

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

**Кафедра электротехники и авиационного электрооборудования
Ю.П. Артеменко**

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**ПОСОБИЕ
по выполнению курсовой работы**

*для студентов II курса дневного
и III курса заочного обучения
направления 162500*

Москва – 2012

ББК 6П2.1
А86

Рецензент канд. техн. наук, доц. Е.Ж. Сапожникова

Артеменко Ю.П.

А86 Теория электромагнитного поля: пособие по выполнению курсовой работы. - М.: МГТУ ГА, 2012. - 28 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины Б.2.8 «Теория электромагнитного поля» по Учебным планам для студентов II курса дневного и III курса заочного обучения направления 162500.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 22.05.12 г. и методического совета 25.05.12 г.

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1.1. Цель курсовой работы

Курсовая работа (КР) по дисциплине «Теория электромагнитного поля» имеет целью закрепление знаний студентов по соответствующим разделам учебной дисциплины. В ходе самостоятельного выполнения КР студенты приобретают практические навыки анализа и расчета переходных процессов в электрических цепях, а также электрических и магнитных полей.

1.2. Требования к оформлению КР

Курсовая работа выполняется и оформляется на листах стандартного формата А4, которые должны быть обязательно сшиты.

Электрические схемы, графики, диаграммы выполняются на миллиметровой бумаге с соблюдением требований ЕСКД и использованием чертежных инструментов (не от руки), допускается применение компьютерной графики. В случае использования при расчетах компьютерных средств соответствующие распечатки должны быть выполнены также на стандартных листах и вложены в работу. Рисунки необходимо пронумеровать, а в тексте поместить ссылки на них.

Условия задачи необходимо приводить полностью в том виде, как они сформулированы в задании. Основные положения решений должны быть подробно пояснены; в решение включать необходимый минимум промежуточных расчетов, без которых проверка конечного результата становится затруднительной. Окончательный результат расчета привести с указанием единицы измерения соответствующей величины.

Работа должна быть выполнена собственноручно, датирована и подписана студентом. Выполненная работа представляется на кафедру преподавателю для проверки. Все замечания, отмеченные преподавателем, устраняются студентом в установленные сроки, после чего он защищает свою работу.

Студенты, не выполнившие КР в назначенный срок, к экзамену по «Теории электромагнитного поля» не допускаются.

1.3. Указания к выбору варианта

Вариант задания выбирается студентом по двум последним цифрам зачетной книжки из соответствующих таблиц.

1.4. Символическое описание электрических схем

В вариантах заданий используется символическая запись, которая отображает конфигурацию электрической цепи в логической форме. Такая форма отображения конфигурации электрической цепи основана на символах алгебры логики. В технике последовательному соединению элементов принято сопоставлять функцию «И» или логическое умножение, знак которого для

простоты опускается, а параллельному соединению элементов – функцию «ИЛИ» или логическое сложение, отображаемое знаком «+».

Примечание. В задачах по переходным процессам указывается также в качестве элемента цепи ключ, замыкание или размыкание которого, то есть коммутация, и вызывает переходный процесс. При этом символу “К” соответствует разомкнутое состояние ключа до коммутации, символу “ \underline{K} ” - замкнутое состояние ключа до коммутации.

Рассмотрим пример преобразования логического описания цепи в ее графическое изображение. Пусть электрическая цепь синусоидального тока задана в виде следующей записи $a(ER_1+(R_2+R_3\underline{K})L_1+R_3C_1)b$.

Графическое изображение этой цепи будет иметь вид (рис. 1.1).

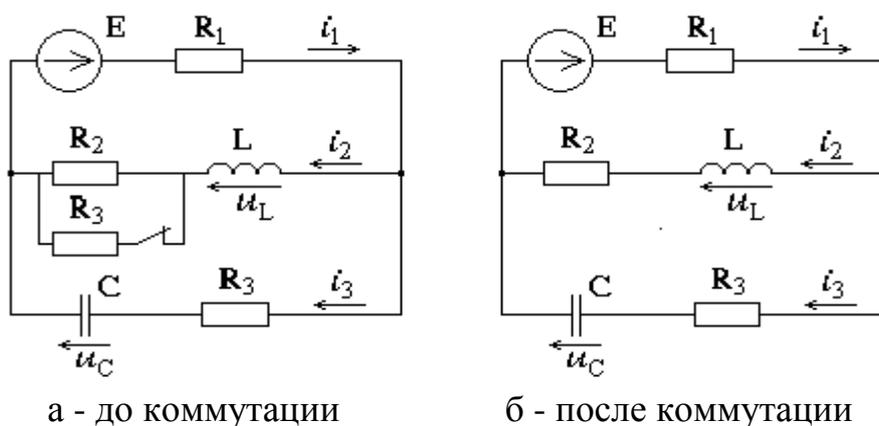


Рис. 1.1

1.5. Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. - М.: Высшая школа, 2006.
2. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1990.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Задание 1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В соответствии с вариантом, заданным двумя последними цифрами шифра, указанного в зачетной книжке студента, выписать из табл. 1.1 и табл. 1.2 условия задания и выполнить следующее:

1. Начертить схему электрической цепи с обозначением узлов и элементов ветвей.
2. Рассчитать переходный процесс *классическим методом*, т.е. определить зависимости от времени мгновенных значений всех токов схемы и напряжений на всех ее пассивных элементах.

3. Рассчитать переходный процесс *операторным методом*, результаты сравнить с классическим.

4. Построить графики зависимостей от времени всех токов и напряжений на реактивных элементах.

5. Рассчитать переходный процесс для токов и напряжений на реактивных элементах *численным методом* с применением ЭВМ. Результаты представить в виде графиков, сравнить с п. 4.

Условия к заданию 1

Таблица 1.1

Логическое содержание электрической цепи

№ варианта	Схема электрической цепи
01 - 05	$a(ER_1K+R_2C_1+L_1R_3)b$
06 - 10	$a(L_1R_1+ER_3+KC_1)b$
11 - 15	$a(R_3K+ER_1+R_3C_1+L_1R_2)b$
16 - 20	$a(K+L_1R_1+C_1R_2+ER_3)b$
21 - 25	$a(ER_1+(R_2+R_3K)L_1+R_3C_1)b$
26 - 30	$a(L_1R_1+EC_1K+R_3)b$
31 - 35	$a(R_1C_1+R_2L_1K+ER_3)b$
36 - 40	$a(EL_1+KR_3+R_2C_1)b$
41 - 45	$a(R_1+C_1L_1R_2+ER_3K)b$
46 - 50	$a(C_1R_1+ER_3+L_1K)b$
51 - 55	$a(EKC_1+R_1+R_2C_2)b$
56 - 60	$a(ER_1L_1+(K+R_2)L_2+R_3)b$
61 - 65	$a(EC_1+KR_1+R_2C_2)b$
66 - 70	$a(R_1L_1K+ER_2+R_3L_2)b$
71 - 75	$a(ER_1+C_1+(C_2+K)R_2)b$
76 - 80	$a(K+R_1L_1+R_2L_2+ER_3)b$
81 - 85	$a(ER_1+C_1+R_2C_2K)b$
86 - 90	$a(ER_3L_1+R_2L_2+R_1+K)b$
91 - 95	$a(ER_1+C_2R_2+R_3K+C_1)b$
96 - 00	$a(L_2R_1+ER_2+(R_3+K)R_3L_1)b$

Таблица 1.2

Значения параметров цепи

№ варианта (посл. цифры)		R ₁ , Ом	R ₂ , Ом	R ₃ , Ом	L ₁ , мГн	C ₁ , мкФ	L ₂ , мГн	C ₂ , мкФ	E, В
01-50	1	1	1	100	10	10	5	15	30
	2	1	2	80	10	100	20	200	60
	3	100	1	2	5	3	1	100	120
	4	60	1	1	20	20	10	20	28
	5	2	50	2	25	50	100	20	12
	6	1	1	100	10	10	20	5	5
	7	10	2	40	100	10	10	5	12
	8	10	10	100	10	20	5	40	30
	9	10	80	5	10	25	40	50	28
	0	40	1	20	1	10	4	2	100
51-00	1	10	200	10	10	100	5	15	12
	2	30	20	80	10	50	20	40	30
	3	100	200	20	5	200	1	100	120
	4	60	100	10	20	50	10	20	100
	5	20	50	20	25	50	100	20	60
	6	10	10	10	25	10	20	5	5
	7	5	2	2	100	10	50	5	12
	8	10	1	5	50	20	35	40	9
	9	2	5	2	20	25	20	50	28
	0	4	1	5	5	1	4	2	5

Задание 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Данная задача содержит десять типовых примеров по теории электромагнитного поля. Условия каждого примера представлены в табл. 2.1 – 2.11 и имеют десять числовых вариантов. В результате образуются сто вариантов. Нумерация вариантов сквозная. Номер варианта задачи выбирается по номеру, соответствующему двум последним цифрам шифра зачетной книжки студента.

В соответствии с вариантом выписать условия задачи и ответить на поставленные вопросы.

1. Определить частичные емкости C_{11} , C_{22} , C_{12} на метр длины двухпроводной бортовой проводки. Расположение проводов показано на рис. 2.1. Относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей провод, $\varepsilon = 1$.

Таблица 2.1

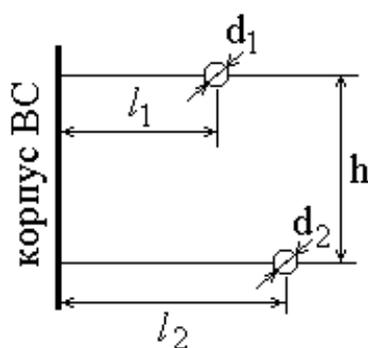


Рис. 2.1

№ вар.	l_1 , см	l_2 , см	h , см	d_1 , см	d_2 , см
1	10	15	4	0,4	0,3
2	16	15	5	0,4	0,2
3	26	15	6	0,4	0,2
4	10	15	4	0,4	0,3
5	12	10	5	0,5	0,3
6	5	7	6	0,5	0,2
7	7	5	4	0,5	0,2
8	8	5	5	0,6	0,3
9	10	6	6	0,6	0,3
10	12	7	4	0,6	0,4

2. Цилиндрический конденсатор заполнен двухслойным диэлектриком. Относительные диэлектрические проницаемости слоев ε_a и ε_b . Геометрические размеры конденсатора r_1 , r_2 , r_3 показаны на рис. 2.2. Определить емкость конденсатора на один метр длины.

Таблица 2.2

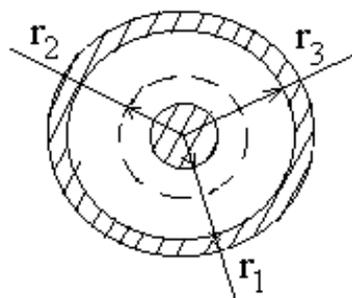


Рис. 2.2

№ вар.	ε_a	ε_b	r_1 , мм	r_2 , мм	r_3 , мм
11	1	2	3	6	9
12	1	3	4	8	12
13	1	4	5	10	15
14	1	2	3	6	18
15	1	3	4	8	15
16	1	4	5	10	15
17	1	2	3	6	12
18	1	3	4	8	15
19	1	4	5	10	15
20	1	2	3	6	12

3. Построить зависимость потенциала и напряженности в электрическом поле, образованном заряженным облаком над землей, если задана объемная плотность зарядов облака ρ , высота облака над землей h , толщина облака b . Землю считать проводящей средой, воздух и облако имеют диэлектрическую проницаемость $\epsilon=1$. Выше облака электрическая напряженность $E=0$.

Таблица 2.3

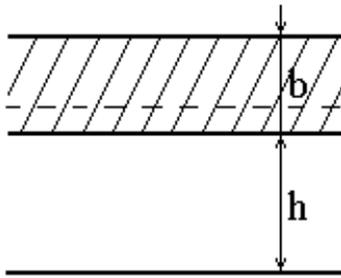


Рис. 2.3

№ вар.	ρ , Кл/м ³	b, м	h, м
21	$1,5 \cdot 10^{-11}$	150	2000
22	$2,5 \cdot 10^{-11}$	100	2500
23	$2 \cdot 10^{-11}$	100	2700
24	$2,5 \cdot 10^{-11}$	200	2600
25	$2 \cdot 10^{-11}$	200	3000
26	$2,5 \cdot 10^{-11}$	150	1500
27	$2,5 \cdot 10^{-11}$	150	1700
28	$2 \cdot 10^{-11}$	1100	1200
29	$2 \cdot 10^{-11}$	300	1300
30	$1,8 \cdot 10^{-11}$	500	1000

4. Определить взаимную индуктивность между бортовой линией 1-1' и линией 2-2' (рис. 2.4) на метр длины. Диаметр проводов линии 1-1' 0,6 см, линии 2-2' - 0,4 см. Остальные параметры заданы в табл. 2.4.

Таблица 2.4

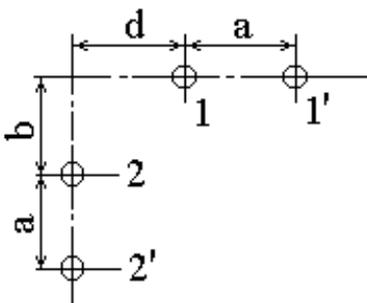


Рис. 2.4

№ вар.	a, см	b, см	d, см
31	2	1	2
32	3	1,5	2
33	2	1	1
34	3	1,5	1
35	2	1	2
36	3	1,5	2
37	2	1	1
38	3	1,5	1
39	2	1	2
40	3	1,5	2

5. Определить закон распределения электрической напряженности и потенциалов в поле растекания зарядов, созданном металлическим полушаровым заземлителем с радиусом $r_{ш}$. Ток замыкания на землю - I , удельная проводимость грунта $\gamma=10^{-1}$ 1/Ом·м (рис. 2.5).

Таблица 2.5

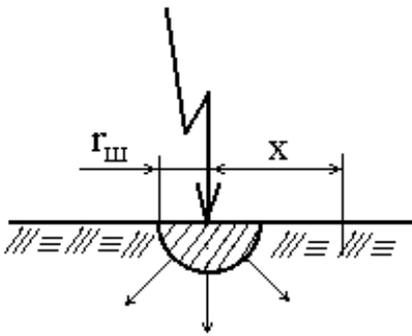


Рис. 2.5

№ вар.	$r_{ш}$, м	I , А
41	0,05	500
42	0,05	600
43	0,06	700
44	0,07	800
45	0,08	900
46	0,09	1000
47	0,05	1200
48	0,06	1300
49	0,07	1400
50	0,08	1500

6. Исследовать поле двухслойного сферического конденсатора, у которого радиусы внешнего и внутреннего электродов равны соответственно d_2 и d_1 . Внешний радиус первого слоя - d . Относительная диэлектрическая проницаемость первого слоя - ϵ_1 , второго - ϵ_2 . Приложенное к конденсатору напряжение равно U . Начертить зависимости $\varphi(r)$, $E(r)$ и $D(r)$. Определить емкость конденсатора и его электрическую энергию (рис. 2.6).

Таблица 2.6

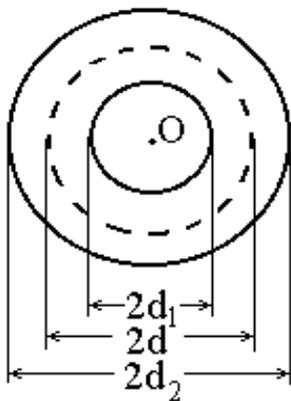


Рис. 2.6

№ вар.	d_1 , мм	d_2 , мм	d , мм	ϵ_1	ϵ_2	U , В
51	1	5	3	2	4	120
52	2	7	3	5	2	120
53	3	7	4	2	1	120
54	5	8	6	7	4	200
55	2	6	4	5	2	200
56	4	8	6	2	3	200
57	2	6	5	2	6	200
58	3	9	6	2	4	120
59	1	5	2	5	2	120
70	4	10	6	1	3	120

7. Исследовать электрическое поле и определить емкость и энергию плоского конденсатора с двухслойным диэлектриком. Площадь каждой обкладки - S . Приложенное к конденсатору напряжение - $U=30$ В. Принять $\varphi=0$ при $x=d_1+d_2$, то есть на левой пластине, $x=0$ для левой пластины. Начертить кривые зависимости $E(x)$ и $D(x)$. Относительные диэлектрические проницаемости слоев диэлектрика ϵ_1 и ϵ_2 . Краевым эффектом пренебречь.

Таблица 2.7

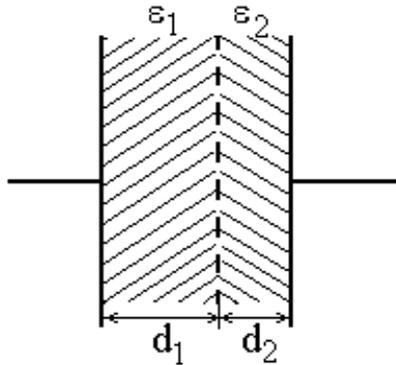


Рис. 2.7

№ вар.	S, см ²	d ₁ , мм	d ₂ , мм	ε ₁	ε ₂
61	10	5	10	2	1
62	15	10	5	5	2
63	2,5	2	1	4	5
64	3	1	0,5	5	2
65	4	3	1	2	7
66	2	1	0,5	5	3
67	2	0,5	3	2	1
68	3	2	2	2	4
69	3	2	3	3	1
70	5	1	6	6	2

8. Построить картину траектории произвольно выбранной одной силовой линии магнитного поля \vec{B} , созданного проводником с током, находящимся вблизи ферромагнитной среды. Среда, окружающая проводник с током, характеризуется магнитной проницаемостью $\mu_1=1$, относительная магнитная проницаемость ферромагнитной среды - μ_2 (рис. 2.8).

Таблица 2.8

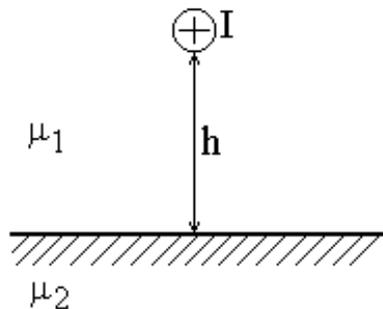


Рис. 2.8

№ вар.	I, А	h, см	μ ₂
71	50	2	1·10 ³
72	55	2,5	2·10 ³
73	60	3	3·10 ³
74	65	3,5	4·10 ³
75	70	4	5·10 ³
76	75	4,5	1·10 ³
77	80	5	2·10 ³
78	85	5,5	4·10 ³
79	90	6	6·10 ³
80	95	6,5	6·10 ³

9. Определить удельные (на один погонный метр) внутренние индуктивное и активное сопротивления авиационного провода диаметром d_0 . Построить эпюры распределения плотности тока, напряженностей электрического и магнитного полей и вектора Пойнтинга в функции расстояния от центра провода при протекании по проводу переменного тока с действующим значением I и угловой частотой ω . Относительная магнитная проницаемость материала провода $\mu=1$.

Таблица 2.9

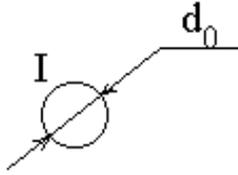


Рис. 2.9

№ вар.	I, А	d_0 , мм	γ , Ом ⁻¹ м ⁻¹	ω , с ⁻¹
81	120	8	$5,7 \cdot 10^7$	5040
82	130	9	$5,7 \cdot 10^7$	5040
83	140	10	$5,7 \cdot 10^7$	5040
84	150	11	$5,7 \cdot 10^7$	5040
85	110	11	$5,7 \cdot 10^7$	5040
86	120	11	$3,2 \cdot 10^7$	2520
87	130	12	$3,2 \cdot 10^7$	2520
88	140	12	$3,2 \cdot 10^7$	2520
89	150	12	$3,2 \cdot 10^7$	2520
90	160	12	$3,2 \cdot 10^7$	2520

10. Объемная плотность зарядов ρ равномерно распределена между двумя концентрическими шаровыми поверхностями. Радиус внешней сферы - a , внутренней - b . Относительная диэлектрическая проницаемость среды между шаровыми поверхностями - $\epsilon_1=2$, окружающей среды - $\epsilon_2=1$ (рис. 2.10). Построить зависимости $D(r)$, $E(r)$, $\phi(r)$ для областей I, II и III, приняв $\phi=0$ в бесконечно удаленной точке.

Таблица 2.10

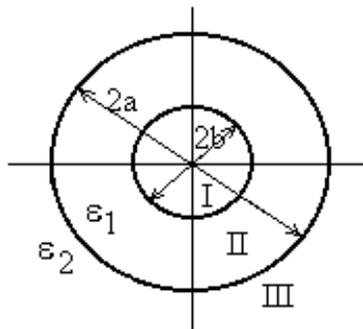


Рис. 2.10

№ вар.	ρ , Кл/м ³	a, см	b, см
91	2	100	80
92	3	100	30
93	4	100	50
94	5	80	40
95	6	80	50
96	7	60	30
97	8	110	55
98	9	70	40
99	10	80	30
100	11	100	60

3. ПРИМЕРЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

3.1. Рассмотрим пример выполнения Задачи 1 для схемы, изображенной на рис. 3.1, при следующих значениях параметров цепи:

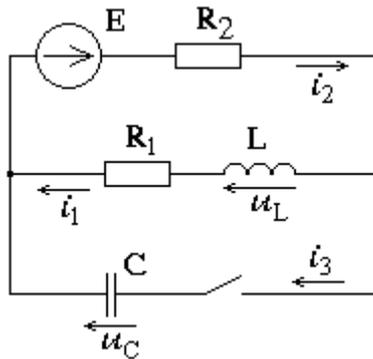


Рис. 3.1

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 200 \text{ Ом}, L = 10 \text{ мГн}, C = 20 \text{ мкФ}, E = 30 \text{ В}.$$

Направления токов и напряжений выберем так, как это сделано на рис. 3.1.

3.1.1. Соблюдая требования ЕСКД, чертим сопротивления в виде прямоугольников размером 10x4 мм, источник ЭДС – окружность диаметром

10 мм, индуктивность – 3 или 4 витка радиусом от 1,5 до 4 мм, емкость – параллельные отрезки длиной 8 мм на расстоянии 1,5 мм друг от друга, ключ – прямоугольный треугольник с углом 30° и большим катетом 6 мм, в котором чертится только гипотенуза; все линии одинаковой толщины.

3.1.2. Рассчитаем переходный процесс классическим методом. Это предполагает представление искомых токов в виде суммы *принужденной* и *свободной составляющих*.

1. Найдем *принужденные составляющие* искомых токов и напряжений. Это означает расчет установившегося режима в послекоммутационной схеме. В ней действует постоянная ЭДС, значит, токи и напряжения будут постоянными, а следовательно, емкость представляет собой разрыв цепи (ток равен нулю), а индуктивность – короткое замыкание (напряжение равно нулю). Расчетная схема – на рис. 3.2

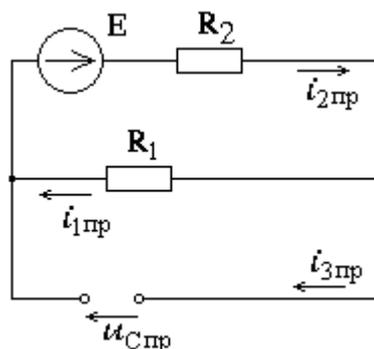


Рис. 3.2

В этой схеме $i_{3np} = 0$, $i_{1np} = i_{2np} = E/(R_1 + R_2) = 30/(10+200) = 0,143$ А,
 $u_{Cnp} = R_1 i_{1np} = 10 \cdot 0,143 = 1,43$ В, $u_{Lnp} = 0$ В.

2. Определим *общий вид свободных составляющих*. Для этого составим характеристическое уравнение схемы, пользуясь методом входного сопротивления. Разорвем цепь в произвольном месте и запишем выражение входного сопротивления $Z(p)$, считая индуктивность сопротивлением pL , а емкость – $1/pC$ (рис. 3.3).

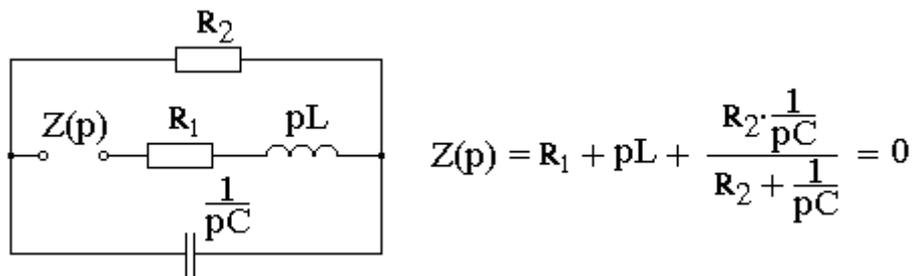


Рис. 3.3

После алгебраических преобразований получаем характеристическое уравнение

$$L \cdot C \cdot R_2 \cdot p^2 + (L + C \cdot R_1 \cdot R_2) \cdot p + R_1 + R_2 = 0.$$

Подставляем значения и находим корни

$$4 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 + 0,05 \cdot p + 210 = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{-0,05 \pm \sqrt{0,05^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 210}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-5}},$$

$$p_1 = -625 + j2204 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = -625 - j2204 \text{ с}^{-1}.$$

Получили комплексно-сопряженные корни. Следовательно, переходный процесс колебательный с затуханием $\delta = 625 \text{ с}^{-1}$ и угловой частотой $\omega = 2204 \text{ с}^{-1}$. Общий вид свободных составляющих в таком случае определяется формулой

$$i_{cb}(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \gamma),$$

где A и γ - постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям. Чтобы их найти, нужно знать $i_{cb}(0)$ и $i'_{cb}(0)$ для каждого тока.

3. Анализ начальных условий.

Независимые начальные условия. Это те величины, которые подчиняются законам коммутации, то есть начальные значения тока через индуктивность и напряжения на емкости. В нашей схеме это $i_L(0)$ и $u_C(0)$. В соответствии с законами коммутации обе эти величины не изменяются мгновенно, а значит в первый момент после коммутации (именно при $t=0$) остаются такими же, какими были в предшествующий коммутации момент. До коммутации (при разомкнутом ключе) напряжение на конденсаторе равно нулю, а ток через индуктивность $i_L = E/(R_1 + R_2) = 0,143$ А.

Таким образом, $i_L(0) = 0,143$ А, $u_C(0) = 0$ В.

Зависимые начальные условия. Это все остальные необходимые для определения постоянных интегрирования величины в момент $t=0$, не попавшие в число независимых. Они определяются из уравнений Кирхгофа для схемы в момент $t=0$ после коммутации. При этом, так как $i_1(0)$ и $u_C(0)$ уже известны, то целесообразно рассмотреть схему (рис. 3.4).

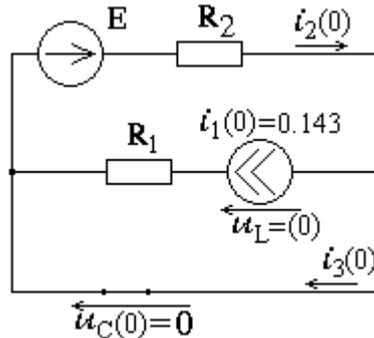


Рис. 3.4

Система уравнений для этой схемы:

$$\begin{aligned}i_2(0) - i_3(0) - i_1(0) &= 0, \\R_2 \cdot i_2(0) &= E, \\-R_1 \cdot i_1(0) - u_L(0) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}i_2(0) &= E/R_2 = 30/200 = 0,15 \text{ A}, \\i_3(0) &= i_2(0) - i_1(0) = 0,15 - 0,143 = 0,007 \text{ A}, \\u_L(0) &= -R_1 \cdot i_1(0) = -10 \cdot 0,143 = -1,43 \text{ В}.\end{aligned}$$

Теперь перейдем к определению начальных значений производных искомых величин. Из соотношений между током и напряжением на емкости и индуктивности находим $i_1'(0)$ и $u_C'(0)$:

$$\begin{aligned}i_1'(0) &= u_L(0)/L = -1,43/0,01 = -143 \text{ A/с}, \\u_C'(0) &= i_3(0)/C = 0,007/(20 \cdot 10^{-6}) = 350 \text{ В/с}.\end{aligned}$$

Остальные производные найдем из уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned}i_2'(0) - i_3'(0) - i_1'(0) &= 0, \\R_2 \cdot i_2'(0) + u_C'(0) &= 0, \text{ (т.к. ЭДС постоянная, и ее производная равна 0),} \\-R_1 \cdot i_1'(0) - u_L'(0) + u_C'(0) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}i_2'(0) &= -u_C'(0)/R_2 = -350/200 = -1,75 \text{ A/с}, \\i_3'(0) &= i_2'(0) - i_1'(0) = -1,75 + 143 = 141 \text{ A/с}, \\u_L'(0) &= u_C'(0) - R_1 \cdot i_1'(0) = 350 - 10 \cdot (-143) = 1780 \text{ В/с}.\end{aligned}$$

Начальные значения свободных составляющих легко найти по формулам

$$i_{ce}(0) = i(0) - i_{np},$$

а начальные значения их производных $i_{ce}'(0) = i'(0)$, т.к. $i'_{np} = 0$.

Результаты анализа начальных условий и принужденные составляющих сведем в таблицу.

$i_{1np} = 0,143 \text{ A}$	$i_1(0) = 0,143 \text{ A}$	$i_1'(0) = -143 \text{ A/c}$	$i_{1cb}(0) = 0 \text{ A}$	$i_{1cb}'(0) = -143 \text{ A/c}$
$i_{2np} = 0,143 \text{ A}$	$i_2(0) = 0,15 \text{ A}$	$i_2'(0) = -1,75 \text{ A/c}$	$i_{2cb}(0) = 0,007 \text{ A}$	$i_{2cb}'(0) = -1,75 \text{ A/c}$
$i_{3np} = 0 \text{ A}$	$i_3(0) = 0,007 \text{ A}$	$i_3'(0) = 141 \text{ A/c}$	$i_{3cb}(0) = 0,007 \text{ A}$	$i_{3cb}'(0) = 141 \text{ A/c}$
$u_{Cnp} = 1,43 \text{ В}$	$u_C(0) = 0 \text{ В}$	$u_C'(0) = 350 \text{ В/c}$	$u_{Ccb}(0) = -1,43 \text{ В}$	$u_{Ccb}'(0) = 350 \text{ В/c}$
$u_{Lnp} = 0 \text{ В}$	$u_L(0) = -1,43 \text{ В}$	$u_L'(0) = 1780 \text{ В/c}$	$u_{Lcb}(0) = -1,43 \text{ В}$	$u_{Lcb}'(0) = 1780 \text{ В/c}$

4. Вычисление постоянных интегрирования.

$$i_{ce}(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \gamma), \quad i_{ce}'(t) = -\delta \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \gamma) + \omega \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \gamma),$$

$$i_{ce}(0) = A \cdot \sin(\gamma), \quad i_{ce}'(0) = -\delta \cdot A \cdot \sin(\gamma) + \omega \cdot A \cdot \cos(\gamma),$$

Решая совместно два последних уравнения, найдем

$$\gamma = \arctg \left[\frac{\omega \cdot i_{ce}(0)}{i_{ce}'(0) + \delta \cdot i_{ce}(0)} \right], \quad A = \frac{i_{ce}(0)}{\sin(\gamma)}.$$

Если $i_{ce}(0) = 0$, то $\gamma = 0$ и $A = i_{ce}'(0) / \omega$.

Для тока i_1 : $\gamma_1 = 0$, $A_1 = -143/2204 = -0,0649 \text{ A}$.

Для тока i_2 : $\gamma_2 = \arctg \left[\frac{2204 \cdot 0,007}{-1,75 + 625 \cdot 0,007} \right] = 80,3^\circ$.

$A_2 = 0,007 / \sin(80,3^\circ) = 0,0071 \text{ A}$.

Аналогично для всех остальных величин.

Для тока i_3 : $\gamma_3 = 6,06^\circ$, $A_3 = 0,0663 \text{ A}$.

Для напряжения u_C : $\gamma_4 = 8,2^\circ$, $A_4 = -1,45 \text{ В}$.

Для напряжения u_L : $\gamma_5 = -74,3^\circ$, $A_5 = -1,49 \text{ В}$.

5. Запишем итоговые результаты.

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 0,143 - 0,0649 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 t) \text{ A}, \\ i_2(t) &= 0,143 + 0,0071 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 t + 80,3^\circ) \text{ A}, \\ i_3(t) &= 0,0663 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 t + 6,06^\circ) \text{ A}, \\ u_C(t) &= 1,43 - 1,45 e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 t + 80,2^\circ) \text{ В}, \\ u_L(t) &= -1,49 e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 t - 74,3^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

3.1.3. Рассчитаем переходный процесс операторным методом.

Независимые начальные условия схемы определять заново не будем, возьмем из расчета классическим методом

$$i_1(0) = 0,143 \text{ A}, \quad u_C(0) = 0 \text{ В}.$$

1. Находим операторное изображение источника. Для постоянной ЭДС это $E(p) = E/p$.

2. Составляем и чертим операторную схему с учетом внутренних ЭДС индуктивности ($L \dot{i}_L(0)$) и емкости ($u_C(0)/p$). Так как $u_C(0)=0$, то соответствующая внутренняя ЭДС равна нулю, и на схеме рис.3.5 она не изображена.

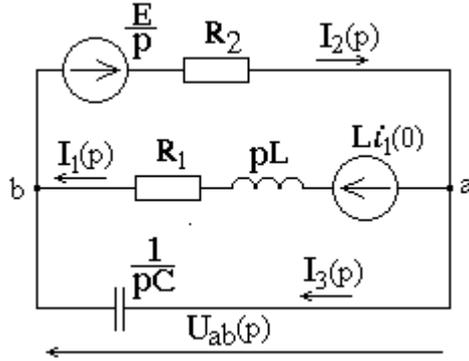


Рис. 3.5

3. Определяем операторные токи. Выберем для этого метод двух узлов. Тогда

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_2} - Li_1(0) \cdot \frac{1}{R_1 + pL}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + pL} + pC},$$

$$I_1(p) = (Li_1(0) + U_{ab}(p)) \cdot \frac{1}{R_1 + pL} = (Li_1(0) + \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_2} - Li_1(0) \cdot \frac{1}{R_1 + pL}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + pL} + pC}) \cdot \frac{1}{R_1 + pL} =$$

$$= \frac{Li_1(0) \cdot \frac{1}{R_2} + Li_1(0) \cdot pC + \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_2}}{\frac{R_1 + pL}{R_2} + 1 + pC \cdot (R_1 + pL)} = \frac{Li_1(0) + Li_1(0) \cdot pC \cdot R_2 + \frac{E}{p}}{R_1 + pL + R_2 + pC \cdot (R_1 + pL) \cdot R_2} =$$

$$= \frac{p^2 Li_1(0) CR_2 + p Li_1(0) + E}{p[p^2 LCR_2 + p(CR_1 R_2 + L) + R_1 + R_2]},$$

$$I_2(p) = (\frac{E}{p} - U_{ab}(p)) \cdot \frac{1}{R_2} = (\frac{E}{p} - \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_2} - Li_1(0) \cdot \frac{1}{R_1 + pL}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + pL} + pC}) \cdot \frac{1}{R_2} =$$

$$= \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1 + pL} + \frac{E}{p} \cdot pC + Li_1(0) \cdot \frac{1}{R_1 + pL}}{1 + \frac{R_2}{R_1 + pL} + pCR_2} = \frac{\frac{E}{p} + \frac{E}{p} \cdot pC \cdot (R_1 + pL) + Li_1(0)}{R_1 + pL + R_2 + pC \cdot (R_1 + pL) \cdot R_2} = \frac{p^2 LCE + p(CR_1 E + Li_1(0)) + E}{p[p^2 LCR_2 + p(CR_1 R_2 + L) + R_1 + R_2]},$$

$$I_3(p) = U_{ab}(p) \cdot pC = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_2} - Li_1(0) \cdot \frac{1}{R_1 + pL}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + pL} + pC} \cdot pC = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{pC}{R_2} - Li_1(0) \cdot \frac{pC}{R_1 + pL}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + pL} + pC} =$$

$$= \frac{\frac{E}{p} \cdot pC - Li_1(0) \cdot \frac{pCR_2}{R_1 + pL}}{1 + \frac{R_2}{R_1 + pL} + pCR_2} = \frac{\frac{E}{p} \cdot pC(R_1 + pL) - Li_1(0) \cdot pCR_2}{R_1 + pL + R_2 + pCR_2(R_1 + pL)} = \frac{pLC(E - i_1(0)R_2) + CR_1E}{p^2LCR_2 + p(CR_1R_2 + L) + R_1 + R_2}$$

Все операторные токи приведены к виду рациональных дробей, то есть $I(p) = N(p)/M(p)$, где $N(p)$ и $M(p)$ – многочлены.

Замечание. Выражения в квадратных скобках знаменателей должны в точности соответствовать характеристическому уравнению из классического метода.

4. Перейдем к оригиналам токов по формуле разложения.

$$i(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k t},$$

где m – степень многочлена $M(p)$,
 p_k – его корни: $M(p_k) = 0$.

Для первого тока.

$$\begin{aligned} N(p) &= p^2 LCR_2 i_1(0) + pLi_1(0) + E = 5,72 \cdot 10^{-6} p^2 + 1,43 \cdot 10^{-3} p + 30, \\ M(p) &= p^3 LCR_2 + p^2 (CR_1 R_2 + L) + p(R_1 + R_2) = 4 \cdot 10^{-5} p^3 + 0,05 p^2 + 210 p, \\ M'(p) &= 12 \cdot 10^{-5} p^2 + 0,1 p + 210. \end{aligned}$$

Корни многочлена $M(p)$ (см. решение характеристического уравнения в классическом методе): $p_0 = 0$, $p_1 = -625 + j2204$, $p_2 = -625 - j2204$.

$$\begin{aligned} N(p_0) &= N(0) = 30, & M'(p_0) &= M'(0) = 210, \\ N(p_0)/M'(p_0) &= 30/210 = 0,143 \\ N(p_1) &= N(-625 + j2204) = 3,56 - j12,6 = 13,1 e^{-j74,2^\circ}, \\ M'(p_1) &= M'(-625 + j2204) = -389 - j110 = 404 e^{-j164,2^\circ}, \\ N(p_1)/M'(p_1) &= 13,1 e^{-j74,3^\circ} / 404 e^{-j164,2^\circ} = 0,0324 e^{j90^\circ} \end{aligned}$$

Для комплексно-сопряженного корня p_2 считать не нужно, так как результат заведомо будет комплексно-сопряженным: $N(p_2)/M'(p_2) = 0,0324 e^{j90^\circ}$.

Подставляем в формулу разложения

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 0,143 + 0,0324 \cdot e^{j90^\circ} e^{(-625 + j2204)t} + 0,0324 \cdot e^{-j90^\circ} e^{(-625 - j2204)t} = \\ &= 0,143 + 0,0648 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \cos(2204 \cdot t + 90^\circ) = 0,143 - 0,0648 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 \cdot t) \text{ А.} \end{aligned}$$

Для второго тока

$$\begin{aligned} N(p) &= p^2 LCE + p(CR_1 E + Li_1(0)) + E = 6 \cdot 10^{-6} p^2 + 7,43 \cdot 10^{-3} p + 30, \\ M(p) &= p^3 LCR_2 + p^2 (CR_1 R_2 + L) + p(R_1 + R_2) = 4 \cdot 10^{-5} p^3 + 0,05 p^2 + 210 p, \\ M'(p) &= 12 \cdot 10^{-5} p^2 + 0,1 p + 210. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= -625 + j2204, & p_2 &= -625 - j2204. \\ N(p_0) &= N(0) = 30, & M'(p_0) &= M'(0) = 210, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(p_0)/M'(p_0) &= 30/210 = 0,143 \\
 N(p_1) &= N(-625+j2204) = -1,45 - j0,154 = 1,45e^{-j173.9^\circ}, \\
 M'(p_1) &= M'(-625+j2204) = -389 - j110 = 404e^{-j164.2^\circ}, \\
 N(p_1)/M'(p_1) &= 1,45e^{-j173.9^\circ}/404e^{-j164.2^\circ} = 0,00359e^{-j9.7^\circ}.
 \end{aligned}$$

Подставляем в формулу разложения

$$\begin{aligned}
 i_2(t) &= 0,143 + 0,00359 \cdot e^{-j9.7^\circ} e^{(-625+j2204)t} + 0,00359 \cdot e^{j9.7^\circ} e^{(-625-j2204)t} = \\
 &= 0,143 + 0,00718 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \cos(2204 \cdot t - 9,7^\circ) = 0,143 + 0,00718 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 \cdot t + 80,3^\circ) \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Для третьего тока

$$\begin{aligned}
 N(p) &= pLC(E - i_1(0)R_2) + CR_1E = 2,86 \cdot 10^{-7} p + 6 \cdot 10^{-3}, \\
 M(p) &= p^2 LCR_2 + p(CR_1R_2 + L) + (R_1 + R_2) = 4 \cdot 10^{-5} p^2 + 0,05p + 210, \\
 M'(p) &= 8 \cdot 10^{-5} p + 0,05.
 \end{aligned}$$

$$p_1 = -625 + j2204, \quad p_2 = -625 - j2204.$$

$$N(p_1) = N(-625 + j2204) = 5,82 \cdot 10^{-3} + j6,3 \cdot 10^{-4} = 5,86 \cdot 10^{-3} e^{j6.2^\circ},$$

$$M'(p_1) = M'(-625 + j2204) = j0,176 = 0,176 e^{j90^\circ},$$

$$N(p_1)/M'(p_1) = 5,86 \cdot 10^{-3} e^{j6.2^\circ} / 0,176 e^{j90^\circ} = 0,00333 e^{-j83.8^\circ}$$

Подставляем в формулу разложения

$$\begin{aligned}
 i_3(t) &= 0,00333 \cdot e^{-j83.8^\circ} e^{(-625+j2204)t} + 0,00333 \cdot e^{j83.8^\circ} e^{(-625-j2204)t} = \\
 &= 0,00666 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \cos(2204 \cdot t - 83,8^\circ) = 0,00666 \cdot e^{-625 \cdot t} \cdot \sin(2204 \cdot t + 6,2^\circ) \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Сравнение полученных операторным методом результатов с классическим методом показывает достаточно хорошее соответствие при принятой точности вычислений.

3.1.4 Построение графиков. По полученным выражениям для токов и напряжений в переходном процессе строим графики. При этом необходимо сориентироваться с масштабом по осям абсцисс (время) и ординат (ток или напряжение). Длительность нашего колебательного процесса можно оценить по величине затухания $\delta = 625 \text{ с}^{-1}$. Постоянная времени $\tau = 1/\delta = 1/625 = 0,0016 \text{ с}$, или 1,6 мс. Длительность процесса составляет $T_{\text{проц}} = (3 \dots 5)\tau$. Примем $T_{\text{проц}} = 8 \text{ мс}$.

Ориентиром для масштаба по оси ординат служат значения принужденных составляющих и постоянных интегрирования A_1, \dots, A_5 . Таким образом, строим графики для значений $0 \leq t \leq 8 \text{ мс}$. Результаты представлены на рис. 3.6 и рис. 3.7.

Замечание. В том случае, если у вас получились действительные корни характеристического уравнения p_1 и p_2 и, следовательно, апериодический процесс, свободные составляющие изменяются по закону $i_{\text{св}}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$. Тогда длительность процесса следует оценивать по большей из двух постоянных времени $\tau_1 = 1/|p_1|$ и $\tau_2 = 1/|p_2|$. Пусть $\tau_1 > \tau_2$, тогда $T_{\text{проц}} = (3 \dots 5)\tau_1$.

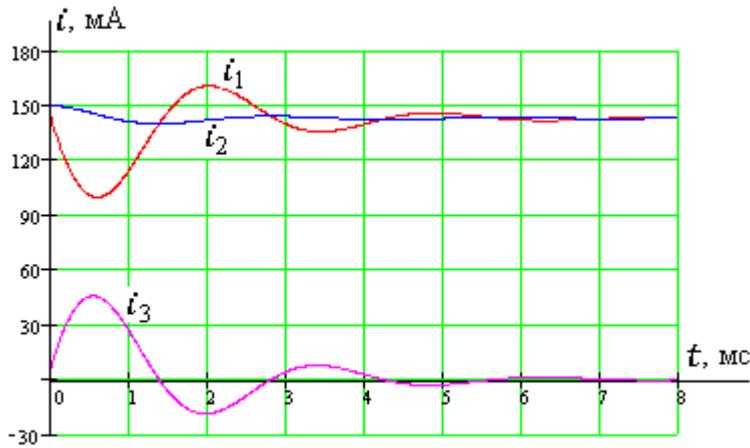


Рис. 3.6

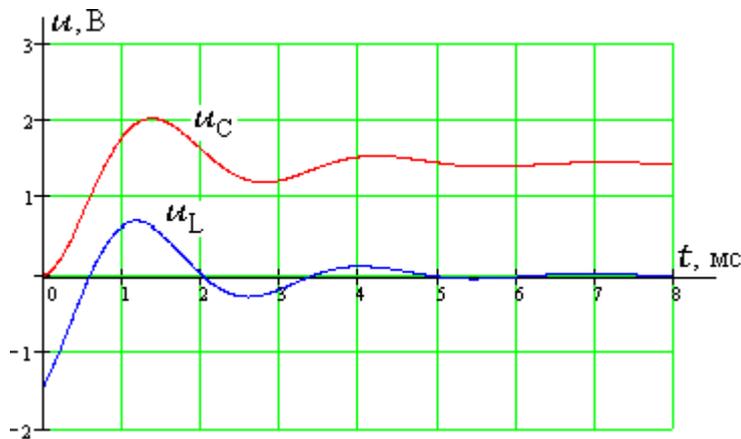


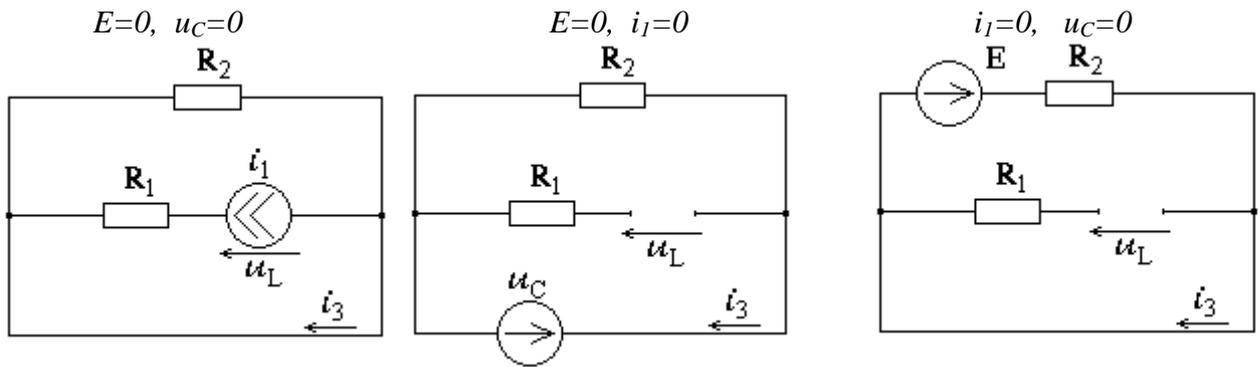
Рис. 3.7

3.1.5 Для применения одного из *численных методов* необходимо представить нашу задачу в так называемой форме Коши

$$y' = f(t, y), y(0) = y_0,$$

где y – вектор независимых переменных, в случае нашей задачи это ток на индуктивности i_l и напряжение на емкости u_C , t – аргумент, то есть время, $f(t, y)$ – функция для вычисления производных независимых переменных в точке (t, y) , y_0 – вектор значений независимых переменных при $t=0$.

Так как $u_L = L \frac{di_l}{dt}$ и $i_3 = C \frac{du_C}{dt}$, то выразим u_L и i_3 через i_l и u_C , затем полученные выражения разделим соответственно на L и C , и цель будет достигнута. Это можно сделать, используя уравнения по законам Кирхгофа. Однако весьма эффективно будет применить здесь метод наложения, считая, что в цепи наряду с источником ЭДС E есть источник тока i_l и источник ЭДС u_C .

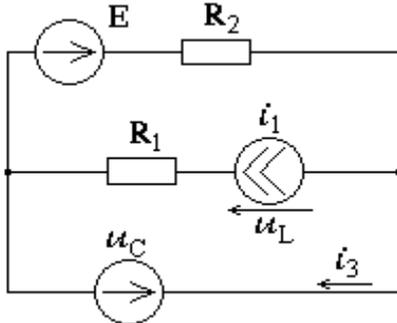


$$u_L = -R_1 i_1, \quad i_3 = -i_1$$

$$u_L = u_C, \quad i_3 = -\frac{1}{R_2} \cdot u_C$$

$$u_L = 0, \quad i_3 = \frac{1}{R_2} \cdot E$$

Окончательно получаем



$$u_L = L \frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 + u_C$$

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = -i_1 - \frac{1}{R_2} \cdot u_C + \frac{1}{R_2} \cdot E$$

Делим на L первое и на C второе уравнение

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L} \cdot i_1 + \frac{1}{L} \cdot u_C$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot i_1 - \frac{1}{R_2 C} \cdot u_C + \frac{1}{R_2 C} \cdot E$$

Или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ u_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L & 1/L \\ -1/C & -1/R_2 C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E/R_2 C \end{bmatrix}$$

При начальных условиях

$$\begin{bmatrix} i_1(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/(R_1 + R_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ниже приведен пример решения на MathCad с использованием функции $\text{rkfixed}(y_0, t_0, t_1, N, D)$, реализующей численный метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Параметры обращения к данной функции: y_0 – вектор начальных значений, t_0 и t_1 начальное и конечное время, N – количество точек, на которые разбивается интервал $[t_0, t_1]$, $D(t, y)$ – функция для вычисления производных.

Результатом функции rkfixed является массив, содержащий в первом столбце N значения переменной t , в последующих столбцах – соответствующие значения искомых функций решения. Чтобы выделить какой-либо столбец массива в MathCad необходимо использовать символ $S^{(n)}$, где S – имя массива; n – номер столбца. Для этого на клавиатуре после имени массива надо нажать ‘ctrl б’, затем ввести номер столбца (нумерация столбцов – от нуля).

Значения параметров цепи:

$$R_1 := 10 \quad R_2 := 200 \quad L := 10 \cdot 10^{-3} \quad C := 20 \cdot 10^{-6} \quad E := 30$$

Определяем матрицу A , вектор B и вектор начальных значений $y0$:

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 \cdot C} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{R_2 \cdot C} \end{pmatrix} \quad y0 := \begin{pmatrix} \frac{E}{R_1 + R_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задаем значения параметров для обращения к функции **rkfixed**:

$$t0 := 0 \quad t1 := 8 \cdot 10^{-3} \quad N := 1000 \quad D(t, y) := A \cdot y + B$$

Вызов функции **rkfixed**: $S := \text{rkfixed}(y0, t0, t1, N, D)$

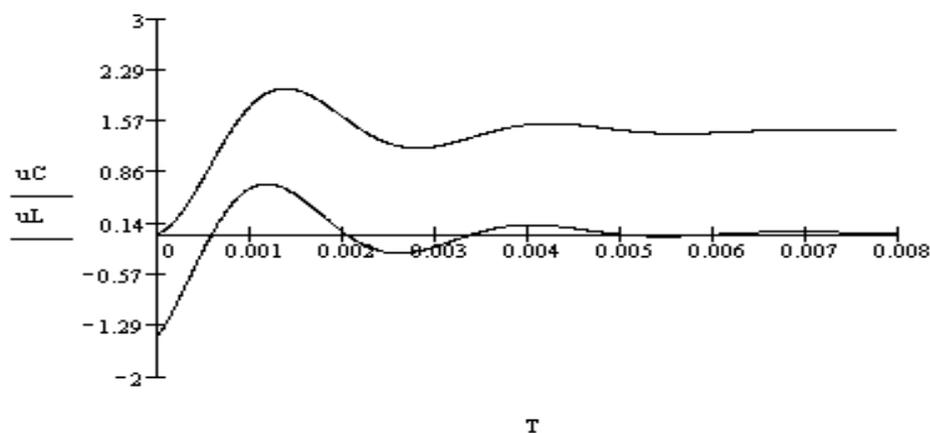
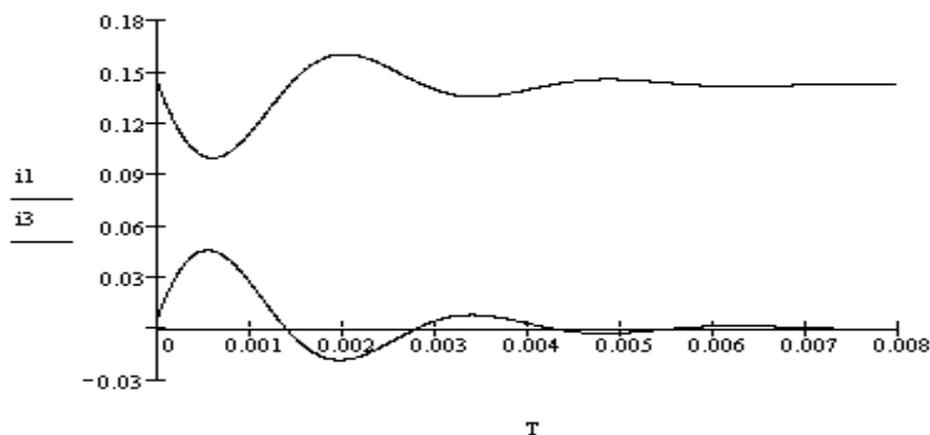
Выделяем первый столбец массива S - это текущее время,
 второй столбец массива S - это ток $i1$,
 третий столбец массива S - это напряжение uC .

$$T := S \langle 0 \rangle \quad i1 := S \langle 1 \rangle \quad uC := S \langle 2 \rangle$$

Вычисляем ток $i3$ и напряжение uL :

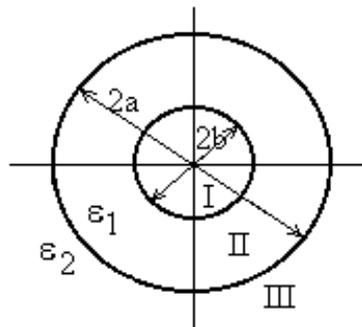
$$i3 := -i1 - \frac{1}{R_2} \cdot uC + \frac{E}{R_2} \quad uL := -R_1 \cdot i1 + uC$$

Строим графики:



3.2. Рассмотрим пример решения одной из задач Задания 2 (задача 10).

Объемная плотность зарядов ρ равномерно распределена между двумя концентрическими шаровыми поверхностями. Радиус внешней сферы - a , внутренней - b . Относительная диэлектрическая проницаемость среды между шаровыми поверхностями - $\epsilon_1=2$, окружающей среды - $\epsilon_2=1$ (рис. 3.8). Построить зависимости $D(r)$, $E(r)$, $\varphi(r)$ для областей I, II и III, приняв $\varphi=0$ в бесконечно удаленной точке.



$$\begin{aligned}\rho &= 10 \text{ Кл/м}^3 \\ a &= 100 \text{ см} \\ b &= 50 \text{ см}\end{aligned}$$

Рис. 3.8

Для решения применим теорему Гаусса: интеграл по любой замкнутой поверхности вектора электрической индукции \vec{D} равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся в объеме, ограниченном этой поверхностью

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \int_V \rho \cdot dV.$$

В качестве поверхности интегрирования целесообразно выбрать сферу произвольного радиуса r , концентрическую с заданными сферами. Тогда в любой точке этой поверхности, которые находятся на одном и том же расстоянии от центра, в силу симметрии задачи вектор \vec{D} будет иметь одинаковый модуль и направлен вдоль линии от центра (при $\rho > 0$). Так же, по нормали к поверхности, направлен и вектор $d\vec{S}$. То есть эти векторы параллельны (рис. 3.9). Поэтому скалярное произведение под интегралом будет равно произведению модулей этих векторов, а постоянное значение вектора D можно вынести за знак интеграла

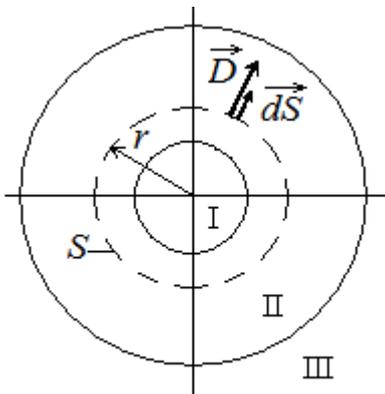


Рис. 3.9

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = \oint_S D \cdot dS = D \cdot \oint_S dS = D \cdot 4\pi r^2.$$

Последний интеграл равен площади поверхности S , то есть сферы радиусом r .

Значит, согласно теореме Гаусса, модуль вектора электрической индукции зависит от расстояния от центра

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_V \rho \cdot dV,$$

где V – объем, охваченный сферой радиусом r .

Для области I ($0 \leq r < b$), где зарядов нет, $D(r) = 0$ Кл/м².

Для области II ($b \leq r < a$) в объем V попадает заряд, расположенный между сферой радиусом b и сферой радиусом r . Этот заряд равен произведению объемной плотности заряда на объем соответствующего слоя

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi b^3 \right) = \frac{\rho}{3r^2} \cdot (r^3 - b^3) \text{ Кл/м}^2.$$

Для области III ($r \geq a$) в объем V попадает заряд, расположенный между сферой радиусом b и сферой радиусом a

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} \pi b^3 \right) = \frac{\rho}{3r^2} \cdot (a^3 - b^3) \text{ Кл/м}^2.$$

Окончательно, зависимость $D(r)$ запишем так

$$D(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < b \\ \frac{\rho}{3r^2} \cdot (r^3 - b^3), & b \leq r < a \\ \frac{\rho}{3r^2} \cdot (a^3 - b^3), & r \geq a \end{cases}$$

Вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ В/м,

где ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды;

$\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная.

Потому зависимость $E(r)$

$$E(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < b \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon_1 r^2} \cdot (r^3 - b^3), & b \leq r < a \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon_2 r^2} \cdot (a^3 - b^3), & r \geq a \end{cases}$$

Потенциал точки – это работа по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в точку, потенциал которой принят за 0, по любому пути между этими точками

$$\varphi = \int_l (\vec{E} \cdot d\vec{l}).$$

По условию за 0 принимается потенциал бесконечно удаленной точки. Имея в виду перемещение вдоль прямой от центра к бесконечности, запишем зависимость потенциала от расстояния так:

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} E(r) dr.$$

Подставляем выведенную выше зависимость $E(r)$.

Для области III ($r \geq a$)

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} E(r) dr = \int_r^{\infty} \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2} \cdot (a^3 - b^3) dr = \frac{\rho \cdot (a^3 - b^3)}{3\varepsilon_0\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{В}$$

Для области II ($b \leq r < a$)

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{\infty} E(r) dr = \int_r^a E(r) dr + \int_a^{\infty} E(r) dr = \\ &= \int_r^a \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_1 r^2} \cdot (a^3 - b^3) dr + \frac{\rho \cdot (a^3 - b^3)}{3\varepsilon_0\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{a} = \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\int_r^a \frac{1}{\varepsilon_1 r^2} \cdot (a^3 - b^3) dr + \frac{(a^3 - b^3)}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{a} \right] = \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{a^2 - r^2}{2\varepsilon_1} + \frac{b^3}{3\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) + \frac{(a^3 - b^3)}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{a} \right] \quad \text{В} \end{aligned}$$

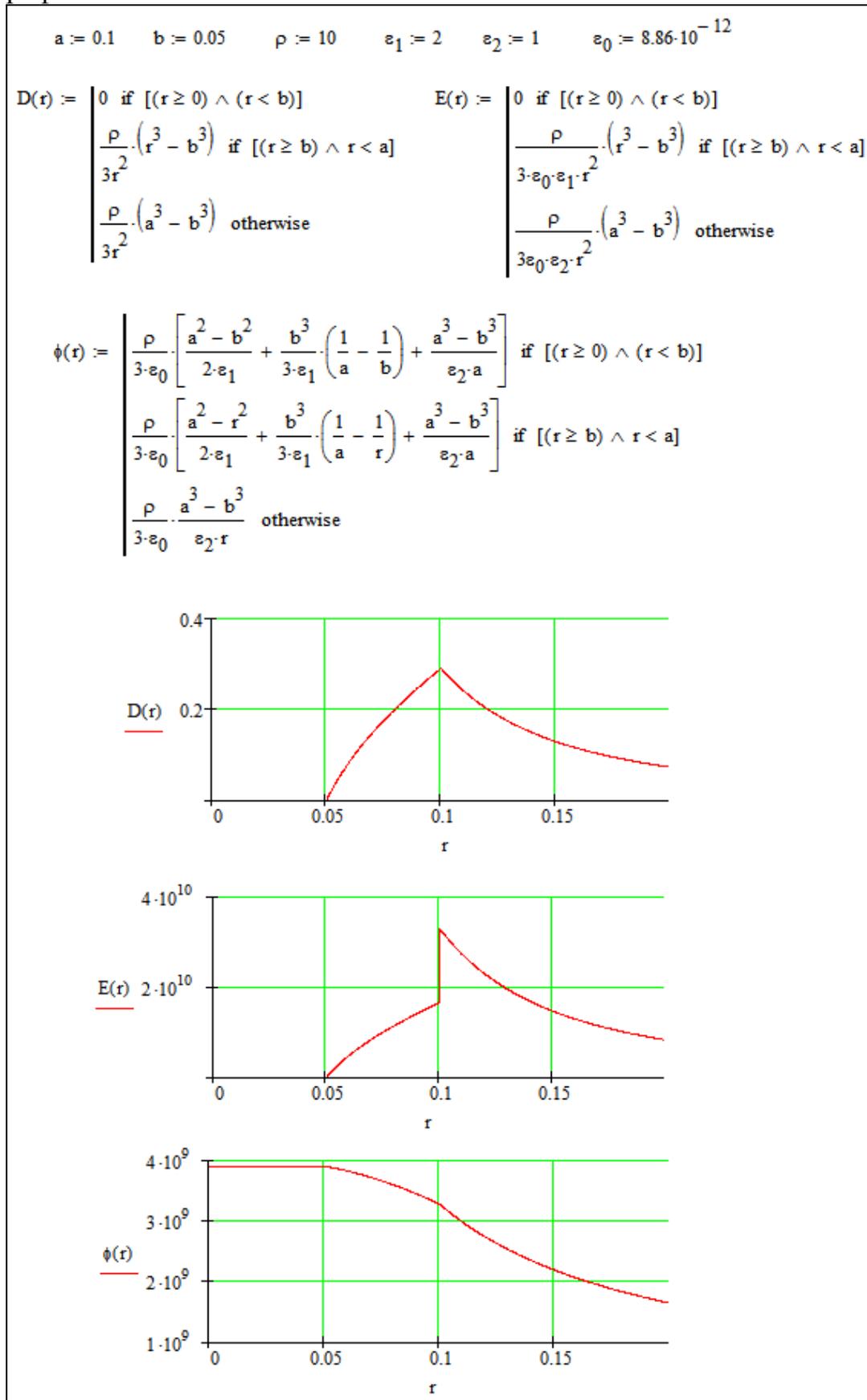
Для области I ($0 \leq r < b$)

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^{\infty} E(r) dr = \int_r^b E(r) dr + \int_b^a E(r) dr + \int_a^{\infty} E(r) dr = \\ &= \int_r^b 0 dr + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{a^2 - b^2}{2\varepsilon_1} + \frac{b^3}{3\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{(a^3 - b^3)}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{a} \right] \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{a^2 - b^2}{2\varepsilon_1} + \frac{b^3}{3\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{(a^3 - b^3)}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{a} \right] \quad \text{В.} \end{aligned}$$

Окончательно, зависимость $\varphi(r)$ запишем так

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{a^2 - b^2}{2\varepsilon_1} + \frac{b^3}{3\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{(a^3 - b^3)}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{a} \right], & 0 \leq r < b \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{a^2 - r^2}{2\varepsilon_1} + \frac{b^3}{3\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) + \frac{(a^3 - b^3)}{\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{a} \right], & b \leq r < a \\ \frac{\rho \cdot (a^3 - b^3)}{3\varepsilon_0\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

Ниже приведен лист MathCad, на котором выполнено построение всех трех графиков.



СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	3
1.1. Цель курсовой работы	3
1.2. Требования к оформлению КР	3
1.3. Указания к выбору варианта	3
1.4. Символическое описание электрических схем	3
1.5. Рекомендуемая литература	4
2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	4
<u>Задание 1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ</u>	4
<u>Задание 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ</u>	7
3. ПРИМЕРЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	12

Редактор И.В. Вилкова

Подписано в печать 03.09.12 г.

Печать офсетная
1,63 усл.печ.л.

Формат 60x84/16
Заказ № 1485/

1, 57 уч.-изд. л.
Тираж 150 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

© Московский государственный
технический университет ГА, 2012