

## **Модели механики**

Данный раздел курса моделирования систем и процессов посвящен описанию математической модели механики сплошной среды. Эта модель раздела механики имеет важнейшее значение для авиации.

Предлагаемый материал основан на учебном пособии: Кубланов М.С. Аэродинамика и динамика полета: Учебное пособие. – М., МГТУ ГА, 2000 и учебнике: Гарбузов В.М., Ермаков А.Л., Кубланов М.С., Ципенко В.Г. Аэромеханика: Учебник для вузов. – М.: Транспорт, 2000.

Механика сплошной среды представляет собой единую математическую модель, описывающую движение газообразных, жидких и твердых деформируемых тел и позволяющую решать большинство задач, рассматриваемых в традиционных общетехнических дисциплинах (см. схему на следующей странице).

# МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

## Гидромеханика

Теория жидкости  
(в основном не-  
сжимаемой, тя-  
желой):

- гидродинамика,
- гидростатика

## Аэромеханика

Теория газа  
(в основном сжи-  
маемого, невесо-  
мого):

- аэродинамика,
- аэростатика,
- газодинамика

## Теория упру- ги и пластично- сти

Теория напряжен-  
но-  
деформированного  
состояния твердо-  
го тела

## ВВЕДЕНИЕ

Теория полета (аэродинамика и динамика полета) – наука фундаментальная и строгая, опирающаяся на математический аппарат. Но, как и о всякой науке, о ней можно говорить на кухне, опираясь лишь на интеллект соответствующего уровня. К сожалению, и сегодня появляются "ученые", пытающиеся на кухонном уровне объяснить основные законы природы, в том числе и аэродинамики и динамики полета. Но когда с помощью этих объяснений пытались решить серьезные задачи в авиации, это приводило и приводит к плачевным результатам: после отрыва от Земли первые самолеты "вдруг" круто пикировали в Землю; при большой скорости на самолетах с первыми турбореактивными двигателями (ТРД) "вдруг" появлялась тряска и самолет рассыпался; преодоление звукового барьера долго не давалось; перегруженные самолеты не могут завершить взлет и т.п.

Поэтому мы с Вами будем изучать науку на уровне высшего образования. А для этого придется хорошо вспомнить математику, теоретическую механику и математическое моделирование.

Человек очень давно хотел летать, как птица – пытался это делать, но безуспешно. И только Ньютон смог четко выделить факторы, определяющие возможность полета тела, тяжелее воздуха.

Давайте повторим эти рассуждения Ньютона. С одной стороны, птицы тяжелее воздуха, но летают! С другой стороны, по своему опыту мы знаем, что шарообразное тяжелое тело без посторонних внешних сил подняться в воздух не может. А почему простейшая модель птицы – воздушный змей взмывает в воздух?

Для того чтобы змей полетел, необходимо наличие следующих факторов: **плотность среды** (на Луне змей не полетит), **скорость** (ветра или бегуна) и **специальная геометрия тела** (угол атаки, создаваемый специально подобранными веревочками). Эти феноменологические рассуждения необходимо облечь в форму строгой теории (модели), с помощью которой можно было бы проводить расчет полета любого летательного аппарата (ЛА) в любых условиях. Ведь при создании Ил-96 никто не прыгал с прототипом его крыла с колокольни, чтобы убедиться в возможности полета!

## 1. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

### 1.1. Основные гипотезы механики сплошной среды

Прежде всего, займемся изучением среды. Для ее описания необходимы полные и непротиворечивые модели движения газообразных, жидких и твердых деформируемых тел, основанные на методах теоретической механики и некоторых дополнительных гипотезах. Согласованная система таких моделей носит название механики сплошной среды.

Все тела состоят из множества отдельных элементарных частиц, взаимодействующих сложным образом в электромагнитном и гравитационном полях. Существуют предположения и о других, пока неизвестных полях. Поэтому изучение материальных тел как **совокупности** элементарных **частиц** требует введения дополнительных гипотез об их свойствах и взаимодействиях. Кроме того, для решения уравнений динамики необходимо знать начальные условия, т.е. координаты и скорости всех частиц, что принципиально невозможно. Однако для решения практических задач совсем не обязательно знать движение каждой частицы – достаточно определить некоторые осредненные характеристики. Такой научный подход применяется на основе вероятностного описания и использования законов распределения и называется статистическим.

Механика сплошной среды использует другой подход – феноменологический, основанный на эмпирических **гипотезах**, подтвержденных человеческим опытом.

1) Гипотеза сплошности, предложенная Бернулли, постулирует тело как непрерывную среду, заполняющую некоторый объем, и необходима для применения математического аппарата дифференциального и интегрального исчисления.

2) Гипотезу непрерывности метрического пространства, тесно связанную с предыдущей, вводят для определения координат и расстояний.

3) Следующая гипотеза предполагает возможность введения единой для всех точек пространства декартовой системы координат. Напомним, что в декартовой системе координат каждая точка пространства имеет свои действительные координаты. Эта гипотеза позволяет применять аппарат аналитической геометрии.

4) В механике сплошной среды постулируется абсолютность времени для всех систем отсчета, т.е. не учитываются эффекты теории относительности.

Эти гипотезы естественны с точки зрения человеческого опыта и вполне оправданы при исследовании явлений, происходящих в не слишком больших и не слишком малых объемах с небольшими скоростями – в макромире. Исходя из них, строятся все последующие положения и выводы теории.

## 1.2. Термины механики сплошной среды

Скорость будем рассматривать как поле вектора в каждой точке пространства, задаваемой радиус-вектором  $\bar{\mathbf{r}}$  этой точки с координатами  $x, y, z$ , в каждый момент времени  $t$ :

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} \quad (1.1)$$

или по координатам:

$$V_x(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{dx}{dt}; \quad V_y(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{dy}{dt}; \quad V_z(\bar{\mathbf{r}}, t) = \frac{dz}{dt}. \quad (1.2)$$

Очевидный смысл этих уравнений заключается в том, что скорость определяется, как производная по времени от функции местоположения частицы среды  $\bar{\mathbf{r}}(x, y, z, t)$ .

Уравнения (1.1) или (1.2), задающие положение  $\bar{\mathbf{r}}(x, y, z, t)$  частицы в пространстве в каждый момент времени как решение дифференциального уравнения, можно рассматривать как траекторию ее движения.

Если поле вектора скорости сплошной среды  $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{r}})$  не зависит от времени в каждой точке пространства, то движение называется стационарным или установившимся. В общем случае  $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{r}}, t)$  и движение называется нестационарным или неустановившимся.

Линиями тока в механике сплошной среды называются линии, которые в каждый **фиксированный момент времени** имеют в каждой своей точке касательные, совпадающие с вектором скорости. Таким образом, частицы среды, попавшие на линию тока, не имеют составляющей скорости поперек нее и не могут ее пересечь. Линии тока необходимы для получения в теории математически строгих выводов. На практике линии тока в прозрачной жидкости с взвешенными частицами нерастворимой краски можно зафиксировать фотографированием с маленькой выдержкой – короткие следы этих частиц, сливаясь, вырисовывают линии тока. Уравнение линии тока в момент времени  $t$  запишется в терминах аналитической геометрии, как условие коллинеарности векторов:

$$\frac{dx}{V_x(\bar{\mathbf{r}}, t)} = \frac{dy}{V_y(\bar{\mathbf{r}}, t)} = \frac{dz}{V_z(\bar{\mathbf{r}}, t)}. \quad (1.3)$$

Таким образом, картина линий тока в нестационарном движении все время меняется. При установившемся движении отсутствие в уравнении (1.3) времени  $t$  приводит к совпадению линий тока с траекториями частиц.

Трубчатая поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую замкнутую кривую, называется трубкой тока. Частицы сплошной среды не пересекают стенок трубки тока, так как не имеют нор-

мальных к ним составляющих скорости.

Если компоненты вектора скорости не обращаются в нуль и вместе со своими первыми производными однозначны и не имеют разрывов, то решение уравнения (1.3) существует и единственно. В противоположном случае существование или единственность может нарушаться, т.е. в некоторых точках пространства линии тока могут ветвиться или вырождаться в точку. Такие точки называются особыми или критическими.

Напомним некоторые математические термины применительно к скорости, заданной в пространстве – полю скоростей.

Вектором  $\bar{\mathbf{S}}$  будем обозначать поверхность с указанным направлением нормали  $\bar{\mathbf{n}}$ , выражающимся через единичные векторы осей координат:  $\bar{\mathbf{n}} = \cos(\bar{\mathbf{n}}, x)\bar{\mathbf{i}} + \cos(\bar{\mathbf{n}}, y)\bar{\mathbf{j}} + \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)\bar{\mathbf{k}}$ , а скаляром  $S$  – только площадь этой поверхности.

Потоком скорости через поверхность  $\bar{\mathbf{S}}$  с заданным вектором нормали  $\bar{\mathbf{n}}$  называется поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} &= \int_S \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int_S V_n dS = \\ &= \int_S [V_x \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + V_y \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) + V_z \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)] dS, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $V_n$  обозначает проекцию скорости на единичный вектор нормали  $\bar{\mathbf{n}}$  к поверхности  $\bar{\mathbf{S}}$ .

Градиентом называется векторная функция скаляра:

$$\overline{\mathbf{grad} A} = \frac{\partial A}{\partial x} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial A}{\partial y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial A}{\partial z} \bar{\mathbf{k}}. \quad (1.5)$$

Ротор скорости (вихрь) определяется формулой:

$$\overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \bar{\mathbf{i}} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \bar{\mathbf{j}} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \bar{\mathbf{k}} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (1.6)$$

а дивергенция скорости:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (1.7)$$

Циркуляцией скорости по замкнутому контуру  $L$  с определенным направлением обхода называется криволинейный интеграл:

$$\oint_L \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \oint_L V_x dx + V_y dy + V_z dz. \quad (1.8)$$

Известные теоремы векторных полей применимы и к полю скоростей.  
Теорема Стокса:

$$\begin{aligned} \oint_L \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} &= \oint_L V_x dx + V_y dy + V_z dz = \\ &= \int_S \overline{\mathbf{rot V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_S \overline{\mathbf{rot V}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int_S (\overline{\mathbf{rot V}})_n dS, \end{aligned} \quad (1.9)$$

справедлива при ориентации обхода контура  $L$  и нормали к натянутой на него поверхности  $\bar{\mathbf{S}}$  по правилу правого винта, а теорема Остроградско-го-Гаусса:

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} &= \int_S \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int_S V_n dS = \\ &= \int_S [V_x \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + V_y \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) + V_z \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)] dS = \\ &= \int_W \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dW = \int_W \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} dW \end{aligned} \quad (1.10)$$

при условии, что замкнутая поверхность  $\bar{\mathbf{S}}$  ограничивает объем  $W$ .

Полную производную по времени от скаляра  $A(\bar{\mathbf{r}}, t)$  можно определить по известной формуле:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} V_x + \frac{\partial A}{\partial y} V_y + \frac{\partial A}{\partial z} V_z = \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \overline{\mathbf{grad} A}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Производную  $\frac{d}{dt} \int_W f(\bar{\mathbf{r}}, t) dW$  от интеграла по произвольному подвиж-

ному объему  $W$ , где от  $t$  зависит не только подынтегральная функция, но и объем, вычислим с помощью определения производной:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W f(\bar{\mathbf{r}}, t) dW &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{W'} f(\bar{\mathbf{r}}, t + \Delta t) dW - \int_W f(\bar{\mathbf{r}}, t) dW}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_W [f(\bar{\mathbf{r}}, t + \Delta t) - f(\bar{\mathbf{r}}, t)] dW + \int_{W'-W} f(\bar{\mathbf{r}}, t + \Delta t) dW}{\Delta t} = \\ &= \int_W \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} dW + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{W'-W} f(\bar{\mathbf{r}}, t + \Delta t) dW}{\Delta t}. \end{aligned}$$

В последнем пределе  $W' \rightarrow W$  образуется сдвигом элементарных площадок  $dS$  поверхности  $S$ , ограничивающей  $W$ , на расстояние  $V_n dS$ . Кроме того, при  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $f(\bar{\mathbf{r}}, t + \Delta t) \rightarrow f(\bar{\mathbf{r}}, t)$  и деформированная поверхность  $S' \rightarrow S$ , поэтому предел принимает значение  $\int_S f V_n dS = \int_S f \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}}$  (сравните с (1.4))

или  $\int_S f \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_W \text{div}(f \bar{\mathbf{V}}) dW$  по теореме Остроградского-Гаусса (1.10).

Откуда в силу уравнения (1.11):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W f(\bar{\mathbf{r}}, t) dW &= \int_W \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} f \bar{\mathbf{V}} \right] dW = \\ &= \int_W \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + f \text{div} \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \text{grad} f \right] dW = \int_W \left[ \frac{df}{dt} + f \text{div} \bar{\mathbf{V}} \right] dW. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Вектор  $\overline{\text{rot} \mathbf{V}} \neq \mathbf{0}$  тоже можно рассматривать, как поле вектора ротора скорости  $\overline{\text{rot} \mathbf{V}}(\bar{\mathbf{r}}, t) - \text{вихревое поле}$ . Непосредственной проверкой легко убедиться, что всегда  $\text{div} \overline{\text{rot} \mathbf{V}} = 0$ . Отсюда по теореме Остроградского-Гаусса следует, что поток ротора скорости сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \overline{\text{rot} \mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = 0. \quad (1.13)$$

В вихревом поле по аналогии с полем скоростей выделяют вихревую линию:

$$\frac{dx}{(\overline{\text{rot} \mathbf{V}})_x} = \frac{dy}{(\overline{\text{rot} \mathbf{V}})_y} = \frac{dz}{(\overline{\text{rot} \mathbf{V}})_z} \quad (1.14)$$

и вихревую трубку. Так как через боковую поверхность вихревой трубки по определению нет потока ротора скорости, то из (1.13) вытекает постоянство такого потока через любое ее поперечное сечение (*первая кинематическая теорема Гельмгольца о вихрях*). Эта величина называется интенсивностью вихревой трубки. Согласно теореме Стокса (1.9) она равна циркуляции скорости по контуру, образующему вихревую трубку:

$$\int_S \overline{\text{rot} \mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \oint_L \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \Gamma. \quad (1.15)$$

### 1.3. Уравнение неразрывности

Как известно, плотность вещества в физике вводится предельным пере-

ходом:  $\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}$ , где в механике сплошной среды следует понимать под  $\Delta m$  массу вещества, заключенную в объеме  $\Delta W$ . Посмотрим, как будет выглядеть закон сохранения массы  $\frac{dm}{dt} = 0$  для произвольного подвижного объема сплошной среды, для которого  $m = \int_W \rho dW$ . Из (1.12) тогда следует:

$$0 = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho dW = \int_W \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} \right] dW = \int_W \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} \right] dW,$$

или в силу произвольности объема  $W$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0. \quad (1.16)$$

Это уравнение носит название уравнения неразрывности (непрерывности).

Рассмотрим частные случаи уравнения неразрывности. Для стационарного (установившегося) движения сплошной среды из (1.16) с учетом (1.7) следует:

$$\operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}} \cdot \overline{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0, \quad (1.17)$$

а если, кроме того, среда несжимаемая ( $\rho(x, y, z) = \text{const}$ , в том числе и неоднородная), то:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0. \quad (1.18)$$

Т.е. по теореме Остроградского-Гаусса (1.10) установившийся поток скорости несжимаемой среды (1.4) сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю. Так как через боковую поверхность трубки тока по определению нет потока скорости, то поток через любое ее поперечное сечение одинаков:

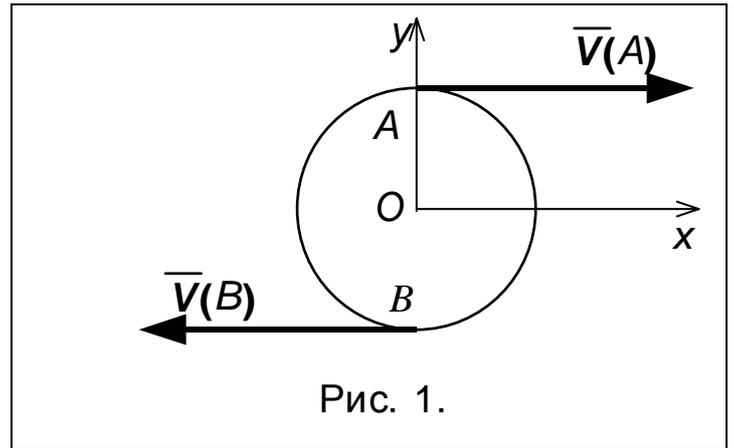
$$\int_S \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = Q \quad (1.19)$$

и численно равен объемному расходу сплошной среды. Отсюда можно сделать вывод: внутри объема несжимаемой сплошной среды трубки тока (а также линии тока) не могут ни начинаться, ни заканчиваться.

#### 1.4. Безвихревое и вихревое движение

Движение сплошной среды в некоторой области называется безвихревым, если в ней  $\overline{\operatorname{rot}} \bar{\mathbf{V}} = 0$ , и вихревым, если  $\overline{\operatorname{rot}} \bar{\mathbf{V}} \neq 0$  хотя бы в части этой области, называемой вихрем.

Из определения  $\overline{\text{rot}} \bar{V}$  (1.6) следует, что вихревое движение характеризуется наличием **вращения каждой частицы**. Этот факт иллюстрируется рис. 1, на котором крайние точки бесконечно малой частицы среды имеют разные скорости в силу наличия ненулевой величины  $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ . Если центр этой



частицы покоится, а все другие

частные производные скорости равны нулю, то очевидно, что  $\overline{\text{rot}} \bar{V} \neq 0$  характеризует именно вращение бесконечно малой частицы среды. В безвихревом движении такого вращения нет и каждая частица среды совершает лишь поступательное движение. Вообще говоря, вихревое движение возникает в реальной природе, благодаря наличию границ (свободной поверхности, твердых стенок или твердых тел), а также явлению вязкости.

Примерами **безвихревого** движения могут служить:

- состояние покоя среды,
- поступательное движение,
- *источник* и *сток* (когда частицы среды выходят из точки или входят в нее строго по лучам),
- движение среды вокруг некоторого кругового цилиндра по концентрическим окружностям со скоростью, обратно пропорциональной расстоянию от оси цилиндра.

Примерами **вихревого** движения могут служить:

- плоский сдвиг (когда скорость частиц вдоль некоторой плоскости пропорциональна расстоянию от этой плоскости),
- вращение среды вокруг некоторой оси, как твердого тела (в отличие от потенциального движения аналогичной геометрии в этом случае скорость с удалением от оси линейно возрастает!).

## 2. ДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

### 2.1. Силы и моменты в механике сплошной среды

Силы, распределенные по объему  $W$ , называются *объемными* или *массовыми*. Они обозначаются  $\bar{F}$  и относятся к элементу массы  $\Delta m = \rho \Delta W$ . Т.е. сила, действующая на элемент массы, равна  $\bar{F} \Delta m = \bar{F} \rho \Delta W$ , следовательно, размерность  $\bar{F}$  совпадает с размерностью ускорения. Примерами

массовых сил могут служить гравитационные, электромагнитные, инерционные.

Силы, распределенные по поверхности  $S$ , называются *поверхностными*. Поверхностные силы будем обозначать вектором  $\bar{p}$  и относить к элементу поверхности  $\Delta S$  сплошной среды. Т.е.  $\bar{p}$  имеет размерность давления. Такие силы возникают, например, на свободной поверхности среды, при взаимодействии среды с твердыми телами, а также внутри среды (внутренние поверхностные силы).

Внутренние поверхностные силы необходимо рассматривать при изучении движения отдельных частиц среды с учетом их механического влияния друг на друга. Так, например, происходит при относительном движении двух соседних соприкасающихся частиц. Это явление может наблюдаться в любом месте сплошной среды, причем для бесконечно малых частиц поверхности соприкосновения  $dS$  можно построить любым образом. Тогда и  $\bar{p}$ , зависящий от такого выбора, можно определить по-разному в зависимости от  $dS$ , т.е. ориентации нормали этой площадки, поэтому такое взаимодействие обозначим вектором  $\bar{p}_S$ . В силу третьего закона Ньютона на одну из пары соприкасающихся частиц действует сила  $\bar{p}_S dS$ , на другую  $-\bar{p}_S dS$ . Однако если соприкосновения нет, т.е. если движение имеет разрыв каких-то своих характеристик, то последнее условие может нарушаться.

Вектор  $\bar{p}_S$  в общем случае не перпендикулярен к  $dS$ , поэтому различают нормальную составляющую  $p_{Sn}$ , называемую *нормальным напряжением* или нормальным давлением, и тангенциальную  $p_{S\tau}$ , называемую *касательным напряжением* или *внутренним трением*:  $\bar{p}_S dS = p_{Sn} \bar{n} dS + p_{S\tau} \tau dS$ .

Свойство вектора  $\bar{p}_S$  рассмотрим с помощью представления бесконечно малой частицы в виде тетраэдра с ребрами, параллельными осям координат (рис. 2). Площади граней такого тетраэдра равны:  $S$ ,  $S \cdot \cos(\bar{n}, x)$ ,  $S \cdot \cos(\bar{n}, y)$ ,  $S \cdot \cos(\bar{n}, z)$ .

Массовые силы будем считать постоянными во всем объеме  $W = hS/3$  бесконечно малой частицы, а поверхностные силы  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$ ,  $\bar{p}_3$ ,  $\bar{p}_S$  постоянными на своих гранях. Это позволит применить к частице начало Даламбера из теоретической механики:

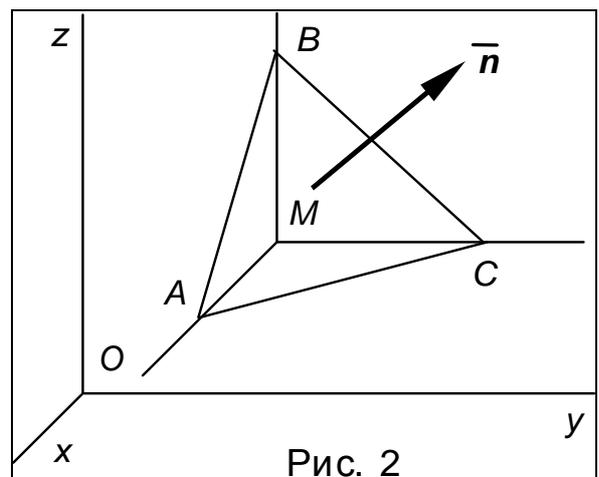


Рис. 2

$$\left(\bar{\mathbf{F}} - \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt}\right)\rho \frac{hS}{3} + [\bar{\mathbf{p}}_S - \bar{\mathbf{p}}_1 \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) - \bar{\mathbf{p}}_2 \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) - \bar{\mathbf{p}}_3 \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)]S = 0,$$

откуда, сократив на  $S$ , и перейдя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получаем **инвариантное** к выбору площадки равенство:

$$\bar{\mathbf{p}}_S = \bar{\mathbf{p}}_1 \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + \bar{\mathbf{p}}_2 \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) + \bar{\mathbf{p}}_3 \cos(\bar{\mathbf{n}}, z). \quad (2.1)$$

Это означает, что существует некоторый объект  $P$ , компонентами которого можно рассматривать векторы  $\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3$ , или даже элементы матрицы  $(p_{ij})$  – матрицы из компонент векторов  $\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3$ . Объект  $P$  с компонентами  $p_{ij}$  называется тензором внутренних напряжений.

Равенство (2.1) позволяет применить теорему Остроградского-Гаусса (1.10) к расчету поверхностных сил:

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\mathbf{p}}_S d\bar{\mathbf{S}} &= \int_S [\bar{\mathbf{p}}_1 \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + \bar{\mathbf{p}}_2 \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) + \bar{\mathbf{p}}_3 \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)] dS = \\ &= \int_W \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_3}{\partial z} \right) dW. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Кроме сил на каждую частицу жидкости могут действовать и моменты. Примером может служить момент магнитного поля Земли, действующий на каждый элемент стрелки компаса. Такой момент, который действует на элемент массы  $\Delta m$ , будем обозначать  $\bar{\mathbf{H}}$ . Его принято называть массовой парой (массовым моментом). Размерность  $\bar{\mathbf{H}}$  совпадает с размерностью квадрата скорости.

Момент, который действует на элемент поверхности  $\Delta S$ , будем обозначать  $\bar{\mathbf{Q}}$ . Он называется поверхностной парой (поверхностным моментом) и имеет размерность силы, деленной на длину.

## 2.2. Уравнения движения сплошной среды

В теоретической механике известно уравнение количества движения материальной точки:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{\mathbf{V}}) = \bar{\mathbf{F}},$$

где в правой части равенства стоит сумма всех действующих на нее сил. Обобщим это уравнение на конечный объем сплошной среды, состоящей из частиц, как системы материальных точек, подверженных действию рассмотренных в разделе 2.1 объемных и поверхностных сил:

$$\frac{d}{dt} \int_W \bar{\mathbf{V}} \rho dW = \int_W \bar{\mathbf{F}} \rho dW + \int_S \bar{\mathbf{p}}_S d\bar{\mathbf{S}}. \quad (2.3)$$

Уравнение количества движения конечного объема сплошной среды (2.3), являющееся аналогом второго закона Ньютона, имеет такое же фундаментальное значение для описания любых движений сплошной среды. Оно справедливо и для разрывных движений, и для ударных процессов, характеризующихся разрывными функциями координат и времени (но не нарушениями гипотезы сплошности – см. раздел 1.1).

Заменяя последнее слагаемое в (2.3) с помощью (2.2), получим:

$$\frac{d}{dt} \int_W \bar{\mathbf{V}} \rho dW = \int_W \left[ \bar{\mathbf{F}} \rho + \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}_3}{\partial z} \right] dW,$$

левую часть которого преобразуем с помощью (1.12):

$$\frac{d}{dt} \int_W \bar{\mathbf{V}} \rho dW = \int_W \left[ \frac{d\bar{\mathbf{V}} \rho}{dt} + \bar{\mathbf{V}} \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} \right] dW.$$

Это позволит записать равенство подынтегральных выражений для элементарного объема:

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}} \rho}{dt} + \bar{\mathbf{V}} \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = \rho \bar{\mathbf{F}} + \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}_3}{\partial z}.$$

Левую часть этого уравнения в свою очередь можно преобразовать с помощью уравнения неразрывности (1.16):

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}} \rho}{dt} + \bar{\mathbf{V}} \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = \rho \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} + \bar{\mathbf{V}} \frac{d\rho}{dt} + \rho \bar{\mathbf{V}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = \rho \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} + \bar{\mathbf{V}} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} \right) = \rho \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt}.$$

Таким образом, получено основное дифференциальное уравнение движения сплошной среды:

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{F}} + \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}_3}{\partial z}, \quad (2.4)$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dV_x}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial \rho_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_z}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial \rho_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{33}}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – компоненты массовой силы  $\bar{\mathbf{F}}$ .

Отметим, что уравнения (2.4) и (2.5) получены при следующих предположениях:

- непрерывность и дифференцируемость векторов напряжений  $\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3$ ,
- неразрывность среды,
- непрерывность характеристик движения.

Итак, для описания движения сплошной среды имеются: скалярное уравнение неразрывности (1.16) и одно векторное (2.4) или три скалярных (2.5) уравнения движения. В этой системе уравнений при заданных внешних массовых силах  $\bar{\mathbf{F}}(F_x, F_y, F_z)$  неизвестными функциями пространственных координат и времени являются: плотность  $\rho$ , скорость  $\bar{\mathbf{V}}(V_x, V_y, V_z)$  и три вектора напряжений  $\bar{\mathbf{p}}_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}), \bar{\mathbf{p}}_2(p_{12}, p_{22}, p_{32}), \bar{\mathbf{p}}_3(p_{13}, p_{23}, p_{33})$  со своими девятью координатами. Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система незамкнута. Для ее замыкания необходимо использовать дополнительные соотношения между неизвестными. Такие соотношения может дать модель конкретной среды.

### 2.3. Виды сплошной среды

Экспериментальные данные показывают, что большинство сред обладает специфическим свойством: отсутствием или малостью касательных напряжений  $p_{S\tau}$ , т.е. вектор  $\bar{\mathbf{p}}_S$  можно считать перпендикулярным любой площадке взаимодействия  $dS$  и равным нормальному напряжению  $p_{Sn}$ . Среду, обладающую таким свойством называют идеальной жидкостью или идеальным газом. Близки к таковым обычные воздух и вода при малых скоростях.

Указанное свойство для любой площадки с нормалью  $\bar{\mathbf{n}}$  можно выразить соотношением, вытекающим из (2.1):

$$\bar{\mathbf{p}}_S \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{p}}_2 \bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{p}}_3 \bar{\mathbf{k}} = -p,$$

где  $-p$  – общее значение скалярных произведений. Величину  $p$  называют давлением. Его особенность заключается в независимости от направления рассматриваемого взаимодействия частиц. При  $p > 0$  среда, как показывает опыт, находится в сжатом состоянии, поэтому и использован знак минус. Таким образом, матрица компонент тензора внутренних напряжений в идеальной жидкости (газе) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

и тензор  $P$  целиком определяется скаляром  $p$ .

Понятно, что идеальная жидкость не единственно возможная модель сплошной среды, позволяющая определить компоненты тензора внутренних напряжений. Можно, например, рассматривать его компоненты как функции от деформации частицы: в этом случае среда называется упругой. В частном случае линейности это соотношение приобретает вид закона Гука. Изучением таких сред занимается теория упругости.

Особое место в механике сплошной среды занимает модель вязкой жидкости, предполагающая связь тензора внутренних напряжений с частными производными скорости по координатам. Имеется в виду эффект "трения" слоев вязкой жидкости между собой при наличии разности их попутательных скоростей. В частном случае линейности связь представляется в виде закона Навье-Стокса (или обобщенного закона вязкости Ньютона):

$$p_{ij} = -\rho\delta_{ij} + 2\sum_{\mu} \sum_{\nu} B_{ij\mu\nu} e_{\mu\nu} =$$

$$= -\rho\delta_{ij} + 2\sum_{\mu} \sum_{\nu} B_{ij\mu\nu} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где  $\delta_{ij}$  – элементы единичной матрицы (с единицами на главной диагонали и нулями на всех остальных местах), матрица размерности  $3 \times 3$ , обозначенная  $e_{\mu\nu}$ , называется тензором скоростей деформации, а тензорный коэффициент линейности  $B_{ij\mu\nu}$  описывает свойства вязкой жидкости.

Если свойства среды в разных направлениях одинаковы, то она называется изотропной, в противном случае – анизотропной. В изотропной среде  $B_{ij\mu\nu}$  представляется симметричной матрицей размерности  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ , одинаковой в любой системе координат. Можно показать, что в этом случае все компоненты тензора  $B_{ij\mu\nu}$  выражаются всего лишь через два независимых параметра  $\lambda$  и  $\mu$ , называемых коэффициентами Ламе, поэтому закон Навье-Стокса для вязкой изотропной жидкости имеет вид:

$$p_{ij} = -\rho\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij} \operatorname{div} \bar{V} + 2\mu \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta_{i\mu} \delta_{j\nu} e_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

В теории вязкой жидкости  $\mu$  называется коэффициентом внутреннего трения или динамическим коэффициентом вязкости,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – кинематическим

ческим коэффициентом вязкости (коэффициентом линейной вязкости),

$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  – вторым коэффициентом вязкости (коэффициентом объем-

ной вязкости). Размерность  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $\zeta$  в СИ:  $\left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right]$ , а  $\nu$ :  $\left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$ .

Очевидно, что упомянутые модели для идеальной и вязкой жидкости вводят еще одну неизвестную – давление  $p$ . Т.е. для замыкания системы уравнений движения сплошной среды оказывается необходимым еще одно скалярное соотношение. В этом качестве чаще всего применяются уравнения, представляющие различные гипотезы связи плотности и давления:

$$\rho = \Phi(p).$$

Если такое соотношение можно ввести, то жидкость называется баротропной. Выделяются следующие частные случаи.

1.  $\Phi(p) = \text{const}$  – случай несжимаемой жидкости, или  $\frac{dp}{dt} = 0$ .
2.  $\Phi(p) = Cp$ , где  $C$  – постоянная, – случай изотермического процесса.
3.  $\Phi(p) = Cp^{1/n}$ , где  $C$  и  $n$  – постоянные, – случай политропического процесса,  $n$  называется показателем политропы.
4.  $\Phi(p) = \frac{p\mu}{RT}$  – уравнение Клапейрона-Менделеева для совершенного газа, где  $R = 8314,32 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{град}}$  – универсальная газовая постоянная,

$\mu \left[ \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \right]$  – масса вещества в кг, численно равная молекулярному весу,  $T$  – абсолютная температура, которую необходимо задавать еще одним дополнительным соотношением.

### 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ АЭРОДИНАМИКИ

#### 3.1. Уравнения Навье-Стокса

Рассмотрим движение изотропной вязкой сжимаемой жидкости. Для этого выразим компоненты тензора внутренних напряжений  $p_{ij}$  в основном дифференциальном уравнении движения сплошной среды (2.5) с помощью соответствующей модели (2.8). Так, последние слагаемые в уравнении по оси  $x$  примут вид:



Подставляя сюда выражения компонент тензора скоростей деформации из (2.7), получим с использованием оператора Лапласа

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \overline{\mathbf{grad}}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

выражение:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + \mu \Delta V_x + \mu \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + \mu \Delta V_x. \end{aligned}$$

В итоге, после деления на  $\rho$  и раскрытия полной производной по времени с помощью (1.11), получаем систему дифференциальных уравнений движения изотропной вязкой сжимаемой жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial z} + \nu \Delta V_z, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

или в векторном виде:

$$\frac{d\overline{\mathbf{V}}}{dt} = \overline{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{grad}} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \overline{\mathbf{grad}} \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}} + \nu \Delta \overline{\mathbf{V}}, \quad (3.2)$$

называемых уравнениями Навье-Стокса.

Эти уравнения вместе с уравнением неразрывности (1.16) составляют принципиально разрешимую относительно  $\overline{\mathbf{V}}$  и  $p$  систему уравнений, если заданы  $\overline{\mathbf{F}}$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\lambda$ . Однако ее решение в аналитическом виде для произвольного случая невозможно. Численное решение для обтекания реального крыла самолета было впервые получено только в конце 60-х годов XX века, благодаря появлению мощных вычислительных машин. Но и до сих пор такое решение представляет собой сложную задачу вычислительной математики.

Поскольку уравнения (3.1), (3.2) описывают движение изотропной жидкости в случае наиболее общей ее модели, то их исследование позволяет

построить практически всю гидродинамику (в том числе газо- и аэродинамику).

### 3.2. Уравнения движения вязкой несжимаемой изотропной жидкости

Из уравнений Навье-Стокса (3.1) легко получить уравнения движения вязкой несжимаемой изотропной жидкости. Для этого достаточно использовать уравнение неразрывности в форме уравнения несжимаемости (1.18)  $\text{div } \bar{\mathbf{V}} = 0$ , благодаря которому выпадает предпоследнее слагаемое, содержащее  $\lambda$ :

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{grad}p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{V}}, \quad (3.3)$$

или в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta V_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Модель вязкой несжимаемой жидкости в силу (1.18) можно получить из закона Навье-Стокса (2.8):

$$p_{ij} = -\rho \delta_{ij} + 2\mu \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta_{i\mu} \delta_{j\nu} e_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

т.е. для несжимаемой жидкости понятие второго коэффициента вязкости теряет смысл.

### 3.3. Уравнения движения идеальной жидкости

Из сравнения уравнений (2.6) и (2.8) следует, что идеальная жидкость характеризуется как невязкая. Это же вытекает и из физической сущности вектора внутренних напряжений  $\bar{\mathbf{p}}_S$  при отсутствии касательных составляющих напряжения. Приведенные рассуждения позволяют очень просто получить уравнения движения идеальной жидкости из уравнений Навье-Стокса – достаточно опустить в них слагаемые с коэффициентами вязкости  $\mu$  и  $\lambda$ :

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{grad}p}, \quad (3.6)$$

или в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости равенства:

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}^2} - \bar{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}},$$

что позволяет записать уравнения Эйлера в форме Громеки-Лемба:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}^2} - \bar{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{grad} p}. \quad (3.8)$$

Составим полную систему уравнений движения идеальной жидкости в случае ее несжимаемости. В нее войдут уравнения Эйлера, и уравнение неразрывности. Однако уравнение неразрывности для случая несжимаемости (постоянства  $\rho$ ) распадается на два независимых уравнения: (1.18) и  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Таким образом для определения полей вектора скорости  $\bar{\mathbf{V}}(x,y,z,t)$

и давления  $p(x,y,z,t)$  при заданных полях вектора внешних сил  $\bar{\mathbf{F}}(x,y,z,t)$  и независимой от времени плотности  $\rho(x,y,z)$  служит замкнутая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} &= \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \overline{\mathbf{grad} p}, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Заметим, что последнее уравнение в системе служит лишь для того, чтобы задать независимость плотности от времени.

Если жидкость однородна, т.е. плотность одинакова не только во времени, но и в разных точках пространства:  $\rho = \text{const}$ , то замкнутая полная система уравнений движения идеальной однородной несжимаемой жидкости состоит из двух первых уравнений (3.9).

Однако даже для однородной идеальной несжимаемой жидкости в общем случае аналитическое решение полной системы уравнений по-прежнему невозможно. Только введение дополнительных предположений позволит получить аналитическое решение, которое можно будет физически интерпретировать.

Рассмотрим такие предположения для идеальной жидкости. Наличие в уравнении Эйлера в форме Громеки-Лемба нескольких операторов **grad** наталкивает на мысль о возможности внесения под него и других членов при определенных условиях.

**Установившееся движение идеальной жидкости в поле потенциальных внешних сил.**

Предположение 1. Движение установившееся:  $\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} = 0$ .

Предположение 2. Внешние массовые силы допускают *потенциал*  $U$ , т.е.  $\bar{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{grad}U}$ .

При этих предположениях рассмотрим проекцию уравнения Эйлера в форме Громеки-Лемба на произвольную линию  $L$  с текущим направлением  $l$ :

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l} - \frac{\partial U}{\partial l} = (\bar{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}})_l.$$

Вдоль линии  $L$  можно ввести функцию давления:

$$P(\rho, L) = \int \frac{d\rho}{\rho(\rho, L)}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l} = \frac{\partial P}{\partial l},$$

определенную только на данной линии, тогда предыдущее уравнение приобретает удобный для анализа вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ \frac{\bar{\mathbf{V}}^2}{2} + P(\rho, L) - U \right] = (\bar{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}})_l.$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль, если линия  $L$  в каждой своей точке имеет направление  $l$ , совпадающее с  $\bar{\mathbf{V}}$  или  $\overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}}$ . Такими линиями служат: в первом случае линии тока, совпадающие при установившемся движении с траекториями частиц (см. раздел 1.2), а во втором случае вихревые линии. Этот факт позволяет получить первый интеграл уравнения установившегося движения идеальной жидкости в поле потенциальных внешних сил вдоль линии тока или вихревой линии:

$$\frac{\overline{V}^2}{2} + P(\rho, L) - U = \text{const}(L), \quad (3.10)$$

называемый интегралом Бернулли.

Постоянную в правой части уравнения (3.10) достаточно определить в одной точке линии тока (или вихревой линии) по значению левой части. Если кроме этого на выбранной линии известна функция давления  $P(\rho)$ , то по скорости и внешним силам можно однозначно определить давление в любой точке этой линии. Интеграл Бернулли, являясь законом сохранения энергии, имеет фундаментальное значение в теории идеальной жидкости и идеального газа, является основным уравнением в гидравлике и пневматике, поэтому иногда называется законом (уравнением) Бернулли.

Заметим, что в частном случае **безвихревого** движения  $\overline{\mathbf{V}} \times \text{rot } \overline{\mathbf{V}} = 0$  **во всей области**, и интеграл Бернулли справедлив для всей этой области, а не только вдоль линий тока или вихревых линий, и называется интегралом Бернулли-Эйлера.

В другом частном случае **несжимаемой** жидкости интеграл Бернулли или интеграл Бернулли-Эйлера принимает вид:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} + U - \frac{\overline{V}^2}{2}. \quad (3.11)$$

При отсутствии внешних массовых сил это уравнение можно записать еще проще:

$$\text{const} \equiv p_0 = p + \frac{\rho \overline{V}^2}{2}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим интеграл Бернулли (3.11) для несжимаемой жидкости в поле силы тяжести, действующей по оси  $z$ :

$$\frac{\overline{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\overline{V}_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gz_A,$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, правая часть вычислена для определенной точки  $A$  выбранной линии тока, а левая – для произвольной ее точки. Разрешив это уравнение относительно давления в точке на линии тока:

$$p = p_A + \rho g(z_A - z) + \frac{\rho \overline{V}_A^2}{2} - \frac{\rho \overline{V}^2}{2},$$

можно заметить, что оно распадается на две части различной физической природы. Выражение  $p_A + \rho g(z_A - z)$  не зависит от движения и определяется лишь глубиной погружения текущей точки относительно исходной точки  $A$  – оно называется гидростатическим (аэростатическим) давлением.

ем. Напротив, выражение  $\frac{\rho \bar{V}_A^2}{2} - \frac{\rho \bar{V}^2}{2}$  определяется только скоростью и называется динамическим давлением.

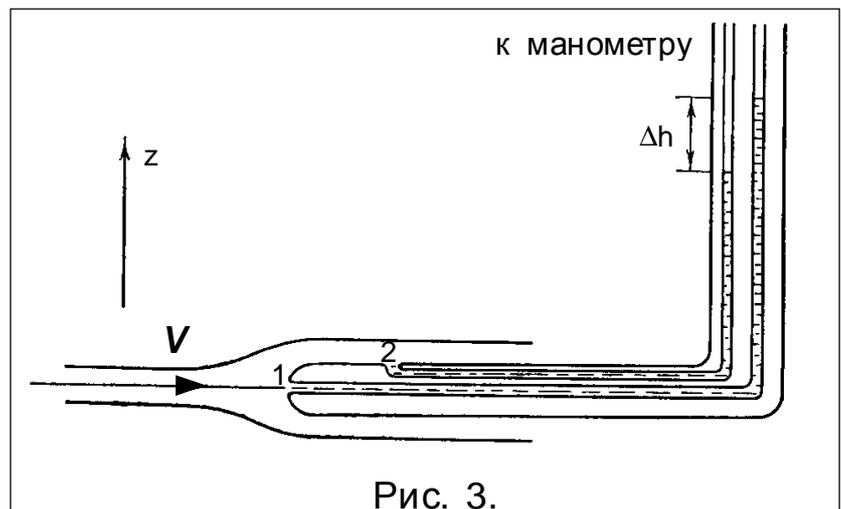
Предположим, что линия тока расположена в горизонтальной плоскости ( $z = z_A$ ) или сила тяжести пренебрежимо мала. Тогда второе слагаемое в правой части выражения для давления пропадает и в критической точке линии тока (где  $\bar{V} = 0$ , см. раздел 1.2)

$$p \equiv p_0 = p_A + \frac{\rho \bar{V}_A^2}{2}$$

давление максимально, его называют полным давлением или давлением торможения и обозначают  $p_0$  (все параметры среды в критической точке покоя носят название параметров торможения и обозначаются с индексом 0). В любой другой точке линии тока давление будет меньше полного на величину  $\frac{\rho \bar{V}^2}{2}$ , называемую скоростным напором. Разность между полным давлением и скоростным напором называется статическим давлением или просто давлением, оно и обозначалось через  $p$ .

Проведенный анализ интеграла Бернулли позволяет построить некоторые практические приложения.

Трубка Пито-Прандтля (рис. 3) представляет собой тонкий прибор, состоящий из двух трубок, соединенных с манометром. Другой конец 1 одной из трубок вводится в поток прямо навстречу ему – в этой точке скорость равна нулю, а давление – полному. Отверстие 2 дру-



гой трубки расположено в боковой части прибора так, чтобы потока жидкости в него не было и линии тока проходили бы мимо него, не искажаясь. В этой точке скорость течения и статическое давление с небольшой погрешностью, вносимой присутствием трубки, соответствуют скорости и давлению в этой точке течения в отсутствии прибора. Таким образом, манометр покажет разность между полным и статическим давлением, т.е. величину скоростного напора. Если известна плотность жидкости, то можно

вычислить скорость потока. Трубка Пито-Прандтля под названием приемника воздушного давления (ПВД) получила широкое применение в авиации для измерения скорости полета.

При безотрывном течении несжимаемой жидкости по трубке переменного сечения можно наблюдать ряд интересных явлений. К такому течению для  $z = z_A$  можно применить интеграл Бернулли в виде (3.12). В силу несжимаемости и неразрывности объемный расход жидкости через каждое сечение, в котором скорость можно считать постоянной, неизменен:  $VS = \text{const}$ . Таким образом, в минимальном сечении трубки скорость максимальна, а давление минимально. Этот эффект используется в струйных насосах (рис. 4), когда в минимальном сечении  $S_{min}$  трубки I создается давление меньшее, чем давление в опустошаемом сосуде II.

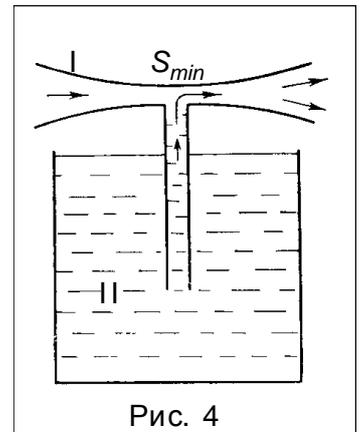


Рис. 4

### 3.4. Динамика сжимаемого газа

Немаловажное прикладное значение имеет вид интеграла Бернулли и в других частных случаях баротропной жидкости (см. раздел 2.3). Так, для изотермического течения газа, при котором  $\rho = \Phi(p) = Cp$  и внешними массовыми силами можно пренебречь, функция давления

$P(p, L) = \int \frac{dp}{\rho(p, L)} = \frac{1}{C} \ln p$  и интеграл Бернулли приобретает вид:

$$\frac{\bar{V}^2}{2} + \frac{1}{C} \ln p = \text{const}(L).$$

Для политропического течения газа  $\rho = \Phi(p) = Cp^{1/n}$ , откуда нетрудно получить  $P(p, L) = \int \frac{dp}{\rho(p, L)} = \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho}$ . Тогда в отсутствии внешних массовых сил можно записать интеграл Бернулли в виде:

$$\frac{\bar{V}^2}{2} + \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}(L).$$

В случае отсутствия притока тепла извне течение называется адиабатическим, показатель политропы вырождается в показатель адиабаты  $\gamma$ , а интеграл Бернулли для адиабатического течения сжимаемого газа в отсутствии внешних массовых сил принимает вид:

$$\frac{\bar{V}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{const}(L). \quad (3.13)$$

Из этого уравнения, как и в случае несжимаемой жидкости, следует существование максимальной скорости течения  $V_{max} = \sqrt{2\text{const}(L)}$  при нулевом значении статического давления  $p = 0$ . Ее можно интерпретировать, как скорость истечения газа в пустоту.

Рассматривая баротропные газы, мы имеем в виду их сжимаемость – способность изменять свой объем (или плотность) под действием давления. Это значит, что характеристикой сжимаемости может служить величина  $\frac{dp}{d\rho}$ . Нетрудно видеть, что размерность этой величины совпадает с размерностью квадрата скорости. Такую скорость называют скоростью звука и обозначают  $a$ . Найдем эту величину для адиабатического ( $p = \rho^\gamma$ ) процесса:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma p^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (3.14)$$

Для адиабатического процесса в совершенном газе скорость звука зависит только от температуры:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\gamma BT} \approx 20\sqrt{T}. \quad (3.15)$$

(Приближение относится к воздуху.) Величину  $a$  можно считать характеристикой сжимаемости газа, однако в этом качестве в аэродинамике принято использовать отношение скорости течения к скорости звука:

$$M = \frac{V}{a}, \quad (3.16)$$

называемое числом Маха.

Рассмотрим установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости (газа) в отсутствии внешних сил в трубке тока переменного сечения. Уравнение неразрывности (1.17) дает постоянство массового расхода газа  $\rho VS = \text{const}$  вдоль трубки тока. Из уравнений Эйлера (3.7), спроектированных на осевую линию тока ( $x$ ), можно получить:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{V_x^2}{M^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

откуда:  $-M^2 \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} = V_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$  или

$$\frac{\partial(V_x \rho)}{\partial x} = \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = (1 - M^2) \rho \frac{\partial V_x}{\partial x}.$$

Из этого соотношения и из постоянства расхода следует:

– при дозвуковых скоростях ( $M < 1$ ) с ростом скорости  $V$  величина  $\rho V_x$  увеличивается, а сечение трубки тока уменьшается, достигая минимального значения при  $M = 1$ ,

– при сверхзвуковых скоростях ( $M > 1$ ) с ростом скорости  $V$  величина  $\rho V_x$  уменьшается, а сечение трубки тока увеличивается, минимальное сечение трубки тока достигается при  $M = 1$ .

Эти особенности течения сжимаемого газа составляют идею сопла Лавале – сужающегося канала с разгоняющимся до скорости звука дозвуковым потоком, к которому примыкает расширяющийся канал с разгоняющимся сверхзвуковым потоком. Сопло Лавале является основой для построения сверхзвуковых аэродинамических труб.

До сих пор, рассматривая сплошную среду и неразрывность течения, мы молчаливо полагали, что непрерывны все параметры движения. Однако наличие границ тел и свободных поверхностей наталкивает на мысль о возможности существования разрывных течений, в которых разрыв терпят те или иные параметры, но разрыва сплошности нет. На любой линии тока в каждой точке, в том числе и в точке разрыва непрерывности, выполняются условия равенства потока слева и справа от этой точки **в направлении течения**:  $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ . В общем случае пространственного течения под скоростями до разрыва и после в этом равенстве следует понимать нормальные составляющие скорости:

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n}. \quad (3.17)$$

Это одно из основных соотношений на поверхности возможного разрыва в сплошной среде. Из него видно, что если скорость течения при переходе через поверхность разрыва скачком уменьшается, то плотность скачком увеличивается – это, так называемый, скачок уплотнения. Уравнение (3.17) допускает и скачок разрежения, однако из второго начала термодинамики можно показать, что при адиабатическом процессе он невозможен.

Примером течения с появлением скачка уплотнения является сверхзвуковое течение внутри тупого угла (рис. 5). В этом случае после поворота, как нетрудно заметить, трубки тока имеют меньшее поперечное сечение, следовательно, скорость, как в сверхзвуковом сопле Лавалья, должна уменьшиться, а плотность увеличиться. Образуется скачок уплотнения ОС.

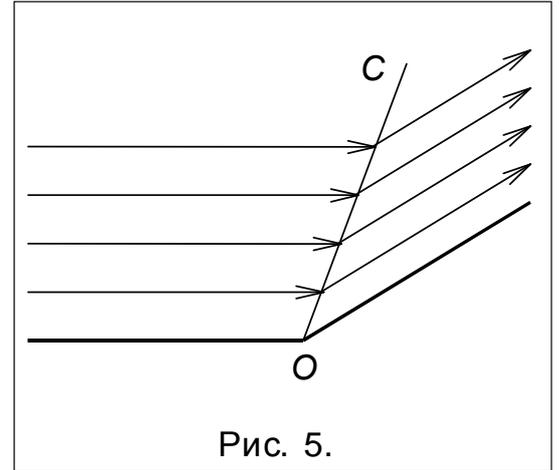


Рис. 5.

Достроив рис. 5 симметрично снизу, можно получить картину обтекания плоского клина сверхзвуковым потоком. Обобщение этого представления дает понятие о возникновении ударной волны от сверхзвукового самолета.

### 3.5. Постановка задач аэродинамики

Основная задача аэродинамики – определение механического взаимодействия газа (воздуха) и тела, находящегося в нем. Здесь и далее мы ограничимся рассмотрением только поверхностных сил – массовые силы и моменты, а также поверхностные моменты (см. раздел 2.1) в данном курсе рассматриваться не будут. Таким образом, необходимо уметь вычислять главный вектор и главный момент воздействия среды на тело. Они определяются поверхностными силами:

$$\bar{R} = - \int_S \bar{p}_s d\bar{S}, \quad (3.18)$$

$$\bar{M} = - \int_S [\bar{r} \times \bar{p}_s] d\bar{S}, \quad (3.19)$$

для чего необходимо знать их распределение по поверхности тела. В свою очередь, распределение поверхностных сил может быть найдено в результате решения основного уравнения движения сплошной среды (2.4) или (2.5) совместно с уравнением неразрывности (1.16) и алгебраическими уравнениями модели среды. Рассмотрим подробнее, какие дополнительные соотношения и условия необходимо использовать для возможности решения этих дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Одним из аргументов производных в этих уравнениях является время. Поэтому необходимо задать начальные условия: значения всех параметров среды и тела в начальный момент, от которого можно производить отсчет

времени. Начальные условия имеют вид функций, заданных во всех точках описываемой области.

Наличие производных по пространственным координатам требует знания граничных условий: значений всех параметров среды на ее границе (на стенках сосуда, на свободной поверхности, на поверхности обтекаемых тел). Корректность задания граничных условий определяется математическими требованиями и здесь не рассматривается. В случае неустановившегося движения граничные условия имеют вид функций не только от координат граничных точек, но и от времени.

В качестве граничных условий в зависимости от постановки задачи могут применяться следующие:

– условия прилипания (для неидеальных сред):

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{среды}} = \bar{\mathbf{V}}_{\text{границы}}, \quad (3.20)$$

которые постулируют равенство векторов скоростей движения границ среды (свободных поверхностей и поверхностей тел) и частиц среды, попавших на них;

– условия непроникания:

$$V_n \text{ среды} = V_n \text{ границы}, \quad (3.21)$$

которые постулируют отсутствие движения частиц среды через границу, например, твердого тела; при этом движение вдоль поверхности (для идеальной жидкости) может присутствовать;

– условия на свободной поверхности в общем случае задаются в виде распределения поверхностных сил:

$$\bar{\mathbf{p}}_S = \bar{\mathbf{f}}(x, y, z, t)|_{\text{границы}}, \quad (3.22)$$

имеющих как нормальные, так и касательные составляющие; в некоторых случаях (например, для идеальных жидкостей) эти условия сводятся к простейшему условию, наложенному на давление:  $p = p_{\text{границы}}$ .

Особой разновидностью граничных условий являются условия в бесконечности, если среда простирается до бесконечности. Чаще всего в роли таких условий выступают нулевые (или заданные) значения скорости и заданное значение давления, как пределы соответствующих характеристик среды.

Если система уравнений (2.4), (1.16) замкнута с помощью одной из моделей сплошной среды (раздел 2.3), то начальных и корректных граничных условий достаточно для математической постановки задачи аэродинамики. Т.е. такая задача в принципе разрешима. Но даже для современных компьютеров она требует разработки весьма сложных методов вычислительной математики. Поэтому большое значение имеют упрощения постановки задач, основанные на особенностях рассматриваемых движений, позволяющих уменьшить количество неизвестных.

Установившееся движение (см. раздел 1.2) позволяет исключить зависимость параметров движения от времени и отказаться от начальных условий.

Плоскопараллельным движением называется такое движение, в котором можно ввести систему декартовых координат, одна из которых оказывается несущественной. Обычно в таком случае существенные координаты обозначают  $x$  и  $y$ . Картину такого движения можно изобразить на плоскости, что очень важно для понимания сути многих процессов в аэродинамике.

Если движение можно описать с помощью цилиндрической системы координат, в которой полярный угол несущественен, то оно носит название осесимметрического движения.

В некоторых задачах существенной остается только одна координата, в общем случае криволинейная. Такое движение называется одномерным. Если такое движение еще и установившееся, то единственная производная становится обыкновенной, что существенно облегчает решение.

Автомоделным движением называется такое движение, которое может быть описано тремя существенными независимыми аргументами:

$$\frac{x}{t^\alpha}, \frac{y}{t^\alpha}, \frac{z}{t^\alpha},$$

вместо четырех координат  $x, y, z, t$ , здесь  $\alpha$  – числовая постоянная. Автомоделные одномерные неустановившиеся движения позволяют обойтись одной независимой переменной вида  $\zeta = \frac{x}{t^\alpha}$  и использовать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Уравнения механики сплошной среды являются нелинейными дифференциальными уравнениями. С одной стороны, нелинейность привносит в решение задач значительные математические трудности. С другой стороны, она связана с особыми физическими эффектами. Однако ряд задач можно поставить таким образом, чтобы они решались как линейные. В некоторых случаях это позволяет на основе теории линейных дифференциальных уравнений получить даже аналитическое решение.

Для упрощения задач в этом направлении применяются два приема: принцип малых возмущений и линеаризация. Принцип малых возмущений предполагает возможность рассматривать движение, как состоящее из двух (а иногда и более) налагаемых друг на друга движений. Например, малые отклонения от установившегося поступательного движения или малые возмущения в покоящейся среде. В общем случае для этого достаточно, чтобы на определенной стадии можно было бы записать параметры общего движения в виде суммы:  $s = s_0 + s_\varepsilon$  известной функции  $s_0$  и искомого **малого** добавка  $s_\varepsilon$ . Подстановка такой суммы в уравнения движения или в гра-

ничные условия позволяет произвести линеаризацию – пренебрежение членами более высокого порядка малости, чем первый. Получающиеся в результате такой процедуры линейные задачи обладают замечательным свойством: их частные решения можно суммировать. Таким образом используется принцип суперпозиции линейных решений. В некоторых задачах можно проводить линеаризацию и суперпозицию в несколько последовательных приемов, отыскивая на каждом из них добавки (уточнения) все более высокого порядка.

Но наиболее мощным методом исследования и расчетов в механике сплошной среды является теория подобия. Основу ее составляет П-теорема (по названию греческой буквы "пи"), известная из курса математического моделирования. Она утверждает, что всякое физическое явление может быть описано определенным числом безразмерных степенных комплексов (критериев подобия) вида:

$$u_1^{m_1} \cdot u_2^{m_2} \cdot \dots \cdot u_n^{m_n} = C,$$

составленных из характерных размерных параметров  $u_i$  этого явления. Здесь  $m_i$  и  $C$  – безразмерные числа. Показатели степеней могут быть определены решением системы линейных алгебраических уравнений, исходя из соотношения размерностей, а  $C$  – из эксперимента. Таким образом, можно определить значения критериев подобия, характеризующих особенности течения среды, которые необходимо сохранять при построении подобных моделей исследуемых явлений. Как известно из курса математического моделирования, любые подобные модели (и логические, и материальные) основаны на математическом описании, поэтому сохранение значений критериев подобия необходимо и в теоретических расчетах, и в экспериментах.

Из основных физических параметров движения тел в сплошной среде можно составить следующие критерии подобия.

Число Маха:

$$M = \frac{V}{a},$$

подробно рассмотренное в разделе 3.4 и характеризующее сжимаемость газа (см. (3.16)) – чем больше  $M$ , тем сильнее проявляется сжимаемость.

Число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu}, \quad (3.23)$$

где  $l$  – характерный линейный размер задачи, учитывает влияние вязкости среды – чем больше  $Re$ , тем слабее эффекты вязкости и тем ближе среда к идеальной.

Число Струхалия:

$$\text{Sh} = \frac{Vt}{l}, \quad (3.24)$$

где  $t$  – характерный интервал времени в задаче, является оценкой нестационарности явления.

Число Фруда:

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{lg}, \quad (3.25)$$

характеризующее влияние силы тяжести.

Число Эйлера:

$$\text{Eu} = \frac{p}{\rho V^2}, \quad (3.26)$$

характеризующее влияние давления.

Число Ньютона:

$$\text{Ne} = \frac{F}{\rho V^2 l^2}, \quad (3.27)$$

характеризующее влияние внешних сил.

Для некоторых задач может выявиться существование и других критериев подобия. Однако и этот перечень достаточно велик. Если учесть, что в экспериментах стремятся сохранить еще и геометрическое подобие по трем координатам, то становится ясно, что выдержать все критерии одновременно практически невозможно. Поэтому эксперименты никогда не носят единичный характер, а строятся с сохранением различного набора критериев подобия.

### 3.6. Взаимодействие жидкостей и газов с обтекаемыми телами

Изучением взаимодействия среды с обтекаемыми телами займемся на примере установившегося безвихревого движения идеальной однородной несжимаемой жидкости в отсутствии массовых сил. В этом случае справедлив интеграл уравнений движения Бернулли в виде (3.12) и уравнение неразрывности в виде (1.18). Для определения главного вектора сил воздействия жидкости на тело воспользуемся формулой (3.18). Так как поверхностные силы  $\overline{\mathbf{p}}_S$  для идеальной жидкости сводятся к давлению  $p$ , то задача сводится к расчету распределения давления на поверхности обтекаемого тела. Для его определения необходимо задаться формой тела и видом потока.

Рассмотрим простой случай: тело имеет форму бесконечного кругового цилиндра радиуса  $r_0$ , а поток – равномерный, со скоростью в бесконечности равной  $V_\infty$ . Такая задача относится к плоскопараллельным, поэтому достаточно рассматривать плоскость  $xOy$ . Будем также предполагать, что обтекание происходит с циркуляцией скорости  $\Gamma < 0$  (1.15), т.е. по окружности

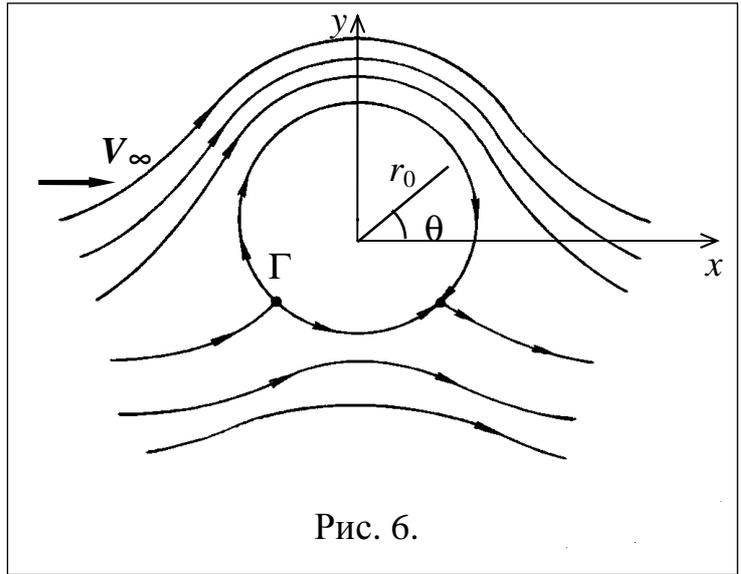


Рис. 6.

круга течение **в основном** организовано по часовой стрелке (рис. 6) – в противоположную сторону от положительного направления отсчета циркуляции.

Для цилиндра уравнение (3.18) можно представить в покоординатной форме и использовать интеграл Бернулли (3.12):

$$R_x = - \int_0^{2\pi} \rho r_0 \cos \theta d\theta = -r_0 \int_0^{2\pi} \left( \rho_0 - \frac{\rho V^2}{2} \right) \cos \theta d\theta,$$

$$R_y = - \int_0^{2\pi} \rho r_0 \sin \theta d\theta = -r_0 \int_0^{2\pi} \left( \rho_0 - \frac{\rho V^2}{2} \right) \sin \theta d\theta,$$

где остается неопределенным только значение скорости течения на поверхности цилиндра. Ясно, что радиальная составляющая скорости при  $r = r_0$  равна нулю в силу условия непроникания, поэтому эту задачу удобнее решать в цилиндрической системе координат  $r, \theta$ .

С помощью теории функций комплексного переменного и комплексного потенциала скорости (в данном курсе не рассматриваются) можно показать, что рассматриваемое течение описывается следующим распределением цилиндрических координат скоростей:

$$V_r = V_\infty \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$V_\theta = -V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что такое распределение скоростей обеспечивает выполнение основных требований задачи: при  $r = \infty$ :  $V = V_\infty$ , при  $r = r_0$ :  $V_r = 0$ , а циркуляция

$$\oint_L \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} V_\theta r d\theta = - \int_0^{2\pi} \left[ V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \right] r d\theta = \Gamma;$$

а также удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \\ &= \frac{1}{r} \left[ V_\infty \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos\theta + rV_\infty 2 \frac{r_0^2}{r^3} \cos\theta - V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos\theta \right] = 0 \end{aligned}$$

и требованию безвихревого течения:

$$\begin{aligned} (\overline{\operatorname{rot} \mathbf{V}})_z &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] = \\ &= -V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} + rV_\infty 2 \frac{r_0^2}{r^3} \sin\theta - r \frac{\Gamma}{2\pi r^2} + V_\infty \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin\theta = 0. \end{aligned}$$

В этом случае на поверхности цилиндра:

$$V_\theta = -2V_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}, \quad (3.28)$$

и можно вычислить составляющие главного вектора сил воздействия жидкости на тело:

$$\begin{aligned} R_x &= - \int_0^{2\pi} \left[ \rho_0 - \frac{\rho}{2} \left( 4V_\infty^2 \sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} - 2 \frac{V_\infty}{\pi r_0} \Gamma \sin\theta \right) \right] r_0 \cos\theta d\theta, \\ R_y &= - \int_0^{2\pi} \left[ \rho_0 - \frac{\rho}{2} \left( 4V_\infty^2 \sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} - 2 \frac{V_\infty}{\pi r_0} \Gamma \sin\theta \right) \right] r_0 \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и вынесения постоянных за знак интеграла в этих выражениях останутся нулевые интегралы от нечетных степеней тригонометрических функций, и только интеграл от  $\sin^2\theta$  ненулевой и равен  $\pi$ . В итоге получим:

$$R_x = 0; \quad R_y = -\rho V_\infty \Gamma. \quad (3.29)$$

Эта основная формула в аэродинамике носит название формулы Н.Е. Жуковского. Следует особо отметить, что эта формула не является дополнительным эмпирическим предположением в аэродинамике, а **доказана** Жуковским в 1906 г., как теорема, исходя из указанной в начале раздела модели среды. В 1934 г. М.В. Келдыш и Ф.И. Франкль доказали эту теорему для сжимаемого газа при дозвуковых скоростях, а в 1948 г. Л.И. Седов распространил ее и на сверхзвуковые неразрывные течения. Таким образом, сегодня можно дать такую формулировку теоремы Жуковского:

**если круговой цилиндр обтекается под прямым углом к его оси**

**установившимся,**

**безвихревым,**

**циркуляционным**

**поток**

**идеального,**

**баротропного**

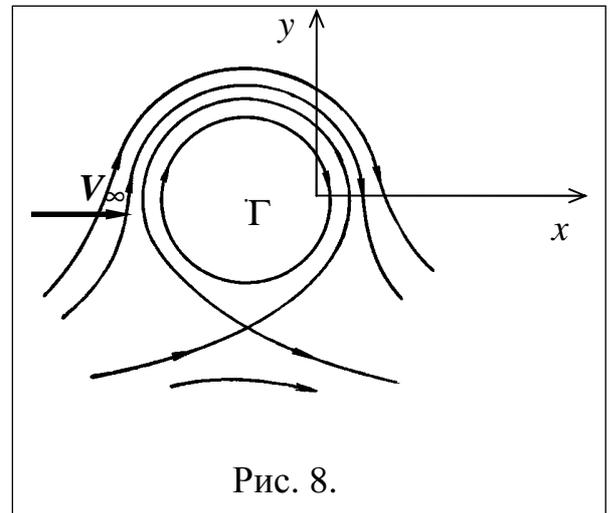
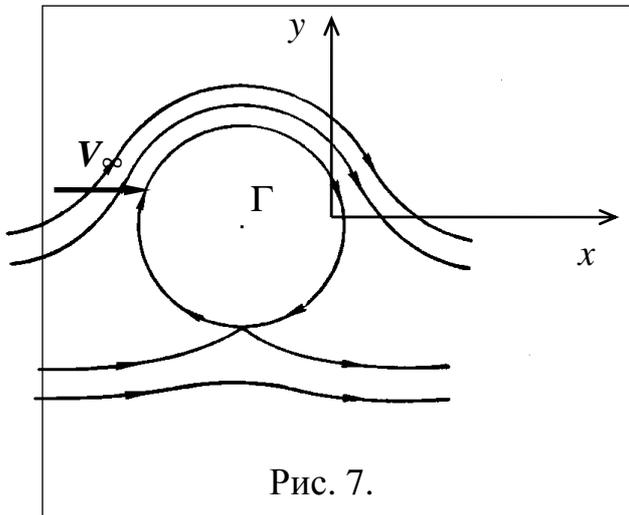
**газа,**

**то на цилиндр действует сила, равная произведению плотности газа, скорости набегающего потока и циркуляции скорости. Направление этой силы определяется поворотом вектора скорости набегающего потока на прямой угол против направления циркуляции.**

В рассмотренном примере рис. 6 циркуляция скорости ( $\Gamma < 0$ ) направлена по часовой стрелке и сила  $R_y$  направлена вверх при набегающем слева потоке. Поэтому силу Жуковского называют подъемной. Фундаментальный смысл теоремы Н.Е. Жуковского заключается в том, что подъемная сила возникает только за счет наличия циркуляции скорости. Этот факт хорошо иллюстрируется известным из физики эффектом Магнуса, которым пользуются спортсмены: сильно закрученный при ударе мяч летит не по прямой, а по дуге.

Проанализируем вид обтекания цилиндра при различной интенсивности циркуляции  $\Gamma$ . Из (3.28) следует, что  $V_\theta = 0$  на поверхности цилиндра в точках, где  $\sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_\infty}$ . При  $\Gamma < 4\pi r_0 V_\infty$  это уравнение имеет два вещественных корня. Учитывая, что  $\Gamma < 0$ , получим две симметричные относительно оси  $y$  особые (критические, см. раздел 1.2) точки ниже оси  $x$ , в которых скорость обращается в нуль – точки торможения. В этих точках набегающая линия тока раздваивается, огибает цилиндр сверху и снизу, а затем сливается в одну уходящую. Этот характер течения изображен на рис. 6.

В случае  $\Gamma = 4\pi r_0 V_\infty$  корни совпадают и единственная особая точка с  $\theta = -90^\circ$  совмещает в себе функции двух рассмотренных в предыдущем случае (рис. 7). При  $\Gamma > 4\pi r_0 V_\infty$  оба корня мнимые и особые точки располагаются в толще потока. В этом случае на поверхности цилиндра совершается чисто циркуляционное движение без точек торможения (рис. 8).



Первое уравнение (3.29) показывает, что в продольном направлении поток вообще не оказывает на цилиндр никакого воздействия: т.е. *сопротивления* движению нет. Этот вывод, противоречащий человеческому опыту, носит название парадокса Эйлера-Даламбера и является следствием сделанных предположений. В реальных средах, конечно, сопротивление существует, но полученный результат свидетельствует о возможности сделать его малым. Таким образом, главный вектор воздействия среды на тело при несимметричном обтекании всегда имеет две составляющие: вдоль скорости набегающего потока и поперек ее. Искусство прикладной аэродинамики состоит в том, чтобы управлять ими.

Из рис. 6 нетрудно видеть, что сверху цилиндра скорость течения получается сложением скорости набегающего потока и циркуляции, а снизу – вычитанием. Следовательно, на верхней поверхности скорость больше, а давление меньше, чем на нижней. Это может служить упрощенным "физическим" объяснением возникновения подъемной силы. Для того чтобы создать разность давлений на круговом цилиндре, очевидно, необходимо обеспечить циркуляцию скорости. Для того же эффекта у несимметричных тел специально заботиться об этом не нужно: сама форма тела может создавать условия возникновения циркуляции.

## 4. ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ АЭРОДИНАМИКИ

### 4.1. Подъемная сила крыла

Ярким примером специфической формы обтекаемого тела в природе является крыло птиц. Характерная его особенность – выпуклость, обращенная вверх, делает поток безусловно несимметричным. На рис. 9 показаны различные случаи расположения профиля крыла в потоке. Случай "а" характерен тем, что профиль развернут к потоку своей вогнутой стороной. При этом задняя критическая точка находится на выпуклой стороне, а задняя кромка крыла должна огибаться потоком.

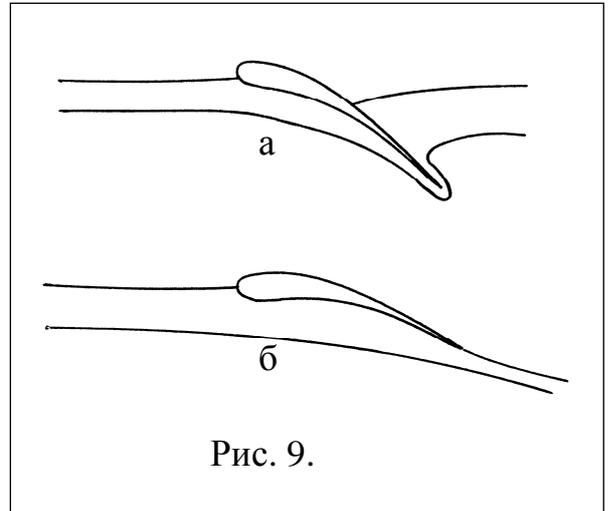


Рис. 9.

Это типичный случай положительной циркуляции скорости, поэтому сила Жуковского направлена вниз. В случае "б" задняя критическая точка находится непосредственно на острой кромке крыла, и визуально незаметная циркуляция определяется только разностью скоростей сверху и снизу профиля. Так как скорость обтекания сверху больше, то циркуляция отрицательна и сила Жуковского направлена вверх.

Последний не очевидный факт нуждается в подробном изучении. Представим себе идеализированную картину: поток идеальный, а задняя кромка крыла острая. Тогда на задней кромке в случае "б" должны соединяться два потока с **различной скоростью**. Т.е. вдоль этой линии тока после крыла должен существовать разрыв скорости. С другой стороны, в случае "а" на задней кромке должны были бы быть бесконечно большие значения скорости и ускорения. На эти противоречия со здравым смыслом указал С.А. Чаплыгин, а Н.Е. Жуковский предложил постулат о конечности скорости на задней кромке за счет самоустанавливающейся циркуляции. Если его принять, то в идеальной жидкости возможным окажется только течение типа "б": задняя критическая точка находится на задней острой кромке профиля. Тогда значение циркуляции скорости определится однозначно. Таким образом, теория обтекания профиля идеальным потоком оказывается завершенной и пригодной для расчетов.

В реальных средах образуется несколько другая картина. Неидеально острая задняя кромка обтекается вязким потоком. Поэтому частицы, прилипающие к поверхности (см. условие прилипания в разделе 3.5), тормозятся до нулевой скорости и тормозят соседние частицы – скорость остается конечной. Таким образом образуется, так называемый, пограничный

слой около поверхности тела, в котором существенное значение имеют силы вязкости. Пограничный слой рассматривается в теории вязкой жидкости, основанной на уравнениях Навье-Стокса.

Наличие вязкости приводит к возможности случая "а" рис. 9 обтекания профиля. При появлении такой картины течения говорят о возникновении срыва потока. Это не очень удачное название подразумевает лишь отход верхней части потока от крыла задолго до задней кромки. При этом после точки срыва потока на поверхности отнюдь не пустота, а встречное течение! Ясно, что в эксплуатации необходимо избегать таких режимов полета, приводящих к уменьшению подъемной силы.