МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кабков П.К.

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЛА

Пособие
по проведению лабораторных работ

для студентов /// курса
специальности 160901
дневного обучения

Москва - 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»

Кафедра технической эксплуатации ЛА и АД

Кабков П.К.

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЛА

ПОСОБИЕ
по проведению лабораторных работ

для студентов III курса
специальности 160901
дневного обучения

Москва - 2008

1. Общие положения

1.1. Целью проведения лабораторных работ является приобретение практических навыков формирования вероятностно-статистических моделей на ПЭВМ с помощью математической системы Mathcad.

1.2. Лабораторные работы по дисциплине «Вероятностно - статистические модели эксплуатации ЛА обеспечивают следующие основные темы дисциплины: «Полумарковские модели процессов эксплуатации» и «Модели корреляционного и регрессивного анализа».

1.3. Пособие содержит краткое описание особенностей системы Mathcad и методические указания по выполнению непосредственно каждой лабораторной работы.

1.4. Отчет по каждой работе должен содержать следующие данные:

- фамилия и инициалы студента, номер группы и подгруппы;
- номер и тема работы;
- дата выполнения;
- исходные данные выполняемого варианта;
- результаты работы;
- выводы по проделанной работе.

Отчет должен быть подписан исполнителем работы.

1.5. Отчет по каждой работе представляется преподавателю для проверки и его защиты. После защиты работы преподаватель делает отметку в журнале контроля выполнения лабораторных работ и непосредственно на отчете студента.

2. Краткие сведения о системе MATHCAD

Mathcad – программное средство, среда для выполнения на компьютере разнообразных математических и технических расчетов, предоставляющая пользователю инструменты для работы с формулами, числами, графиками и текстом.

Mathcad имеет простой в освоении графический интерфейс, т.е. совокупность способов взаимодействия пользователя с помощью пиктограмм, диалоговых окон, меню и панели математических инструментов (панели математических операций).

Версий математических пакетов Mathcad сейчас достаточно много (Mathcad-8, 11, 13, 2000, 2001 и др.). В основном версии идентичны, отличаясь в основном в панелях математических операций.

В МГТУ ГА в компьютеры занесена версия Mathcad-11. В продаже есть полное руководство по этой версии.

Для решения задач, рассматриваемых в настоящем пособии, в рабочее окно из панели математических инструментов рекомендуется вызвать следующие группы математических инструментов:

1. Calculator Toolbar. Здесь представлены основные математические операции: тригонометрические функции, логарифм, факториал, корни любых степеней, экспонента, обратные величины, степени и пр.

2 .Graf Toolbar. Инструменты для построения двумерных графиков, графиков в полярных координатах, векторные графики и пр.

3. Vector and Matrix Toolbar. Используется для формирования векторов и матриц, ввода переменных с индексами, обращения матриц, векторов и др.

4. Calculus Toolbar. Используется для ввода производных различных порядков, интегралов, сумм и произведений.

5. Boolean Toolbar. Панель равенств и отношений. Эти знаки отображаются жирным шрифтом. Используются, например, при вводе дифференциальныхуравнений.

6. Greek Simbol Toolbar. Греческий алфавит, прописные и строчные буквы.

Часто используется, но не выводится на экран список встроенных функций **f(x).** Список выводится в виде двух столбцов: категория функции и имя самой функции.

Особенностью системы Mathcad является то, что чтение текста и формул происходит слева направо и сверху вниз. Если какая-то формула или математическое выражение базируется на предыдущих формулах, тоони должны располагаться правее и ниже исходных формул.

3. Методические указания по проведению лабораторных работ

3.1. Лабораторная работа № 1

Тема: Формирование моделей полумарковских процессов в виде системы алгебраических уравнений и их решение на ПЭВМ с помощью программной системы Mathcad.

Цель работы: Освоить различные методы решения систем алгебраических уравнений на ПЭВМ и научиться применять их для анализа полумарковских моделей.

3.1.1 .Постановка задачи.

Лабораторная работа №1 состоит из двух частей: освоение различных методов решения систем алгебраических уравнений на ПЭВМ и решение системы алгебраических уравнений, формирующих модель полумарковского процесса.

Для освоения методов решения систем алгебраических уравнений на ПЭВМ используется некоторая учебная система, приведенная ниже.

Исходная система:

$$X1 + 2\cdot X2 + 3\cdot X3 + 4\cdot X4 = 30$$

$$-X1 + 2\cdot X2 - 3\cdot X3 + 4\cdot X4 = 10$$

$$X2 - X3 + X4 = 3$$

$$X1 + X2 + X3 + X4 = 10$$

Решение приведенной системы алгебраических уравнений может быть сделано методом Крамера, с помощью обратной матрицы или с использованием встроенной функции **find.**

Решение всеми указанными методами студенты производят самостояте льно, пользуясь приведенными ниже рекомендациями.

3.1.2 Решение алгебраической системы уравнений методом Крамера

Обозначим матрицу коэффициентов левых частей исходной системы уравнений символом A, а матрицу правых частей символом B.

Пользуясь значениями коэффициентов у искомых неизвестных X, на рабочем столе компьютера заносим приведенный ниже текст.

ORIGIN : = 1

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Далее определяем значение детерминанта A : = | A | . Заменяя последовательно столбцы матрицы A значениями величины b матрицы B, определяем значения детерминантов $\mathbf{D_1, D_2, D_3 D_4}$.

$$D_1 := \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \right| \qquad D_2 := \left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \right|$$

$D_1 = ▮$ $\qquad$ $D_2 =,$

$$D_3 := \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{pmatrix} \right| \qquad D_4 := \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{pmatrix} \right|$$

$D_3 = ▮$ $\qquad$ $D_4 = ▮$

Значения неизвестных X1, X2, X3 и X4 определяются по формулам

$$X1 := \frac{D_1}{\Delta} \qquad X2 := \frac{D_2}{\Delta} \qquad X3 := \frac{D_3}{\Delta}$$

3.1.3 Решение системы алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы

Обратная матрица формируется с помощью панели **Matrix** путем вызова операции X^{-1}

$$P := A^{-1} \cdot B \qquad P := \begin{pmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} P1 = X1 \\ P2 = X2 \\ P3 = X3 \\ P4 = X4 \end{matrix}$$

Сравнение этих результатов с результатами расчетов методом Крамера показывают, что они идентичны.

3.1.4. Решение системы алгебраических уравнений с помощью встроенной функции find

Сначала необходимо установить начальные значения переменных X

Начальные значения:

$X1 := 0 \qquad X2 := 0 \qquad X3 := 0 \qquad X4 := 0$

Затем вводится обязательное слово Given. Ниже заносится исходная система уравнений. Особенностью этой записи является то, что знаки равенств в системе берутся из панели Boolean.

Given

$$X1 + 2 \cdot X2 + 3 \cdot X3 + 4 \cdot X4 = 30$$

$$-X1 + 2 \cdot X2 - 3 \cdot X3 + 4 \cdot X4 = 10$$

$$X2 - X3 + X4 = 3$$

$$X1 + X2 + X3 + X4 = 10$$

Встроенная функция **find** берется из категории **Solving**

$$R := \mathrm{Find}(X1, X2, X3, X4) \qquad R := \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R1 = X1 \\ R2 = X2 \\ R3 = X3 \\ R4 = X4 \end{matrix}$$

Убеждаемся, что результат получился тот же что и в предыдущих методах решения.

3.1.5. Формирование модели полумарковского процесса

3.1.5.1. Необходимые теоретические сведения

Случайный процесс, при котором переходы между состояниями являются Марковскими, а времена нахождения в любом из состояний описываются не экспоненциальной, а любой произвольной функцией распределения (в том числе постоянным временем), называется **полумарковским.**

Один из характерных примеров полумарковского процесса эксплуатации - замена агрегата. Замена агрегата может быть вызвана следующими причинами:

- замена после отработки заданного ресурса Тр
- замена при отказе агрегата ($\eta(t) > \eta^{**}$), η^{**}- технический параметр, при достижении которого наступает отказ;
- замена при достижении допустимого уровня η^* параметра ($\eta > \eta^*$) при непрерывном контроле (профилактическая замена);
- замена при достижении допустимого уровня η^* параметра при дискретном контроле.

Процесс эксплуатации с заменой агрегата может быть представлен как процесс нахождения агрегата в следующих состояниях:

И - исправен (использование на самолете);

Н - неисправен;

В - восстановление;

З - профилактическая замена;

С - хранение на складе;

П - проверка исправности.

В настоящей работе рассматриваются процессы с одной неисправностью и схемы замены агрегата после отработки заданного ресурса и профилактическая замена при дискретном контроле параметра.

Граф состояний замены по наработке

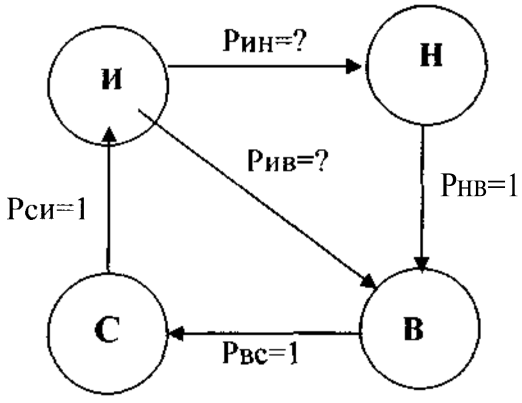


Рис.3.1

Уравнения:

Для состояния И:

$$\pi_{с}P_{си} - \pi_{и}P_{ив} - \pi_{и}P_{ин} = O$$

Для состояния Н:

$$я_{н}P_{ин} - я_{н}P_{нв} = O$$

Для состояния В:

$$я_{н}P_{нв} + я_{и}P_{ив} - я_{в}P_{вс} = O$$

Для состояния С:

$$я_{в}P_{вс} - я_{с}P_{си} = O$$

Нормировочное условие:

$$\pi_{н} + я_{н} + я_{в} + \pi_{с} - 1$$

Для удобства записей на компьютере заменим величины $\pi_{и}, \pi_{н}. \pi_{в}, \pi_{с}$ обозначениями X1, X2, X3, X4

Поскольку неизвестных четыре, а уравнений пять, то от одного уравнения можно избавится, например от третьего уравнения.

Решение полученной системы уравнений может быть сделано любым из рассмотренных выше способов. Рассмотрим вариант решения с использованием встроенной функции **find.**

Сначала записываются начальные значения переменных.

X1 := 1   X2 := 0   X3 := O   X4 := O

Ниже приведен последующий порядок записей.

Given

$$-X1 + X4 = 0$$
$$X1\,P_{ин} - X2 = O$$
$$X3 - X4 = O$$
$$X1 + X2 + X3 + X4 = 1$$

R:= find(X1,X2,X3,X4)

$$R := \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} \qquad R_1 = X1 \qquad R_2 = X2 \qquad R_3 = X3 \qquad R_4 = X4$$

Знаки равенств в системе уравнений - булевые операторы.

Значение величины $P_{ин}$ задается в вариантах исходных данных, помещенных в ниже приведенной таблице.

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_{ин}$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12

$$P_{нв} = P_{вс} = P_{си} = 0$$

Граф профилактической замены при дискретном контроле параметра

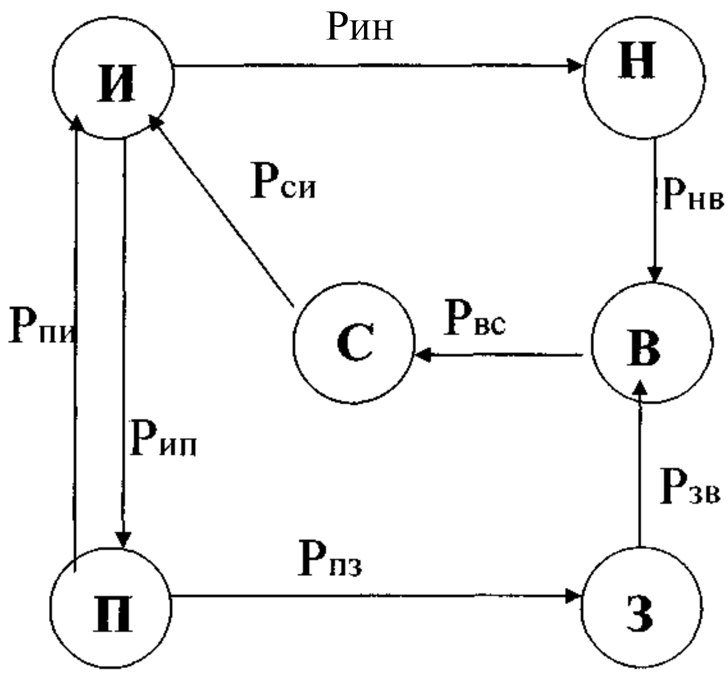


Рис.3.2

Относительно величин Рнв, Рвс, Рзв и Рси можно определенно сказать, что Рнв = Рвс = Рзв = Рси = 1 . Величины Рин, Рип, Рпи и Рпз определяются из статистических данных или должны быть заданы.

Аналогично предыдущему случаю заменим величины π_i на XI, в частности для состояния **И** – на X1, для **Н** – на X2, для **В** – на X3, для С - на X4, для 3 - на X5, для П - на X6.

С учетом сказанного решение задачи с использованием встроенной функции **find** будет иметь следующий вид.

$X1 = 1 \quad X2 = 0 \quad X3 = 0 \quad X4 = 0 \quad X5 = 0 \quad X6 = 0$ - начальные значения.

Given

$$X1 \cdot P_{пи} + X4 \cdot P_{си} - X1 \cdot P_{ип} - X1 \cdot P_{ин} = 0$$
$$X1 \cdot P_{ин} - X2 \cdot P_{нв} = 0$$
$$X2 \cdot P_{нв} + X5 \cdot P_{зв} - X3 \cdot P_{вс} = 0$$
$$X3 \cdot P_{вс} - X4 \cdot P_{си} = 0$$
$$X6 \cdot P_{пз} - X5 \cdot P_{зв} = 0$$
$$X1 \cdot P_{ип} - X6 \cdot P_{пи} - X6 \cdot P_{пз} = 0$$

$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 = 1$ - нормировочное условие.

Как и в предыдущем случае от одного из уравнений можно избавиться например, от первого уравнения.

Далее вызываем встроенную функцию **find.**

$$R := \mathrm{find}(X1,X2,X3,X4,X5,X6)$$

$$R = \begin{pmatrix} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ R6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R1 \equiv X1 \\ R2 \equiv X2 \\ R3 \equiv X3 \\ R4 \equiv X4 \\ R5 \equiv X5 \\ R6 \equiv X6 \end{matrix}$$

Задача решена. Искомые значения получены в виде членов матрицы R.

3.2. Лабораторная работа № 2

Тема: Построение регрессивных моделей эксплуатационных параметров объектов на ПЭВМ с помощью программного средства Mathcad.

Цель работы: Освоить навыки построения регрессий по данным параметров объектов, используя возможности системы Mathcad.

3.2.1. Постановка задачи

Регрессия - зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от некоторой другой случайной величины или от нескольких случайных величин.

По данным наблюдений значений случайных величин эти наблюдения наносятся на координатную сетку. Каждому значению x будет соответствовать свое значение y. В результате мы получим множество точек, отражающих индивидуальные наблюдения.

Чтобы выявить характер зависимости между изменениями двух случайных величин, необходимо произвести обработку полученных экспериментальных данных.

Один из методов обработки состоит в следующем. Производится группирование экспериментальных данных по какому-либо признаку (например, по группам самолетов), определяются средние значения по группам, и по этим средним значениям строится график зависимости $y = f(x)$.

Функции $f(x)$ могут быть линейные, экспоненциальные, показательные и др. О виде функции приближенно можно судить по значению коэффициента корреляции. Если этот коэффициент равен единице, то функция является строго линейной. Если этот коэффициент не равен единице, но близок к этому значению, то есть основание построить линейную регрессию. Если коэффициент корреляции существенно отличается от единицы, то имеет место нелинейная регрессия.

В настоящей работе рассматриваются линейная и нелинейная регрессии.

Линейная регрессия строится по средним значениям различных групп самолетов. Рассматриваются взаимосвязи взлетной массы и взлетной тяги для разных типов самолетов.

Нелинейная регрессия рассматривается как зависимость налетов на отказ от взлетной массы самолета.

Исходные данные являются общими для всех студентов, выполняющих данную работу.

3.2.2. Исходные данные для выполнения работы

А. Линейная регрессия

Группа 1 *Самолеты местных воздушных линий*

Типы самолетов	Як-40	Ан-24	Ан-28	Ил-114
Взлетная масса, *т*	16.1	21.8	6.5	21.0
Взлетная тяга двигателей, *кгс*	3000	5100	1920	5000

Группа 2 *Самолеты ближних магистральных воздушных линий*

Типы самолетов	Ту-134	Як-42	МД-81
Взлетная масса, *т*	47.1	57.0	63.5
Взлетная тяга двигателей, *кгс*	13600	13000	17400

Группа 3 *Средне магистральные пассажирские самолеты*

Типы самолетов	Ту-154В	Ту-154М	Ту-204
Взлетная масса, *т*	98	100	93.5
Взлетная тяга двигателей, *кгс*	31500	33000	36000

Группа 4 *Дальне магистральные пассажирские самолеты*

Типы самолетов	Ил-62М	Ил-86	Ил-96-200
Взлетная масса, *т*	167	210	216
Взлетная тяга двигателей, *кгс*	44000	52000	64000

Б. Нелинейная регрессия

Таблица 1

Взлетная масса, *т*	5.1	12.3	48	87	157	162	200
Налет на отказ, выявленный в полете, Тп (в часах)	316	178	78	58	61	50	33

Таблица 2

Взлетная масса, *т*	5.8	6.0	12.3	21	45	50	87	157	162	200
Налет на отказ, выявленный на земле, Тз (в часах)	128	110	74	48	30	15	20	18	16	8.5

3.2.3. Формирование линейной модели регрессии

Обозначим X1, X2, X3, X4 - взлетные массы групп самолетов
и Y1, Y2, Y3, Y4 – взлетные тяги двигателей этих групп.

Сначала рассчитываем средние значения величин XI и YI для каждой группы самолетов.

Для первой группы:

$$X1 := \begin{pmatrix} X1_1 \\ X1_2 \\ X1_3 \\ X1_4 \end{pmatrix} \quad Y1 := \begin{pmatrix} Y1_1 \\ Y1_2 \\ Y1_3 \\ Y1_4 \end{pmatrix} \qquad X2 := \begin{pmatrix} X2_1 \\ X2_2 \\ X2_3 \end{pmatrix} \quad Y2 := \begin{pmatrix} Y2_1 \\ Y2_2 \\ Y2_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{mean}(X1) = \bullet \quad \mathrm{mean}(Y1) = \blacksquare \qquad \mathrm{mean}(X2) = \blacksquare \quad \mathrm{mean}(Y2) = \blacksquare$$

$$X3 := \begin{pmatrix} X3_1 \\ X3_2 \\ X3_3 \end{pmatrix} \qquad Y3 := \begin{pmatrix} Y3_1 \\ Y3_2 \\ Y3_3 \end{pmatrix} \qquad X4 := \begin{pmatrix} X4_1 \\ X4_2 \\ X4_3 \end{pmatrix} \quad Y4 := \begin{pmatrix} Y4_1 \\ Y4_2 \\ Y4_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{mean}(X3) = \blacksquare \quad \mathrm{mean}(Y3) = \blacksquare \quad \mathrm{mean}(X4) = \blacksquare \quad \mathrm{mean}(Y4) = \blacksquare$$

Встроенная функция mean берется из категории статистических функций - Statistics.

Далее формируются исходные данные для построения регрессии по средним значениям.

Средние значения по взлетным массам обозначим через X, средние значения по взлетным массам через Y.

$$X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$$

$$R := \mathrm{corr}(X, Y) \qquad R = \blacksquare$$

Убеждаемся, что коэффициент корреляции R близок единице, что свительствует о возможности формировать линейную регрессию.

Общий вид линейной функции

$$y(X) := AO + A1 \cdot x$$

Величины АО и А1 определяем спомощью встроенных функций intercept и slope, находящихся в категории Curve Fitting

$$AO := \text{intercept}\ (X, Y) \qquad AO = \blacksquare$$
$$A1 := \text{slope}\ (X, Y0 \qquad A1 = \blacksquare$$

Приведем пример построения графика линейной регрессии для некоторых конкретных значений X и Y.

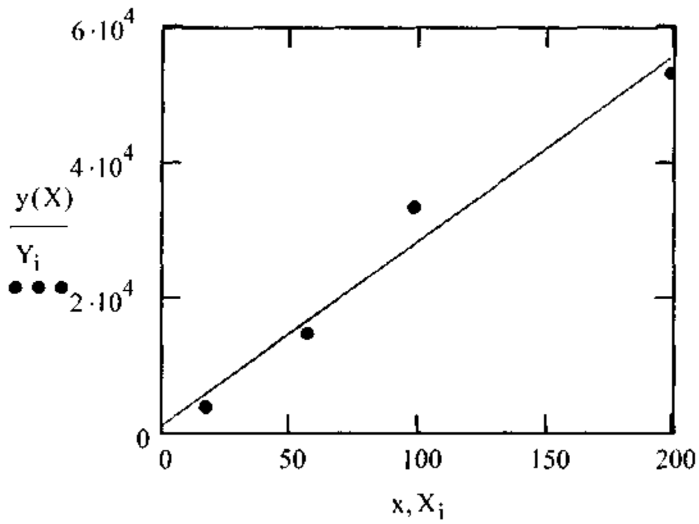
$$X := \begin{pmatrix} 16.38 \\ 55.833 \\ 97.167 \\ 197.667 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 3755 \\ 14750 \\ 33500 \\ 53330 \end{pmatrix}$$

$A0 := \text{intercept}(X, Y)$ $\quad A0 = 1.069 \times 10^3$ $\quad A1 := \text{slope}(X, Y)$ $\quad A1 = 275.325$

$i := 0..4$ $\quad x_i :=$

16.38
55.833
97.167
197.667

$y(X) := A0 + A1 \cdot x$



3.2.4 Формирование нелинейной функции регрессии

Нелинейная функция регрессии формируется по данным таблиц 1 и 2. Поскольку порядок их формирования одинаков, покажем его на примере данных таблицы 1.

Обозначим взлетные массы через X1, а налет на отказ через Y1
Предполагаем, что нелинейная функция является экспоненциальной вида f(x)=aexp(bx) +c.

$$X1 := \begin{pmatrix} 5.1 \\ 12.3 \\ 48 \\ 87 \\ 157 \\ 162 \\ 200 \end{pmatrix} \quad Y1 := \begin{pmatrix} 316 \\ 178 \\ 78 \\ 58 \\ 61 \\ 50 \\ 33 \end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix} 400 \\ -0.01 \\ 50 \end{pmatrix}$$

K := corr(X1, Y1) K = –0.781

P := expfit(X1, Y1)

P = ▮ a = 432.696
b ≡ -0.1
c = 54.882

$i := 0..7 \qquad x := 0, 5 .. 200 \qquad f(x) := 432.696e^{0.1 \cdot x} + 54.882$

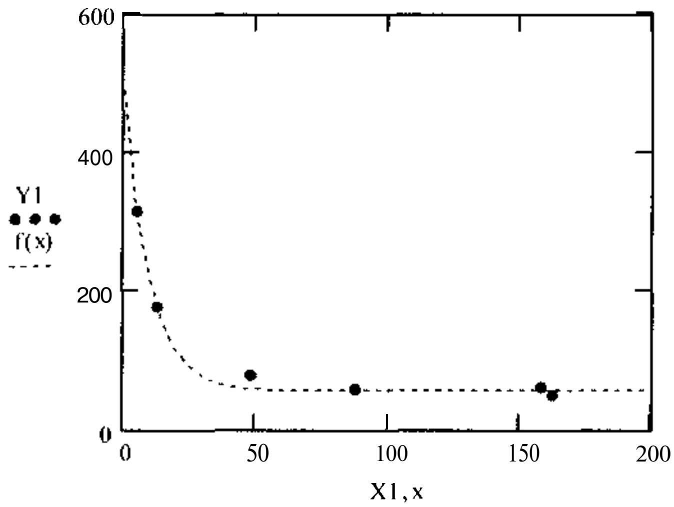


Рис.3.5.

Значение встроенной функции **expfit** берется из категории Curve Fitting. Кроме этой функции могут быть использованы и другие нелинейные функции, например, показательные.

Величины z являются данными, необходимыми для начала определения значений параметров a, b и c .

Значение коэффициента корреляции K существенно отличается от единицы. Это свидетельствует о том, что функция регрессии явно нелинейная. Формирование нелинейной функции регрессии по второй таблице аналогично изложенному выше.

Список литературы

1. А.А. Ицкович, П.К. Кабков. Вероятностно-статистические модели эксплуатации летательных аппаратов:Учебное пособие. Часть II .- М.:МГТУ ГА,2006.
2. Е.М. Кудрявцев. Mathcad 11 : Полное руководство по русской версии.-М.:ДМК Пресс, 2005.