ТЕМА 2. Цепи переменного тока

П.1. Гармонический ток

П.2. Комплексный ток. Комплексное напряжение.

П.3. Комплексное сопротивление (импеданс)

П.4. Импедансы основных элементов цепи.

П.5. Свободные колебания в контуре

П.1. Гармонический ток

Периодическим (колебательным) называется процесс, регулярно повторяющийся во времени.

Минимальная часть колебательного процесса, которая полностью повторяется, называется полным колебанием.

Длительность одного полного колебания называется периодом. Обозначается символом Т.

Частота ν – количество полных колебаний за одну секунду.

Частным случаем периодического процесса является гармонический процесс.

Гармоническим называется процесс, при котором зависимость некоторой характеристики процесса от времени выглядит как гармоническая функция, т.е. характеристика меняется по закону Sin или Cos.

Гармонический ток – это ток, величина которого меняется по гармоническому закону.

$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0i})$ - закон гармонического тока в цепи.

I_0 – амплитуда тока (max значение величины тока),

ω – циклическая частота,

φ_{oi} – начальная фаза тока – значение аргумента косинуса в начальный момент времени.

t – время,

T – <u>период</u> - минимальное время, через которое функция $I(t)$ полностью повторяется,

$(\omega t+\varphi_{oi})$ – <u>фаза тока</u> – значение аргумента косинуса в любой момент времени.

ν - <u>частота</u> – количество полных колебаний за одну секунду.

Уравнения связи:

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \nu \equiv f = 1/T.$$

П.2. Комплексный ток. Комплексное напряжение.

Проблема: Подобрать математический объект, удобный для исследования цепей с переменным током.

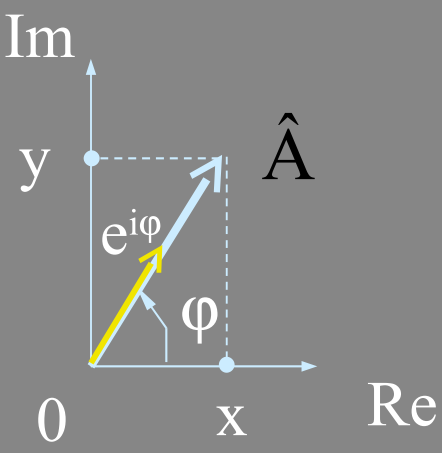
Решение: Используем комплексные числа.

Каждое КЧ это совокупность двух обычных (действительных) чисел, т.е. вектор, проведенный в так называемой комплексной плоскости.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ называют горизонтальную ось комплексной плоскости.

МНИМОЙ называют вертикальную ось комплексной плоскости.

Графически



Алгебраическое представление КЧ $\hat{A}$:

$$\hat{A} = x + i \cdot y$$

$x = \mathrm{Re}\,\hat{A}$ - действительная часть ,

$y = \mathrm{Im}\,\hat{A}$ - мнимая часть ,

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

A_0 – амплитуда (модуль)

φ - фаза КЧ $\hat{A}$.

$\hat{A} = A_0 \cdot e^{i\varphi}$ - экспоненциальное представление.

Известна формула Эйлера для комплексной экспоненты:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Выражение алгебраического представления КЧ через экспоненциальное :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\hat{A} = A_0 \cdot \cos\varphi, \\ \operatorname{Im}\hat{A} = A_0 \cdot \sin\varphi. \end{cases} \qquad \hat{A} = \operatorname{Re}\hat{A} + i(\operatorname{Im}\hat{A}) = A_0(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Экспоненциальное через алгебраическое:

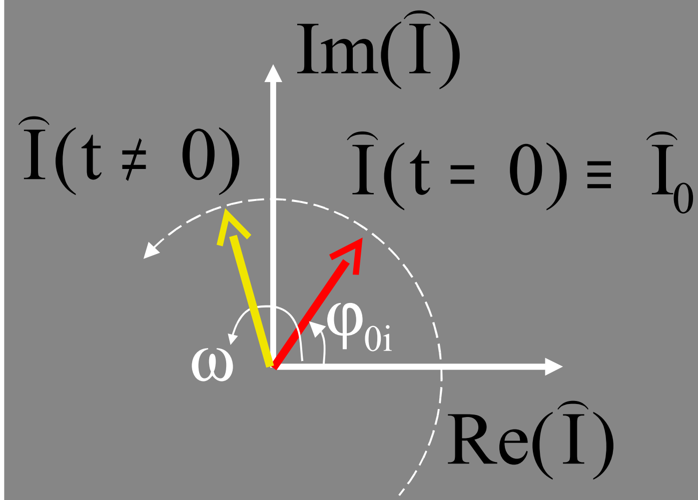
$$\hat{A} = A_0 \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow A_0 = \sqrt{(\operatorname{Re}\hat{A})^2 + (\operatorname{Im}\hat{A})^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im}\hat{A}}{\operatorname{Re}\hat{A}}.$$

*

<u>Комплексный ток</u> – комплексная величина, действительная часть которой равна «настоящему току» (фаза КТ равна фазе настоящего тока).

Для гармонического тока: $\hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_{oi})} = I_0 e^{i \cdot \varphi(t)}$.

Алгоритм построения визуальной модели перехода от переменного гармонического тока к комплексному току:



1) Строим 2 взаимно перпендикулярные оси Re и Im.

2) Проводим вектор комплексной амплитуды тока $\hat{I}_0$, у которого длина равна амплитуде реального тока, а угол с осью Re равен начальной фазе тока φ_{0i} .

3) Вращаем вектор комплексной амплитуды с угловой скоростью ω против часовой стрелки вокруг начала координат. Получим $\hat{I}(t)$.

<u>Комплексная амплитуда</u> (КА) некоторой комплексной величины есть сама комплексная величина, взятая в начальный момент времени.

Используем свойство КЧ: $e^{i(\omega t+\varphi_0)} = e^{i\omega t}\cdot e^{i\varphi_0}$.

Тогда для комплексных тока и напряжения можно записать:

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_0 \cdot e^{i\omega t}, \qquad \hat{U}(t) = \hat{U}_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

Для комплексных амплитуд: $\hat{U}_0 = U_0 \cdot e^{i\varphi_{ou}}, \quad \hat{I}_0 = I_0 \cdot e^{i\varphi_{oi}}$.

Комплексные амплитуды это комплексные векторы, которые на комплексной плоскости <u>неподвижны</u>. Они соответствуют «мгновенной фотографии» комплексных токов и напряжений, сделанной в <u>начальный</u> момент времени (t = 0).

П.3. Комплексное сопротивление (импеданс)

Проблема: Как связаны комплексные токи и напряжения?

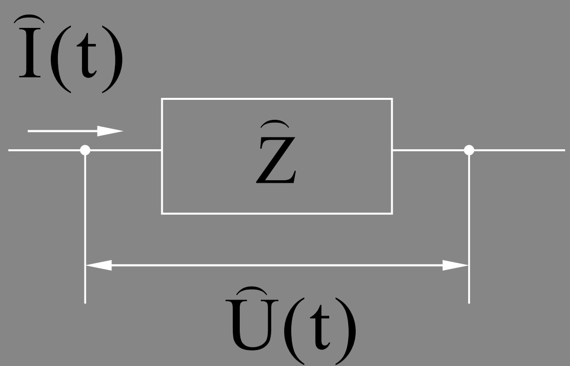
Решение: используем законы, ранее полученные для постоянного тока.

Закон Ома для участка цепи: $I = \dfrac{U}{R}.$

Закон Ома для полной цепи: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + R_i}.$

Законы Кирхгофа: $\sum I_i^{вх} = \sum I_i^{вых}, \quad \sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i.$

Эти законы выполняются и для линейных цепей <u>переменного</u> гармонического тока, если их переписать для <u>комплексных</u> характеристик.



<u>Импеданс</u> – это характеристика элемента цепи, численно равная отношению комплексного напряжения на данном элементе, к комплексному току через данный элемент.

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \hat{Z}.$$

Для гармонического тока

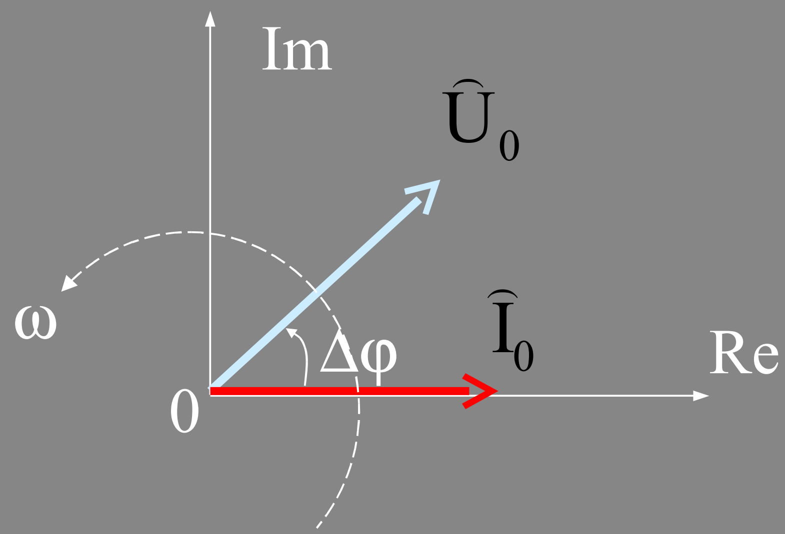
$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_0 e^{i(\omega t)}}{\hat{I}_0 e^{i(\omega t)}} = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = \frac{U_0}{I_0} e^{i(\Delta\varphi)}.$$

$$\hat{U}_0 = \hat{Z} \cdot \hat{I}_0.$$

<u>Импеданс</u> – это коэффициент пропорциональности между комплексными амплитудами тока и падения напряжения на данном элементе.

ТЕСТ

Пример: Пусть напряжение на данном элементе опережает ток на угол Δφ. Принято считать начальную фазу тока равной 0.



Комплексная амплитуда (КА) тока это вектор, направленный по горизонтальной оси.

Вектор КА напряжения идет под углом Δφ к вектору КА тока.

П.4. Импедансы основных элементов цепи.

Рассмотрим резистор: закон Ома $\frac{U}{I} = R.$

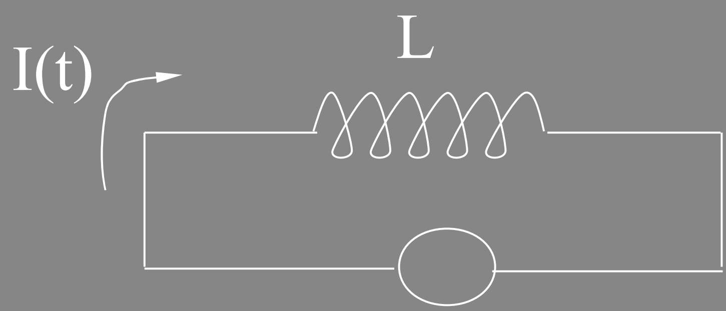
Для комплексных амплитуд аналогично: $\frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = R.$

Фазы напряжения и тока одинаковые.

Импеданс резистора, чисто активный и равен R.

$$\hat{Z}_R = R.$$

б) Рассмотрим <u>катушку индуктивности</u>.



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 Cos(\omega t+\varphi_{0\varepsilon})$$

Действует закон ЭМИН (самоиндукции - СИ).

$$\varepsilon_{\text{с.и.}} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Запишем закон СИ для комплексных величин:

$$\widehat{\varepsilon}_{\text{с.и.}} = -L\frac{d\widehat{I}}{dt}.$$

Второй закон Кирхгофа $0 = \widehat{\varepsilon}_{\text{с.и.}} + \widehat{\varepsilon}(t)$, отсюда

$$\underbrace{L\frac{d\widehat{I}}{dt}} = \widehat{\varepsilon}(t), \qquad \widehat{U}_L = \widehat{\varepsilon}(t) = L\frac{d\widehat{I}}{dt}.$$

Теперь используем выражение для тока (можно считать $\varphi_{0i} = 0$):

$$\hat{I}(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t)} \Rightarrow \frac{d\hat{I}}{dt} = I_0 \cdot (i\omega) \cdot e^{i\omega t}.$$

Подставим в выражение для напряжения и получим

$$\hat{U}_L = L(i\omega)\underbrace{I_0 \cdot e^{i(\omega t)}}_{\hat{I}(t)}.$$

Делим на ток $\frac{\hat{U}_L}{\hat{I}} = \hat{Z} = i\omega L \Rightarrow$ $\hat{Z}_L = i\omega L$ - импеданс катушки.

ТЕСТ

в) Рассмотрим <u>конденсатор</u>.

Известно $U_c = \dfrac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе.

После дифференцирования по времени получим

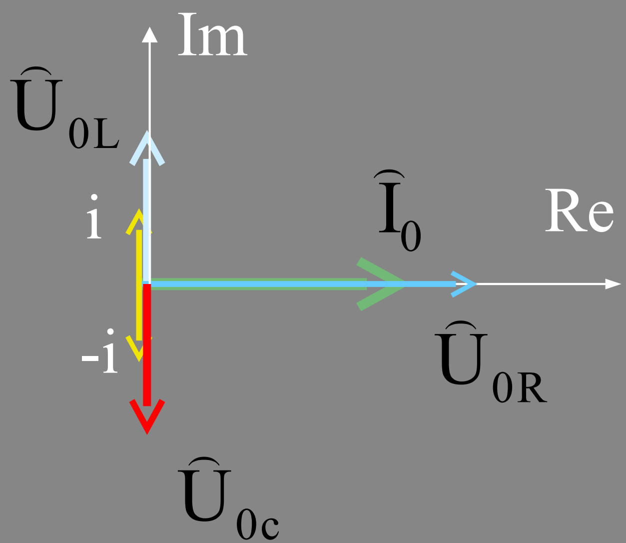
$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} I.$$

Для комплексных величин: $\dfrac{d\widehat{U}}{dt} = \dfrac{1}{C}\widehat{I}.$

Пусть $\hat{U}_c = U_{oc} \cdot e^{i(\omega t + \varphi_{ou})}$; $\widehat{I} = C \cdot \dfrac{d\widehat{U}_c}{dt} = C \cdot i \cdot \omega \cdot \widehat{U}_c(t).$

$\widehat{Z}_C = \dfrac{\widehat{U}_C}{\widehat{I}} = \dfrac{1}{i\omega C} = -\dfrac{i}{\omega C} \Rightarrow \widehat{Z}_c = -\dfrac{i}{\omega C}$ - импеданс конденсатора.

ТЕСТ

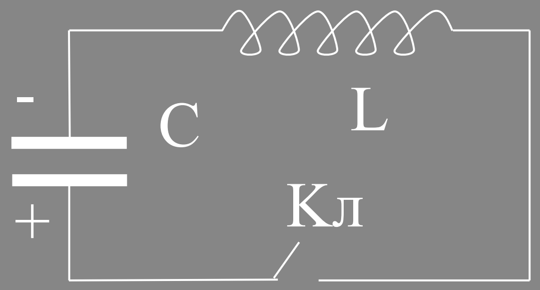


На рисунке приведена сводная диаграмма комплексных амплитуд токов и напряжений на элементах цепи переменного гармонического тока.

ЗАМЕЧАНИЕ: Начальная фаза тока обычно считается равной 0.

ТЕСТ

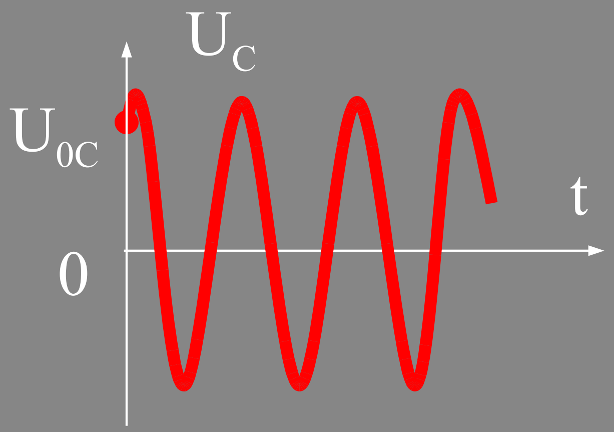
П.5. Свободные колебания в контуре



***<u>Колебательный контур</u>** – катушка индуктивности и конденсатор, соединенные в цепь.*

Применяем второй закон Кирхгофа: $\sum U_i = \sum \varepsilon_i$

Используем выражения для комплексных амплитуд и подставим их в закон Кирхгофа. Решение полученного дифференциального уравнения: $U_c(t) = U_{0C} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_{ou})$

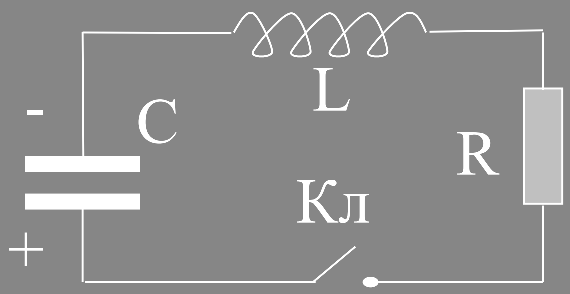


Частота собственных (свободных, незатухающих) гармонических колебаний:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Пусть колебательный контур, содержит конденсатор, катушку и резистор.

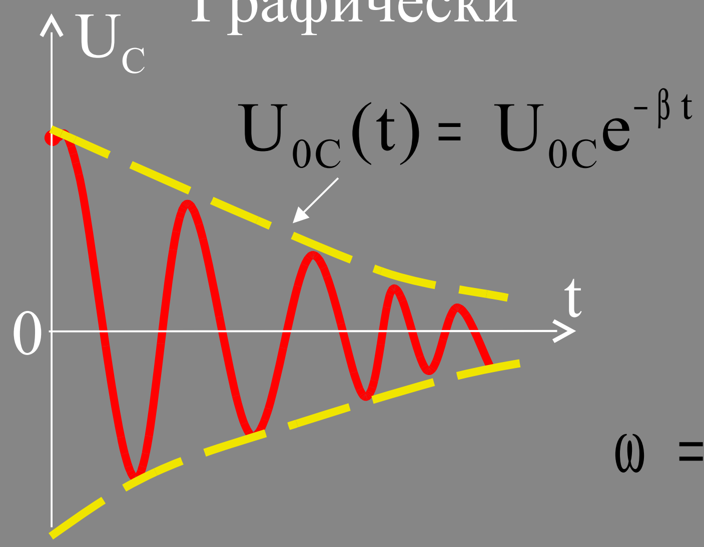


$$U_c(t) = U_{0C} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t)$$

- свободные затухающие колебания.

$$\beta = \frac{R}{2L}$$ - коэффициент затухания.

Графически



Частота свободных затухающих колебаний в контуре с резистором отличается от частоты собственных колебаний ω_0 :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad \beta \le \omega_0; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

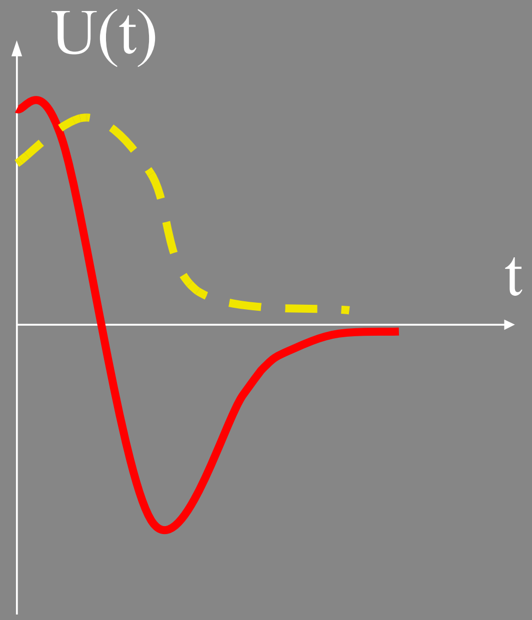
$\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ - характеристическое (волновое) сопротивление контура.

$2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{КР} = 2\rho$ - критическое сопротивление контура.

ТЕСТ

АПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

<u>Апериодическим</u> называется процесс, при котором характеристика процесса в колебательной системе асимптотически приближается к нулю.



Если $R > R_{КРИТ}$ - колебательный процесс является апериодическим.

СРС 2 стр. Законспектировать тему «Вынужденные колебания в контуре. Резонанс».

<u>Резонансом</u> называется явление резкого возрастания амплитуды колебаний некоторой физической характеристики при приближении частоты внешнего воздействия к некоторому значению, называемому резонансной частотой.

Резонанс напряжения на конденсаторе в контуре, изображенном выше, происходит при частоте

$$\omega_{\text{РЕЗ}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

В параллельном колебательном контуре резонанс токов происходит на частоте, равной

$$\omega_{\text{РЕЗ}} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}.$$

ТЕСТ ТЕСТ