | 0.00 | -0.16 | - |
| -Z | -6.13 | 0.00 | 0.00 | 3.58 | 0.67 | 0.00 | 0.24 | |

**Шаг 5.** ai0<0 есть только во 2-й строке - опорная строка (i=2).

**Шаг 6.** В опорной строке $\Theta_i$>0=-2.6/-5.4 - опорный элемент $a_{qp}$= [-5.4].

**Шаг 7.** В табл. 5.4 $a_{i0}$<0 нет и нет $a_{ij}$<0 в строке -Z - план оптимален.

**Таблица 5.4**

**Оптимальный план**

| Базис | $a_{i0}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0.30 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.04 | 0.14 | 0.09 |
| $X_3$ | 0.48 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -0.11 | -0.19 | -0.07 |
| $X_2$ | 0.96 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.04 | -0.19 | -0.24 |
| -Z | -7.85 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.07 | 0.66 | 0.50 |

$Z_{min}^{*}=7.85$ при $x_1^{*}=0.30$; $x_2^{*}=0.96$; $x_3^{*}=0.48$.

## Постановка задачи 5.2

Найти число рейсов $x_j$ (j=1,n) m ВС по n ВЛ, если известны: $b_i$ - запасы ресурсов i=1,m; $p_j$ - прибыль от выполнения рейса по j-й ВЛ; $a_{ij}$ - нормы расхода i-го ресурса при выполнении рейса по j-й ВЛ j=1,n.

Множество $x_j$ j=1,n должно обеспечить max прибыли Z. Модель примера имеет вид

$$Z=2x_1+5x_2+7x_3\text{--->}\max \tag{5.7}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 31; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 22; \\ x_1 + 7x_2 + x_3 &\le 44; \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0. \text{ – целые числа .} \tag{5.9}$$

## Алгоритм решения задачи 5.2

**Шаг 1.** Вводим в (5.8)-(5.12) $x_4$, $x_5$, x6 >= 0 в ограничения и в Z

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x6 \text{-->}\max; \tag{5.10}$$

при

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 31; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x6 &= 22; \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 &= 44; \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0;\ x_6 \ge 0. \tag{5.12}$$

**Шаг 2.** Преобразуем $Z - 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 0(x_4 + x_5 + x_6) = 0$.

**Шаг 3.** Заполняем опорный план 1 симплекс-таблицы (табл. 5.5).

**Таблица 5.5**

**Опорный план**

| Базис | ai0 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (=)$X_5$ | 31.00 | 3.00 | 2.00 | 3.00 | 0 | 1 | 0 |
| (=)$X_6$ | 22.00 | 1.00 | 1.00 | 3.00 | 0 | 0 | 1 |
| $X_4$ | 44.00 | 1.00 | 7.00 | 1.00 | 1 | 0 | 0 |
| Z | 0.00 | -2.00 | -5.00 | -7.00 | 0 | 0 | 0 |

**Шаг 4.** Формируем строку–$W_j = -\sum a_{ij}$, складывая $a_{ij}$ стоящие на пересечении опорного столбца и строк симплекс-таблицы со знаками (≥) и (=)

1(31+22)=-53; -1(3+1)=-4; -1(2+1)=-2; -1(3+3)=-6.Full-симплексом дробное оптимальное решение ищем, выбирая опорный столбец по строке –W (табл. 5.6).

**Таблица 5.6**

**Формирование строки –W**

| Базис | ai0 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | Θi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (=)$X_5$ | 31.00 | 3.00 | 2.00 | 3.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 10.33 |
| (=)$X_6$ | 22.00 | 1.00 | 1.00 | **[3.00]** | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 7.33 $_{min}$ |
| (≥)$X_4$ | 44.00 | 1.00 | 7.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 44.00 |
| Z | 0.00 | -2.00 | -5.00 | -7.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | - |
| -W | -53.00 | -4.00 | -3.00 | **-6.00** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | - |

**Шаг 5.** В -W ищем min элемент <0= (-6), который стоит в опорном столбце.

**Шаг 6.** По $\min\Theta_i = a_{i0}/a_{j=p}$ = 22/3 = 7.33 находим опорную строку i=2. На пересечении i=2 и j=3 опорный элемент x[2,3]=3.0 (табл. 5.6).

**Шаг 7.** Выполняем преобразования Жордана-Гаусса, после которых из базиса вышел $x_6$. Для расчета -W используем строку вектора-базиса $x_5$ (табл. 5.7).

**Таблица 5.7**

**Итерация 1**

| Базис | ai0 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | Θi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (=)$X_5$ | 9.00 | **[2.00]** | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | 4.50 $_{min}$ |
| $X_3$ | 7.33 | 0.33 | 0.33 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.33 | 22.21 |
| $X_4$ | 36.67 | 0.67 | 6.67 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.33 | 54.73 |
| Z | 51.33 | 0.33 | -2.67 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.33 | - |
| -W | -9.00 | **-2.00** | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.00 | - |

**Шаг 8.** По min $a_{io}$=-2 в строке –W опорный столбец j=1, а по $\min\Theta_i$= 4.5 опорная строка i=1. На пересечении j=1 и i=1 опорный элемент x[1,1]=2.

**Таблица 5.8**

**Итерация 2**

| Базис | ai0 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 4.50 | 1.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.50 | -0.50 |
| $X_3$ | 5.83 | 0.00 | 0.17 | 1.00 | 0.00 | -0.17 | 0.50 |
| $X_4$ | 33.67 | 0.00 | 6.33 | 0.00 | 1.00 | -0.33 | 0.00 |
| Z | 49.83 | 0.00 | -2.83 | 0.00 | 0.00 | -0.17 | 2.50 |
| -W | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |

Поскольку в базисе нет $x_i$ со знаками (=) и (≥), строка -W не вычисляется.

Вектора $x_5$ и $x_6$, вышедшие из базиса, удаляются из симплекс-таблицы. Если в строке Z есть число <0, то план не оптимален и по Z ищется опорный столбец.

**Таблица 5.9**

**Удаление векторов $x_5$ и $x_6$**

| Базис | ai0 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | Θi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 4.50 | 1.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 | 9.00 |
| $X_3$ | 5.83 | 0.00 | 0.17 | 1.00 | 0.00 | 34.29 |
| $X_4$ | 33.67 | 0.00 | **[6.33]** | 0.00 | 1.00 | 5.31 $_{min}$ |
| Z | 49.83 | 0.00 | **-2.83** | 0.00 | 0.00 | |

Находим по строке Z опорный столбец j=2 и по $minQ_i$= 33.67/6.33= =5.31 и опорную строку i=3. По опорному элементу x(2,3)=6.33 вычисляем новый план. В строке Z нет $a_{ij}$<0– план оптимален $Z^*_{max}$=64.69 при $x_1^*$=1.84;$x_2^*$=5.32; $x_3^*$=4.95.

**Таблица 5.10**

**Дробный оптимальный план**

| Базис | ai0 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1.84 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.08 |
| $X_3$ | 4.95 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -0.03 |
| $X_2$ | 5.32 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.16 |
| Z | 64.89 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.45 |

**Шаг 9.** Целочисленный оптимальный план ищем из дробного алгоритмом Гомори. В столбце $a_{i0}$, ищем первое дробное a(1,1)=1.84. Преобразуем строку i=1, вычитая из исходного числа ближайшее целое число, стоящее слева на числовой оси (из целого числа вычитается это же число):

| Св.член | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.84-1=0.84; | 1-1=0; | 0-0=0; | 0-0=0; | -0.08-(-1)=0.92. |

**Шаг 10.** Формируем неравенство $0.92x_4 - 0.84 \ge 0$ . (5.13)

Умножаем (5.14) на -1 $-0.92x_4 + 0.84 \le 0$. (5.14)

Вводим x5≥0 $-0.92x_4 + 0.84 + x_5 = 0$ . (5.15)

Переносим вправо $0.84 - 0.92x_4 + x_5 = -0.84$. (5.16)

Включаем (5.16) и новый $x_5$ в табл. 5.11. Так как a(4,0)=-0.84, используем двойственный симплекс-метод. Опорная строка i=4. Опорный элемент находим по $min\Theta_i \ge a_{i0}/a_{j=p}$. В опорной строке лишь a(4,4)<0=(-0.92) - $min\Theta_4$=0.92.

**Таблица 5.11**

**Ввод дополнительного ограничения**

| Базис | $a_{i0}$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1.84 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.08 | 0.00 |
| $X_3$ | 4.95 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -0.03 | 0.00 |
| $X_2$ | 5.32 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.16 | 0.00 |
| $X_5$ | **-0.84** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | **[-0.92]** | 1.00 |
| Z | 64.89 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.45 | 0.00 |

**Шаг 11.** Процедура Жордана-Гаусса вновь дает дробно-оптимальный план.

**Таблица 5.12**

**Дробно-оптимальный план**

| Базис | $a_{i0}$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1.91 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.09 |
| $X_3$ | 4.97 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.03 |
| $X_2$ | 5.17 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.17 |
| $X_4$ | 0.91 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.09 |
| Z | 64.49 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.49 |

**Шаг 12.** Ввод дополнительного ограничения (табл. 5.13).

**Таблица 5.13**

**Целочисленная оптимизация задачи ЛП**

| | Базис | $a_{i0}$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Итерация 4 | $X_1$ | 1.91 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.09 | 0.00 |
| | $X_3$ | 4.97 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.03 | 0.00 |
| | $X_2$ | 5.17 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.17 | 0.00 |
| | $X_4$ | 0.91 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.09 | 0.00 |
| | $X_6$ | **-0.91** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | **[-0.91]** | 1.00 |
| | Z | 64.49 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.49 | 0.00 |
| Целочисленный оптимальный план | $X_1$ | 2.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.09 |
| | $X_3$ | 5.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.03 |
| | $X_2$ | 5.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.19 |
| | $X_4$ | 2.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -1.19 |
| | $X_5$ | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.09 |
| | Z | 64.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.53 |

$Zopt^*=64$ при $x^*{}_1=2$; $x_2{}^*=5$; $x_3{}^*=5$; $x_4{}^*=2$; $x_5{}^*=1$; $x_6{}^*=0$.

В табл. 5.14 и табл. 5.15 все $x_i>0$. Ответы задач в табл. 1.6 и табл. 1.7 П. I .

**Таблица 5.14**

**Исходные данные вариантов задачи 5.1**

| Вариант_1 | Вариант_2 | Вариант_3 |
|---|---|---|
| $Z=1x_1+3x_2+2x_3$->min | $Z=3x_1+2x_2+7x_3$->min | $Z=2x_1-1x_2+3x_3$-min |
| $-1x_1+2x_2+0x_3\le-2$; | $3x_1-3x_2-1x_3\le-1$; | $1x_1-2x_2-1x_3\le3$; |
| $2x_1-3x_2-1x_3\le-3$; | $-6x_1+3x_2+2x_3\le-5$; | $-3x_1+0x_2-2x_3\le-4$; |
| $3x_1+1x_2-2x_3\le-1$; | $1x_1-3x_2+1x_3\le-3$; | $-2x_1+3x_2-1x_3\le-5$; |
| **Вариант_4** | **Вариант_5** | **Вариант_6** |
| $Z=4x1-2x_2+4x_3$->min | $Z=7x_1+4x_2+3x_3$->min | $Z=3x_1-1x_2+2x_3$->min |
| $2x_1-4x_2-1x_3\le-5$; | $1x_1-4x_2-1x_3\le-7$; | $2x_1-3x_2-2x_3\le-5$; |
| $1x_1+0x_2-3x_3\le-2$; | $-3x_1+1x_2-2x_3\le-4$; | $-2x_1+0x_2+1x_3\le-4$; |
| $2x_1+2x_2-2x_3\le1$; | $2x_1+0x_2-1x_3\le-3$; | $3x_1+1x_2-2x_3\le2$; |

**Таблица 5.15**

**Исходные данные вариантов задачи 5.2**

| | | |
|---|---|---|
| Вариант_1<br>$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 4;$<br>$2x_1 + 0x_2 + 2x_3 \le 8;$<br>$1x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 5;$<br>$Z=1x_1 +2x_2 +2x_3$->max; | Вариант_2<br>$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6;$<br>$1x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le 11;$<br>$2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \le 8;$<br>$Z=2x_1 +4x_2 +3x_3$->max; | Вариант_3<br>$3x_1 + 1x_2+ 1x_3 = 9;$<br>$2x_1 + 4x_2+ 1x_3 \le 11;$<br>$1x_1 + 1x_2 + 0x_3 \le 10;$ $Z=3x_1$<br>$+6x_2 +2x_3$->max; |
| Вариант_4<br>$1x_1 + 1x_2 + 0x_3 =11;$<br>$1x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 8;$<br>$0x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 10;$<br>$Z=1x_1+6x_2+3x_3$->max; | Вариант_5<br>$2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 8;$<br>$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 15;$<br>$4x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le 11;$<br>$Z=3x_1+4x_2+8x_3$->max; | Вариант_6<br>$1x_1 + 0x_2 + 1x_3 \ge 10;$<br>$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 =12;$<br>$2x_1 + 3x_2 -4x_3 \le 13;$<br>$Z=2x_1+5x_2+2x_3$->max; |

**Практическое занятие № 6**

## РАЗРАБОТКА УР ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОСНОВНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФОНДОВ АВИАКОМПАНИИ

### Постановка задачи 6.1

Авиакомпания летает по m ВЛ на n типах ВС. Известны : 1) $c_{ij}$ - расходы на 1 ткм на i-м типе ВС по j-й ВЛ (руб./ткм); 2) $a_i$ - потенциал i-го типа ВС (млн.ткм); 3) $b_j$ - прогноз спроса по j-й ВЛ (млн.ткм). ВЛ, на которых i-й тип использовать нельзя имеют $c_{ij}$= 100. Исходные данные примера в табл. 6.1.

**Таблица 6.1**

**Исходные данные примера**

| | Воздушные линии | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тип ВС | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $a_i$ |
| 1 | 1 | 9 | 10 | 3 | 8 | 1 | 40 |
| 2 | 2 | 1 | **100** | 4 | 6 | 1 | 30 |
| 3 | 9 | 5 | 1 | 6 | 1 | 3 | 40 |
| 4 | 3 | **100** | 3 | 1 | **100** | 1 | 40 |
| $b_j$ | 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | 140/150 |

Необходимо оценить $x_{ij}$ (i=1,n;j=1,m;) - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ (млн.ткм) , обеспечивающие min расходы C .

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j-1}^{m} C_{ij} X_{ij} \to \min \text{ /ден.ед/}, \quad ( i=1,n;\ j=1,m) \qquad (6.1)$$

при ограничениях: 1. $\sum\limits_{i=1} x_{ij}=a_i$; 2. $\sum\limits_{j=1} x_{ij}=b_j$; 3. $\sum\limits_{i=1} a_i=\sum\limits_{j=1} b_j$ ; 4. $x_{ij}>=0$; ( 6.2)

## Алгоритм решения задачи

**Шаг 1.** Преобразуем "открытую" задачу в "закрытую", вводя дополнительный столбец с $b_{доп}$ = 10 (табл. 6.2), уравнивая суммы $a_i$ и bj.

**Таблица 6.2**

**Шаг 1**

| **Тип ВС** | **Воздушные линии** | | | | | | | **$a_i$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | **0** | 1 | 9 | 10 | 3 | 8 | 1 | 40 |
| 2 | **0** | 2 | 1 | **100** | 4 | 6 | 1 | 30 |
| 3 | **0** | 9 | 5 | 1 | 6 | 1 | 3 | 40 |
| 4 | **0** | 3 | **100** | 3 | 1 | **100** | 1 | 40 |
| bj | **10** | 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | **150**/150 |

**Шаг 2.** В табл. 6.2 ищем строку с max числом "запретных" клеток (**$c_{ij}$=100**). Нашли в ней клетку с min $c_{ij}$ {$c_{40}$=0}. Задаем max $x_{40}$=10. Остаток записываем в клетки с min $c_{ij}$: $x_{44}$=20 и $x_{46}$=10. Сумма $x_{ij}$ 4-й строки $\sum x_{ij}$=10+20+10=40=$a_4$. Клетки $x_{ij}$>0 называются "занятыми", а клетки $x_{ij}$=0 - "незанятыми".

**Шаг 3.** Вновь ищем строку с "запретными" клетками и записываем в клетку с $c_{21}$min=1 max $x_{22}$=20, а также $x_{26}$=10. Сумма $x_{ij}$ во 2-й строке равна $a_2$=30.

**Таблица 6.3**

**Построение опорного плана**

| Тип | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 9 | 10 | 3 | 8 | 1 | **40** |
| 2 | 0 | 2 | 1<br>$x_{22}$=**20** | 100 | 4 | 6 | 1<br>$x_{26}$=**10** | **30** |
| 3 | 0 | 9 | 5 | 1 | 6 | 1 | 3 | **40** |
| 4 | $c_{40}$=0<br>$x_{40}$=**10** | 3 | 100 | 3 | 1<br>$x_{44}$=**20** | 100 | 1<br>$x_{46}$=**10** | **40** |
| bj | **10** | **20** | **20** | **40** | **20** | **20** | **20** | |

**Шаг 4.** Строк с "запретными" клетками больше нет, поэтому в первой строке находим клетку $c_{ij}$min=1 и записываем в неё max $x_{11}$=20. Остаток 20 записываем в клетку со следующей $c_{ij}$min = 8 - $x_{15}$=20. Сумма $x_{ij}$ в 1-й строке равна $a_1$=40.

**Шаг 5.** Заполняя 3-ю строку, записываем в клетку с $c_{ij}$min=1 max $x_{33}$=40.

**Таблица 6.4**

**Построение опорного плана**

| Тип | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 $x_{11}$=**20** | 9 | 10 | 3 | 8 $x_{15}$=**20** | 1 | **40** |
| 2 | 0 | 2 | 1 **20** | 100 | 4 | 6 | 1 **10** | **30** |
| 3 | 0 | 9 | 5 | 1 $x_{33}$=**40** | 6 | 1 | 3 | **40** |
| 4 | 0 **10** | 3 | 100 | 3 | 1 **20** | 100 | 1 **10** | **40** |
| bj | **10** | **20** | **20** | **40** | **20** | **20** | **20** | |

**Шаг 6.** Вычисляем критерий для опорного плана

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = 1*20+8*20+1*20+1*10+1*40+0*10+1*20+1*20 = 290\ \textit{руб.}$$

**План оптимален при: 1) $u_i + v_j = c_{ij}$ - для "занятых" клеток;** (6.3)

**2) $u_i + v_j \le c_{ij}$ - для "незанятых" клеток,** (6.4)

где $U=(u_1, ..., u_n)$ - потенциалы столбцов; $V=(v_1,..., v_m)$ - потенциалы строк.

**Шаг 7.** Строим систему потенциалов $S_{UV}$ = (U,V).

А. Вводим в табл. 6.5 столбец $u_i$ и строку $v_j$ .

Б. Находим строку с max числом "занятых" клеток ($x_{ij}$>0) и задаем $u_4$=0.

В. По (6.3) находим $v_0=c_{40}-u_4=0-0=0$; $v_4= c_{44}-u_4=1-0=1$; $v_6=c_{46}-u_4=1-0=1$.

**Шаг 8.** Используя потенциалы и (6.3), продолжаем цепочку из $u_2+v_6=c_{26}$ $u_2=c_{26}-v_6=1-1=0$, а из $u_2+v_2=c_{22}$ $v_2=c_{22}-u_2=1-0=1$.

**Таблица 6.5**

**Построение системы потенциалов (шаги 7а,7б и 7в)**

| | | $v_0$=0 | $v_1$= | $v_2$ = 1 | $v_3$= | $v_4$=1 | $v_5$= | $v_6$=1 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $u_1$= | 0 | 1 **20** | 9 | 10 | 3 | 8 **20** | 1 | 40 |
| 2 | $u_2$=0 | 0 | 2 | 1 **20** | 100 | 4 | 6 | 1 **10** | 30 |
| 3 | $u_3$= | 0 | 9 | 5 | 1 **40** | 6 | 1 | 3 | 40 |
| 4 | $u_4$=0 | 0 **10** | 3 | 100 | 3 | 1 **20** | 100 | 1 **10** | 40 |
| $b_j$ | | 10 | 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | |

**Шаг 9.** Расчеты прервались: "занятых" клеток $n_з$=8 меньше, чем m+n-1=4+7-1=10. В план надо ввести (m+n-1)-$n_з$=2 «фиктивно-занятые» клетки.

**Ввод фиктивно-занятой клетки**:

а) помечаем (&) и зачеркиваем столбцы с потенциалом и строки без потенциала;

б) на пересечениях &-линий ищем клетку с $c_{ij}$=min;

в) считаем клетку (1,0) фиктивно-занятой и $x_{10}=0$.

**Шаг 10.** Продолжаем построение системы потенциалов (табл. 6.6):

$$v_0+u_1=c_{10};\ \ u_1=c_{10}-v_0=0-0=0;\ u_1+v_1=c_{11};v_1=c_{11}-u_1=1-0=1;$$
$$u_1+v_5=c_{15};\ v_5=c_{15}-u_1=8-0=8.$$

**Таблица 6.6**

**Ввод фиктивно-занятой клетки**

| | | & $v_0=0$ | $v_1=1$ | & $v_2 = 1$ | $v_3=$ | & $v_4=1$ | $v_5=$**8** | & $v_6=1$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 & | $u_1=$**0** | 0 $x_{10}=$**0** | 1 **20** | 9 | 10 | 3 | 8 **20** | 1 | 40 |
| 2 | $u_2=0$ | 0 | 2 | 1 **20** | 100 | 4 | 6 | 1 **10** | 30 |
| 3 & | $u_3=$ | 0 | 9 | 5 | 1 **40** | 6 | 1 | 3 | 40 |
| 4 | $u_4=0$ | 0 **10** | 3 | 100 | 3 $x_{43}=$**0** | 1 **20** | 100 | 1 **10** | 40 |
| $b_j$ | | 10 | 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | |

Расчеты прервались. Надо ввести ещё одну "фиктивно-занятую" клетку.

**Шаг 11.** Помечаем (&) и зачеркиваем строки с $u_i$ и столбцы без vj. Записываем в зачеркнутую клетку с min $c_{ij}$ $x_{43}=0$ (табл. 6.6).

**Шаг 12.** Продолжаем построение системы потенциалов:

$$u_4+v_3=c_{43}\ \ v_3=c_{43}-u_4=3-0=3,\quad u_3+v_3=c_{33}\ \ u_3=c_{33}-v_3=1-3=-2.$$

Система потенциалов построена по условию (6.3) для "занятых" клеток.

**Шаг 13.** Отмечаем незанятые клетки, в которых условие $u_i+v_j \le c_{ij}$ не выполнено. План не оптимален. Записываем в табл. 6.7 разности $\delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$.

**Шаг 14**. Помечаем клетку с $\delta_{ij}$ max=5 (+). Строим из нее контур, двигаясь по занятым клеткам и поворачивая в них на $90^o$, вплоть до клетки ($\delta$=5).

**Шаг 15.** Помечаем вершины контура (-), (+). В (+) добавляем, а в (-) вычитаем min $x_{ij}$={20,10,40}=10, из стоящих на вершинах (-).

**Шаг 16.** Вводим u4=0 и строим систему потенциалов.

**Шаг 17.** План не оптимален, так как (6.3) в клетке ($\delta$=5) не выполнено.

**Таблица 6.7**

## Построение замкнутого контура

| | | $v_1$=0 | $v_2$=1 | $v_3$ =1 | $v_4$=3 | $v_5$=1 | $v_6$=8 | $v_7$=1 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $u_1$=0 | (+) 0 $x_{10}$=**0** | 1 **20** | 9 | 10 | 3 | (-) 8 **20** | 1 | 40 |
| 2 | $u_2$=0 | 0 | 2 | 1 **20** | 100 | 4 | 6 δ =2 | 1 **10** | 30 |
| 3 | $u_3$=-2 | 0 | 9 | 5 | (-) 1 **40** | 6 | (+) 1 δ =**5** | 3 | 40 |
| 4 | $u_4$=0 | 0 **10** (-) | 3 | 100 | (+) 3 $x_{43}$=**0** | 1 **20** | 100 | 1 **10** | 40 |
| $b_j$ | | 10 | 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | |

Критерий C=1*20+8*10+1*20+1*10+1*30+1*10+3*10+1*20+1*10=**230**.

**Шаг 18.** Строим потенциалы, ищем клетку (3,6) (δ=5 max), строим из нее контур, находим в (-) $x_{ij}$min=10, вычитаем его в (-) и прибавляем в (+).

**Таблица 6.8**

## Оптимизация плана (Итерация 2)

| | | $v_1$=-5 | $v_2$=-4 | $v_3$ =1 | $v_4$=3 | $v_5$=1 | $v_6$=3 | $v_7$=1 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | u1=5 | 0 **10** | 1 **20** | 9 | 10 | 3 | (-) 8 **10** | (+) 1 **δ =5** | 40 |
| 2 | u2=0 | 0 | 2 | 1 **20** | 100 | 4 | 6 | 1 **10** | 30 |
| 3 | u3=-2 | 0 | 9 | 5 | (-) 1 **30** | 6 | 1 **10** (+) | 3 | 40 |
| 4 | u4=0 | 0 | 3 | 100 | (+) 3 **10** | 1 **20** | 100 | (-) 1 **10** | 40 |
| $b_j$ | | 10 | 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | |

**Шаг 19.** План табл. 6.9 оптимален.

Критерий C=(1*20+0*3+1*10)+(1*20+1*10)+(1*20+1*20)+(3*20+1*20)=**180**.

**Таблица 6.9**

## Оптимальный план

| | | $v_1$=-0 | $v_2$=1 | $v_3$ =1 | $v_4$=5 | $v_5$=3 | $v_6$=5 | $v_7$=1 | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $u_1$=0 | 0<br>**10** | 1<br>**20** | 9 | 10 | 3 | 8 | 1<br>**10** | 40 |
| 2 | $u_2$=0 | 0 | 2 | 1<br>**20** | 100 | 4 | 6 | 1<br>**10** | 30 |
| 3 | $u_3$=-4 | 0 | 9 | 5 | 1<br>**20** | 6 | 1<br>**20** | 3 | 40 |
| 4 | $u_4$=-2 | 0 | 3 | 100 | 3<br>**20** | 1<br>**20** | 100 | 1 | 40 |
| $b_j$ | | 10 | 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | |

В табл. 6.10 и табл. 6.11 приведены данные задач, а ответы в табл. 1.8 и табл. 1.9 П.I.

**Таблица 6.10**

## Исходные данные вариантов задачи 6.1

| Вариант 1 | | | | | | $a_i$ | Вариант 2 | | | | | | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 10 | 3 | 8 | 1 | 45 | 1 | 9 | 10 | 3 | 8 | 1 | 40 |
| 2 | 7 | 100 | 4 | 6 | 4 | 35 | 2 | 1 | 100 | 4 | 6 | 1 | 30 |
| 9 | 5 | 2 | 6 | 2 | 3 | 40 | 9 | 5 | 1 | 6 | 1 | 3 | 30 |
| 3 | 100 | 3 | 3 | 100 | 1 | 30 | 3 | 100 | 3 | 1 | 100 | 1 | 30 |
| 20 | 10 | 50 | 20 | 20 | 20 | | 20 | 20 | 40 | 20 | 30 | 20 | |
| Вариант 3 | | | | | | | Вариант 4 | | | | | | |
| 1 | 9 | 10 | 3 | 8 | 1 | 40 | 3 | 9 | 10 | 3 | 5 | 4 | 40 |
| 2 | 7 | 100 | 4 | 6 | 1 | 30 | 2 | 7 | 100 | 4 | 4 | 3 | 40 |
| 9 | 1 | 1 | 6 | 1 | 3 | 40 | 1 | 1 | 1 | 6 | 2 | 2 | 40 |
| 3 | 100 | 3 | 1 | 100 | 1 | 40 | 3 | 100 | 3 | 1 | 100 | 1 | 30 |
| 20 | 20 | 40 | 20 | 20 | 20 | | 20 | 30 | 40 | 20 | 30 | 20 | |
| Вариант 5 | | | | | | | | Вариант 6 | | | | | |
| 3 | 9 | 10 | 3 | 5 | 4 | 45 | 5 | 9 | 10 | 4 | 7 | 8 | 42 |
| 2 | 7 | 100 | 4 | 4 | 3 | 44 | 4 | 7 | 100 | 3 | 5 | 5 | 43 |
| 1 | 1 | 1 | 6 | 2 | 2 | 45 | 3 | 1 | 1 | 6 | 1 | 3 | 44 |
| 3 | 100 | 3 | 1 | 100 | 1 | 36 | 2 | 100 | 3 | 1 | 100 | 1 | 35 |
| 23 | 20 | 44 | 20 | 35 | 26 | | 24 | 20 | 43 | 20 | 34 | 25 | |

**Таблица 6.11**

**Исходные данные вариантов задачи 6.2**

| Вариант 1 | | | | | | $a_i$ | Вариант 2 | | | | | | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 13 | 5 | 11 | 13 | 25 | 4 | 9 | 9 | 3 | 6 | 3 | 27 |
| 4 | 13 | 5 | 10 | 6 | 14 | 32 | 3 | 7 | 9 | 7 | 13 | 8 | 35 |
| 9 | 14 | 5 | 4 | 7 | 3 | 28 | 12 | 14 | 11 | 13 | 3 | 11 | 26 |
| 7 | 12 | 3 | 3 | 7 | 3 | 25 | 12 | 8 | 3 | 6 | 13 | 13 | 24 |
| 25 | 14 | 12 | 18 | 15 | 34 | | 12 | 16 | 11 | 18 | 14 | 31 | |
| Вариант 3 | | | | | | | Вариант 4 | | | | | | |
| 10 | 3 | 12 | 6 | 3 | 14 | 28 | 11 | 9 | 14 | 9 | 5 | 4 | 35 |
| 14 | 4 | 14 | 14 | 9 | 14 | 30 | 4 | 7 | 11 | 7 | 9 | 6 | 31 |
| 4 | 7 | 3 | 6 | 4 | 7 | 32 | 12 | 14 | 7 | 6 | 3 | 13 | 24 |
| 6 | 13 | 8 | 4 | 7 | 6 | 29 | 10 | 8 | 13 | 6 | 6 | 10 | 32 |
| 35 | 22 | 24 | 15 | 24 | 9 | | 19 | 16 | 20 | 16 | 20 | 16 | |
| Вариант 5 | | | | | | | Вариант 6 | | | | | | |
| 11 | 12 | 11 | 4 | 13 | 3 | 29 | 10 | 6 | 13 | 14 | 8 | 10 | 35 |
| 12 | 11 | 3 | 3 | 12 | 9 | 32 | 4 | 13 | 5 | 12 | 13 | 8 | 28 |
| 5 | 14 | 12 | 11 | 9 | 4 | 35 | 5 | 10 | 9 | 4 | 13 | 7 | 32 |
| 10 | 4 | 12 | 11 | 10 | 14 | 24 | 11 | 4 | 13 | 5 | 5 | 10 | 32 |
| 30 | 18 | 21 | 23 | 15 | 21 | | 22 | 16 | 22 | 21 | 21 | 15 | |

## Практическое занятие № 7

## РАЗРАБОТКА УР ОБ ОПЕРАТИВНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ САМОЛЕТОВ И ЭКИПАЖЕЙ

### Постановка задачи 7.1

Авиакомпания выполняет n рейсов на n воздушных судах (ВС). Известна матрица $C=\{c_{ij}\}$, где $c_{ij}$ - себестоимость j-го рейса на i-м ВС (i,j=1,n). Целевая функция задачи

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min \qquad (7.1)$$

при:

1) $$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1; \qquad (7.2)$$

2) $$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1; \qquad (7.3)$$

3) $x_{ij}=0$ или 1; при i,j=1,n. (7.4)

Искомое - матрица назначений n ВС на выполнение n рейсов $X=x_{ij}$.

### Исходные данные примера

| ВС | 1 | 2 | 3 | 4 | m=5 | Рейсы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 4 | 11 | 8 | 9 | $C_{ij}$ |
| 2 | 14 | 13 | 15 | 5 | 16 | |
| 3 | 9 | 4 | 5 | 8 | 12 | |
| 4 | 8 | 5 | 7 | 7 | 11 | |
| n=5 | 3 | 6 | 6 | 23 | 3 | |

### Алгоритм решения задачи 7.1

**Шаг 1.** Находим в каждой строке min $c_{ij}$ и вычитаем его из $c_{ij}$ этой строки.

**Шаг 2.** Находим в каждом столбце min $c_{ij}$ и вычитаем его из $c_{ij}$. В каждой строке и каждом столбце матрицы C должен быть ноль (рис. 7.1) .

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 11 | 8 | 9 | **4** |
| 14 | 12 | 15 | 5 | 16 | **5** |
| 9 | 4 | 5 | 8 | 12 | **4** |
| 8 | 5 | 7 | 7 | 11 | **5** |
| 3 | 6 | 6 | 23 | 3 | **3** |
| Шаг 1 | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 7 | 4 | 5 |
| 9 | 8 | 10 | 0 | 11 |
| 5 | 0 | 1 | 4 | 8 |
| 3 | 0 | 2 | 2 | 6 |
| 0 | 3 | 3 | 20 | 0 |
| **0** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| Шаг 2 | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 6 | 4 | 5 |
| 9 | 8 | 9 | 0 | 11 |
| 5 | 0 | 0 | 4 | 8 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 6 |
| 0 | 3 | 2 | 20 | 0 |
| Матрица $C_1$ | | | | |
| Шаг 3 | | | | |

**Рис. 7.1. Построение опорного плана (Шаги 1-3)**

**Шаг 3.** Идем сверху вниз по строкам матрицы $C_1$. Встретив в строке ноль без пометок, помечаем его знаком *, а остальные 0 вправо до конца строки и вниз до конца столбца помечаем ^. 0* называется помеченным, а 0^– непомеченным.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ► | 3 | **0*** | 6 | 4 | 5 |
| | 9 | 8 | 9 | 0 | 11 |
| | 5 | **0^** | 0 | 4 | 8 |
| | 3 | **0^** | 1 | 2 | 6 |
| 1 | 0 | 3 | 2 | 20 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | **0*** | 6 | 4 | 5 |
| ► | 9 | 8 | 9 | **0*** | 11 |
| | 5 | **0^** | 0 | 4 | 8 |
| | 3 | **0^** | 1 | 2 | 6 |
| 2 | 0 | 3 | 2 | 20 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | **0*** | 6 | 4 | 5 |
| | 9 | 8 | 9 | **0*** | 11 |
| ► | 5 | **0^** | **0*** | 4 | 8 |
| | 3 | **0^** | 1 | 2 | 6 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 20 | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | **0*** | 6 | 4 | 5 |
| | 9 | 8 | 9 | **0*** | 11 |
| | 5 | **0^** | **0*** | 4 | 8 |
| 5 | 3 | **0^** | 1 | 2 | 6 |
| ► | **0*** | 3 | 2 | 20 | **0^** |

**Рис. 7.2. Пометки 0* и 0^ (Шаг 4)**

**Шаг 4.** Помечаем знаком # строки с 0^ (без 0*) (рис. 7.4).

**Шаг 5.** В строках со знаком #, помечаем столбцы знаком #, в которых 0^.

**Шаг 6.** В столбце, помеченном знаком #, находим 0* и помечаем знаком # строку, в которой он стоит (рис.7.3).

| | | | | | 1 | | | # | | | 2 | | | # | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | **0*** | 6 | 4 | 5 | | 3 | **0*** | 6 | 4 | 5 | # | 3 | **0*** | 6 | 4 | 5 |
| | 9 | 8 | 9 | **0*** | 11 | | 9 | 8 | 9 | **0*** | 11 | | 9 | 8 | 9 | **0*** | 11 |
| | 5 | **0^** | **0*** | 4 | 8 | | 5 | **0^** | **0*** | 4 | 8 | | 5 | **0^** | **0*** | 4 | 8 |
| # | 3 | **0^** | 1 | 2 | 6 | | 3 | **0^** | 1 | 2 | 6 | # | 3 | **0^** | 1 | 2 | 6 |
| | **0*** | 3 | 2 | 20 | **0^** | # | **0*** | 3 | 2 | 20 | **0^** | | **0*** | 3 | 2 | 20 | **0^** |

**Рис. 7.3. Пометки строк и столбцов #**

**Шаг 7.** Помечаем знаком & столбцы со знаком # и строки без знака #. Зачеркиваем все нули min числом прямых линий (рис. 7.4).

**Шаг 8.** Ищем Δ=min не зачеркнутому $c_{ij}$. Вычитаем Δ из не зачеркнутых $c_{ij}$, к дважды зачеркнутым $c_{ij}$ прибавляем Δ (рис. 7.5). Зачеркнутые 1 раз $c_{ij}$ не меняем.

| | **1** | & | | | | | | | | | 2 | | | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | **3** | 0 | **6** | **4** | **5** | | **2** | 0 | **5** | **3** | **4** | | **2** | 0 | **5** | **3** | **4** |
| & | 9 | 8 | 9 | 0 | 11 | | 9 | 8 | 9 | 0 | 11 | | 9 | 9 | 9 | 0 | 11 |
| & | 5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | 5 | 0 | 0 | 4 | 8 | | 5 | 1 | 0 | 4 | 8 |
| # | **3** | 0 | **Δ=1** | **2** | **6** | | 2 | 0 | 0 | 1 | 5 | | 2 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| & | 0 | 3 | 2 | 20 | 0 | | 0 | 3 | 2 | 20 | 0 | | 0 | 4 | 2 | 20 | 0 |

**Рис. 7.4. Зачеркивание строк и столбцов, изменение $c_{ij}$**

Идем на Шаг 3 и, повторяя шаги 3–8, выполняем итерацию II. Помечаем 0* и 0^.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ► | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 | | | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 |
| | 9 | 9 | 9 | 0 | 11 | | ► | 9 | 9 | 9 | 0* | 11 |
| | 5 | 1 | 0 | 4 | 8 | | | 5 | 1 | 0 | 4 | 8 |
| | 2 | 0^ | 0 | 1 | 5 | | | 2 | 0^ | 0 | 1 | 5 |
| 1 | 0 | 4 | 2 | 20 | 0 | | 2 | 0 | 4 | 2 | 20 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 | | | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 |
| | 9 | 9 | 9 | 0* | 11 | | | 9 | 9 | 9 | 0* | 11 |
| ► | 5 | 1 | 0* | 4 | 8 | | | 5 | 1 | 0* | 4 | 8 |
| | 2 | 0^ | 0^ | 1 | 5 | | 5 | 2 | 0^ | 0^ | 1 | 5 |
| 3 | 0 | 4 | 2 | 20 | 0 | | ► | 0* | 4 | 2 | 20 | 0^ |

Помечаем столбцы и строки #, столбцы и строки &, зачеркиваем 0, меняем план.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | | | 2 | # | # | | | # | 3 | # | | | |
| | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 | # | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 | # | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 |
| | 9 | 9 | 9 | 0* | 11 | | 9 | 9 | 9 | 0* | 11 | | 9 | 9 | 9 | 0* | 11 |
| | 5 | 1 | 0* | 4 | 8 | # | 5 | 1 | 0* | 4 | 8 | # | 5 | 1 | 0* | 4 | 8 |
| # | 2 | 0^ | 0^ | 1 | 5 | # | 2 | 0^ | 0^ | 1 | 5 | # | 2 | 0^ | 0^ | 1 | 5 |
| | 0* | 4 | 2 | 20 | 0^ | | 0* | 4 | 2 | 20 | 0^ | | 0* | 4 | 2 | 20 | 0^ |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | & | & | | | | 5 | | | | | | 6 | | | | |
| # | 2 | 0* | 5 | 3 | 4 | | 1 | 0 | 5 | 2 | 3 | | 1 | 0 | 5 | 2 | 3 |
| & | 9 | 9 | 9 | 0* | 11 | | 9 | 9 | 9 | 0 | 11 | | 9 | 10 | 10 | 0 | 11 |
| # | 5 | 1 | 0* | 4 | 8 | | 4 | 1 | 0 | 3 | 7 | | 4 | 1 | 0 | 3 | 7 |
| # | 2 | 0^ | 0^ | Δ=1 | 5 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| & | 0* | 4 | 2 | 20 | 0^ | | 0 | 4 | 2 | 20 | 0 | | 0 | 5 | 3 | 20 | 0 |

**Рис. 7.5. Итерация II**

План рис. 7.5 не оптимален. Идем на шаг 3 и выполняем итерацию III (рис. 7.6)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | 2 | | # | # | # | |
| | 1 | 0* | 5 | 2 | 3 | | # | 1 | 0* | 5 | 2 | 3 |
| | 9 | 10 | 10 | 0* | 11 | | # | 9 | 10 | 10 | 0* | 11 |
| | 4 | 1 | 0* | 3 | 7 | | # | 4 | 1 | 0* | 3 | 7 |
| | 1 | 0^ | 0^ | 0^ | 4 | | # | 1 | 0^ | 0^ | 0^ | 4 |
| | 0* | 5 | 3 | 20 | 0^ | | | 0* | 5 | 3 | 20 | 0^ |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | & | & | & | | | 4 | | | | | |
| # | Δ=1 | 0* | 5 | 2 | 3 | | | 0* | 0^ | 5 | 2 | 2 |
| # | 9 | 10 | 10 | 0* | 11 | | | 8 | 10 | 10 | 0* | 18 |
| # | 4 | 1 | 0* | 3 | 7 | | | 3 | 1 | 0* | 3 | 6 |
| # | 1 | 0^ | 0^ | 0^ | 4 | | | 0^ | 0* | 0^ | 0^ | 4 |
| & | 0* | 5 | 3 | 20 | 0^ | | | 0^ | 6 | 3 | 21 | 0* |

**Рис. 7.6. Итерация III**

**Шаг 9.** Формируем матрицу назначений X, меняя 0* на 1 и 0^ на 0. Суммируем $c_{ij}$, стоящие в клетках с 1 в X, и находим оптимальный план и Z.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | | 7 | 4 | 11 | 8 | 9 |
| 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | | 14 | 12 | 15 | 5 | 16 |
| 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | | 9 | 4 | 5 | 8 | 12 |
| 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | | 8 | 5 | 7 | 7 | 11 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | | 3 | 6 | 6 | 23 | 3 |

Матрица назначений **Z = 7 + 5 + 5 + 5 + 3 = 25**

**Рис. 7.7. Оптимальный план**

## Постановка задачи 7.2

Задано расписание полетов между городами А и В (табл. 7.1). Необходимо сформировать оптимальный график оборота ВС и найти min число ВС.

**Таблица 7.1**

**Расписание полетов между А и В**

| Рейс | Вылет / из А | Прилет в В | Рейс | Вылет / из В | Прилет в А |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10.00 | 12.00 | 11 | 10.00 | 12.00 |
| 2 | 11.00 | 13.00 | 12 | 13.00 | 15.00 |
| 3 | 13.00 | 15.00 | 13 | 20.00 | 22.00 |
| 4 | 15.00 | 17.00 | 14 | 21.00 | 23.00 |
| 5 | 21.00 | 23.00 | 15 | 22.00 | 24.00 |

Время нахождения ВС на земле $T_{min} \leq 1$ час. Число рейсов в сутки $nr_{SU}$=10.

## Алгоритм решения задачи 7.2

**Шаг 1.** Находим $T_{ij}$ нахождения ВС на земле каждой пары рейсов. ВС из А, улетающее в 10.00, сможет улететь из В рейсом 1 в 10.00 только через сутки через (24.00-12.00)+10.00=22 ч. Ищем $T_{ij}$ для каждой пары рейсов.

**Таблица 7.2**

**Т нахождения ВС на земле для любой пары рейсов**

| В Пр./Уб. | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | А Пр./Уб. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22 | **1**# | 8 | 9 | 10 | 11 | 22 | 23 | 1 | **3**# | 9 |
| 2 | 21 | 24 | **7**# | 8 | 9 | 12 | 19 | 20 | 22 | 24 | **6**# |
| 3 | 19 | 22 | 5 | **6**# | 7 | 13 | **12**# | 13 | 15 | 17 | 23 |
| 4 | 17 | 20 | 3 | 4 | **5**# | 14 | 11 | **12**# | 14 | 16 | 22 |
| 5 | **11**# | 14 | 21 | 22 | 23 | 15 | 10 | 11 | **13**# | 15 | 21 |

**Шаг 2.** Решаем дважды задачу "о назначениях" по правой и левой частям табл. 7.2. Цифры со знаком # - оптимальные $x_{ij}$. Сумма Т нахождения ВС на земле для левой матрицы Z=1+7+6+5+1=30, а для правой Z=12+12+13+3+6= 46.

**Шаг 3.** По матрицам назначений находим пары оптимально спариваемых рейсов: а) 1-12; 2-13; 3-14; 4-15; 5-11; б) 11- 4; 12- 5; 13- 1; 14- 2; 15- 3.

**Таблица 7.3**

**Результаты решения задачи "о назначениях"**

| В Пр./Уб. | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | А Пр./Уб. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 13 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 14 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

**Шаг 4.** Используя шаг 3, находим цепочку (1) рейсов, дающую min сумму t нахождения каждого ВС на земле : 1 - 12 - 5 - 11 - 4 - 15 - 3 - 14 - 2 - 13 - 1.

**Шаг 5.** ВС, вылетающее из А в понедельник в 9.00 выполнит все рейсы цепочки за 4 дня в четверг в 22.00. В пятницу ВС может начать новую цепочку.

**Шаг 6.** Определяем число ВС $Nbc=Nr_{SU}*ntc/\ Nr_{SU}=10*4/10=4$ ВС.

Ответы задач 7.1 и 7.2 в табл. 1.10 и табл. 1.11 П.I.

**Таблица 7.4**

**Исходные данные вариантов задачи 7.1**

| Вариант 1 | Вариант 2 | Вариант 3 | Вариант 4 |
|---|---|---|---|
| 10 5 9 18 11 | 23 24 5 15 10 | 21 22 3 19 10 | 3 5 2 3 2 |
| 13 19 6 12 4 | 22 23 4 18 19 | 20 21 2 18 19 | 2 3 7 2 2 |
| 3 2 4 4 5 | 17 18 23 3 4 | 15 16 21 3 4 | 3 6 3 2 3 |
| 18 9 12 17 15 | 11 12 17 21 22 | 11 12 17 23 23 | 6 2 3 7 4 |
| 11 6 14 19 10 | 10 11 16 20 21 | 10 11 16 22 23 | 7 5 6 9 7 |
| **Вариант 5** | **Вариант 6** | **Вариант 7** | **Вариант 8** |
| 5 6 11 9 11 | 5 2 9 6 7 | 12 3 11 15 21 | 7 5 12 9 3 |
| 11 7 3 10 3 | 12 11 13 3 14 | 11 13 3 10 3 | 10 4 6 3 17 |
| 7 11 11 8 9 | 7 2 3 6 10 | 7 11 15 5 10 | 7 2 13 6 6 |
| 10 8 12 15 13 | 6 3 5 5 9 | 10 11 5 5 9 | 6 13 5 15 9 |
| 2 9 6 11 3 | 1 4 4 21 1 | 2 11 10 11 3 | 11 7 4 21 3 |

**Таблица 7.5**

**Исходные данные вариантов задачи 7.2**

| | Вариант 1 | | | | Вариант 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рейс | Вылет/Прилет из А в В | Рейс | Вылет/Прилет из В в А | Рейс | Вылет/Прилет из А в В | Рейс | Вылет/Прилет из В в А |
| 1 | 8.00 - 11.00 | 11 | 8.00 - 11.00 | 1 | 8.00 - 11.00 | 11 | 8.00 - 11.00 |
| 2 | 9.00 - 12.00 | 12 | 17.00 - 20.00 | 2 | 10.00 - 13.00 | 12 | 9.00 - 12.00 |
| 3 | 11.00 - 14.00 | 13 | 18.00 - 21.00 | 3 | 15.00 - 18.00 | 13 | 14.00 - 17.00 |
| 4 | 19.00 - 22.00 | 14 | 19.00 - 22.00 | 4 | 19.00 - 22.00 | 14 | 20.00 - 23.00 |
| 5 | 20.00 - 23.00 | 15 | 20.00 - 23.00 | 5 | 20.00 - 23.00 | 15 | 21.00 - 24.00 |
| Рейс | Вариант 3 | | | Ре | Вариант 4 | | |
| 1 | 8.00 - 10.00 | 11 | 11.00 - 13.00 | 1 | 6.00 - 8.00 | 11 | 8.00 - 10.00 |
| 2 | 12.00 - 14.00 | 12 | 12.00 - 14.00 | 2 | 8.00 - 10.00 | 12 | 9.00 - 11.00 |
| 3 | 15.00 - 17.00 | 13 | 14.00 - 16.00 | 3 | 10.00 - 12.00 | 13 | 14.00 - 16.00 |
| 4 | 17.00 - 19.00 | 14 | 18.00 - 20.00 | 4 | 14.00 - 16.00 | 14 | 20.00 - 22.00 |
| 5 | 18.00 - 20.00 | 15 | 19.00 - 21.00 | 5 | 16.00 - 8.00 | 15 | 21.00 - 23.00 |
| Рейс | Вариант 5 | | | Ре | Вариант 6 | | |
| 1 | 8.00 - 12.00 | 11 | 7.00 - 11.00 | 1 | 8.00 - 11.00 | 11 | 17.00 - 20.00 |
| 2 | 10.00 - 14.00 | 12 | 9.00 - 13.00 | 2 | 10.00 - 13.00 | 12 | 18.00 - 21.00 |
| 3 | 11.00 - 15.00 | 13 | 11.00 - 15.00 | 3 | 15.00 - 18.00 | 13 | 19.00 - 22.00 |
| 4 | 13.00 - 17.00 | 14 | 14.00 - 18.00 | 4 | 17.00 - 20.00 | 14 | 20.00 - 23.00 |
| 5 | 15.00 - 19.00 | 15 | 16.00 - 20.00 | 5 | 20.00 - 23.00 | 15 | 21.00 - 24.00 |

## Практическое занятие № 8

# ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА УПРАВЛЕНЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

### Постановка задачи 8

Оценить, компенсируют ли будущие доходы от инвестиций Inv первоначальные и будущие издержки от реализации УР, вычислив показатели эффективности УР: 1) ЧДД - чистый дисконтированный доход;
2) Ток - время окупаемости УР;
3) IRR$^{\&}$ - внутренняя норма рентабельности УР.

### Исходные данные примера

Объем инвестиций Inv=992 тыс. руб. Банковский процент платы за кредит – $к^{\%}$=10%. Прогноз инфляции по годам - 7%, 7%, 6%. Срок возврата кредита – 3 года. Эксплуатационные расходы: а) базовые $C_{\text{t}}^{\text{б}}$ – 210 тыс. руб.; б) проектные $C_{\text{t}}^{\text{пр}}$ – 180 тыс. руб. Предполагаемая дополнительная денежная экономия по годам: {$Э_{\text{t=1}}$ =415 тыс.руб.; $Э_{\text{t=2}}$ =425 тыс.руб.; $Э_{\text{t=3}}$=425 тыс.руб.}.

Источниками дополнительной экономии $Э_{\text{t}}$ являются сокращения: расходов из-за повышения точности расчетов; расходов из-за снижения расхода ресурсов; трудоемкости производственного процесса; фонда заработной платы из-за снижения численности работников и т.д.

Возможный доход от продажи старого оборудования - $C_{\text{t=1}}^{\text{пр}}$=10 тыс.руб.

### Решение задачи 8

**Шаг 1.** Формируем номинальный поток денежных поступлений по годам

$$\text{CF}_{\text{t}} = (C_t^{б} - C_{\text{t}}^{п}) + Э_t + C_t^{пр} \tag{8.1}$$

$CF_t$ = { (210-180)+ 415+10, (210-180)+425; (210-180)+425} =
= {30+415+10; 30+425 , 30+425)} = {455; 455; 455} тыс.руб.

**Шаг 2.** Вычисляем поток денежных поступлений $CF_t$ с учетом инфляции по годам

t=1 : 1.000*1.070 = 1.070; 455.0*1.070 = 486.9 тыс.руб.;
t=2 : 1.070*1.070 = 1.145; 455.0*1.145 = 520.9 тыс.руб.;
t=3 : 1.145*1.060 = 1.214; 455.0*1.214 = 552.2 тыс.руб.

**Шаг 3.** Вычисляем дисконтированный денежный поток поступлений $DCF_t$ с учетом инфляции при E = {0%; 10%; 20%; 30%} по модели

$$DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} \tag{8.2}$$

при E= 0.00% и t= 1 $DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} = \frac{486.850}{(1+0.0)^1} = 486.850$ тыс.руб.;

при E= 10.00% и t= 1 $DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} = \frac{486.850}{(1+0.10)^1} = 442.6$ тыс.руб.;

при E= 20.00% и t= 1 $DCF_t = \frac{CF_t}{(1+E_t)^t} = \frac{486.850}{(1+0.20)^1} = 405.7$ тыс.руб. и т.д.

Расчеты выполняются для всех комбинаций t=1,3 и E = {0%; 10%; 20%; 30%}. Результаты расчетов приведены в табл. 8.1.

**Таблица 8.1**

**Поток DCF(t) с учетом инфляции**

| Год | | E%=0% | E%=10% | E%=20% | E%=30% |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 455 | 486.9 | 442.6 | 405.7 | 374.5 |
| 2 | 455 | 520.9 | 430.5 | 361.8 | 308.2 |
| 3 | 455 | 552.2 | 414.9 | 319.6 | 251.3 |

Норма дисконта E(%) оценивает относительную стоимость денежных потоков в моменты t. При E(%) ≥ $\kappa^{\%}$ УР окупается.

**Шаг 4.** Вычисляем поток дисконтированных денежных платежей с учетом инфляции при E = {0%; 10%; 20%; 30%} и записываем результаты в табл. 8.2.

**Таблица 8.2**

**Поток DCF(t) и DPF(t) с учетом инфляции**

| Год | | E%=0% | E%=10% | E%=20% | E%=30% |
|---|---|---|---|---|---|
| | Inv | -992.0 | -992.0 | -992.0 | -992.0 |
| 1 | $DCF_1$ | 486.9 | 442.6 | 405.7 | 374.5 |
| | $DPF_1$ | -505.1 | -549.4 | -586.3 | -617.5 |
| 2 | $DCF_2$ | 520.9 | 430.5 | 361.8 | 308.2 |
| | $DPF_2$ | 0.0 | -118.9 | -224.5 | -309.3 |
| 3 | $DCF_3$ | 552.2 | 414.9 | 319.6 | 251.3 |
| | $DPF_3$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | -58.0 |

В ходе реализации УР регулярно осуществляются платежи в счет покрытия долга за взятый в банке кредит, образующие дисконтированный поток платежей

$$DPF_{t+1}^{-} = DCF_t^{+} - DPF_t^{-} . \qquad (8.3)$$

При E=10% и t=1 $DPF_{t+1}^{-} = DCF_t^{+} - DPF_t^{-}$ = 442.9-992.0= -549.4 тыс.руб.

При E=10% и t=2 $DPF_{t+1}^{-} = DCF_t^{+} - DPF_t^{-}$ = -549.4 +430.5= -118.9 тыс.руб.

При E=10% и t=3 $DPF_{t+1}^{-} = DCF_t^{+} - DPF_t^{-}$ =-118.9 +414.9= 0.0 тыс.руб.

Сумма $DPF_{t+1}^{-} = DCF_t^{+} - DPF_t^{-}$ при t=3 и E=10% больше 0, однако в табл. 8.2 вместо этого записано $DPF_{t+1}^{-} = DCF_t^{+} - DPF_t^{-}$ =0.0 тыс.руб., поскольку речь идет о том, что платить больше не надо, так долг равен 0.

**Шаг 5.** Вычисляем поток чистого дисконтированного дохода

$$ЧДД_t = DPF_t^{-} + DCF_t^{+} \qquad (8.4)$$

и записываем результаты в табл. 8.3.

**Таблица 8.3**

**Поток ЧДД(t) = F(E)**

| Год | | E%=0% | **E%=10%** | E%=20% | E%=30% |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Inv | -992.0 | **-992.0** | -992.0 | -992.0 |
| 1 | $ЧДД_1$ | -505.1 | **-549.4** | -586.3 | -617.5 |
| 2 | $ЧДД_2$ | 15.8 | **-118.9** | -224.5 | -309.3 |
| 3 | $ЧДД_3$ | **568.0** | **296.0** | **95.0** | **-57.9** |
| | $T_{ok}$ | 1.97 | **2.29** | 2.70 | >3 |

**Шаг 6.** Строим графики $ЧДД_t$ = f(t) и IRR$^{\&}$ = f(E$^{\%}$) по данным табл. 8.3.

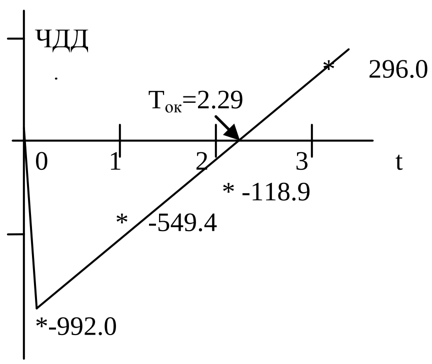


**Рис. 8.1.** $ЧДД_t$ = f(t) при E=10%

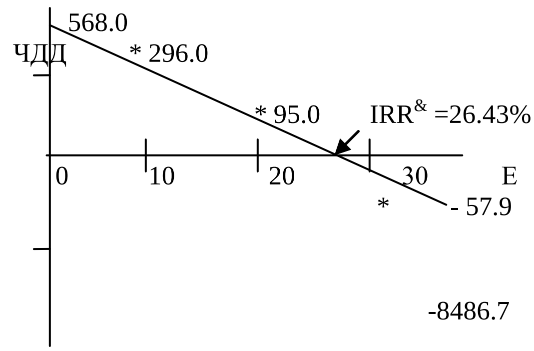


**Рис. 8.2**. IRR =F(E)

**Шаг 7.** Определяем срок окупаемости УР $T_{ok}$ при E = {0%; 10%; 20%; 30%}. Величина $T_{ok}$ находится в точке пересечения графика ЧДД(t) с осью t. Данные для оценки $T_{ok}$ при E%={0%; 10%; 20%; 30%} находятся в столбце (E=10%) табл .8.3. $T_{ok}$ при E=10% определяем следующим образом:

при t=1 $ЧДД_1$= -549.4 < 0 и Ток = Ток + 1 = 1;

при t=2 $ЧДД_2$= -118.9 < 0 и Ток = 1 + 1 = 2;

при t=3 $ЧДД_3$= 296.0 > 0 и Ток = 2 + ΔТок

По данным выделенного столбца $ЧДД_t$ при E=10% табл. 8.3 вычисляем срок окупаемости $T_{ок} = T_{ок'} + \Delta T_{ок}$ (E%=12%) инвестиций как :

1) поскольку в табл. 8.3 ЧДД (E=10%) становится положительным между t=2 и t=3, то целая часть срока окупаемости равна $T_{ок'} = 2$;

2) дробная часть $x=\Delta T_{ок}$ находится геометрически из рис .8.3 путем вычисления x из соотношения $\frac{118.9}{x} = \frac{296}{1-x}$, образованного из равенства отношений сторон двух подобных треугольников. Величину $x = \Delta T_{ок}$ находим путем преобразования этого отношения:

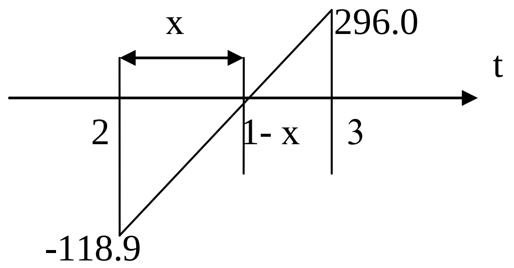


**Рис. 8.3.** Оценка x=$\Delta T_{ок}$

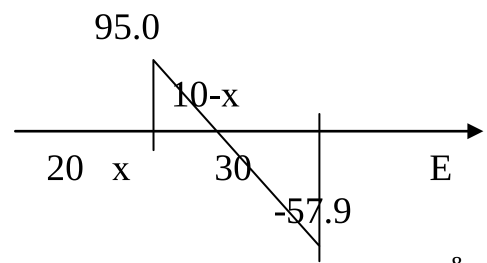


**Рис. 8.4.** Оценка x= IRR$^{\&}$

а) 118.9 * (1-x) = 296.0 * x; б) 118.9 -118.9 * x = 296.0 * x;
в) 118.9 = 118.9 * x + 296.0 * x = x * (414.9); г) $\Delta T_{ок}$ = x = 118./414.9 = 0.29.

Таким образом, $T_{ок} = T_{ок'} + \Delta T_{ок}$ = 2+0.29=2.29 г. Все Ток в табл. 8.3.

**Шаг 8.** Находим внутреннюю норму рентабельности УР IRR$^{\&}$

$$\sum CF_t (1+\frac{IRR^{\vartheta}}{100})^t - Inv = 0.$$

по данным выделенной строки (t=3) в табл. 8.3. IRR$^{\&}$ находится в точке пересечения графика ЧДД(Е=10%) с осью Е. Как видно из табл. 8.3 и рис. 8.4, величина IRR$^{\&}$ находится в интервале между 20% и 30% и равно IRR$^{\&}$ = 20% +x . Величину x=6.21 находим из соотношения

$$\frac{95}{x} = \frac{57.9}{10-x},$$

построенного из рис. 8.4. Таким образом, величина внутренней рентабельности УР равна IRR& =20+6.21=26.21%.

В табл. 8.5 показаны все результаты экономической оценки УР. Поскольку IRR$^{\&}$=26.1% > К%=10% и Tok=2.29 < Тв=3, можно сделать вывод о возможности принятия УР.

**Таблица 8.4**

**Результаты оценки УР**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | ЧИСТЫЙ дис_доход на конец Ток....... | ден.ед. | ЧДД | 295.98 |
| 2. | ЧИСТЫЙ дис_доход в конце проекта............ | ден.ед. | ЧДД | 295.98 |
| 3. | СРОК возврата кредита ................. | лет | Твк | 3.00 |
| 4. | ПРОГНОЗ СРОКА окупаемости инвестиций .. | лет | Ток= | 2.29 |
| 5. | ПРОЦЕНТ платы за кредит ............... | % | Е% | 10.00 |
| 6. | ВНУТРЕННЯЯ норма рентабельности УР | % | IRR& | 26.21 |

В табл. 8.7 приведены исходные данные задач для СРС, ответы которых см. в табл. 1.12 П. I. Во всех задачах инфляция % по годам: 7, 7, 6 и Тв=3г. К%=10% .

**Таблица 8.7**

**Исходные данные для задачи 8**

| N | Параметры УР | Вариант | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | Объем инвестиций | 50000 | 12609 | 28000 | 50000 | 16100 |
| | Эксплуатационные расходы: | | | . | | 4000 |
| 2 | базовые | 15000 | 45628 | 10000 | 20000 | 3000 |
| 3 | проекта | 10000 | 40814 | 10000 | 10000 | 9000 |
| 4 | Ежегодная экономия | 13500 | 0 | 17000 | 10800 | 0 |
| 5 | Продажа оборудования | 0 | 2500 | 0 | 5000 | |
| | | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | Объем инвестиций | 9920 | 999 | 16 | 210 | 40000 |
| | Эксплуатационные расходы: | 3000 | 350 | 19 | 50 | 13000 |
| 2 | базовые | 2000 | 200 | 14 | 50 | 9000 |
| 3 | проекта | 5000 | 400 | 0 | 135 | 11400 |
| 4 | Ежегодная экономия | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 5 | Продажа оборудования | | | | | |

## Литература

1. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Ч. I: учебное пособие.- М.: МГТУ ГА, 1993.

2. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Ч. II. Компьютерная реализация: учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 1998.

3. Андрианов В.В. Алгоритмы методов разработки управленческих решений: учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 2001.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

## ОТВЕТЫ ЗАДАЧ

**Таблица 1.1**

**Задача 1**

| Вари ант | План пр-ва $(E-A)^{-1}*У$, шт. | Сумма расхода сырья 1 2 3 4, ед. | Суммарные расходы по цехам, руб. | Себестоимость ед. продукции, руб. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 239 172 37 | 970 651 1586 15767 | 6716 9821 23940 | 36.1 80.2 79.5 |
| 2 | 286 356 50 | 2065 1874 2874 15791 | 7093 15771 25301 | 44.7 66.3 87.9 |
| 3 | 536 678 87 | 3208 1570 3599 28003 | 17152 21967 36654 | 59.0 67.4 77.4 |
| 4 | 704 663 91 | 2691 1478 4637 33949 | 19078 26188 45277 | 33.9 67.7 90.4 |
| 5 | 727 795 91 | 4073 3292 5792 31918 | 15630 29336 48615 | 70.3 122.0 85.9 |
| 6 | 659 592 59 | 2457 1145 3296 24755 | 21286 18174 30626 | 43.6 56.4 71.2 |

**Таблица 1.2**

**Задача 2**

| Вари-ант | Гаусса | Экспо-нента | Пуассон | Вари-ант | Гаусса | Экспо-нента | Пуассон |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14.04 | 1146.33 | 9.70 | 6 | 15.10 | 203.16 | 11.56 |
| 2 | 14.16 | 396.73 | 14.09 | 7 | 4.22 | 403.38 | 4.58 |
| 3 | 10.84 | 369.85 | 8.91 | 8 | 26.76 | 872.54 | 26.13 |
| 4 | 111.12 | 6.00 | 79.32 | 9 | 5.16 | 188.88 | 3.37 |
| 5 | 44.83 | 190.30 | 7.24 | 10 | 124.11 | 12.86 | 242.97 |

**Таблица 1.3**

**Задача 3**

| | Вариант | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Прогноз структуры | 45.30 | 33.82 | 30.44 | 40.91 | 34.58 | 33.80 | 39.59 | 41.79 |
| | 37.67 | 10.98 | 47.42 | 30.92 | 26.44 | 45.59 | 37.50 | 16.75 |
| | 10.71 | 34.48 | 13.88 | 22.99 | 26.30 | 12.96 | 18.28 | 23.75 |
| | 6.33 | 20.71 | 8.27 | 5.18 | 12.68 | 7.66 | 4.62 | 17.72 |

**Таблица 1.4**

**Задача 4.1**

| Вариант | Искомые неизвестные | | | Zmax |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x2 =26.14 | x3 =58.57 | x1 = 3.57 | 111.57 |
| 2 | x4 = 0.40 | x2 = 2.40 | x1 = 0.80 | 10.40 |
| 3 | x3 = 2.97 | x2 = 3.92 | x1 = 5.65 | 44.98 |
| 4 | x3 = 3.89 | x2 = 3.79 | x1 = 5.40 | 45.77 |
| 5 | x3 =11.86 | x2 = 9.57 | x1 = 5.05 | 68.22 |
| 6 | x3 = 6.29 | x2 = 3.14 | x1 = 6.00 | 40.00 |

**Таблица 1.5**

**Задача 4.2**

| Вариант | Искомые неизвестные | | | Zmin |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x2 = 4.00 | x3 = 4.00 | x5 = 4.00 | -4.00 |
| 2 | x2 = 8.73 | x3 = 5.27 | x1 = 0.55 | -3.45 |
| 3 | x2 =100.00 | x3 =30.00 | x1 =12.00 | -170.00 |
| 4 | x3 = 3.00 | x1 = 2.50 | x2 = 6.00 | -11.00 |
| 5 | x3 = 1.00 | x1 = 1.50 | x2 = 4.00 | -1.00 |
| 6 | x3 = 1.00 | x2 = 0.40 | x1 = 1.60 | 4.60 |

**Таблица 1.6**

**Задача 5.1**

| Вариант | Искомые неизвестные | | | Zmin |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x3 = 7.00 | x1 = 2.00 | x6 = 7.00 | 16.00 |
| 2 | x6 = 2.00 | x1 = 2.00 | x2 = 2.33 | 10.67 |
| 3 | x4 = 0.50 | x1 = 2.50 | x5 = 3.50 | 5.00 |
| 4 | x3 = 0.67 | x4 = 0.33 | x2 = 1.17 | 0.33 |
| 5 | x2 = 1.00 | x3 = 3.00 | x5 = 1.00 | 13.00 |
| 6 | x3 = 8.40 | x1 = 6.20 | x2 = 0.20 | 35.20 |

**Таблица 1.7**

**Задача 5.2**

| Вариант | Искомые неизвестные | | | | | Zmin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x1 = 1 | x4 = 6 | x2 = 1 | x3 = 0 | x5 = 1 | 3 |
| 2 | x1 = 1 | x2 = 3 | x3 = 1 | x4 = 0 | x5 = 1 | 17 |
| 3 | x3 = 5 | x2 = 1 | x5 = 8 | x4 = 0 | x1 = 1 | 19 |
| 4 | x2 = 5 | x1 = 6 | x3 = 0 | x4 = 2 | x6 = 1 | 36 |
| 5 | x3 = 3 | x4 =12 | x2 = 2 | x5 = 2 | x6 = 1 | 32 |
| 6 | x3 = 2 | x2 = 1 | x1 = 8 | x5 = 2 | x6 = 1 | 25 |

**Таблица 1.8**

**Задача 6.1**

| Вариант | Zmin | Вариант | Zmin | Вариант | Zmin | Вариант | Zmin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 360 | 3 | 260 | 5 | 415 | 7 | 531 |
| 2 | 190 | 4 | 380 | 6 | 516 | 8 | 333 |

**Таблица 1.9**

**Задача 6.2**

| Вариант | Zmin | Вариант | Zmin | Вариант | Zmin | Вариант | Zmin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 412 | 3 | 552 | 5 | 502 | 7 | 559 |
| 2 | 455 | 4 | 614 | 6 | 642 | 8 | 545 |

**Таблица 1.10**

**Задача 7.1**

| Вариант | Zmin | Zmax |
|---|---|---|
| 1 | 39 = (10, 6, 4, 9, 10) | 74 = (18, 19, 5, 18, 14) |
| 2 | 39 = (10, 4, 3,11, 11) | 111 = (24, 22,23, 22, 20) |
| 3 | 37 = (10, 2, 3,11, 11) | 109 = (22, 20,21, 23, 23) |
| 4 | 14 = ( 2, 2, 2, 2, 6) | 30 = ( 5, 7, 3, 6, 9) |
| 5 | 27 = ( 5, 3, 8, 8, 3) | 57 = (11, 11, 11, 15, 9) |
| 6 | 15 = ( 2, 3, 3, 6, 1) | 57 = ( 9, 11, 10, 6, 21) |
| 7 | 21 = ( 3, 3, 7, 5, 3) | 70 = (21, 13, 15, 10, 11) |
| 8 | 18 = ( 3, 3, 2, 6, 4) | 71 = ( 7, 17, 13, 13, 21) |

. **Таблица 1.11**

**Задача 7.2**

| Вариант | Ц е п о ч к и рейсов |
|---|---|
| 1 | 1 - 13 - 2 - 14 - 3 - 15 - 4 - 11 - 5 -12 - 1 |
| 2 | 1 - 13 - 5 - 12 - 4 - 11 - 3 - 15 - 2 -14 - 1 |
| 3 | 1 - 11 - 3 - 15 - 2 - 14 - 1 // 4 - 12 - 4 // 5 - 13 - 5 |
| 4 | 1 - 12 - 5 - 11 - 4 - 15 - 3 - 14 - 2 - 13 - 1 |
| 5 | 1 - 14 - 2 - 15 - 3 - 11 - 4 - 12 - 5 - 13 - 1 |
| 6 | 1 - 11 - 1 // 2 - 12 - 2 // 3 -14 - 4 - 15 - 5 -13 - 3 |
| 7 | 1 - 14 - 4 - 12 - 2 - 15 - 5 - 13 - 3 - 11 - 1 |
| 8 | 1 - 11 1 // 2 - 12 - 2 // 3 - 13 - 3 // 4 - 15 - 5 - 14 - 4 |

**Таблица 1.12**

**Задача 8**

| Вариант | ЧДД ок | ЧДД кр | Ток | $IRR^{\&}$ | ИД |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2043 | 2043 | 2.88 | 17.79 | 0.04 |
| 2 | 3367 | 3367 | 2.22 | 31.58 | 0.27 |
| 3 | 4537 | 19823 | 1.72 | 27.64 | 0.71 |
| 4 | 13382 | 13382 | 2.28 | 30.80 | 0.27 |
| 5 | 3040 | 12031 | 1.68 | 29.39 | 0.75 |
| 6 | 1564 | 6959 | 1.72 | 27.34 | 0.70 |
| 7 | 54 | 548 | 1.90 | 19.62 | 0.55 |
| 8 | 1 | 1 | 2.89 | 17.31 | 0.03 |
| 9 | 48 | 170 | 1.62 | 32.67 | 0.81 |
| 10 | 3322 | 3322 | 2.76 | 20.45 | 0.08 |

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

**Таблица 2.1**

**Квантили функции Ф(Z)**

| Z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5909 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6333 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7356 | .7389 | .7421 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7703 | .7734 | .7764 | .7793 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8437 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8906 | .8925 | .8943 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9485 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9648 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9776 | .9783 | .9788 | .9798 | .9798 | .9803 | .9807 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9874 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9924 | .9927 | .9929 | .9930 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9958 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9980 | .9980 | .9981 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9986 | .9983 | .9983 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 | .9987 | .9987 |
| 3.1 | .9990 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 |
| 3.5 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 |
| 4.0 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |

**Таблица 2.2**

**Квантили распределения $\chi^2$**

| $v\backslash^p$ | 0.975 | 0.95 | 0.900 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.001 | 0.004 | 0.016 | 2.710 | 3.840 | 5.020 | 6.630 |
| 2 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 4.610 | 5.990 | 7.380 | 9.210 |
| 3 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.250 | 7.810 | 9.350 | 11.340 |
| 4 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 7.780 | 9.490 | 11.140 | 13.280 |
| 5 | 0.831 | 1.150 | 1.610 | 9.240 | 11.070 | 12.380 | 15.090 |
| 6 | 1.240 | 1.640 | 2.200 | 10.640 | 12.590 | 14.450 | 16.810 |
| 7 | 1.690 | 2.170 | 2.830 | 12.020 | **14.070** | 16.010 | 18.480 |
| 8 | 2.180 | 2.730 | 3.490 | 13.360 | **15.510** | 17.530 | 20.090 |
| 9 | 2.700 | 3.330 | 4.170 | 14.680 | 16.920 | 19.020 | 21.670 |
| 10 | 3.250 | 3.940 | 4.870 | 15.990 | 18.310 | 20.480 | 23.210 |
| 11 | 3.820 | 4.570 | 5.580 | 17.280 | 19.680 | 21.920 | 24.730 |
| 12 | 4.400 | 5.230 | 6.300 | 18.550 | 21.030 | 23.340 | 26.220 |
| 13 | 5.010 | 5.890 | 7.040 | 19.810 | 22.360 | 24.740 | 27.690 |
| 14 | 5.630 | 6.570 | 7.790 | 21.060 | 23.680 | 26.120 | 29.140 |
| 15 | 6.260 | 7.260 | 8.550 | 22.310 | 25.000 | 27.490 | 30.580 |
| 16 | 6.910 | 7.960 | 9.310 | 23.540 | 26.300 | 28.850 | 32.000 |
| 17 | 7.560 | 8.670 | 10.080 | 24.770 | 27.590 | 30.190 | 33.410 |
| 18 | 8.230 | 9.390 | 10.860 | 25.990 | 28.870 | 31.530 | 34.810 |
| 19 | 8.910 | 10.120 | 11.650 | 27.200 | 30.140 | 32.580 | 36.190 |
| 20 | 9.590 | 10.850 | 12.440 | 28.410 | 31.410 | 34.170 | 37.570 |
| 22 | 10.980 | 12.340 | 14.040 | 30.810 | 33.920 | 36.780 | 40.290 |
| 24 | 12.400 | 13.850 | 15.660 | 33.200 | 36.420 | 39.360 | 42.980 |
| 26 | 13.840 | 15.380 | 17.290 | 35.560 | 38.880 | 41.920 | 45.640 |
| 28 | 15.310 | 16.930 | 18.940 | 37.920 | 41.340 | 44.460 | 48.280 |
| 30 | 16.790 | 18.490 | 20.600 | 40.260 | 43.770 | 46.980 | 50.890 |
| 35 | 20.570 | 22.460 | 24.800 | 46.060 | 49.800 | 53.200 | 57.340 |
| 40 | 24.430 | 26.510 | 29.050 | 51.810 | 55.760 | 59.340 | 63.690 |
| 45 | 28.520 | 29.420 | 33.770 | 57.320 | 61.250 | 65.350 | 69.560 |
| 50 | 32.360 | 34.760 | 37.690 | 63.170 | 67.500 | 71.420 | 76.160 |
| 60 | 40.480 | 43.190 | 46.460 | 74.400 | 79.080 | 83.300 | 88.380 |
| 80 | 57.150 | 60.390 | 64.280 | 96.580 | 101.880 | 106.630 | 112.330 |
| 100 | 74.220 | 77.930 | 82.360 | 118.500 | 124.340 | 129.560 | 135.810 |
| 120 | 91.570 | 95.700 | 100.620 | 140.230 | 146.570 | 152.210 | 158.950 |
| 150 | 118.700 | 122.700 | 128.300 | 172.600 | 179.600 | 185.800 | 193.200 |
| 200 | 162.700 | 168.300 | 174.800 | 226.000 | 234.000 | 241.100 | 249.400 |

**Таблица 2.3**

**Значения функции $e^{-x}$**

| \ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.000 | 0.990 | 0.980 | 0.970 | 0.961 | 0.951 | 0.942 | 0.932 | 0.923 | 0.914 |
| 0.1 | .905 | .896 | .887 | .978 | .869 | .861 | .852 | .844 | .835 | .827 |
| 0.2 | .819 | .811 | .803 | .795 | .787 | .779 | .771 | .763 | .756 | .748 |
| 0.3 | .741 | .733 | .726 | .719 | .712 | .705 | .698 | .601 | .694 | .677 |
| 0.4 | .670 | .664 | .657 | .651 | .644 | .638 | .631 | .625 | .619 | .613 |
| 0.5 | .606 | .601 | .595 | .589 | .583 | .577 | .571 | .565 | .560 | .554 |
| 0.6 | .549 | .543 | .538 | .533 | .527 | .522 | .517 | .512 | .507 | .502 |
| 0.7 | .497 | .492 | .487 | .482 | .477 | .472 | .468 | .463 | .458 | .454 |
| 0.8 | .449 | .445 | .440 | .436 | .432 | .427 | .423 | .419 | .415 | .411 |
| 0.9 | .407 | .403 | .399 | .395 | .391 | .387 | .383 | .379 | .375 | .372 |
| 1.0 | .368 | .364 | .360 | .357 | .354 | .350 | .347 | .343 | .340 | .337 |
| 1.1 | .333 | .330 | .326 | .323 | .320 | .317 | .314 | .310 | .307 | .304 |
| 1.2 | .301 | .298 | .295 | .292 | .289 | .287 | .287 | .281 | .278 | .275 |
| 1.3 | .273 | .270 | .267 | .265 | .262 | .259 | .257 | .254 | .252 | .249 |
| 1.4 | .247 | .244 | .242 | .239 | .237 | .235 | .232 | .230 | .228 | .225 |
| 1.5 | .223 | .221 | .219 | .217 | .214 | .212 | .210 | .208 | .206 | .204 |
| 1.6 | .202 | .200 | .198 | .196 | .194 | .192 | .190 | .188 | .186 | .185 |
| 1.7 | .183 | .181 | .179 | .177 | .176 | .174 | .172 | .170 | .169 | .167 |
| 1.8 | .165 | .164 | .162 | .160 | .159 | .157 | .156 | .154 | .153 | .151 |
| 1.9 | .150 | .148 | .147 | .145 | .144 | .142 | .141 | .140 | .138 | .137 |
| 2.0 | .135 | .134 | .133 | .131 | .130 | .129 | .128 | .126 | .125 | .124 |
| 2.1 | .123 | .121 | .120 | .119 | .118 | .117 | .115 | .114 | .113 | .112 |
| 2.2 | .111 | .110 | .109 | .108 | .107 | .105 | .104 | .103 | .102 | .102 |
| 2.3 | .100 | .099 | .098 | .097 | .096 | .095 | .094 | .093 | .092 | .091 |
| 2.4 | .091 | .090 | .089 | .088 | .087 | .086 | .085 | .085 | .084 | .083 |
| 2.5 | .082 | .081 | .081 | .080 | .078 | .078 | .077 | .077 | .076 | .075 |
| 2.6 | .074 | .074 | .073 | .072 | .071 | .071 | .070 | .069 | .069 | .068 |
| 2.7 | .067 | .067 | .066 | .065 | .065 | .064 | .063 | .063 | .062 | .061 |
| 2.8 | .061 | .060 | .060 | .059 | .058 | .058 | .057 | .057 | .056 | .056 |
| 2.9 | .055 | .055 | .054 | .053 | .053 | .052 | .052 | .051 | .051 | .050 |
| 3.0 | .050 | .049 | .049 | .048 | .048 | .047 | .047 | .046 | .046 | .046 |
| 3.1 | .045 | .045 | .044 | .044 | .043 | .043 | .042 | .042 | .042 | .041 |
| 3.2 | .041 | .040 | .040 | .040 | .039 | .039 | .038 | .038 | .038 | .037 |
| 3.3 | .038 | .037 | .036 | .036 | .035 | .035 | .035 | .034 | .034 | .034 |
| 3.4 | .033 | .033 | .033 | .032 | .032 | .032 | .031 | .031 | .031 | .031 |
| 3.5 | .030 | .030 | .030 | .029 | .029 | .029 | .028 | .028 | .028 | .028 |
| 3.6 | .027 | .027 | .027 | .027 | .026 | .026 | .026 | .026 | .025 | .025 |
| 3.7 | .025 | .025 | .024 | .024 | .024 | .024 | .023 | .023 | .023 | .022 |
| 3.8 | .022 | .022 | .022 | .022 | .022 | .021 | .021 | .021 | .021 | .021 |
| 3.9 | .020 | .020 | .020 | .020 | .020 | .019 | .019 | .019 | .019 | .019 |
| \ | 0.00 | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 |
| 4.0 | .018 | .017 | .015 | .014 | .012 | .011 | .010 | .009 | .008 | .008 |
| 5.0 | .007 | .006 | .006 | .005 | .005 | .004 | .004 | .003 | .003 | .003 |
| 6.0 | .003 | .002 | .002 | .002 | .002 | .002 | .001 | .001 | .001 | .001 |
| 7.0 | .001 | .001 | .001 | .001 | .001 | .001 | .001 | .000 | .000 | .000 |

**Таблица 2.4**

## Квантили t-распределения Стьюдента

| v\p | 0.300 | 0.200 | 0.100 | 0.050 | 0.020 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.599 |
| 3 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.869 |
| 6 | 1.130 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 25 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 30 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 35 | 1.053 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 | 3.591 |
| 40 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 45 | 1.049 | 1.301 | 1.679 | 2.014 | 2.412 | 2.690 | 3.520 |
| 50 | 1.048 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.496 |
| 55 | 1.047 | 1.297 | 1.673 | 2.004 | 2.396 | 2.669 | 3.478 |
| 60 | 1.046 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.460 |
| 70 | 1.045 | 1.294 | 1.667 | 1.994 | 2.381 | 2.648 | 3.435 |
| 80 | 1.044 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.416 |
| 90 | 1.043 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2.368 | 2.632 | 3.402 |
| 100 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 | 3.390 |
| 120 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| $\infty$ | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

## Содержание

Редактор И.В. Вилкова

| | | |
|---|---|---|
| | Подписано в печать 23.05.12 г. | |
| Печать офсетная | Формат 60x84/16 | 2,48 уч.-изд. л. |
| 3,02 усл.печ.л. | Заказ № 1456/ | Тираж 100 экз. |

*Московский государственный технический университет ГА*
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
*Редакционно-издательский отдел*
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а