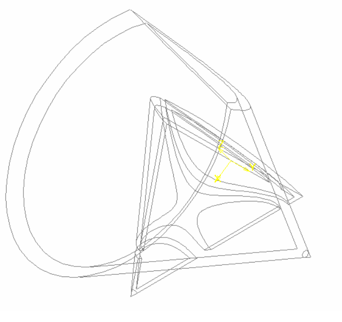
МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Л.В. МИХНЕНКОВ

ОСНОВЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

для студентов всех специальностей всех форм обучения



МОСКВА

2001

Учебное пособие « Основы начертательной геометрии ». –М:МГТУ ГА, 2001- 79 с.

Данное учебное пособие издаётся в соответствии с учебным планом для студентов 1 курса всех специальностей дневного и заочного обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры начертательной геометрии и графики 20.02.2001г, прот.№7 и методической комиссии механического факультета 27.03.2001г, прот.№7.

Рецензенты: д.т.н., проф. Э.К. Волошин-Челпан,

к.т.н., доц. М.М. Михнев.

ВВЕДЕНИЕ

Существующие учебники, как правило, содержат подробное изложение курса начертательной геометрии в объёме, существенно превосходящем предусмотренный действующим учебным планом, по которому осуществляется обучение на кафедре начертательной геометрии и графики МГТУ ГА. В связи с этим кафедра приняла решение подготовить и издать учебное пособие, в котором бы сжато был изложен необходимый материал, проиллюстрированный типовыми задачами.

Для закрепления знаний, полученных студентами при изучении теоретической части курса, в учебном пособии приведены контрольные вопросы и задачи.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ

Обозначения

1.Геометрическая фигура обозначается буквой Ф.

2.Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита (A,B,C...) или арабскими цифрами (1,2,3...).

3.а) линии, произвольно расположенные в пространстве, - строчными буквами латинского алфавита (a,b,c...);

б) линии уровня: h - горизонталь, f - фронталь, p - профильная прямая;

в) (AB) - прямая, проходящая через точки A,B. [AB) - луч из точки A. [AB] - отрезок прямой.

4. Поверхности - прописными буквами греческого алфавита ($\Delta, \Gamma, \vartheta ... \varsigma, \Omega$).

5. Углы - $\angle$ABC или ($\angle\alpha$, $\angle\beta$...).

6. $|AB|$ - расстояние между точками A и B; $|A\Theta|$ - расстояние между точкой A и поверхностью Θ и т.д..

7. Плоскости проекций – буквами: Π_1 - горизонтальная, Π_2 - фронтальная, Π_3 - профильная.

Символы

1. = - равны, результат действия.

2. $\cong$ - конгруэнтны (совмещаемы), $\equiv$ - тождественны, совпадают.

3. ∞ - подобны.

4. $\parallel$, $\perp$, °/ - параллельны, перпендикулярны, скрещиваются.

5. $\rightarrow$ - параллельное проецирование, \ - отрицание.

6. $\in$ - принадлежит. $A \in n$ - точка A принадлежит линии n.

7. $\subset$ - включает (является подмножеством). $\Gamma \supset a$ - поверхность Г включает в себя линию a (или множество точек линии a является подмножеством точек поверхности Г).

8. $\cup$ - объединение множеств (ABC = AB$\cup$BC - ломаная линия ABC есть объединение отрезков AB и BC).

9. $\cap$ -пересечение множеств ($m = \Theta \cap \Sigma$-линия m-результат пересечения Θ и Σ).

10. $\Rightarrow$ - импликация - логическое следствие («если, ... то»).

11. $\Leftrightarrow$ - эквивалентность.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ ЧЕРТЕЖА

Проекционный чертёж, т.е. чертёж, построенный методом проецирования пространственных объектов на плоскость, является в начертательной геометрии основным средством для изучения свойств пространственных фигур.

Изучение вопросов, связанных с методикой построения проекционных чертежей пространственных объектов, является прямой задачей начертательной геометрии. Обратная её задача - изучение методики чтения чертежей или мысленного восстановления пространственных объектов по их чертежам.

1. 1. Метод проекций

Основным изобразительным способом для геометрических элементов является линия. С помощью линий задают проекции точки, плоскости, любой пространственной фигуры.

Аппарат проецирования включает в себя проецирующие лучи, проецируемый объект и плоскость, на которую осуществляется проецирование

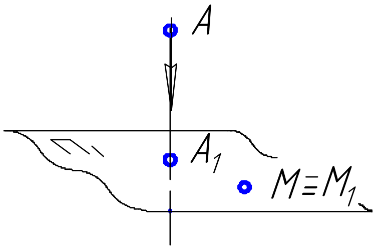


Рис. 1.1

Все лучи, проецирующие предмет, исходят из одной точки, называемой центром проекций. Если центр проекций S находится на определённом расстоянии от плоскости проекций П, то такое проецирование называется центральным. Если S стремится в бесконечность, то проецирующие лучи становятся параллельными и такое проецирование называется параллельным.

Ортогональное (прямоугольное) проецирование есть частный случай параллельного проецирования, когда все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций.

Пусть имеем некоторую горизонтальную плоскость проекций $П_1$ (рис.1.1). Чтобы получить на этой плоскости проекцию любой точки пространства, например, точки А, нужно через эту точку провести прямую, перпендикулярную плоскости $П_1$, до пересечения с ней в точке A_1. A_1 является ортогональной проекцией точки А. Условно эти действия можно записать так: $AA_1 \perp П_1$; $A_1 = AA_1 \cap П_1$. Прямая AA_1 называется **проецирующей прямой**.

1. 2. Основные свойства ортогонального проецирования.

1. Проекция любой точки пространства - единственная точка на плоскости проекций.

Справедливость этого утверждения вытекает из самой процедуры проецирования. В частности, любая точка, лежащая в плоскости $П_1$ (например, точка М на рис.1.1), имеет единственную проекцию, совпадающую с этой точкой

(M≡M_1). Необходимо помнить, что обратная формулировка этого свойства неверна. Действительно, любая точка на плоскости $П_1$ является проекцией не единственной точки пространства, а целого множества точек, принадлежащих проецирующей прямой. Это значит, что одна единственная проекция точки не определяет эту точку в пространстве. Точки, лежащие на одной и той же проецирующей прямой, называются **конкурирующими**. Проекции конкурирующих точек совпадают. На рис.1.2 показаны конкурирующие точки К и L и их совпадающие проекции.

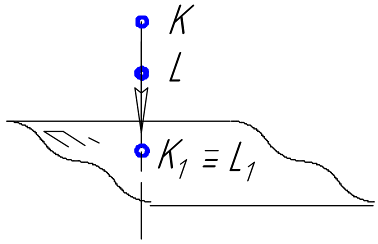


Рис.1.2

2. Проекция прямой в общем случае - единственная прямая на плоскости $П_1$.

Действительно, пусть точки А и В определяют некоторую прямую d в пространстве (рис.1.3).

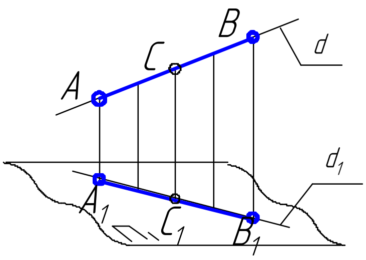


Рис.1.3

Тогда прямые, проецирующие все точки прямой d, составляют проецирующую плоскость ABB_1A_1, пересекающую плоскость проекций $П_1$ по прямой d_1. Прямая d_1 является совокупностью проекций всех точек прямой d, т.е. проекцией этой прямой. Исключением является любая проецирующая прямая, проекция которой вырождается в точку (например, прямая KL на рис.1.2). Утверждение, обратное свойству 2, неверно, так как любая прямая плоскости $П_1$ является проекцией множества прямых пространства, лежащих в одной проецирующей плоскости.

3. Если точка принадлежит прямой в пространстве, то проекция этой точки принадлежит проекции прямой, т.е. (рис.1.3.), если $C \subset AB$, то $C_1 \subset A_1B_1$. Обратное утверждение неверно (рассуждения аналогичны предыдущим).

4. Если отрезок параллелен плоскости проекций, то он проецируется в натуральную величину. Обратное утверждение также верно.

Например (рис.1.4), если отрезок прямой $EF \| П_1$, то $E_1F_1=EF$ и обратно, если $E_1F_1=EF$, то $EF \| П_1$. Справедливость этих утверждений вытекает из равенства противоположных сторон прямоугольника EFF_1E_1. Прямые, параллельные плоскости проекций, называются **линиями уровня** (например, прямая h на рис.1.4).

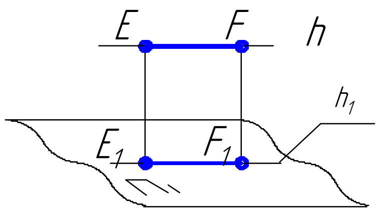


Рис.1.4

5. Если прямые в пространстве параллельны друг другу, то их проекции также параллельны между собой. Например (рис.1.5), если $a \| b$, то $a_1 \| b_1$. Действительно, плоскости, проецирующие прямые a и b, параллельны и, следовательно, параллельны прямые a_1 и b_1, являющиеся линиями пересечения этих плоскостей с плоскостью $П_1$.

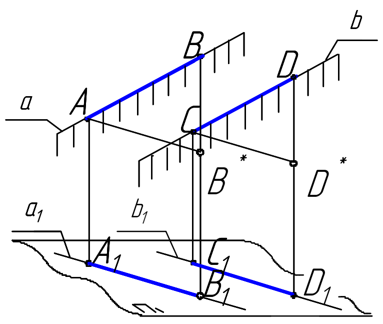


Рис.1.5

6. Если отрезки в пространстве параллельны друг другу, то отношение их длин сохраняется при проецировании. Например (рис.1.5), если $AB \| CD$, то $[AB]/[CD] = [A_1B_1]/[C_1D_1]$.

Для доказательства из концов отрезков проведём в проецирующих плоскостях прямые $AB^* \| A_1B_1$ и $CD^* \| C_1D_1$. Согласно свойству 4 $[AB^*]=[A_1B_1]$ и $[CD^*]=[C_1D_1]$. Тогда свойство 6 вытекает из подобия треугольников ABB^* и CDD^*. В частности, равные отрезки имеют равные проекции. Свойство 6 относится также к отрезкам, принадлежащим одной и той же прямой. Так, если точка делит пополам отрезок в пространстве, то её проекция делит пополам проекции этого отрезка.

7. Длина отрезка в пространстве равна длине гипотенузы прямоугольного треугольника, у которого один катет равен проекции отрезка, а второй - превышению одного конца отрезка над другим. Действительно, пусть имеем в пространстве отрезок AB (рис.1.6).

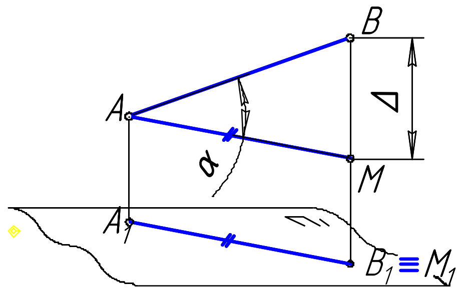


Рис.1.6

Проведём в проецирующей плоскости ABB_1A_1 прямую $AM \| A_1B_1$. В результате получим прямоугольный треугольник ABM (указанный в формулировке свойства 7), у которого Δ- превышение одного конца отрезка AB над другим, а $\angle \alpha$- угол наклона этого отрезка к плоскости $П_1$.

8. Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то этот прямой угол проецируется на неё в натуральную величину (рис.1.7).

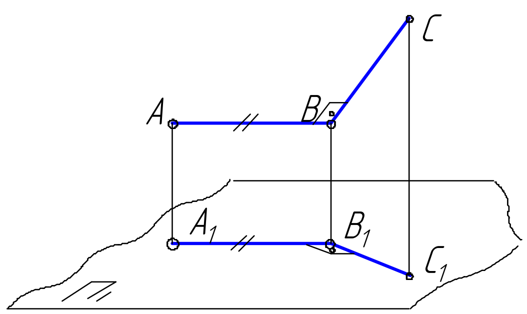


Рис.1.7

Действительны и два обратных утверждения: а) если $\angle A_1B_1C_1 = 90°$ и $AB \| П_1$, то $\angle ABC = 90°$; б) если $\angle A_1B_1C_1 = 90°$ и $\angle ABC = 90°$, то $AB \| П_1$ или $BC \| П_1$ (или вся плоскость $ABC \| П_1$).

Приведём доказательство теоремы.

Т.к. $AB \perp BC$ и $AB \perp BB_1$, то $AB \perp \Sigma(BC \cap BB_1)$, а следовательно, $AB \perp B_1C_1$. Но $AB \| A_1B_1$. Поэтому $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

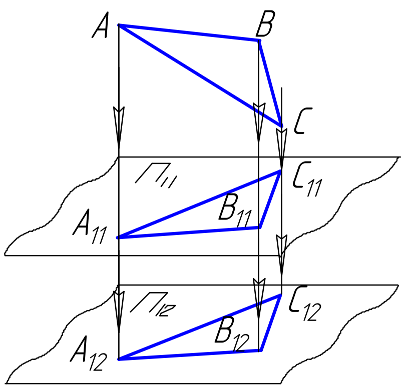


Рис.1.8

9. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций. Пусть проецируемая фигура - треугольник АВС (рис.1.8).

Спроецируем его на плоскости $П_{11}$ и $П_{12}$, параллельные друг другу. Отрезки $A_{11}A_{12}$, $B_{11}B_{12}$, $C_{11}C_{12}$ параллельны и равны между собой. Они являются рёбрами призмы, у которой основания $A_{11}B_{11}C_{11}$ и $A_{12}B_{12}C_{12}$ равны, т.к. лежат в параллельных плоскостях, что и требовалось доказать.

Фигура, поверхность которой нормальна плоскости проекций (например, призма $ABCC_1B_1A_1$), называется проецирующей.

2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ

Чертёж, геометрически равноценный изображаемой фигуре, т.е. позволяющий воспроизвести (реконструировать) оригинал, называется **обратимым чертежом**. Он позволяет решить обратную задачу начертательной геометрии, т.к. однозначно задаёт фигуру в пространстве.

Чертёж, состоящий из одной ортогональной проекции фигуры, не является обратимым. Действительно, при рассмотрении свойств ортогонального проецирования видно, что проекции фигур, заданные на плоскости $П_1$ не определяют однозначно свои оригиналы в пространстве (они могут служить проекциями конкурирующих фигур). Для получения обратимого чертежа проекционный чертёж необходимо дополнить. Существуют различные способы таких дополнений. Например, ортогональный чертёж фигуры дополняют числовыми отметками, которые показывают высоту расположения элементов фигуры над плоскостью $П_1$. Такие чертежи называются чертежами с числовыми отметками и применяются в топографии и строительстве.

В данном курсе будут рассмотрены два вида обратимых чертежей, применяемых в машиностроении: комплексный и аксонометрический.

Комплексный чертёж состоит из двух и более связанных между собой ортогональных проекций предмета. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций ($П_1$ и $П_2$), которые совмещаются (при определённых условиях) с плоскостью чертежа. Плоскость $П_1$ называется горизонтальной, а $П_2$ - фронтальной плоскостью проекций. Плоскость $П_2$ располагается перед наблюдателем вертикально (рис. 2.1).

Линия пересечения этих плоскостей называется **осью проекций** и обозначается x_{12} или в виде дроби $П_2/П_1$.

2.1. Точка

Любая точка пространства (например, точка А на рис.2.1) проецируется ортогонально на плоскости $П_1$ и $П_2$, образуя свои горизонтальную A_1 и фронтальную A_2 проекции. Можно строить проекции также на плоскости $П_3$, перпендикулярной $П_1$ и $П_2$. Она носит название профильной плоскости проекций. Часто с осями проекций совмещают декартову систему координат.

Важно отметить, что проекции отрезков каждой проецирующей прямой равны между собой:

$AA_1=A_2A_x=A_3A_y$ (высота точки А);
$AA_2=A_1A_x=A_3A_z$ (глубина точки А);
$AA_3=A_1A_y=A_2A_z$ (широта точки А).

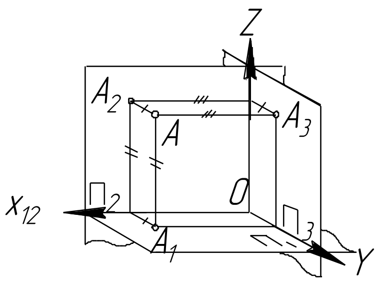


Рис.2.1

Для образования плоского чертежа плоскость проекций $П_1$ путём вращения вокруг оси x совмещают с плоскостью $П_2$, а плоскость проекций $П_3$ совмещается с плоскостью $П_2$ путём вращения вокруг оси z. Полученный таким образом плоский комплексный чертёж содержит три проекции точки А, причём, как видно из рис.2.2, каждая пара смежных проекций (A_1 и A_2; A_2 и A_3) лежит на одной прямой, перпендикулярной соответствующей оси. Такая прямая называется **линией связи**.

Две связанные между собой ортогональные проекции однозначно определяют положение точки относительно плоскостей проекций. При этом третья проекция не может быть задана произвольно.

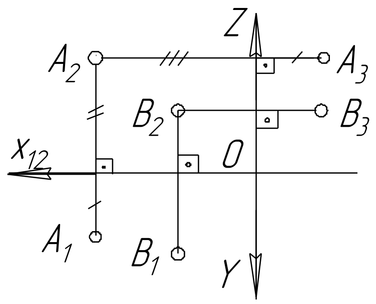


Рис.2.2

Как правило, в инженерной практике нет необходимости задавать положение фигуры относительно какой-либо системы координат. В этих случаях на комплексном чертеже отсутствуют изображения осей координат, а сам чертёж называется безосным. В соответствии со свойством 9 ортогонального проецирования, параллельное перемещение плоскостей проекций не влияет на форму изображения на чертеже. На безосном чертеже соответствующие линии связи всех точек пространства остаются параллельными друг другу: $A_1A_2 || B_1B_2 ||$ ... .

Ось проекций в случае необходимости может быть проведена в любом месте, но обязательно перпендикулярно линиям связи.

2. 2 . Прямая

2.2.1. Основные положения

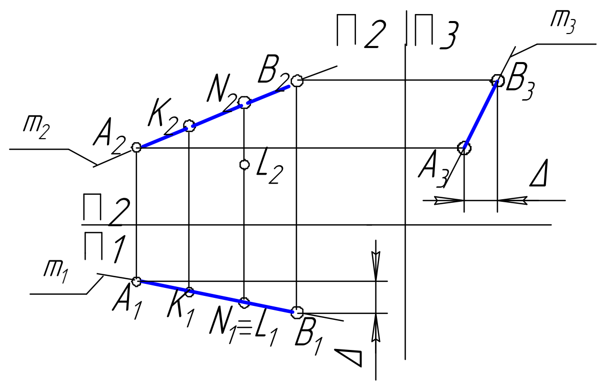
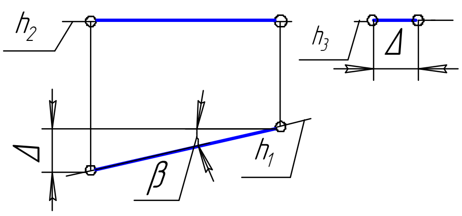


Рис.2.3

Прямая на комплексном чертеже может быть задана проекциями пары точек (например, на рис.2.3 проекции точек A и B определяют единственную прямую пространства) или непосредственно своими двумя проекциями m_1 и m_2. В этом случае прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух проецирующих плоскостей.Для построения профильной проекции можно использовать разность профильных координат точек A и B - Δ.



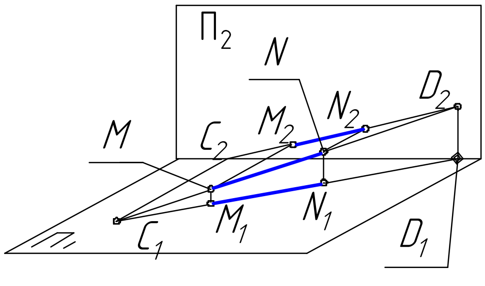
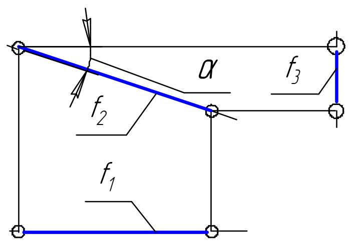


Рис.2.4

Точка принадлежит прямой, если обе её проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой ($K \subset m$; $N \subset m$; $L \not\subset m$).



Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называются **следами**. На рис.2.4 показана пространственная модель, а на рис.2.5 - комплексный чертёж прямой с горизонтальным следом

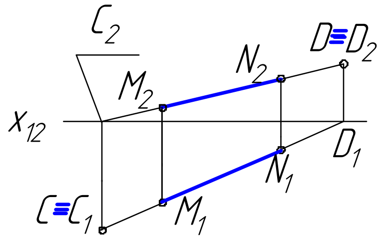


Рис.2.5

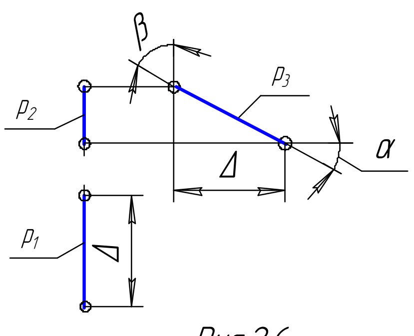


Рис.2.6

C и фронтальным следом D. Очевидно, что горизонтальная проекция D_1 фронтального и фронтальная проекция C_2 горизонтального следов лежат на оси проекций. Поэтому для построения следов прямой достаточно продолжить соответствующие её проекции с одной стороны до пересечения с этой осью, а с другой – до пересечения с линиями связи, проведёнными из полученных на оси x_{12} проекций C_2 и D_1 точек C и D.

Прямые, не перпендикулярные и не параллельные плоскостям проекций, называются **прямыми общего положения**. Линии, параллельные плоскостям проекций, называются **линиями уровня**.

Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, она называется **горизонталью**, фронтальной - **фронталью**, профильной - **профильной прямой**. Обозначаются они соответственно буквами h, f и p (рис.2.6).

У прямой уровня одна проекция параллельна самой прямой и определяет углы наклона этой прямой к двум другим плоскостям проекций (α - к Π_1 и β - к Π_2). Отрезок линии уровня, в соответствии с шестым свойством ортогонального проецирования, проецируется на параллельную ему плоскость проекций в натуральную величину. Параллельность по отношению к одной из плоскостей проекций определяет расположение двух других проекций прямой уровня. Так $f_1 || x_{12}$; $h_1 || x_{12}$ и т.д.

Линии нулевого уровня лежат в плоскостях проекций. Так, $h^\circ \subset \Pi_1$; $f^\circ \subset \Pi_2$ (рис.2.7). Проекции этих линий лежат на осях проекций ($h^\circ_2 \in x$; $f^\circ_1 \in x$).

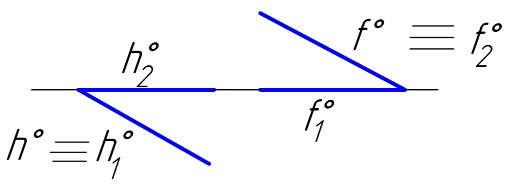


Рис.2.7

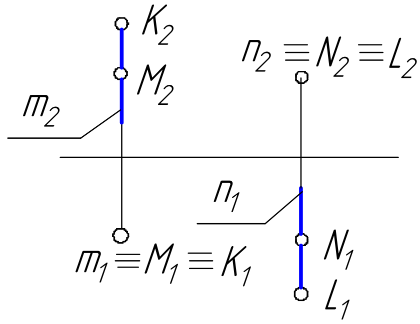


Рис.2.8

Проецирующие прямые (прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций) также являются линиями уровня. Причём одна из её проекций вырождается в точку. На рис.2.8 приведены горизонтально проецирующая прямая m и фронтально проецирующая прямая n ($m \perp \Pi_1$; $n \perp \Pi_2$).

Конкурирующие точки, лежащие на одной проецирующей прямой, дают возможность определить видимость отдельных элементов предмета на данной плоскости проекций. Из двух горизонтально конкурирующих точек К и М (рис.2.8) на плоскости Π_1 видима та, которая расположена выше, т.е. К. Из двух фронтально конкурирующих точек L и N на плоскости Π_2 видима та, которая ближе к наблюдателю, т.е. L, а точка N невидима, так как расположена за точкой L.

2.2.2. Определение натуральной величины отрезка

Длину (натуральную величину) отрезка общего положения можно определить на основании седьмого свойства ортогонального проецирования как длину гипотенузы АВ прямоугольного треугольника (рис.2.9), один катет которого, например A_1B_1, является проекцией отрезка, а другой равен превышению одного конца отрезка над другим Δ_2.

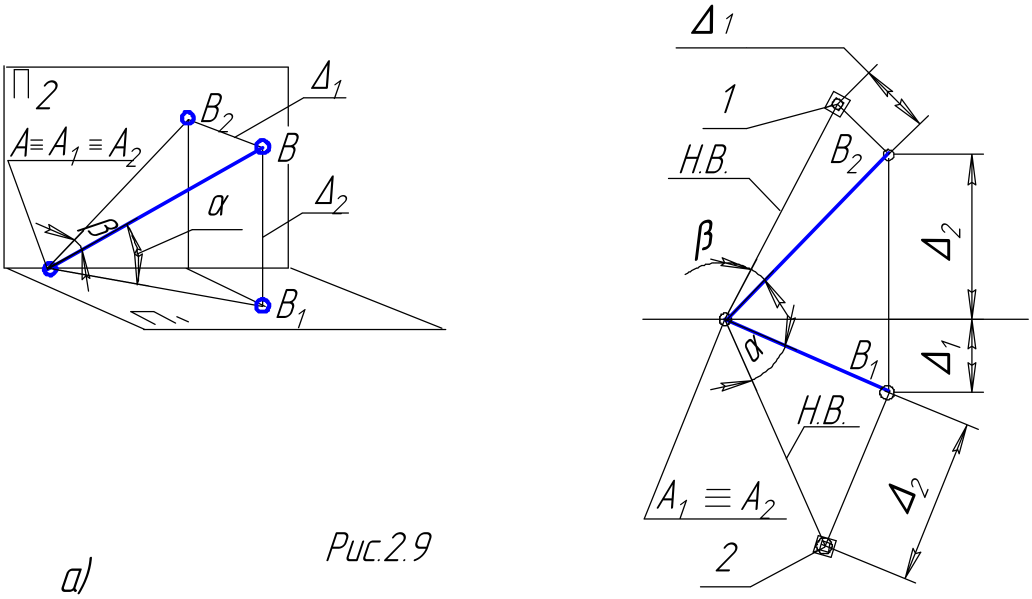


Рис.2.9

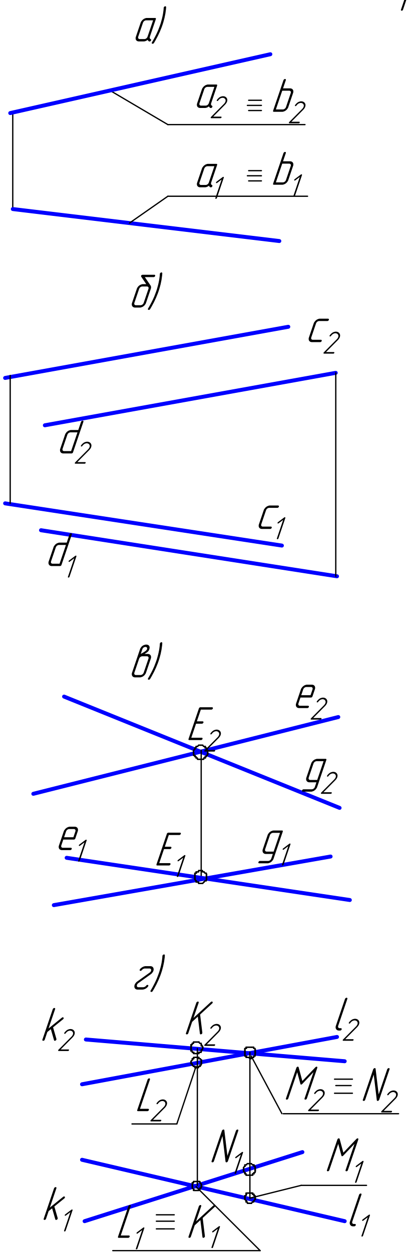


Рис.2.10

Таким образом на горизонтальной проекции комплексного чертежа отрезка можно построить прямоугольный треугольник, взяв вторым катетом Δ_2. Гипотенуза этого треугольника будет натуральной величиной отрезка АВ, а угол α определит угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций Π_1. Аналогичное построение можно сделать на фронтальной проекции отрезка, взяв в качестве второго катета разность глубин его концов Δ_1 с плоскости Π_1. Здесь β - угол между АВ и плоскостью Π_2.

2.2.3. Взаимное расположение двух прямых

Две прямые в пространстве могут совпадать $a \equiv b$, быть параллельными $c || d$, пересекаться $m \cap n$ и скрещиваться k °/ *l* (рис 2.10 а, б, в и г).

Если две прямые совпадают, то совпадают и их проекции. Если две прямые параллельны, то на комплексном чертеже их одноимённые проекции параллельны. Если две прямые пересекаются в некоторой точке Е, то проекции этой точки должны принадлежать одноимённым проекциям прямых, т.е. точки пересечения одноимённых проекций пересекающихся прямых должны лежать на одной линии связи: $e \cap g = E \Rightarrow (e_1 \cap g_1 = E_1;\ e_2 \cap g_2 = E_2)$.

Две скрещивающиеся прямые не имеют общей точки. Поэтому их одноимённые проекции пересекаются в точках, не лежащих на одной линии связи: $k \cap l \Rightarrow k_1 \cap l_1 = K_1(L_1);\ \ k_2 \cap l_2 = M_2(N_2)$.

Здесь K_1 и L_1 - горизонтально конкурирующие, а M_2 и N_2 - фронтально конкурирующие точки.

Возможен случай, когда прямые лежат в параллельных проецирующих плоскостях (рис.2.11). Тогда на комплексном чертеже одна пара проекций пересекается, а вторая - параллельные прямые.

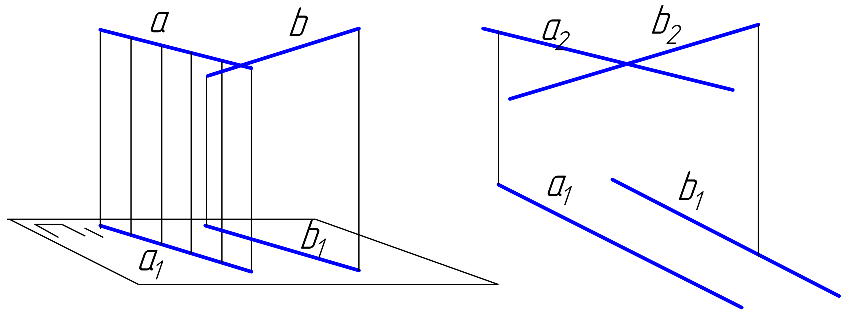


Рис.2.11

Две параллельные или пересекающиеся прямые могут иметь общую проецирующую плоскость. Тогда их проекции на соответствующих плоскостях совпадут (рис.2.12). Такие прямые называются **конкурирующими прямыми**.

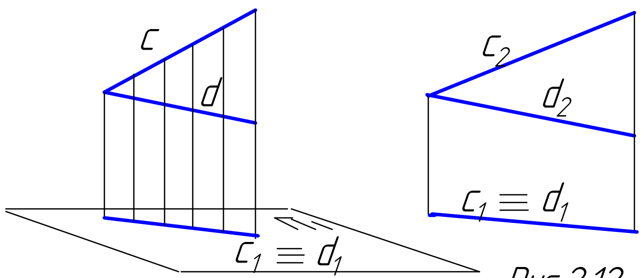


Рис.2.12

Часто бывает необходимо построить **перпендикуляр к прямой уровня.**

Пусть задана фронталь f (рис.2.13). Требуется из точки A опустить на фронталь перпендикуляр n. На основании восьмого свойства ортогонального проецирования прямой угол проецируется без искажения, если одна из его сторон – линия уровня. Следовательно, прямой угол между f и n проецируется на Π_2 в натуральную величину: $n_2 \perp f_2$, т.к. $n \perp f$ и $f \parallel \Pi_2$. Точка 1- основание перпендикуляра.

Аналогично строится перпендикуляр m к горизонтали h (рис.2.13 б).

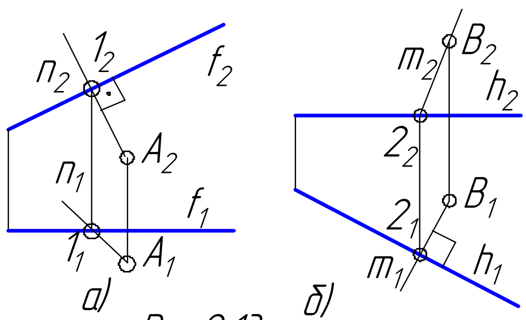


Рис.2.13

2.3 . Плоскость

2.3.1. Задание плоскости на чертеже

Любую плоскость определяют: 1) три точки, не лежащие на одной прямой $\Theta(A,B,C)$; 2) прямая и точка, не лежащая на этой прямой $\Theta(a, D;\ D \notin a)$;

3) две пересекающиеся прямые Θ(a ∩ b); 4) две параллельные прямые Θ(a || b); 5)

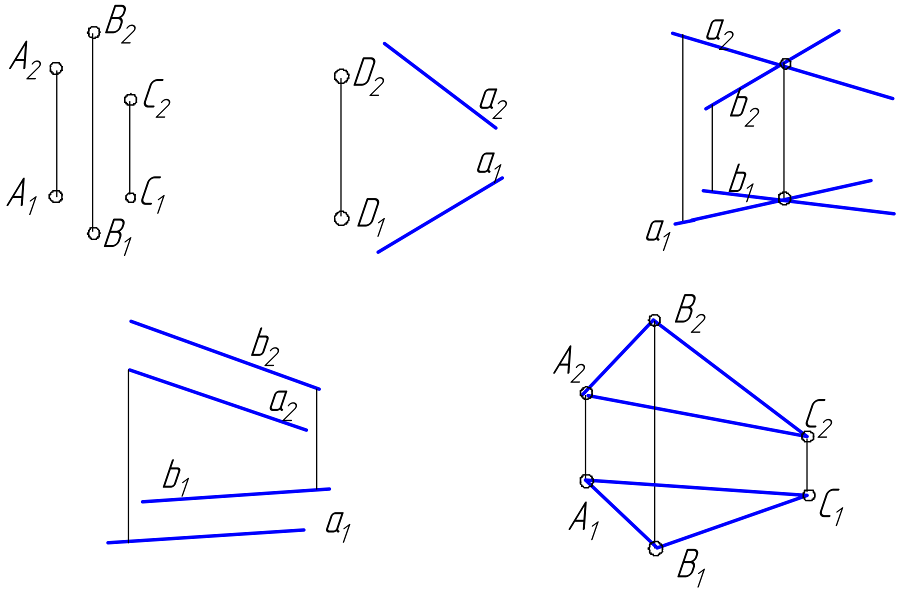


Рис.2.14

любая плоская фигура, например треугольник Θ(A,B,C) (рис2.14).

На комплексном чертеже проекции плоскости задаются, но не ограничиваются проекциями элементов её определяющих.

Плоскость, не перпендикулярная ни одной из основных плоскостей проекций, называется плоскостью **общего положения**. Плоскости, перпендикулярные или параллельные основным плоскостям проекций, называются плоскостями **частного положения**.Плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется **проецирующей**. Обычно проецирующие плоскости обозначаются буквой Σ.Различают **горизонтально, фронтально и профильно проецирующие плоскости**.

На комплексном чертеже одна из проекций проецирующей плоскости вырождается в прямую линию. Такая плоскость может быть задана одной своей вырожденной проекцией. На рис.2.15 в качестве примера представлены горизонтально, фронтально и профильно проецирующие плоскости, заданные соответст-

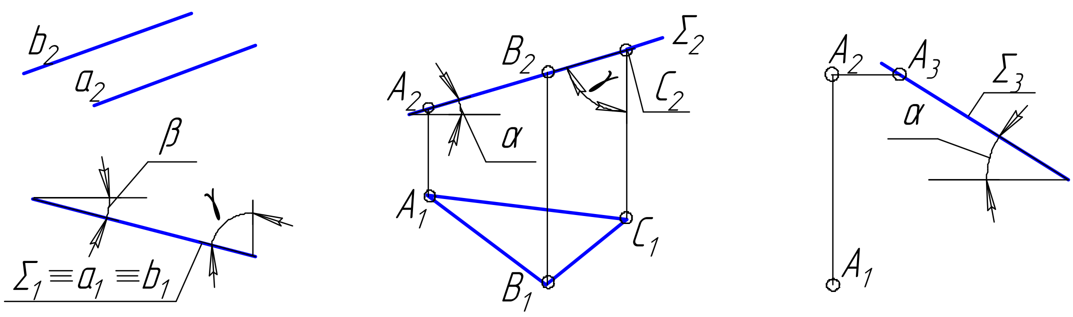


Рис.2.15

венно двумя параллельными прямыми, треугольником, точкой и прямой.

Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, **называется плоскостью уровня**. Такая плоскость - дважды проецирующая, поэтому на комплексном чертеже её две проекции вырождены и имеют вид прямой, расположенной под прямым углом к линиям связи, а третья проекция даёт изображение всех элементов, лежащих в этой плоскости, в натуральную величину. На рис.2.16 изображены: Г - горизонтальная, Ф - фронтальная и Ω- профильная плоскости уровня, заданные соответственно точкой (она однозначно определяет положение плоскости уровня), треугольником, прямой и точкой.

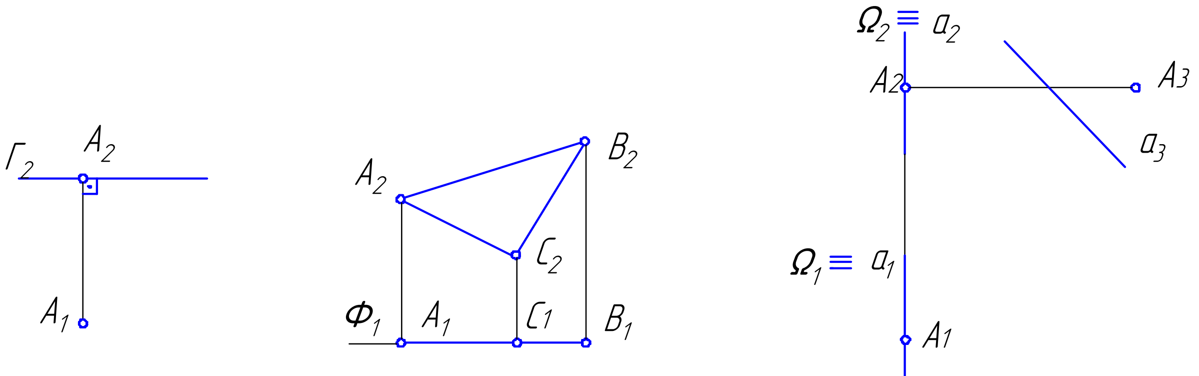


Рис.2.16

2.3.2.Прямая в плоскости

Известно, что прямая принадлежит плоскости, если две её точки принадлежат этой плоскости. Это положение записывается так (рис.2.17):$1 \subset AB$; $2 \subset BC \Rightarrow m(1,2) \subset \Theta(A,B,C)$.

В любой плоскости можно построить прямые, параллельные плоскостям проекций. Их называют **линиями уровня плоскостей**.

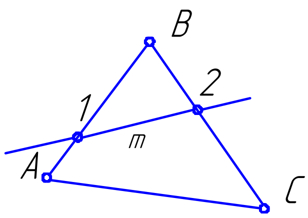


Рис.2.17

Линию уровня можно представить как линию пересечения данной плоскости с соответствующей плоскостью уровня.

Горизонталь плоскости h - это линия плоскости, параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис.2.18). Построение горизонтали начинают с её фронтальной проекции, которая параллельна оси проекций: $h(A,1) \in \Theta(A,B,C)$; $A_2 \in h_2$; $h_2 \perp A_2A_1$; $h_2 \cap B_2C_2 = 1_2$; $1_21_1 || A_2A_1$; $1_21_1 \cap B_1C_1 = 1_1$; $A_11_1 \subset h_1$.

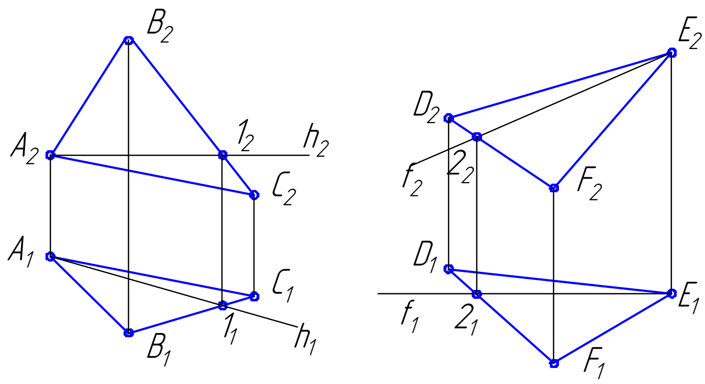


Рис.2.18

Фронталь плоскости f параллельна $П_2$. Её построение аналогично построению горизонтали плоскости, а начинают его с горизонтальной проекции f_1, которая параллельна оси проекций.

Для плоскостей частного положения соответствующие линии уровня одновременно будут и проецирующими. Так на рис.2.19 изображена фронтально проецирующая плоскость Σ, горизонталь которой h является фронтально проецирующей прямой. Их фронтальные проекции $Σ_2$ и h_2 вырождены в прямую и точку.

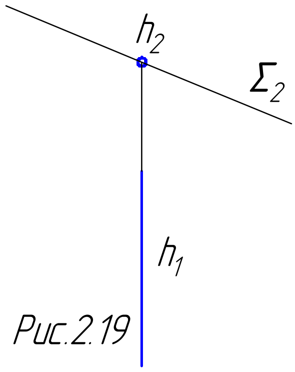


Рис.2.19

2.3.3. Следы плоскости

В плоскости можно провести бесчисленное множество горизонталей и фронталей. Все они параллельны друг другу. Линии уровня, лежащие в плоскостях проекций (линии нулевого уровня), называются **следами плоскости**, поскольку являются линиями её пересечения с плоскостями проекций. На рис.2.20 представлена пространственная модель и комплексный чертёж плоскости $Θ(a \cap b)$, а также построены её следы h° и f°.

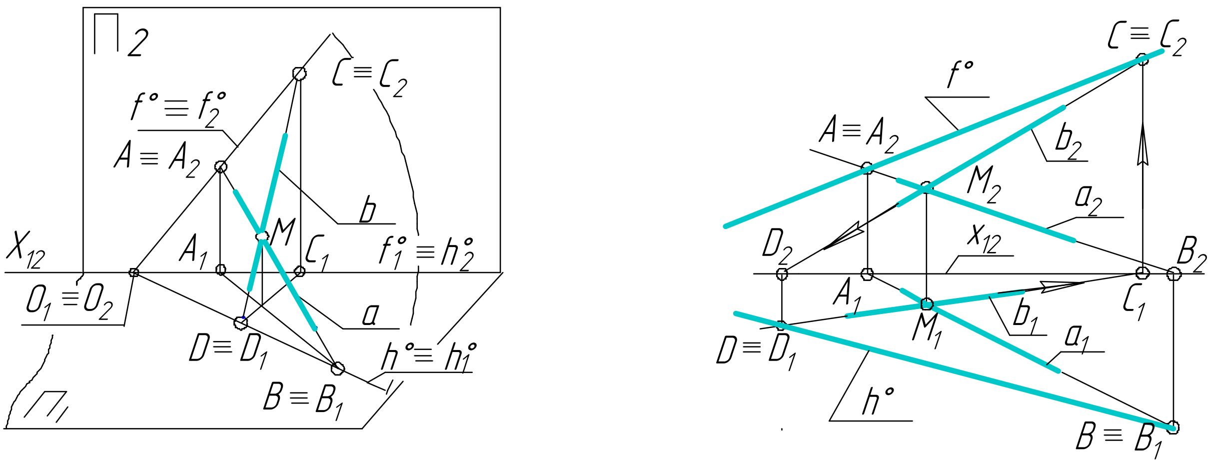


Рис.2.20

Для построения следов плоскости используются следы прямых её образующих (см. раздел 2.2.1 рис.2.4 и 2.5). Горизонтальный след плоскости проводится через два горизонтальных следа прямых, а фронтальный - через два фронтальных. Оба следа плоскости имеют общую точку схода O, лежащую на оси проекций $x_{12}(П_1 \cap П_2)$. Поскольку одна из проекций следа прямой лежит на оси проекций, построение начинают с неё. Продолжая проекцию прямой, например b_2, до пересечения с x_{12}, получим фронтальную проекцию D_2 горизонтального следа D прямой b. Далее из D_2 проводится линия связи до пересечения с b_1, в результате чего определяется горизонтальная проекция следа, совпадающая с самим горизонтальным следом D. Подобным образом получают фронтальный след C прямой b: $C_1=b_1 \cap x_{12}$; $C_1C_2 \perp x_{12}$; $C_1C_2 \cap b_2=C_2$; $C_2 \equiv C$.

Делая аналогичные построения, определяют горизонтальный В и фронтальный А следы прямых a и b.

Для построения горизонтали плоскости, заданной следами, проводится фронтальная проекция горизонтали h_2 (рис.2.21) до пересечения с фронтальным следом плоскости в точке M_2.

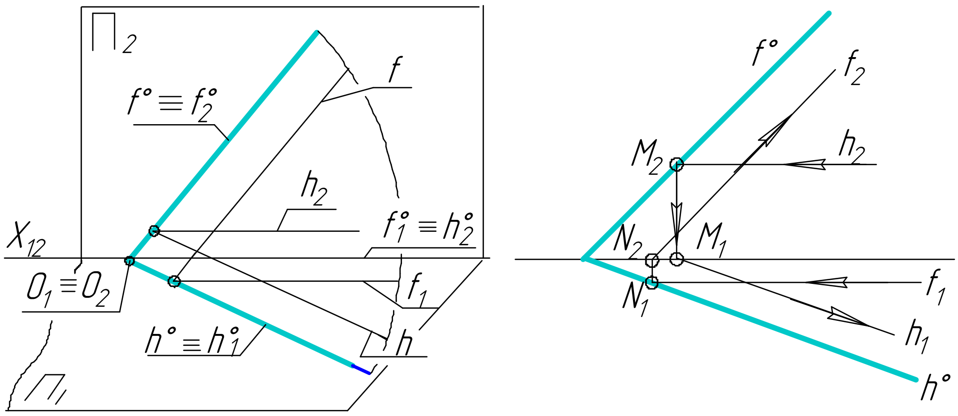


Рис.2.21

Горизонтальная проекция M_1 точки М лежит на оси $x_{12} \equiv h°_2$. Поскольку все горизонтали плоскости параллельны, то $h_1 || h°_1$ и проходит через точку M_1. Аналогично строятся проекции f_1 и f_2 фронтали.

3. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционными называются задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических образов. Основными здесь являются задачи на определение :

а) взаимной принадлежности,

б) взаимного пересечения.

Задачи на взаимную принадлежность органически входят во все ранее расмотренные вопросы, т.к. точка принадлежит плоскости, если она принадлежит линии плоскости; прямая линия принадлежит плоскости, если две её точки принадлежат плоскости и т.д..

Задачи на взаимное пересечение связаны с построением точек, принадлежащих одновременно двум рассматриваемым геометрическим образам (прямой и плоскости, двум плоскостям, плоскости и поверхности и т.д.).

3. 1. Пересечение прямой с плоскостью

Для определения точки пересечения прямой l с плоскостью Θ(A,B,C) выполняют следующие операции.

1. Через прямую *l* проводят проецирующую плоскость Σ (рис.3.1).

В данном примере проводится горизонтально проецирующая плоскость Σ_1.

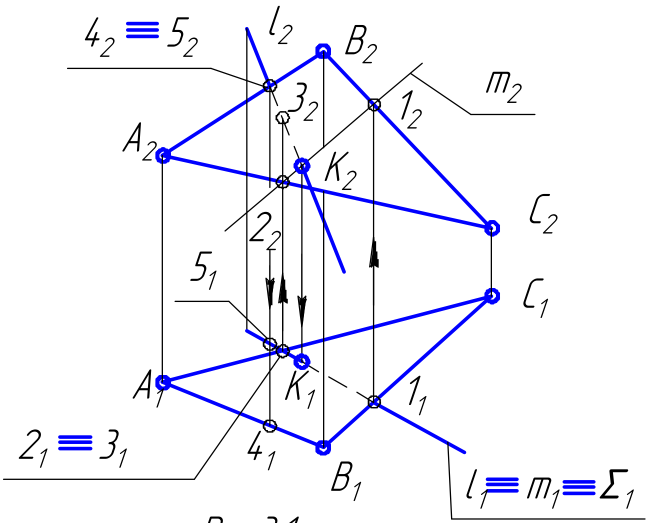


Рис.3.1

2. Определяют линию пересечения m плоскости Σ с плоскостью Θ(ABC).На рис.3.1 горизонтальная проекция этой линии m_1 совпадает с l_1 по построению, а фронтальная m_2 – определяется проецированием точек 1_1 и 2_1 на фронтальные проекции A_2B_2 и B_2C_2 сторон треугольника ABC.

3. Определяют точку K пересечения прямой l с плоскостью Θ. Фронтальная проекция m_2 линии пересечения m пересекает l_2 в точке K_2. Поскольку m лежит в плоскости Θ, то K принадлежит как плоскости Θ, так и l, т.е. является точкой их пересечения. Её горизонтальная проекция K_1 определяется проецированием K_2 на l_1.

3. 2. Перпендикулярность прямой и плоскости; двух плоскостей

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум прямым этой плоскости, например её горизонтали и фронтали. Построение перпендикуляра начинают с построения горизонтали и фронтали плоскости (см. рис.2.18). Затем к этим прямым проводится перпендикуляр так, как это сделано на рис.2.13.

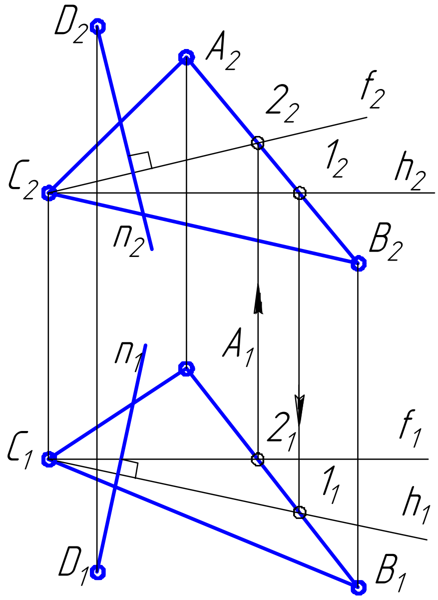


Рис.3.2

Прямая n (рис.3.2) перпендикулярна плоскости ϑ(ABC) т.к. $n \perp h$ и $n \perp f$ (на основании восьмого свойства ортогонального проецирования (см. раздел 1.1)).

При построении на комплексном чертеже проекций перпендикуляра к плоскости нужно иметь в виду следующее: **если $n \perp \vartheta(h \times f)$, то фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронтали, а его горизонтальная проекция – горизонтальной проекции горизонтали ($n_1 \perp h_1$; $n_2 \perp f_2$).** Действительно и обратное утверждение.

Точка пересечения перпендикуляра с плоскостью определяется подобно тому, как это изложено в предыдущем разделе.

Приведённое решение широко используется при определении расстояния от точки до плоскости и до других более сложных поверхностей.

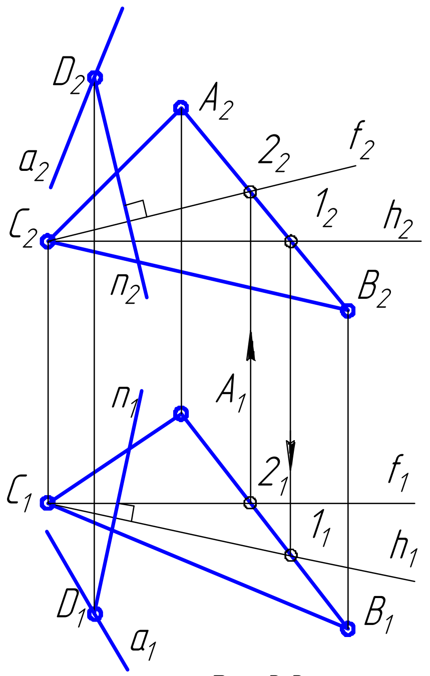


Рис.3.3

На рис.3.3 рассмотрена задача по проведению через прямую **a** плоскости $\Omega(a \times n)$, перпендикулярной плоскости $\vartheta(ABC)$. Задача сводится к предыдущей, если на прямой **a** задать точку D и провести через неё перпендикуляр n к плоскости ϑ. Поскольку Ω образована двумя пересекающимися прямыми, одна из которых перпендикулярна ϑ, то, как известно, плоскость, содержащая перпендикуляр к другой плоскости, сама перпендикулярна этой плоскости.

3. 3. Взаимное пересечение двух плоскостей

Задача по определению линии пересечения двух плоскостей может быть решена с использованием секущей плоскости-посредника. Такая плоскость применялась нами при решении задачи на определение точки пересечения прямой и плоскости (рис.3.1).

Определим линию пересечения плоскости Ω, образованной пересекающимися прямыми a и b, и плоскости Θ, заданной двумя параллельными прямыми n и q (рис.3.4). Для этого введём плоскость- посредник, представляющую собой го-

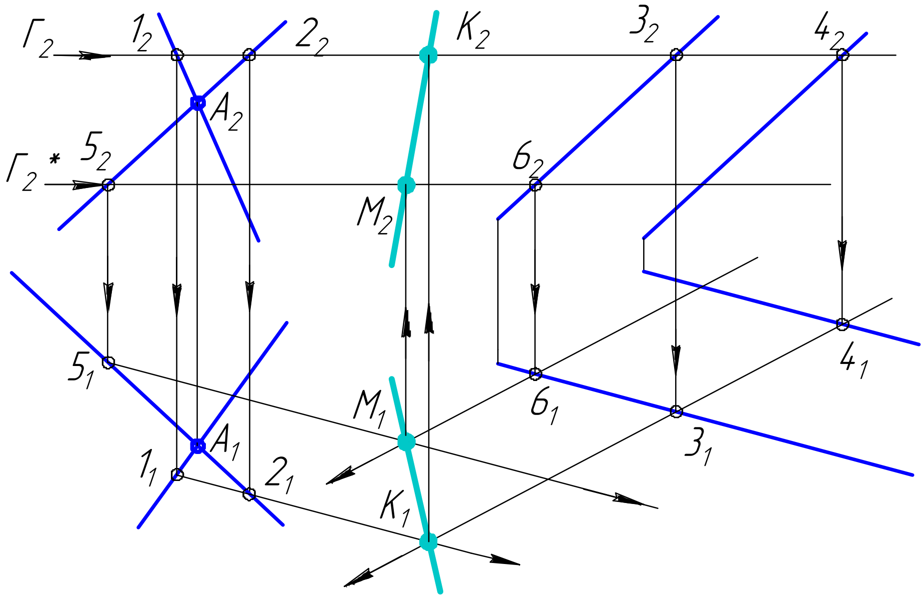


Рис.3.4

ризонтальную плоскость уровня $Г_2$ (для этого годится любая проецирующая плоскость). Строятся проекции $1_1 2_1$ и $1_2 2_2$, а также $3_1 4_1$ и $3_2 4_2$ линий пересечения плоскости - посредника $Г_2$ с Ω и Θ. Точка K, построение горизонтальной проекции которой K_1 ясно из рисунка, - общий элемент для всех плоскостей, т.е. лежит на линии их пересечения. Фронтальная проекция K_2 точки К лежит на $Г_2$. Для определения второй точки М линии пересечения двух плоскостей повторяются все построения с использованием другой плоскости – посредника $Г^*$, параллельной Г. Поэтому проекции её линии пересечения с плоскостями Ω и Θ будут попарно параллельны предыдущим. Соединив одноимённые проекции К и М, получим проекции линии пересечения двух плоскостей.

3. 4. Параллельность прямой и плоскости; двух плоскостей

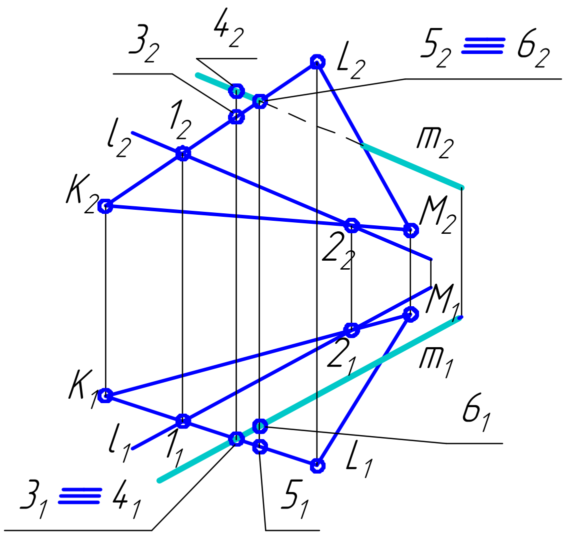


Рис.3.5

Если прямая m параллельна плоскости KLM (рис.3.5), то на этой плоскости существует линия *l*, параллельная m. Данное обстоятельство используется для построения прямой, параллельной заданной плоскости. В плоскости KLM проводится прямая *l*, как показано на рисунке, а затем строится прямая m, параллельная *l*. Фронтальные проекции 3_2 и 4_2 горизонтально конкурирующих точек 3 и 4 показывают, что m лежит выше, чем KLM, а горизонтальные проекции 5_1 и 6_1 фронтально конкурирующих точек 5 и 6 свидетельствуют о том, что плоскость KLM располагается ближе, чем m.

Иногда бывает необходимо проверить параллельность прямой m заданной плоскости. Для чего в какой-либо проекции плоскости проводится прямая, параллельная соответствующей проекции m, а затем проверяется параллельность других их проекций.

Две плоскости параллельны в том случае, если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, например AB и AC (рис.3.6), параллельны двум пересекающимся прямым (a и b) другой.

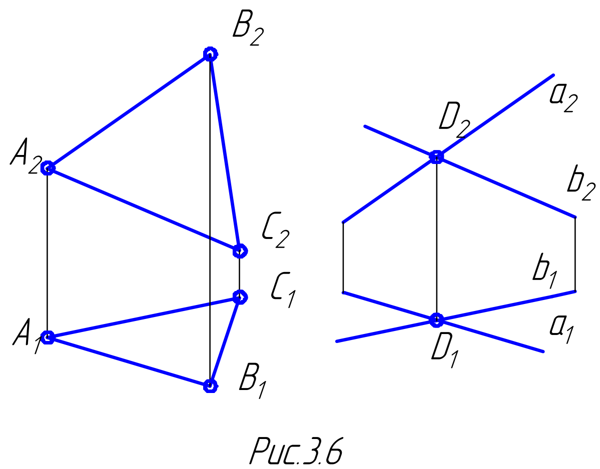


Рис.3.6

Далее рекомендуется закрепить пройденный материал, используя контрольные вопросы и задачи, приведённые в конце учебного пособия (см. прил. 1 и 6).

4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

Решение пространственных задач на комплексном чертеже значительно упрощается, если интересующие нас элементы фигуры занимают частное положение. Получающиеся в этом случае вырожденные проекции помогают решению задачи. В основном используются два способа преобразования чертежа: способ замены плоскостей проекций и способ вращения.

4.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа заключается в том, что пространственное положение объекта не изменяется, а вводится новая, дополнительная плоскость проекций, расположенная таким образом, чтобы интересующие нас элементы фигуры или весь объект целиком проецировался на неё в удобном для решения задачи положении. При этом новая плоскость проекций обязательно должна быть перпендикулярна к одной из имеющихся плоскостей проекций. В результате образуется новая система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, заменяющая прежнюю. Введём, например, в систему плоскостей проекций $П_1/П_2$ новую плоскость проекций $П_4$ (рис.4.1). В результате будем иметь другую систему $П_1/П_4$. При этом проецирование остаётся ортогональным, т.е. новое направление проецирования S перпендикулярно плоскости $П_4$.

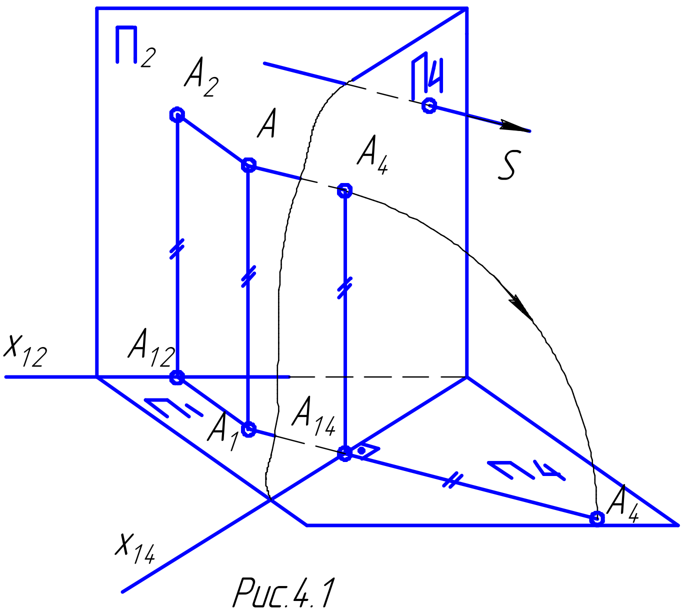


Рис.4.1

Новая и старая системы плоскостей проекций имеют общую, связывающую их плоскость проекций $П_1$. Новой осью проекций будет x_{14}. Каждая точка пространства, например точка А, проецируется теперь на три попарно – перпендикулярные плоскости. Следует заметить, что ординаты точки А в плоскостях $П_1$ и $П_4$ будут равны между собой по построению. Для получения плоского чертежа сначала совмещают плоскость $П_4$ с плоскостью $П_1$, вращая её вокруг оси x_{14}, а затем полученный плоский чертёж поворотом вокруг оси x_{12} совмещают с плоскостью $П_2$. В результате будем иметь комплексный чертёж, представленный на рис.4.2.

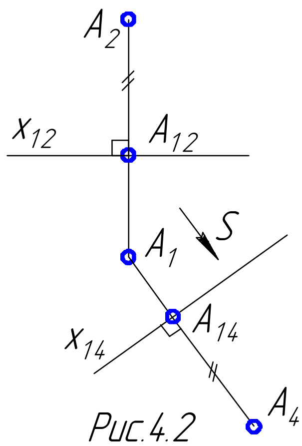


Рис.4.2

Можно ввести новую плоскость проекций, сохранив в качестве общей (связующей) плоскости не $П_1$, как на рис.4.2, а $П_2$. При этом все построения производятся аналогично предыдущему.

Рассмотрим четыре исходные задачи преобразования комплексного чертежа.

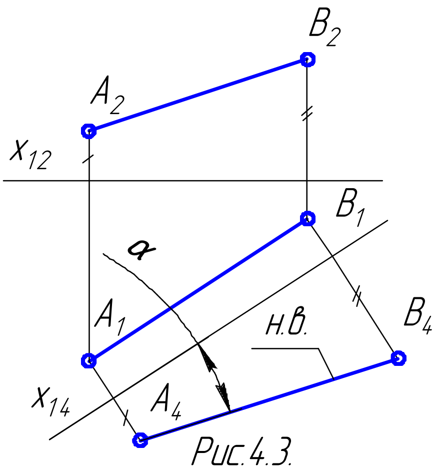


Рис.4.3.

4.1.1. Перевод прямой общего положения в положение прямой уровня

Для преобразования прямой АВ в прямую уровня (рис.4.3) вводится новая плоскость проекций $П_4$ так, чтобы ось проекций x_{14} была параллельна какой-либо проекции АВ (в данном случае – A_1B_1), затем откладываем на новой плоскости проекций от оси x_{14} ординаты точек A_4 и B_4, равные ординатам точек A_2 и B_2.

Новая проекция прямой A_4B_4 даёт натуральную величину отрезка АВ и позволяет определить угол наклона α прямой к плоскости проекций $П_1$ (см. раздел 2.2.2). Угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций β можно определить, построив изображение прямой на другой дополнительной плоскости проекций $П_5 \perp П_2$ (рис.4.4).

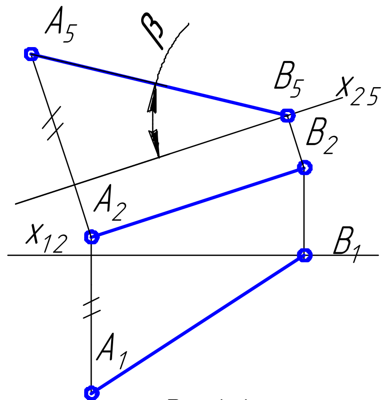


Рис4.4

4.1.2. Перевод прямой уровня в проецирующее положение

Для того чтобы на новой плоскости проекций изображение прямой уровня выродилось в точку (рис.4.5), надо эту плоскость расположить перпендикулярно данной прямой, т.е. провести на комплексном чертеже ось проекций перпендикулярно направлению проекции прямой на общую плоскость проекций. Горизонталь будет иметь своей

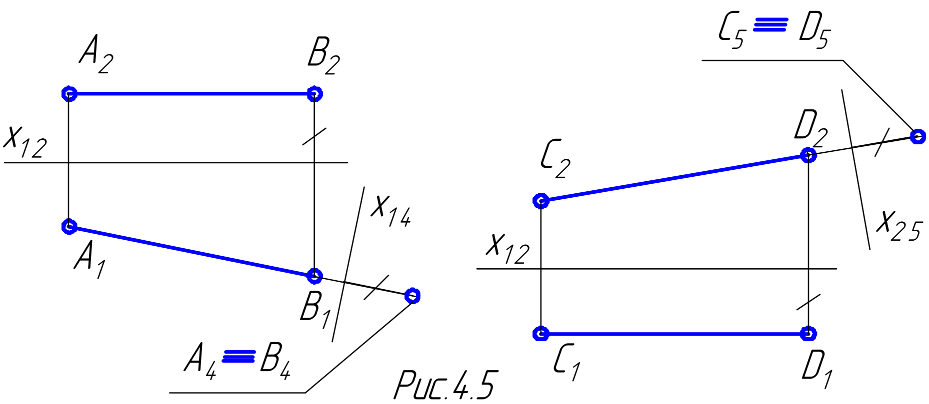


Рис.4.5

проекцией точку на плоскости $П_4 \perp П_1$, а фронталь – на $П_5 \perp П_2$.

Для построения вырожденной в точку проекции прямой общего положения необходимо последовательно решить две предыдущие задачи.

На рис.4.6 представлено такое решение.Прямая общего положения *l* ($l_1 l_2$) сначала переводится в положение прямой уровня введением плоскости проекций $П_4 \perp П_2$, а затем – в положение проецирующей прямой в системе плоскостей $П_4/П_5$.

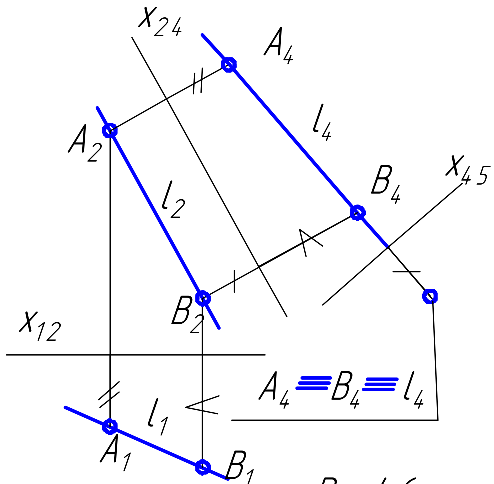


Рис.4.6

4.1.3. Перевод плоскости общего положения в проецирующее положение

Известно, что если одна плоскость перпендикулярна другой, то она должна содержать прямую, перпендикулярную этой плоскости. В качестве такой прямой можно взять прямую уровня, например горизонталь, как это показано на рис.4.7.

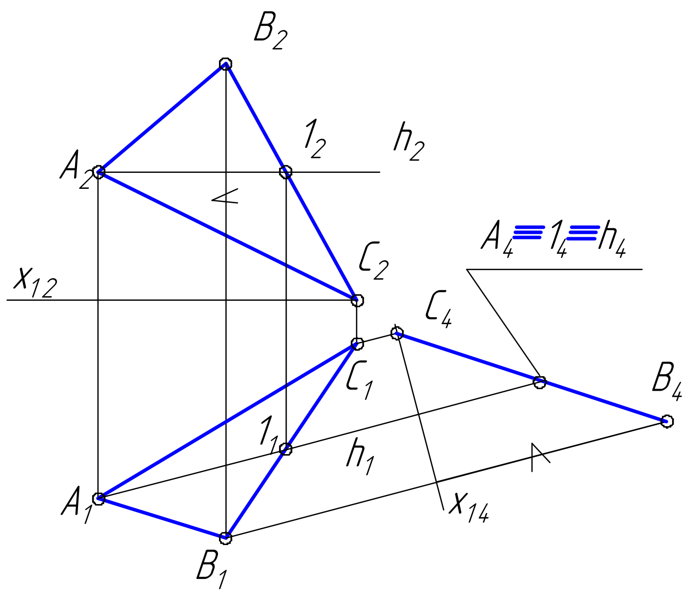


Рис.4.7

Используя рассуждения, приведённые в предыдущем разделе, переведём горизонталь h в проецирующее положение, вводя новую плоскость проекций $П_4$. Поскольку проекция плоскости АВС на $П_4$ выраждена в прямую, она будет являться геометрическим местом всех точек, принадлежащих этой плоскости. Проецируем точки плоскости на $П_4$, беря их ординаты с $П_2$.

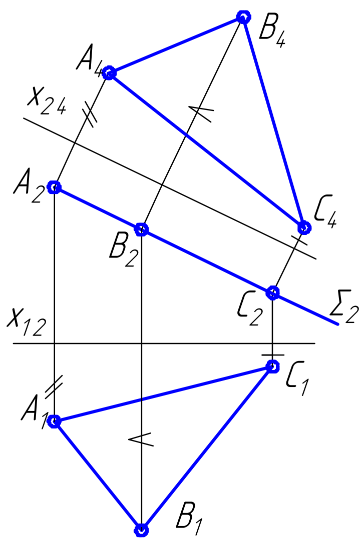


Рис.4.8

4.1.4. Перевод проецирующей плоскости в положение плоскости уровня

Решение этой задачи позволяет определить натуральную величину плоской фигуры (рис.4.8).

Пусть задана фронтально проецирующая плоскость Σ. Вводим новую плоскость проекций $П_4$, параллельную Σ. Новая ось проекций x_{24} по этой причине будет расположена параллельно Σ_2, т.е. в системе плоскостей проекций $П_2/П_4$ плоскость Σ займёт положение плоскости уровня, а треугольник АВС будет проецироваться на $П_4$ в натуральную величину.

Если в исходном положении плоскость занимает общее положение, а нужно получить её изображение как плоскости уровня, то прибегают к двойной замене плоскостей проекций, решая последовательно две предыдущие задачи. При первой замене плоскость становится проецирующей, а при второй – плоскостью уровня (рис.4.9). Расстояния для построения проекций точек на плоскости $П_5$ нужно брать с плоскости $П_1$, отмеряя их от оси проекций x_{14}.

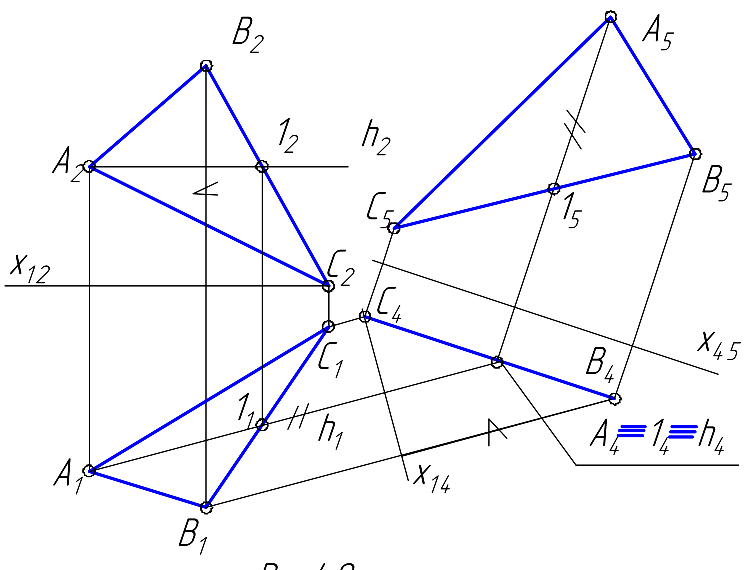


Рис.4.9

4. 2. Способ плоскопараллельного перемещения

При плоскопараллельном перемещении заданная фигура движется в пространстве так, что все её точки перемещаются в плоскостях, параллельных друг другу и (как правило) одной из плоскостей проекций. Сами траектории точек фигуры произвольны. На рис. 4.10 показано плоскопараллельное перемещение отрезка из первоначального положения АВ в положение А′В′. Концы А и В отрезка движутся соответственно в плоскостях Г и Г*, параллельных горизонтальной плоскости проекций $П_1$.

Следует отметить, что при таком движении угол наклона отрезка к плоско-

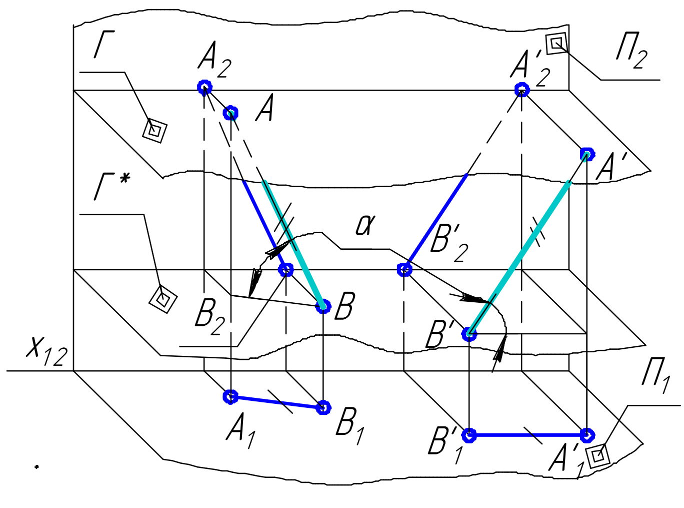


Рис.4.10

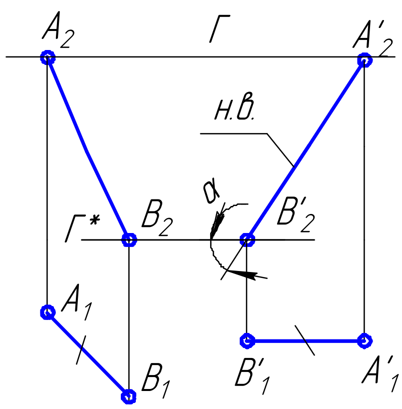


Рис.4.11

сти $П_1$ сохраняется неизменным. Поэтому не изменяется и длина горизонтальной проекции отрезка, т.е. $A_1B_1 = A_1'B_1'$. Последнее свойство имеет важное значение, т.к., используя его, мы получаем возможность проецировать объект в удобном для решения задач положении. На рис.4.11 приведён соответствующий комплексный чертёж. После перемещения отрезка АВ в положение А′В′ он станет фронталью, и его фронтальная проекция будет равна натуральной величине ($A_2'B_2' = AB$). Соответственно угол α_2 наклона проекции $A_2'B_2'$ к горизонтальной плоскости проекций будет равен углу наклона отрезка АВ к той же плоскости ($\alpha_2 = \alpha$). Следует напомнить, что траектория в данном случае горизонтальной проекции произвольна, а все точки фронтальной проекции отрезка движутся по горизонтальным прямым.

В качестве примера рассмотрим задачу о переводе плоскости общего положения в положение плоскости уровня методом плоскопараллельного перемещения.

Решение этой задачи представлено на рис.4.12.

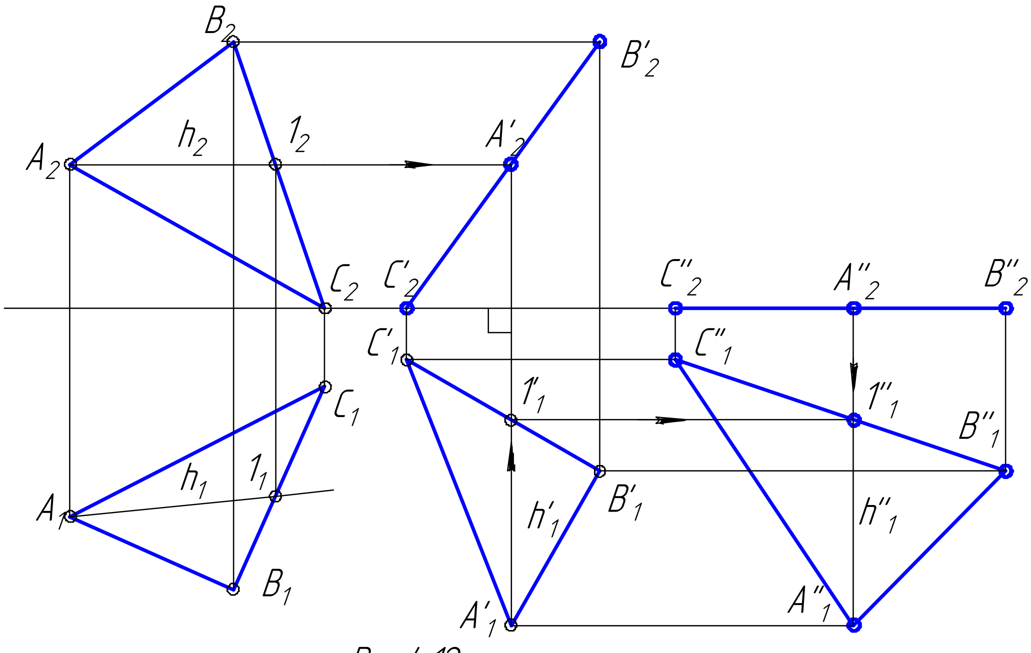


Рис.4.12

При первом движении треугольник АВС переводится во фронтально проецирующее положение. С этой целью в плоскости треугольника строится горизонталь А1, горизонтальная проекция которой $A_1 1_1$ переходит в проецирующее положение $A'_1 1'_1$. В процессе перемещения величина горизонтальной проекции остаётся неизменной. Все точки треугольника на фронтальной плоскости проекций перемещаются по горизонталям, пересечение которых с линиями связи, проведёнными из соответствующих точек вновь полученной горизонтальной проекции, образуют вырожденную в прямую его фронтальную проекцию.

При втором движении все точки треугольника перемещаются в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, в результате чего он займёт положение горизонтальной плоскости уровня, а его вырожденная фронтальная проекция – положение горизонтали. Длина её при этом сохранится неизменной. Горизонтальная проекция $A''_1B''_1C''_1$ треугольника ABC будет равна его натуральной величине.

Частными случаями метода плоскопараллельного перемещения являются метод вращения вокруг проецирующих прямых, а также способ вращения вокруг прямых уровня. Однако их применение имеет более ограниченный характер.

5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Метрическими называются задачи, связанные с определением на комплексном чертеже истинных величин расстояний, углов и плоских фигур.

Эти задачи можно объединить в три основные группы.

Первая группа включает в себя определение расстояний от точки до другой точки, до прямой, до плоскости, до поверхности; от прямой до другой прямой, до плоскости; от плоскости до другой плоскости.

Вторая группа включает в себя определение углов между пересекающимися или скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью; между плоскостями.

Третья группа задач связана с определением истинной величины плоской фигуры или части поверхности (развёртки).

Перечисленные задачи удобно решать с использованием рассмотренных выше методов преобразования комплексного чертежа.

Рассмотрим решение некоторых наиболее часто встречающихся задач указанного типа.

5.1. Определение расстояний

Расстояние от точки до точки определяется длиной отрезка прямой, соединяющей эти точки. Как было показано выше, эту задачу можно решить либо методом прямоугольного треугольника (см. раздел 2.2.2.), либо способом замены плоскостей проекций, переводя отрезок в положение линии уровня (см. раздел 4.1.1.).

5.1.1. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой измеряется отрезком перпендикуляра, проведённого из точки к прямой. Отрезок этого перпендикуляра изображается в натуральную величину на плоскости проекций в том случае, если он проведён к проецирующей прямой. Таким образом, сначала прямую необходимо перевести в проецирующее положение, как это сделано в разделе 4.1.2., а затем из заданной точки опустить на неё перпендикуляр. На рис.5.1 представлено решение этой задачи. Для перевода прямой общего положения AB в положение прямой уровня проводится $x_{14} \parallel A_1B_1$. Затем AB переводится в проецирующее положение введением дополнительной плоскости проекций $П_5$, для чего проводится новая ось проекций $x_{45} \perp A_4B_4$.

Аналогично точкам А и В в порядке, изложенном в разделе 4.1.2, на плоскость проекций $П_5$ проецируется точка М.

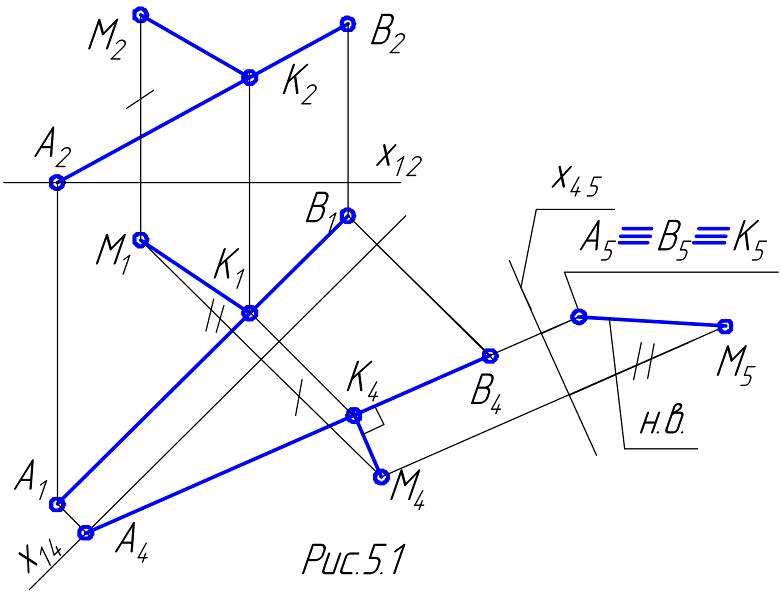


Рис.5.1

Проекция K_5 основания К перпендикуляра, опущенного из М на АВ, на плоскости проекций $П_5$ совпадёт с соответствующими проекциями точек А и В. Проекция M_5K_5 перпендикуляра МК есть истинная величина расстояния от М до АВ. В системе плоскостей проекций $П_4/П_5$ перпендикуляр МК будет линией уровня, поскольку лежит в плоскости, параллельной плоскости проекций $П_5$. Поэтому его проекция M_4K_4 на $П_4$ параллельна x_{45} (см. раздел 2.2.1.), т.е. перпендикулярна A_4B_4. Эти условия определяют положение проекции K_4 основания перпендикуляра К, которое находят, проводя из M_4 прямую параллельно x_{45} до пересечения с A_4B_4. Остальные проекции перпендикуляра находят путём проецирования точки К на $П_1$ и $П_2$.

5.1.2. Расстояние от точки до плоскости

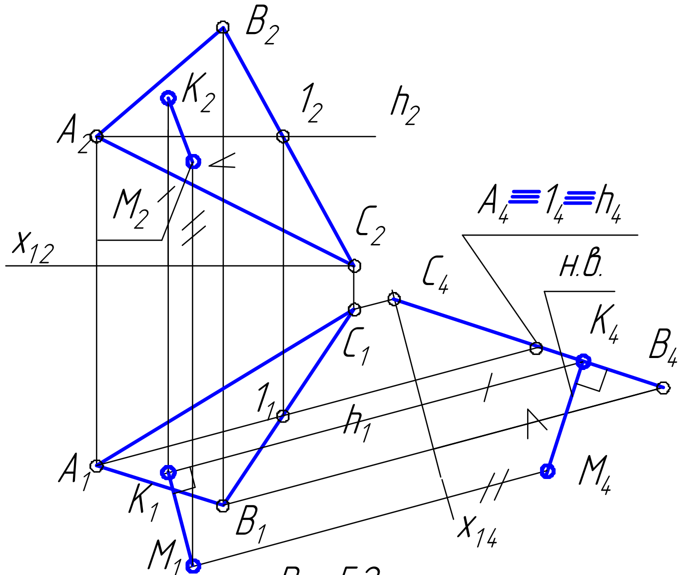


Рис.5.2

Решение этой задачи представлено на рис.5.2. Расстояние от точки М до плоскости Ω(АВС) измеряется отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Т.к. перпендикуляр к проецирующей плоскости есть линия уровня, то переведём в это положение заданную плоскость Ω (см. раздел 4.1.3.), в результате чего на нововведённой плоскости проекций $П_4$ получим вырожденную проекцию C_4B_4 плоскости АВС. Далее на $П_4$ проецируется точка М. Натуральная величина расстояния от точки М до Ω определяется отрезком перпендикуляра МК = M_4K_4. Остальные проекции перпендикуляра строятся так же, как и в предыдущей задаче, т.е. с учётом того, что отрезок МК в системе плоскостей проекций $П_1/П_4$ является линией уровня и его проекция M_1K_1 – параллельна x_{14}.

5.1.3. Расстояние между двумя прямыми

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется величиной отрезка общего перпендикуляра к ним, отсекаемого этими прямыми. Задача решается выбором, в результате двух последовательных замен, плоскости проекций, перпендикулярной одной из скрещивающихся прямых (см. раздел 4.1.2.). В этом случае искомый отрезок перпендикуляра будет параллелен выбранной плоскости проекций (см. раздел 5.1.1.) и изобразится на ней без искажения. На рис.5.3 изображены две скрещивающиеся прямые, заданные отрезками АВ и CD.

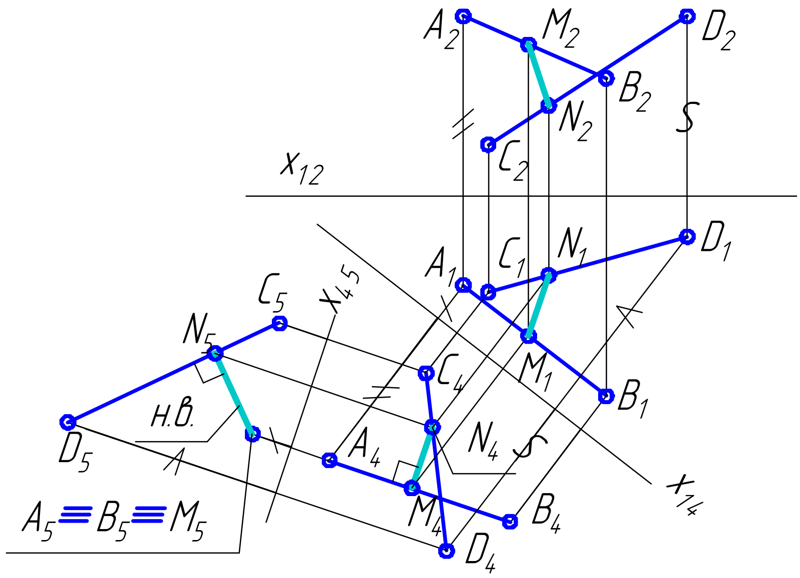


Рис.5.3

Прямые сначала спроецированы на плоскость проекций $П_4$, параллельную одной (любой) из них, например АВ, и перпендикулярную $П_1$.

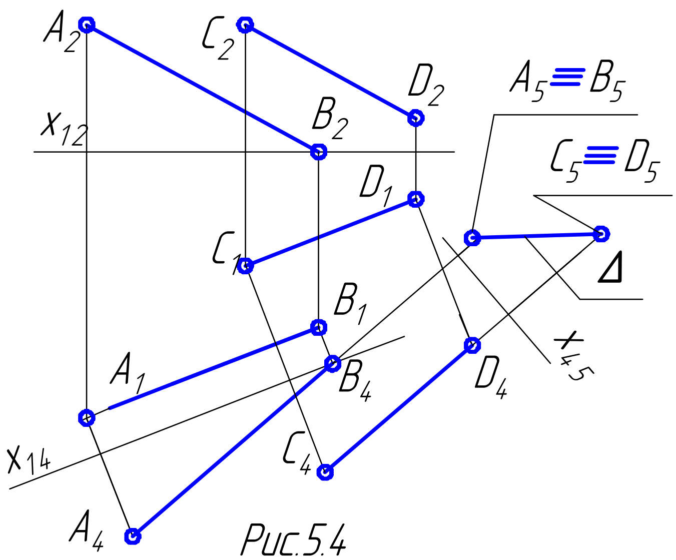


Рис.5.4

На плоскости проекций $П_4$ отрезок АВ изобразится без искажения. Затем отрезки проецируются на новую плоскость $П_5$, перпендикулярную той же прямой АВ и плоскости $П_4$. На плоскости проекций $П_5$ проекция перпендикулярного ей отрезка АВ вырождается в точку $A_5 \equiv B_5$, а искомая величина N_5M_5 отрезка NM перпендикулярна C_5D_5 и изображается в натуральную величину. При помощи соответствующих линий связи строятся проекции отрезка MN на первоначальном чертеже. Как было показано ранее, проекция N_4M_4 искомого отрезка на плоскость $П_4$

параллельна оси проекций x_{45}, т.к. он в системе плоскостей проекций $П_4 / П_5$, является линией уровня.

Задача по определению расстояния Δ между двумя параллельными прямыми AB и CD является частным случаем предыдущей (см. рис.5.4). Двойной заменой плоскостей проекций параллельные прямые переводятся в проецирующее положение, в результате чего на плоскости проекций $П_5$ будем иметь две вырожденные проекции $A_5 \equiv B_5$ и $C_5 \equiv D_5$ прямых AB и CD. Расстояние между ними Δ будет равно его истинной величине.

Расстояние от прямой до плоскости измеряется отрезком перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на плоскость. Поэтому достаточно плоскость общего положения преобразовать в положение проецирующей плоскости, взять на прямой точку, и решение задачи будет сведено к определению расстояния от точки до плоскости (см. раздел 5.1.2).

Для определения расстояния между параллельными плоскостями надо перевести их в проецирующее положение и построить перпендикуляр к вырожденным проекциям плоскостей, отрезок которого между ними и будет искомой величиной расстояния.

5. 2. Определение углов

В общем случае угол, составленный пересекающимися или скрещивающимися прямыми общего положения, проецируется на плоскости проекций искажённо.

Однако, если стороны угла параллельны плоскости проекций (занимают частное положение прямых уровня), то угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

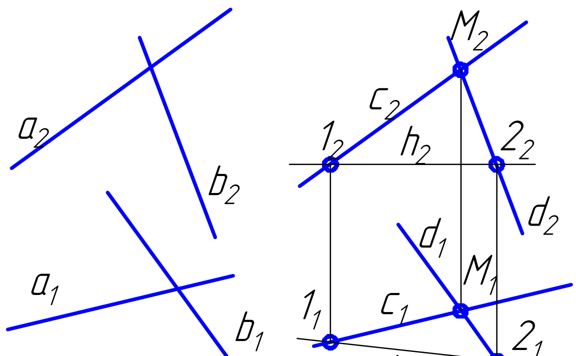


Рис.5.5

Угол между скрещивающимися прямыми измеряется величиной плоского угла, образованного пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

5.2.1. Угол между скрещивающимися прямыми

Пусть требуется определить величину угла между скрещивающимися прямыми a и b (см. рис.5.5). Для этого через произвольную точку М проведены пересекающиеся прямые $c \parallel a$ и $d \parallel b$. На комплексном чертеже одноименные проекции параллельных прямых соответственно параллельны, т.е. $c_2 \parallel a_2$, $d_2 \parallel b$; $c_1 \parallel a_1$, $d_1 \parallel b_1$. Затем через c и d проводится горизонталь h (или фронталь f), после чего треугольник 1М2 переводится в положение плоскости уровня так, как это было сделано в разделе 4.1.4. (рис.4.9.)

или в разделе 4.2.1. (рис.4.12.). Все его углы (и в том числе искомый) проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажения.

5.2.2. Угол между прямой и плоскостью

Угол наклона прямой к плоскости измеряется величиной линейного острого угла, сторонами которого являются прямая и её проекция на данную плоскость. Однако вместо искомого угла можно найти величину угла между прямой и перпендикуляром из любой её точки на плоскость, так как этот угол будет дополнительным до 90° к искомому. Пусть требуется найти угол наклона α прямой m к плоскости треугольника ABC (рис.5.6.) Для этого из некоторой точки N прямой m опущен перпендикуляр n к заданной пло-скости. Проекции n_2 и n_1 этого перпенди-куляра соответственно перпендикулярны к одноимённым проекциям f_2 фронтали и h_1 горизонтали плоскости треугольника ABC. Угол β между прямыми n и m является дополнительным к искомому углу α, т.е. $\alpha = 90° - \beta$. Действительную величину угла β можно определить в соот-ветствии с изложенным в разделе 5.2.1.

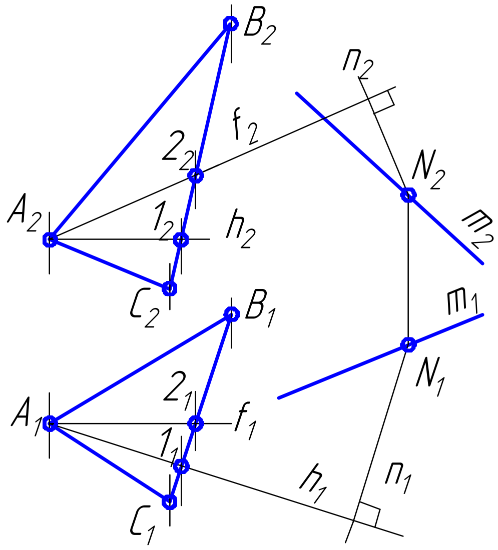


Рис.5.6

5.2.3. Угол между двумя плоскостями

Двугранный угол (между двумя плоскостями) измеряется линейным острым углом, составленным прямыми пересечения граней с плоскостью, перпендикулярной к ребру двугранного угла, т.е. к линии пересечения двух плоскостей. Линейный угол, служащий мерой двугранного угла, изображается без искажения на плоскости проекций, перпендикулярной его ребру (рис.5.7). Однако ребро

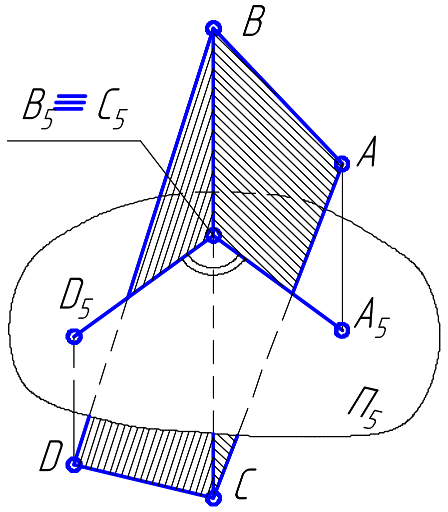


Рис.5.7

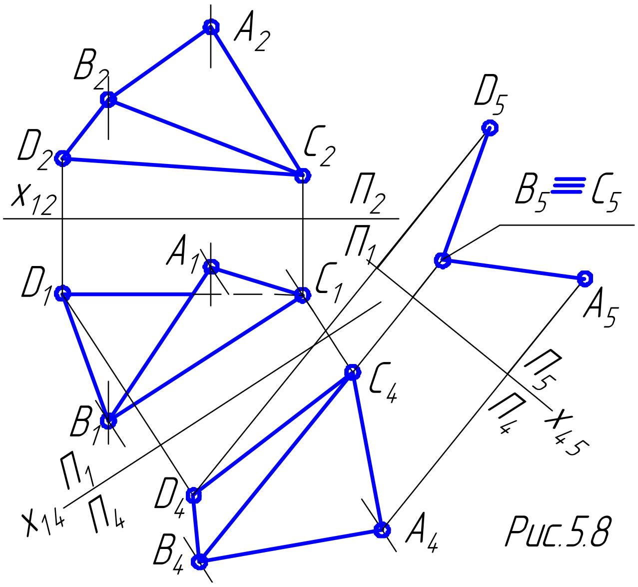


Рис.5.8

двугранного угла во многих случаях занимает общее положение относительно плоскостей проекций.В частностное (проецирующее) положение ребро можно привести последовательным двукратным применением приёма замены плоскостей проекций (рис.5.8). При этом в проецирующее положение переходят и грани двугранного угла. Эти построения были рассмотрены ранее в разделах 4.1.2 и 4.1.3. При решении данной задачи их надо повторить.

Для более прочного усвоения материала, изложенного в разделах 4 и 5, рекомендуется ответить на вопросы и решить задачи, приведённые в конце учебного пособия (см. прил. 2 и 7).

6. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

6.1. Комплексный чертёж кривой линии

Кривая линия представляет собой геометрическое место последовательных положений непрерывно перемещающейся в пространстве точки. Аналитически заданные кривые линии могут быть **алгебраическими** и **трансцендентными**. Примером алгебраических кривых линий являются так называемые конические сечения (см. раздел 7), которые представляют собой кривые второго порядка. Порядок кривой соответствует максимальному числу точек пересечения её с прямой.

Примерами трансцендентных кривых являются синусоида, циклоида, эвольвента окружности и др.

Если все точки кривой лежат в одной плоскости, кривая называется **плоской**. В противном случае она называется **пространственной**. Примером пространственных кривых могут служить винтовые линии.

Касательную прямую можно рассматривать как предельное положение секущей при бесконечно близком расположении точек пересечения друг к другу (прямая t на рис.6.1 а). Если кривая имеет в каждой своей точке определённую и единственную касательную, то она называется **гладкой кривой линией**.

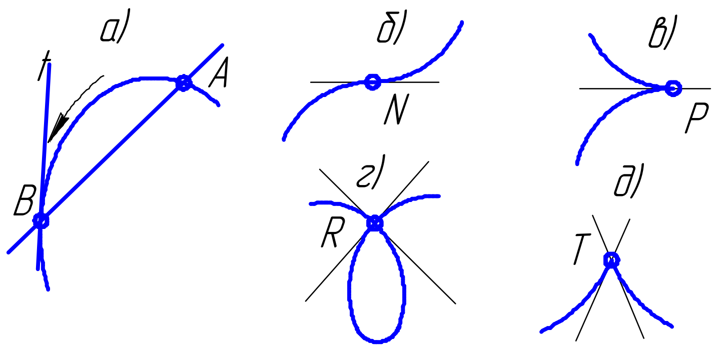


Рис.6.1

Точки плоских кривых разделяются на **обыкновенные** и **особые**. Некоторые случаи особых точек показаны на рис.6.1 б, в, г и д. N – **точка перегиба**, P – **точка возврата**, R – **узловая точка**, T – **точка излома**.

Отметим некоторые свойства ортогонального проецирования кривой.

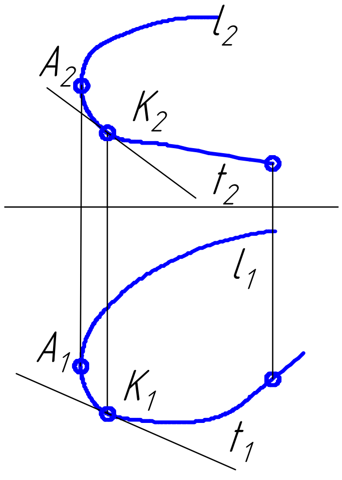


Рис.6.2

Касательная к кривой в пространстве проецируется в касательную к её проекции. На рис.6.2 проведены проекции касательной *t* к кривой *l* в точке К.

Особые точки плоской кривой проецируются в особые точки её проекций.

Порядок алгебраической кривой в общем случае сохраняется при проецировании. Так кривые второго порядка (конические сечения) проецируются также в кривые второго порядка. В частном случае, при расположении плоской кривой в проецирующей плоскости её проекция вырождается в прямую (или отрезок прямой).

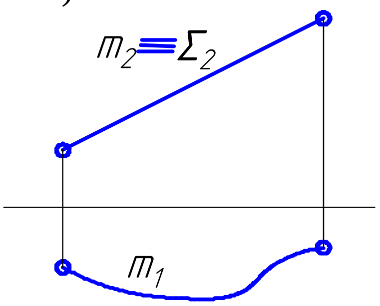


Рис.6.3

На рис.6.3 показан комплексный чертёж плоской кривой m, лежащей в плоскости $\Sigma_2 \perp \Pi_2$.

Чтобы установить по чертежу, какая задана кривая (плоская или пространственная), необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости.

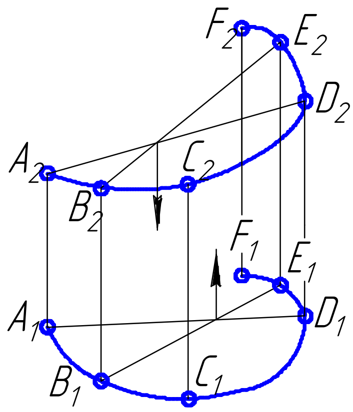


Рис.6.4

Заданная на рис.6.4 кривая является пространственной, так как её точка D не принадлежит плоскости, определяемой тремя другими точками A,B и E этой кривой.

Окружность – плоская кривая второго порядка, ортогональные проекции которой в общем случае – эллипсы. Диаметр окружности, параллельный плоскости проекций, проецируется на неё в натуральную величину и его проекция является большой осью эллипса. На рис.6.5 дан комплексный чертёж окружности, расположенной в плоскости $\Theta(h \times f)$. Точка O – центр окружности, R – её радиус. A_1B_1 - большая ось эллиптической горизонтальной проекции окружности ($AB \,||\, h$); C_2D_2 – большая ось эллиптической фронтальной проекции окружности ($CD \,||\, f$). Если окружность расположена в проецирующей плоскости (рис.6.6), то одна из её проекций вырождается в отрезок прямой A_2B_2, равный диаметру окружности. Отрезок C_1D_1 - большая ось горизонтальной проекции окружности - является проекцией диаметра, параллельного горизонтальной плоскости проекций. В данном случае, когда плоскость окружности является фронтально проецирующей, отрезок CD – фронтально проецирующая прямая.

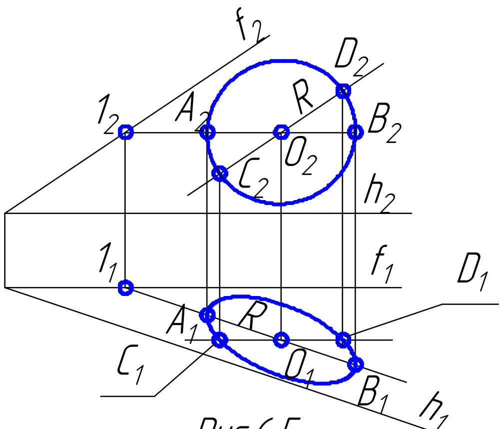


Рис.6.5

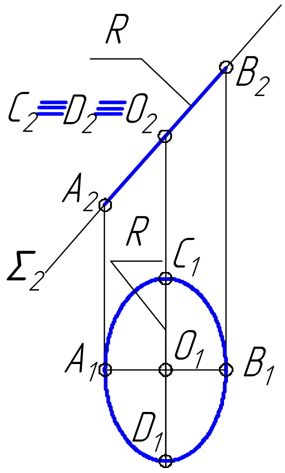


Рис.6.6

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) – пространственная кривая, представляющая собой траекторию точки, выполняющей винтовое движение. Винтовое движение включает в себя равномерно поступательное движение вдоль оси i (рис. 6.7) и равномерно вращательное движение вокруг этой оси. Высота h, на которую точка поднимается за полный оборот, называется **шагом винтовой линии.** Если ось i перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция винтовой линии есть окружность, а фронтальная – синусоида. Для построения фронтальной проекции винтовой линии при заданном диаметре d и шаге h нужно разделить и окружность, и шаг на равное количество частей. Дальнейшие построения видны из чертежа.

Цилиндрическую винтовую линию можно развернуть на плоскость. Её развёртка представляет собой прямую линию с углом подъёма α, где tgα = h/πd.

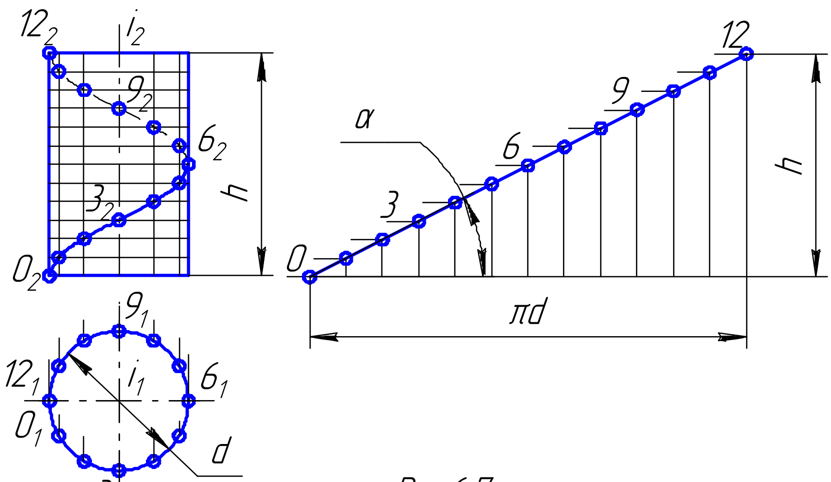


Рис.6.7

6. 2. Комплексный чертёж поверхности

Поверхность представляет собой множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве. Эту линию называют **образующей поверхности**.Она может быть прямой или кривой. Кривая образующая может быть постоянного или переменного вида.

Закон перемещения образующей может быть задан тоже линиями, но иного направления. Эти линии называются **направляющими**. Совокупность нескольких последовательных положений образующей и направляющих создаёт **каркас поверхности** (рис.6.8). Образующие *l* и направляющие m можно поменять местами. При этом поверхность не изменится.

Поверхности можно получать различными способами. Так прямой круговой цилиндр получается путём вращения образующей вокруг его оси или перемещением центра окружности вдоль той же оси.

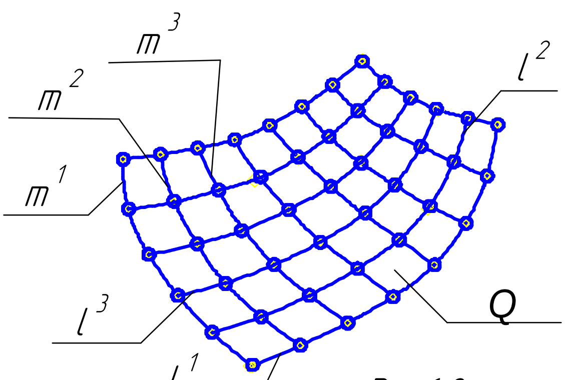


Рис.6.8

В зависимости от формы образующей все поверхности можно разделить на

линейчатые (образующая – прямая линия) и **нелинейчатые** (образующая – кривая линия).

Линейчатые поверхности подразделяются на **развёртывающиеся**, совмещаемые всеми своими точками с плоскостью без разрывов и складок и **неразвёртывающиеся**, которые нельзя совместить с плоскостью таким образом.

К развёртывающимся поверхностям относятся поверхности многогранников, цилиндрические, конические и торсовые (см. ниже). Все остальные поверхности – неразвёртывающиеся.

Нелинейчатые поверхности могут иметь образующую постоянной и переменной формы.

Совокупность независимых геометрических условий, которая однозначно определяет данную поверхность в пространстве, называется **определителем поверхности**.

При проецировании поверхности на плоскость проекций проецирующие лучи касаются этой поверхности в точках, образующих на ней некоторую линию, которая называется **контурной линией**. Проекция контурной линии называется **очерком поверхности**. Таким образом, существуют горизонтальный, фронтальный и профильный очерки поверхности.

6.2.1.Линейчатые поверхности

Линейчатой поверхностью называется поверхность, которая описывается какой-либо прямой (образующей) при её движении в пространстве по какому-нибудь закону.

Гранные поверхности получаются перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей.

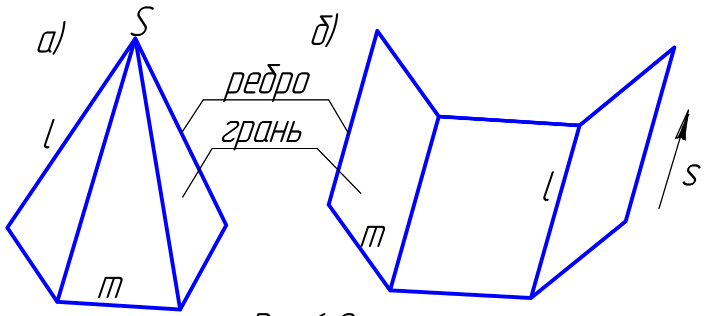


Рис.6.9

При этом, если одна точка S образующей неподвижна, создаётся **пирамидальная поверхность** (рис.6.9 а), если же образующая при перемещении параллельна заданному направлению s, то создаётся **призматическая поверхность** (рис.6.9 б).

Элементами гранных поверхностей являются: **вершина** S (у призматической поверхности она находится в бесконечности), **грань** (часть плоскости, ограниченная участками направляющей и образующей) и **ребро** (линия пересечения смежных граней). Определитель призматической поверхности содержит кроме этого направление s, которому параллельны все образующие.

Замкнутые гранные поверхности называются **многогранниками**. Из числа многогранников выделяют группу правильных многогранников, у которых все грани – правильные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней. Например тетраэдр – правильный четырёхгранник, гексаэдр – куб, октаэдр – восьмигранник и т.д. (рис.6.10 а, б, в).

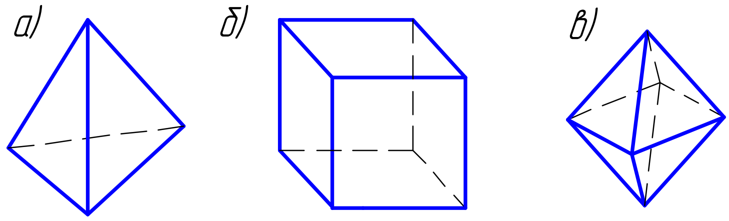


Рис.6.10

Пирамида – многогранник , в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной S.

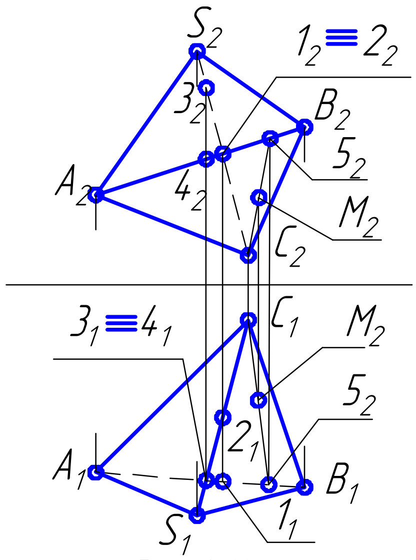


Рис.6.11

На комплексном чертеже пирамида задаётся проекциями её вершин и рёбер с учётом их видимости. Видимость рёбер определяется с помощью конкурирующих точек (рис.6.11). Поскольку горизонтальная проекция 1_1 точки 1, лежащей на ребре AB, расположена ближе к наблюдателю, чем горизонтальная проекция 2_1 точки 2, лежащей на SC, то ввиду того, что эти точки являются фронтально конкурирующими, на фронтальной проекции пирамиды отрезок A_2B_2 будет видимой, а S_2C_2 – невидимой линией. Проекция 3_2 точки 3 расположена на фронтальной плоскости проекций выше, чем 4_2 (точки 3 и 4 являются горизонтально конкурирующими и лежат соответственно на SC и AB). Это говорит о том, что на горизонтальной проекции пирамиды ребро SC будет видимым, а AB – невидимым. Любую точку на гранной поверхности можно построить с помощью образующей, проходящей через эту точку. Так на грани ABC (рис.6.11) с помощью образующей C5 построена точка M.

Призма – многогранник, у которого основаниями являются два взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани – параллелограммы. Если у призмы рёбра перпендикулярны плоскости основания, её называют прямой. На рис.6.12 дан комплексный чертёж прямой четырёхугольной призмы с горизонтально проецирующей поверхностью.

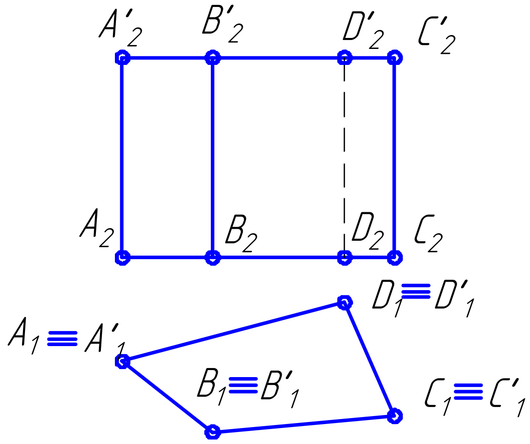


Рис.6.12

Коническая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей *l* по криволинейной направляющей m (рис.6.13 а). При этом одна точка S образующей всегда неподвижна и является вершиной. Определитель конической поверхности включает в себя вершину S и

направляющую m. При этом
$l \ni S$; $l \cap m$.

Цилиндрическая поверхность образуется прямой *l*, пересекающей кривую направляющую m и параллельной заданному направлению s (рис.6.13 б).

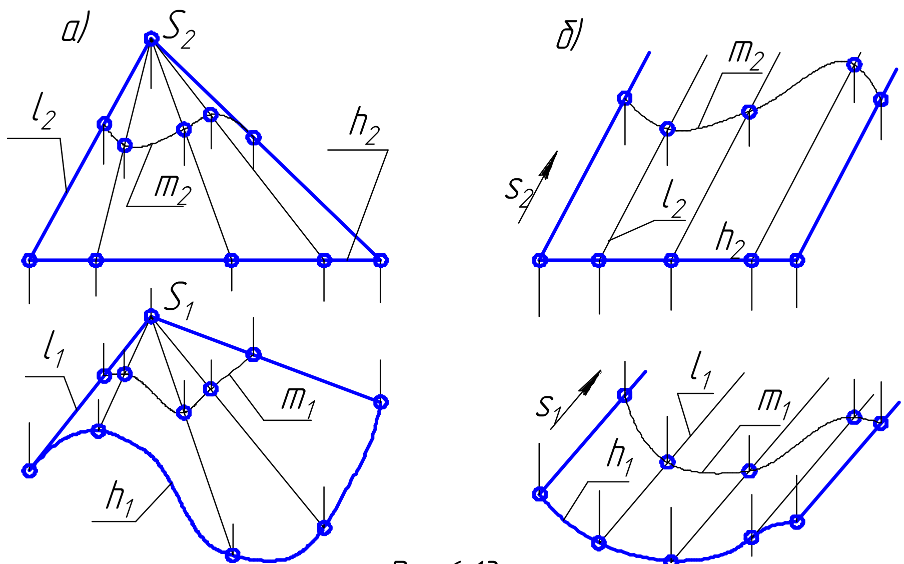


Рис.6.13

Цилиндрическую поверхность можно рассматривать как частный случай конической поверхности с бесконечно удалённой вершиной. Определитель цилиндрической поверхности состоит из направляющей m и направления s образующих *l*, при этом $l \parallel s$; $l \cap m$.

Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоскости проекций, то такую поверхность называют проецирующей.

Точки на конических и цилиндрических поверхностях строят с помощью образующих, проходящих через них. Линии на поверхностях строятся с помощью отдельных точек.

Торсом называется поверхность, образованная прямолинейной образующей *l*, касающейся при своём движении во всех своих положениях некоторой пространственной кривой m, называемой **ребром возврата** (на рис.6.14 а, б приведены пространственный и комплексный чертежи торса). Если m плоская кривая, то торс вырождается в плоскость.

Коническая поверхность является частным случаем торса, у которого ребро возврата m вырождено в точку S - вершину конической поверхности.

Цилиндрическая поверхность – частный случай торса, у которого ребро возврата – точка в бесконечности.

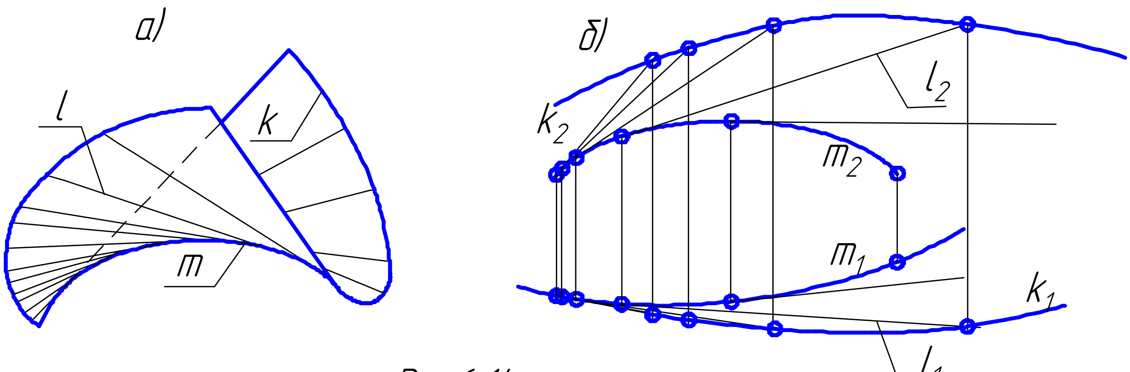


Рис.6.14

Винтовой поверхностью называется поверхность, создаваемая при винтовом движении прямолинейной образующей *l* по двум направляющим – винтовой линии m и её оси i (рис.6.15). Линейчатые винтовые поверхности называются **геликоидами.** Геликоид используется при создании винтовых лестниц, шнеков, а также в силовых резьбах.

6.2.2. Поверхности вращения

Поверхности вращения образуются вращением линии *l* вокруг прямой i – оси вращения. Они могут быть **линейчатыми** и **нелинейчатыми** (криволинейными). Определитель поверхности вращения включает образующую *l* и ось i. Каждая точка образующей описывает при вращении окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения. Эти окружности называются **параллелями**. Наибольшая и наименьшая параллели называются соответственно **экватором** и **горлом**. Кривые, образующиеся на поверхности вращения в результате пересечения поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называются **меридианами**. Точки на поверхности вращения обычно строят с помощью параллелей h и образующих *l*.

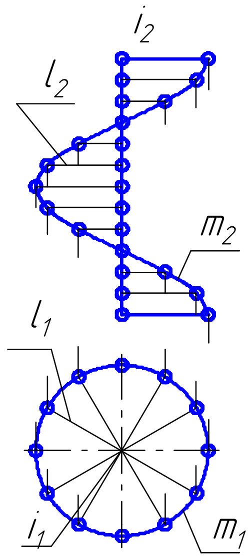


Рис.6.15

Следующие поверхности вращения относятся к классу линейчатых.

Цилиндр вращения образуется вращением прямой *l* вокруг параллельной ей оси i (рис.6.16 а).

Конус вращения образуется вращением прямой *l* вокруг пересекающейся с ней оси i (рис.6.16 б).

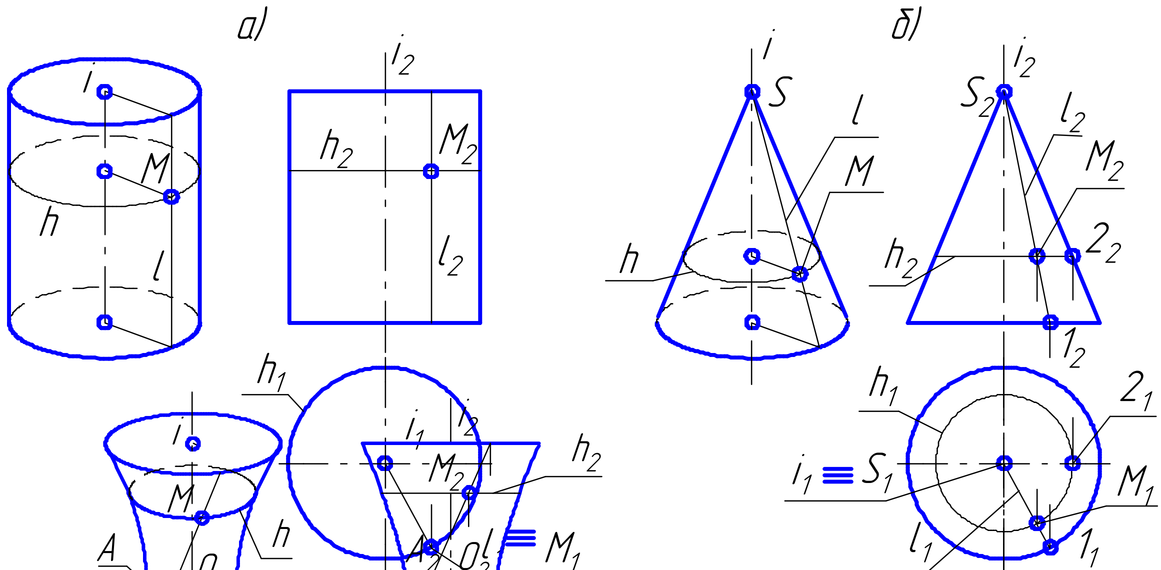


Рис.6.16

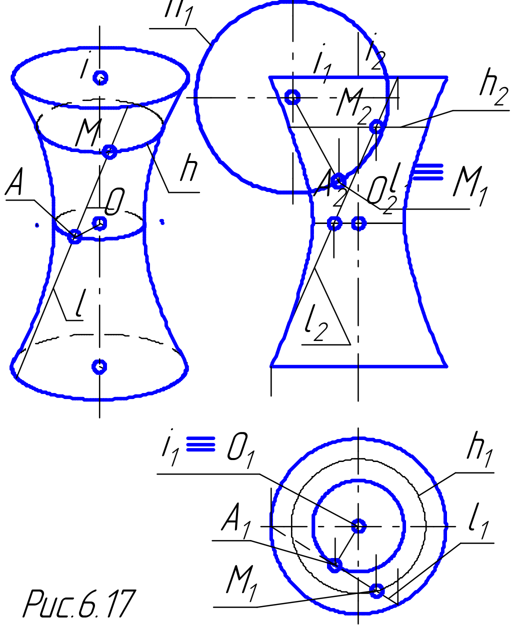


Рис.6.17

Однополостный гиперболоид вращения образуется вращением прямой *l* вокруг скрещивающейся с ней оси i (рис.6.17).

При вращении прямой вокруг оси i все точки прямой *l* опишут окружности различных радиусов, причём общий перпендикуляр АО прямых i и *l* будет наименьшим из всех радиусов, и поэтому точка А опишет окружность, являющуюся горлом гиперболоида.

Фронтальным его очерком будет гипербола, откуда он и получил своё название.

К поверхностям, образуемым вращением окружности, относятся сфера и тор.

Сфера образуется вращением окружности вокруг её диаметра.

Тор образуется вращением окружности вокруг оси i, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через её центр. При этом, если ось i проходит вне окружности, то тор называется кольцом (рис.6.18 а, б).

Сфера является поверхностью второго порядка, а тор – четвёртого, что соответствует максимальному числу точек пересечения этих поверхностей с прямой линией. Построение точек как на сфере, так и на торе производят с помощью параллелей h.

Эллипсоид вращения образуется вращением эллипса вокруг одной из его осей (рис.6.19).

Параболоид вращения (рис.6.20) образуется вращением параболы вокруг её оси.

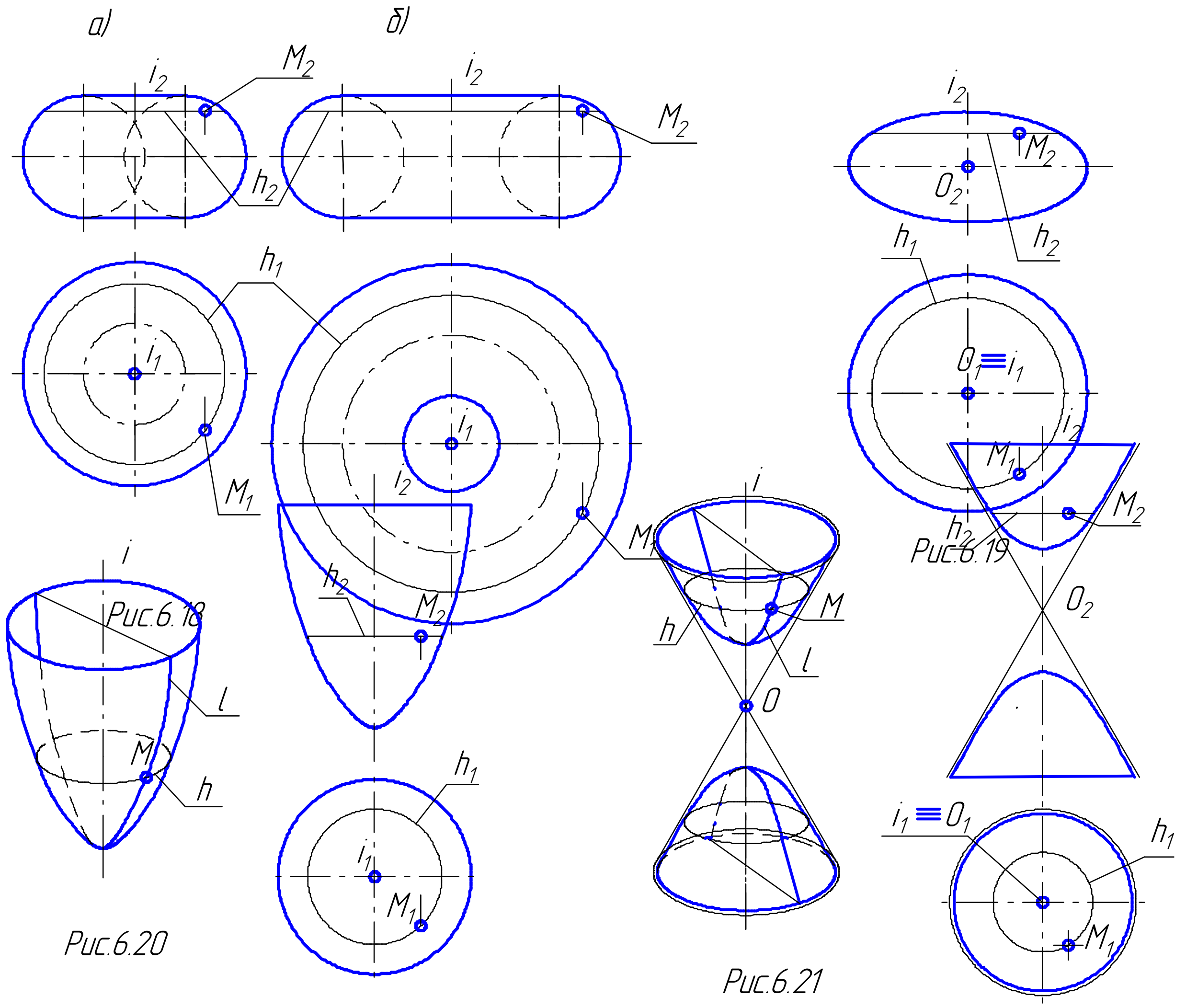


Рис.6.18

Рис.6.19

Рис.6.20

Рис.6.21

Двухполостный гиперболоид вращения (рис.6.21) образуется вращением гиперболы вокруг её действительной оси i. При вращении асимптот этой гиперболы получается асимптотический конус вращения, во внутренней области которого и расположен двухполостный гиперболоид.

Эллипсоид, гиперболоид и параболоид вращения представляют собой поверхности второго порядка.

Однополостный гиперболоид вращения (рис.6.17) образуется вращением гиперболы вокруг её мнимой оси. Как было показано выше, однополостный гиперболоид вращения является линейчатой поверхностью.

7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

7.1. Сечение поверхности плоскостью

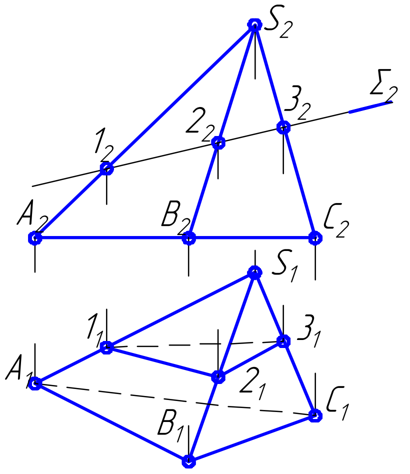


Рис. 7.1

Если одна из пересекающихся поверхностей – плоскость, то такое пересечение принято называть сечением поверхности плоскостью. Полученная при этом линия называется **линией сечения**. Если она замкнута, то ограниченная ею фигура называется **сечением**. В сечении поверхности плоскостью получается плоская линия.

Если поверхность гранная, то эта линия будет ломаной. Для её построения достаточно определить точки пересечения рёбер и сторон основания (если имеет место пересечение основания) и соединить полученные точки с учётом их видимости (рис.7.1).

Секущая плоскость Σ_2 занимает фронтально проецирующее положение, поэтому точки пересечения рёбер определяются без дополнительных построений. Так как грань ASC невидима относительно плоскости Π_1, то и ребро 1_1 3_1 тоже невидимо.

В сечении цилиндрической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии (рис.7.2):

окружность, если секущая плоскость Γ_2 перпендикулярна оси вращения поверхности;

эллипс, если секущая плоскость Σ_2 не перпендикулярна и не параллельна оси вращения;

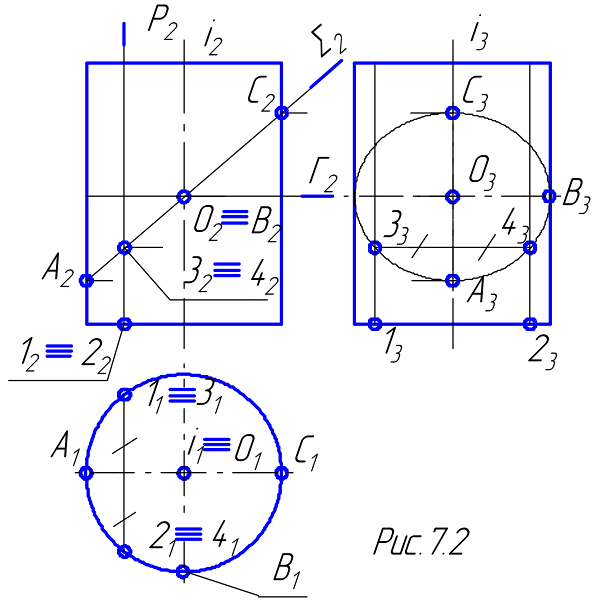


Рис. 7.2

две образующие прямые, если секущая плоскость P_2 параллельна оси вращения поверхности.

На плоскость $П_1$, перпендикулярную оси вращения, окружность и эллипс на поверхности цилиндра проецируются в окружность, совпадающую с проекцией всей поверхности.

При сечении цилиндра плоскостью Σ_2 на профильной проекции будем иметь эллипс, построение которого начинается с определения положения **опорных точек** C_3 и A_3, диктуемое фронтальной проекцией (см. точки C_2 и A_2).

К опорным относятся **экстремальные точки** (высшая и низшая, ближняя и дальняя и т.д.) и **точки видимости** (проекции этих точек лежат на контурной линии поверхности). Точки видимости разграничивают линию пересечения на видимую и невидимую части.

На рис.7.2 малая ось эллипса равна A_3C_3, а большая – диаметру цилиндра. Положение промежуточных точек 3 и 4 можно определить введением вспомогательных секущих плоскостей – **плоскостей посредников**, дающих при пересечении с поверхностью геометрически простые линии. В данном случае в качестве плоскостей посредников удобно выбрать фронтально проецирующие плоскости P_2. При сечении цилиндра этой плоскостью на его профильной проекции получим две образующие, положение которых относительно оси определится горизонтальными проекциями 1_1 и 2_1 точек 1 и 2, лежащих на основании цилиндра. Пересечение образующих с линией связи, проведённой из точки $3_2 \equiv 4_2$, даст промежуточные точки 3_3 и 4_3 на профильной проекции. Поступая подобным образом, определим необходимое количество промежуточных точек для построения эллипса. В заключение соединяем все точки плавной кривой.

В сечении конической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии:

окружность, если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси вращения (рис.7.3 а);

эллипс, если секущая плоскость Σ пересекает все образующие поверхности (рис.7.3 б);

парабола, если секущая плоскость Σ параллельна одной из образующих (рис.7.3 в);

гипербола, если секущая плоскость Σ параллельна двум образующим поверхности (рис.7.4 а);

две образующие прямые, если секущая плоскость Σ проходит через вершину S конуса (рис.7.4 б).

Проекции кривых линий сечений конуса плоскостью целесообразно строить с использованием плоскостей посредников, перпендикулярных его оси. Линия пересечения при этом будет окружностью радиуса R (рис.7.3 а).

Рассмотрим построение линии пересечения на примере, приведённом на рис.7.3 б. Построение начинают с опорных точек. В рассматриваемом примере опорными будут точки A,B,C и D. Положение точек A и B, ограничивающих

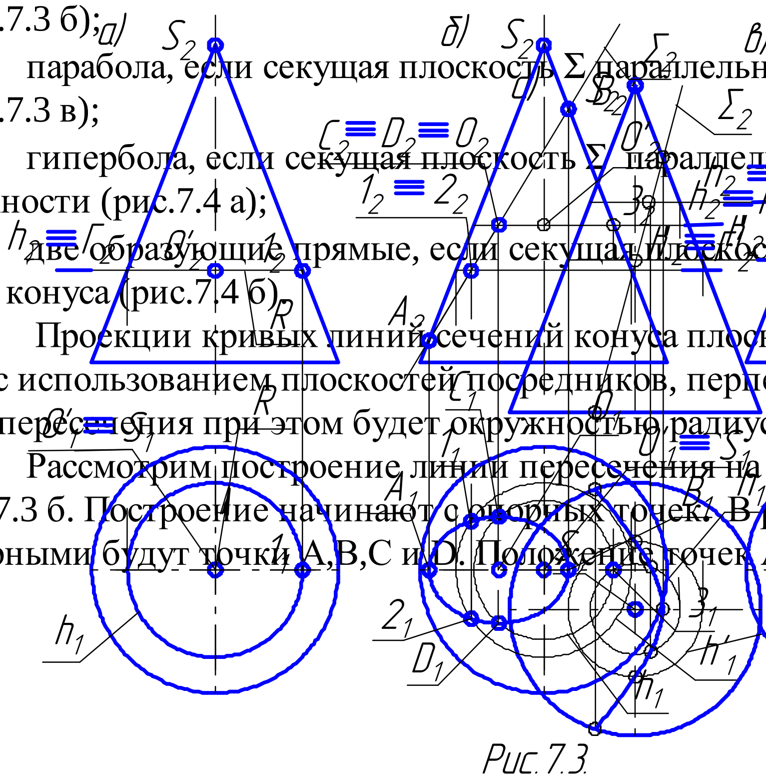


Рис.7.3.

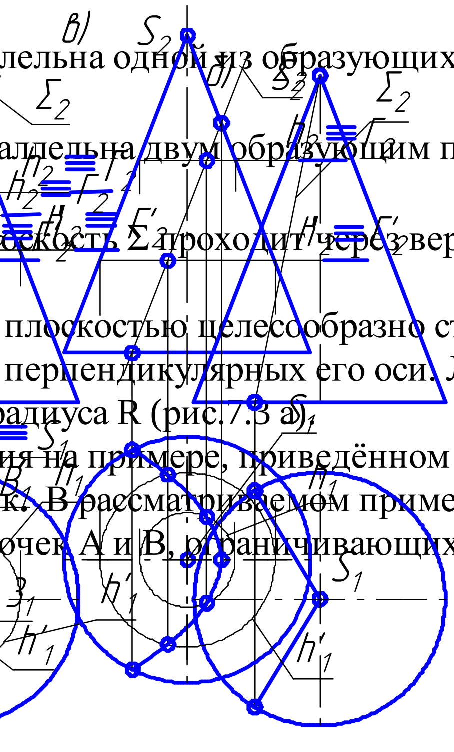


Рис.7.4.

большую ось эллипса, очевидно. Точка O, являющаяся центром эллипса, делит отрезок AB пополам. Точки C и D – фронтально конкурирующие и ограничивают малую ось эллипса. Положение этих точек можно определить вводя вспомогательную фронтально проецирующую плоскость Г, проходящую через фронтальную проекцию O_2 центра эллипса O. Горизонтальная проекция h_1 линии пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью конуса – окружность. Горизон-тальная проекция линии пересечения секущей плоскости Σ и вспомогательной плоскости Г - фронтально проецирующая прямая, совпадающая с линией связи O_1O_2. Все точки, лежащие на этой линии, принадлежат секущей плоскости Σ. Таким образом точки пересечения линии связи O_1O_2 и h_1 принадлежат одновре-менно поверхности конуса и секущей плоскости Σ, т.е. являются точками, лежа-щими на линии их пересечения.

Аналогично строятся промежуточные точки пересечения, например точки 1 и 2. Проводится вспомогательная плоскость $Г'_2$ и определяется вырожденная в точку фронтальная проекция линии пересечения этой плоскости и секущей плоскости Σ. Из этой точки проводится линия связи до пересечения в точках 1_1 и 2_1 с окружностью h'_1.Такие построения повторяются необходимое число раз, после чего полученные точки соединяются плавной кривой. В рассматриваемом примере сечение будет иметь форму эллипса. Натуральный вид эллиптического сечения можно построить при помощи его осей $AB = A_2B_2$, $CD = C_1D_1$.

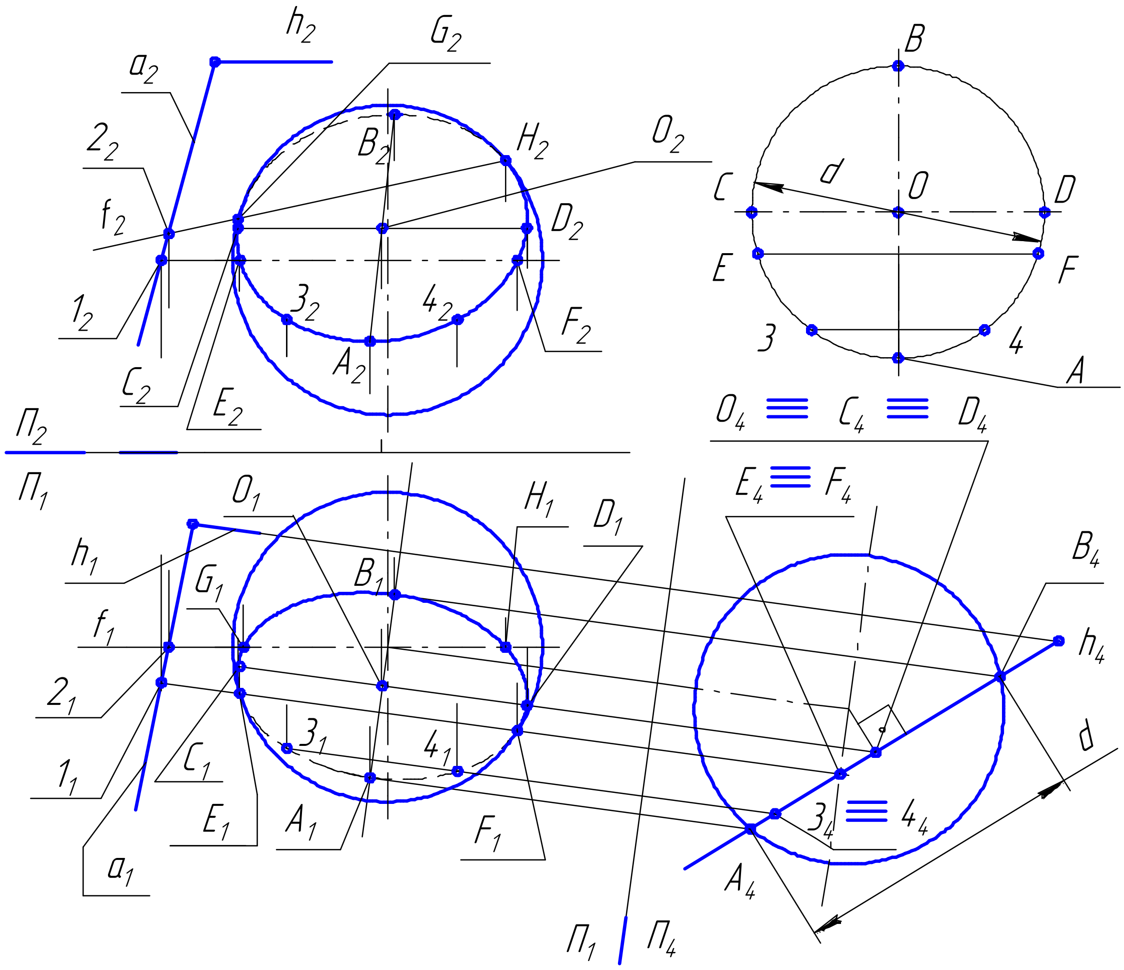


Рис.7.5.

Подобным образом строятся конические сечения, приведённые на рис.7.3 в (парабола) и рис.7.4 а (гипербола).

Случай пересечения конуса вращения плоскостью общего положения можно свести к предыдущему заменой плоскостей проекций, переводя секущую плоскость в новой системе плоскостей проекций в проецирующее положение. При этом используются приёмы, рассмотренные в разделе 4.1.3.

Приведём пример (рис.7.5), в котором сфера пересекается плоскостью общего положения $\Theta(a \cap h)$.

Построим дополнительное изображение сферы и секущей плоскости, вводя плоскость проекций $П_4 \perp П_1$, причём $П_4 \perp h_1$. Тогда плоскость Θ станет проецирующей по отношению к $П_4$ в новой системе плоскостей проекций $П_1/П_4$.

Любая плоскость рассекает сферу по окружности. В частности плоскость Θ - по окружности с диаметром d.

На плоскости $П_4$ отмечаем проекции опорных точек: A_4 – самой низкой точки сечения, B_4 – самой высокой, дающих величину диаметра d окружности сечения с центром в точке $O(O_4)$; $E_4 \equiv F_4$ – на экваторе сферы (проекции E_1 и F_1 точек E и F являются точками видимости относительно плоскости $П_1$, т.к. лежат на очерковой линии); $C_4 \equiv D_4 \equiv O_4$ горизонтального диаметра CD, определяющего большую ось эллипса – горизонтальной проекции окружности сечения.

Горизонтальная проекция сечения – эллипс – строится по большой C_1D_1 и малой A_1B_1 осям. Фронтальная проекция окружности - тоже эллипс, который можно построить по сопряжённым диаметрам A_2B_2 и C_2D_2 (ординаты этих точек берутся с плоскости проекций $П_4$).

Горизонтальную проекцию сечения можно получить также, используя промежуточные точки (см. точки 3 и 4). Для этого следует построить действительный вид сечения (окружность с диаметром d). Поскольку отрезки [CD],[EF] и [3-4] по отношению к $П_1$ будут горизонталями, то они проецируются на эту плоскость в натуральную величину. Подобным образом можно получить необходимое количество промежуточных точек. Фронтальные проекции этих точек строим обычным путём, беря их ординаты с плоскости $П_4$.

Часто бывает необходимо определить натуральный вид косого сечения. Для простоты рассмотрим случай сечения поверхности вращения, когда секущая плоскость является проецирующей, например, фронтально проецирую-щей плоскостью Σ (рис.7.6).

Предварительно строим опорные точки. На главном меридиане f данной поверхности отмечаем низшую точку A и высшую точку B (см. точки A_2,B_2 на фронтальной плоскости проекций). На экваторе h отмечаем точки C и D, которые являются точками видимости для плоскости проекций $П_1$ и разделяют горизонтальную проекцию искомой линии пересечения на видимую и невидимую части. Для построения случайных точек на поверхности вращения проводим графически простые линии, которыми являются её параллели, и отмечаем на них точки, принадлежащие секущей плоскости Σ. На рис.7.6 проведена параллель h', являющаяся на $П_1$ окружностью радиуса R. На ней отмечены горизонтальные проекции $5'_1$ и $5''_1$ точек 5' и 5'', принадлежащих плоскости Σ.

Построение натурального вида сечения проще всего выполнить путём непосредственного измерения высот и широт точек сечения. При этом высоты (точки 1 – 6) следует измерять на поле $П_2$ (точки 1_2 – 6_2), беря их с проекции $Σ_2$ секущей плоскости Σ, а широты – на поле $П_1$ (например отрезок $5'_1$- $5''_1$), так

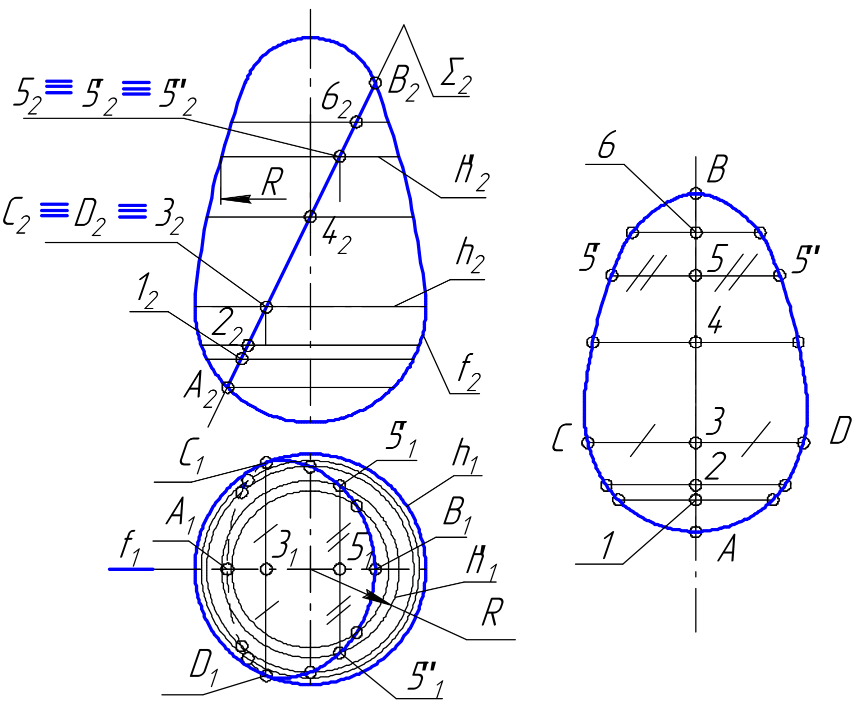


Рис. 7.6.

как они располага-ются на фронтально проецирующих пря-мых (горизонталях) и поэтому не искажаются на поле $П_1$. Получив достаточное количество точек, и соединив их между собой плавной кривой, будем иметь натуральный вид косого сечения, приведённый на рис. 7.6 справа.

7. 2. Пересечние прямой с поверхностью

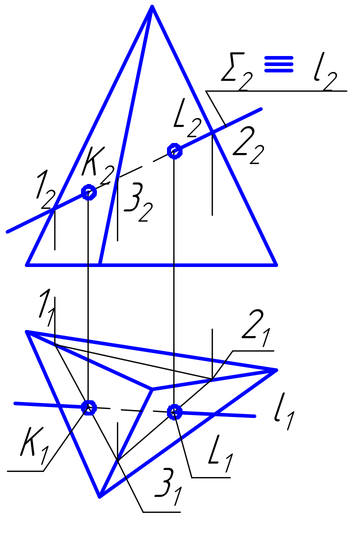


Рис. 7.7.

Для определения точек пересечения прямой с поверхностью необходимо выполнить следующие операции:

через данную прямую провести вспомогательную секущую плоскость;

построить контур сечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью;

отметить точки пересечения контура построенного сечения с заданной прямой. Полученные точки будут искомыми.

На рис.7.7 приведён пример определения точек входа и выхода при пересечении прямой с пирамидой.

Для решения задачи проводится фронтально проецирующая секущая плоскость Σ. Определяются точки её пересечения с рёбрами пирамиды. Используя полученные точки, строятся проекции треугольного сечения, точки пересечения горизонтальной проекции которого с прямой *l* (K_1 и L_1) есть горизонтальные проекции искомых точек. Строятся их фронтальные проекции K_2 и L_2, после чего определяется видимость прямой.

Приведём пример пересечения прямой с поверхностью конуса (рис.7.8 а). Проведём секущую плоскость через данную прямую и вершину конуса. В этом случае, как было показано ранее, конус будет пересекаться по прямолинейным образующим (см. рис.7.4 б).

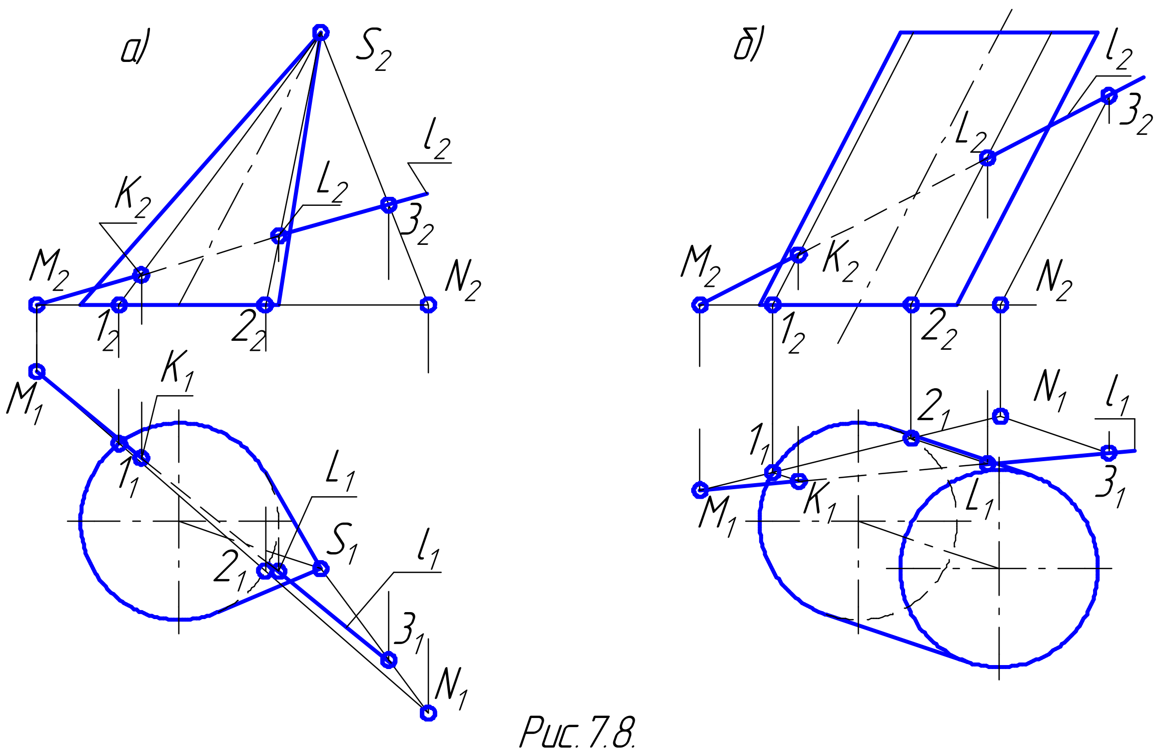


Рис. 7.8.

В сечении получается треугольник, одна вершина которого совпадает с вершиной конуса S, а две другие располагаются на его основании. Указанная секущая плоскость будет плоскостью общего положения.

Для её построения из вершины S проведём произвольную прямую до пересечения с плоскостью основания конуса в точке N, пересекающую заданную прямую *l* в точке 3. После чего продолжим прямую *l* также до пересечения с плоскостью основания конуса в точке M. В данном случае построение удобно производить, начиная с фронтальной проекции конуса, на которой получим фронтальные проекции M_2 и N_2 следов двух прямых, образующих секущую плоскость (о следах прямой и плоскости см. в разделах 2.2.1 и 2.3.3).

Определяем на l_1 горизонтальную проекцию 3_1 точки 3, а затем на продолжении прямой $S_1 3_1$ находим горизонтальную проекцию N_1 следа N.

Проводя из M_2 линию связи до пересечения с l_1, находим горизонтальную проекцию M_1 другого следа. Соединив M_1 и N_1, получим горизонтальную проекцию следа секущей плоскости, пересекающую окружность основания конуса в точках 1_1 и 2_1.

Проецируем их на Π_2 и соединяем фронтальные проекции 1_2 и 2_2 с проекцией вершины S_2. Точки пересечения K_2 и L_2 полученных образующих конуса с фронтальной проекцией l_2 прямой *l* являются соответствующими проекциями искомых точек K и L входа и выхода. В заключение обычным путём определяются их горизонтальные проекции.

Решение сходной с предыдущей задачи по определению точек пересе- чения прямой с цилиндрической поверхностью приведено на рис.7.8 б.

Здесь через фронтальную проекцию 3_2 произвольной точки 3, лежащей на прямой *l*, проводят прямую параллельно образующей заданной поверхности. Далее находят проекции M_2 и N_2 следов M и N заданной и построенной прямых, определяющих секущую плоскость, которая в данном случае параллельна образующим цилиндра. Затем, как обычно,находят их горизонтальные проекции. Определив таким образом горизонтальную проекцию M_1N_1 следа секущей плоскости, находят точки 1_1 и 2_1, в которых этот след пересекает нижнее основание цилиндра. Далее через полученные точки и их фронтальные проекции проводят образующие, которые пересекают прямую *l* в точках K и L, являющихся иско-мыми точками входа и выхода.

Определим точки пересечения прямой с поверхностью сферы (рис.7.9).

Для чего заключим прямую *l* во фронтально проецирующую плоскость Σ.

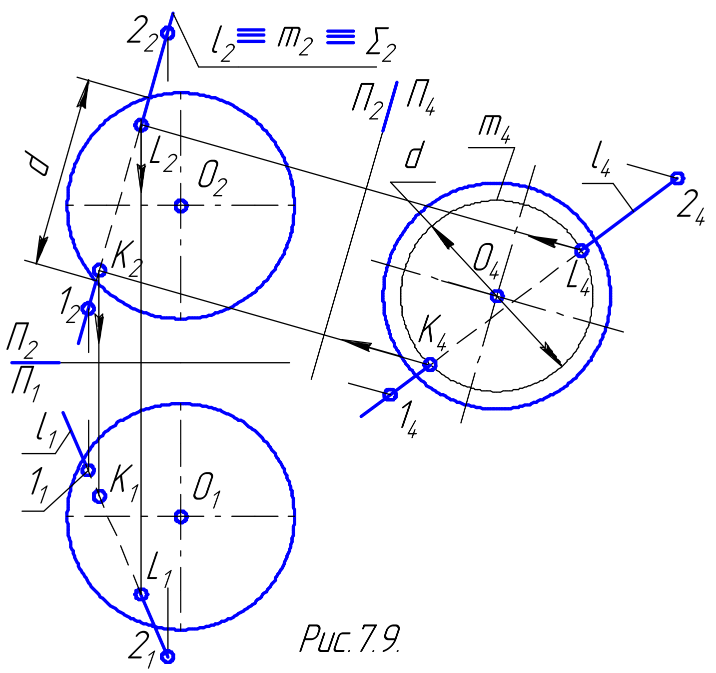


Рис. 7.9.

Этой плоскостью сфера рассечётся по окружности диаметра d, которая на фронтальной плоскости проекций изобразится в виде прямой m_2, а на горизонтальной – в виде эллипса. Для упрощения построений введём дополнительную плоскость проекций $П_4$, по отношению к которой секущая плоскость является плоскостью уровня. Тогда сечение сферы спроецируется на $П_4$ в натуральную величину в виде окржности m_4 диаметром d. После этого мы можем отметить проекции K_4 и L_4 точек пересечения K и L с прямой *l*. Проецируем их последовательно на $П_2$ и $П_1$.

7.3. Плоскости, касательные к поверхности

Касательная плоскость является геометрическим местом всех касательных, проведённых к данной кривой поверхности, проходящих через одну её точку.

Очевидно, что для построения касательной плоскости к поверхности в какой – либо её точке достаточно через эту точку провести на поверхности только две кривые линии и построить к ним касательные прямые в данной точке. Эта пара касательных и определит искомую касательную плоскость.

В зависимости от вида поверхности касательная плоскость может иметь с ней только одну общую точку, например, в случае сферы, или бесконечное их количество, составляющее прямую или кривую линии, например, в случае конической поверхности.

Построим касательную плоскость к поверхности конуса в точке M (рис.7.10 а).

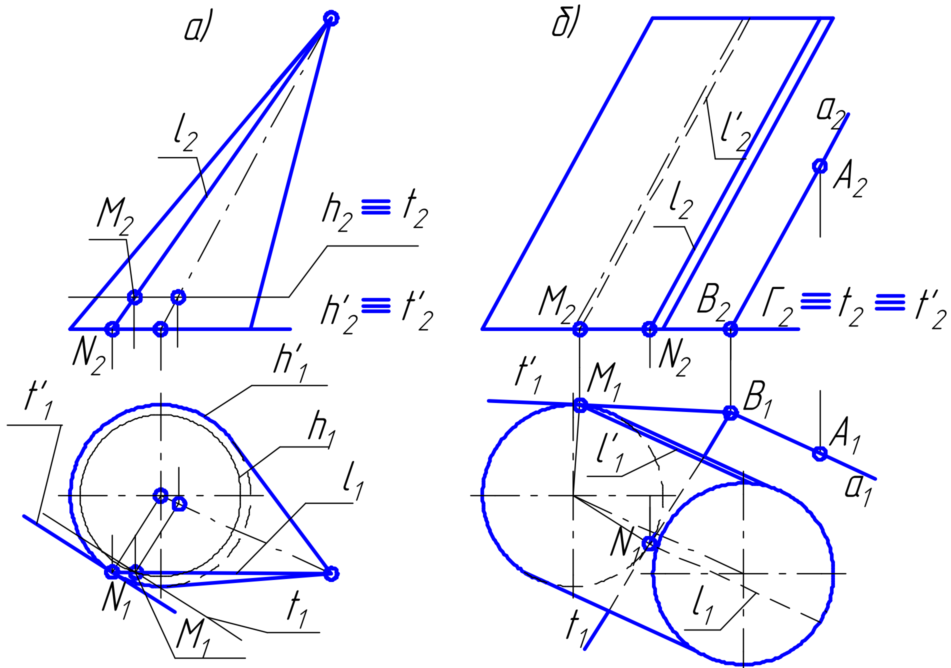


Рис. 7.10.

С этой целью через точку M проводится образующая $l(l_1,l_2)$. Она является одной из прямых, определяющих касательную плоскость. Второй прямой будет касательная t к окружности h в её точке M, проведённая на горизонтальной проекции конуса. Нетрудно видеть, что касательная t параллельна касательной t′, проведённой в точке N к окружности h′ основания конуса, поэтому окружность h можно не строить.

Провести через точку A касательную плоскость Θ к цилиндрической поверхности, приведённой на рис.7.10 б.

Решение задачи строится в следующей последовательности. Так как касательная плоскость должна содержать в себе образующую цилиндра, то проведём через точку A параллельно ей прямую $a(a_1,a_2)$. Если теперь провести через точку B – пересечения прямой a с плоскостью Г – касательные прямые t и t′ к окружности основания цилиндрической поверхности, то прямая a и эти касательные определят две искомые касательные плоскости $\Theta(a \cap t)$ и $\Theta'(a \cap t')$. Эти плоскости касаются поверхности цилиндра по её образующим l и l'.

8. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линия пересечения двух поверхностей в общем виде представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на несколько частей.

Надо иметь в виду, что проекции линий пересечения всегда располагаются в пределах площади наложения одноимённых проекций пересекающихся поверхностей.

При пересечении гранных поверхностей в общем случае получается пространственная ломаная линия.

Обычно линию пересечения двух поверхностей строят по отдельным точкам. При этом требуется выполнить **условие инцидентности (взаимопринадлежности)** точек и поверхностей. Для чего необходимо и достаточно, чтобы эти точки принадлежали линиям, находящимся в заданных поверхностях и пересекающимся между собой. Точки пересечения таких линий будут общими для заданных поверхностей, т.е. точками их пересечения.

Такие линии получаются при пересечении заданных поверхностей вспомогательными поверхностями или плоскостями – посредниками.

В результате можно сформулировать следующий алгоритм построения линии пересечения двух поверхностей:

заданные поверхности, например Φ и ϑ (см. рис.8.1), пересекаются вспомогательной поверхностью Θ;

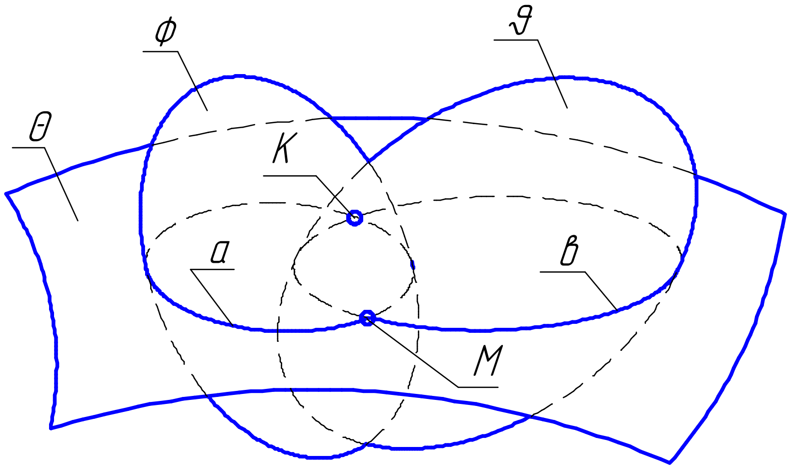


Рис.8.1.

строят линии пе-ресечения a и b поверх-ностей Ф и ϑ вспомо-гательной поверхностью Θ ($a = Ф \cap \Theta$; $b = \vartheta \cap \Theta$);

точки пересечения К и М линии a с линией b принадлежат как Ф, так и ϑ ($a \cap b$ = К,М; К,М $\subset$ Ф; К,М $\subset \vartheta$);

выполняют указанные операции необходимое количество раз;

соединяя определённым образом полученные точки между собой, строят линии пересечения поверхностей Ф и ϑ.

Следует выбирать поверхности – посредники так, чтобы они давали графически простые линии пересечения с заданными поверхностями (например, прямые или окружности).

При составлении алгоритма не вкладывалось никаких конкретных понятий о виде, расположении и способе задания поверхностей Ф и ϑ, поэтому приведённый алгоритм является обобщённым, пригодным для решения задач по определению линии пересечения любых поверхностей.

В качестве вспомогательных поверхностей при определении линии пересечения обычно используются плоскости или сферы.

8. 1. Пересечение гранных поверхностей

Линия пересечения гранных поверхностей представляет собой одну или несколько замкнутых ломаных и определяется с помощью вспомогательных секущих плоскостей двумя способами.

Применяя первый способ, находят линии пересечения граней одного тела с гранями другого, т.е. сводят задачу к нахождению линии пересечения двух плоскостей.

Второй способ заключается в том, что находят точки пересечения рёбер одного многогранника с граня-

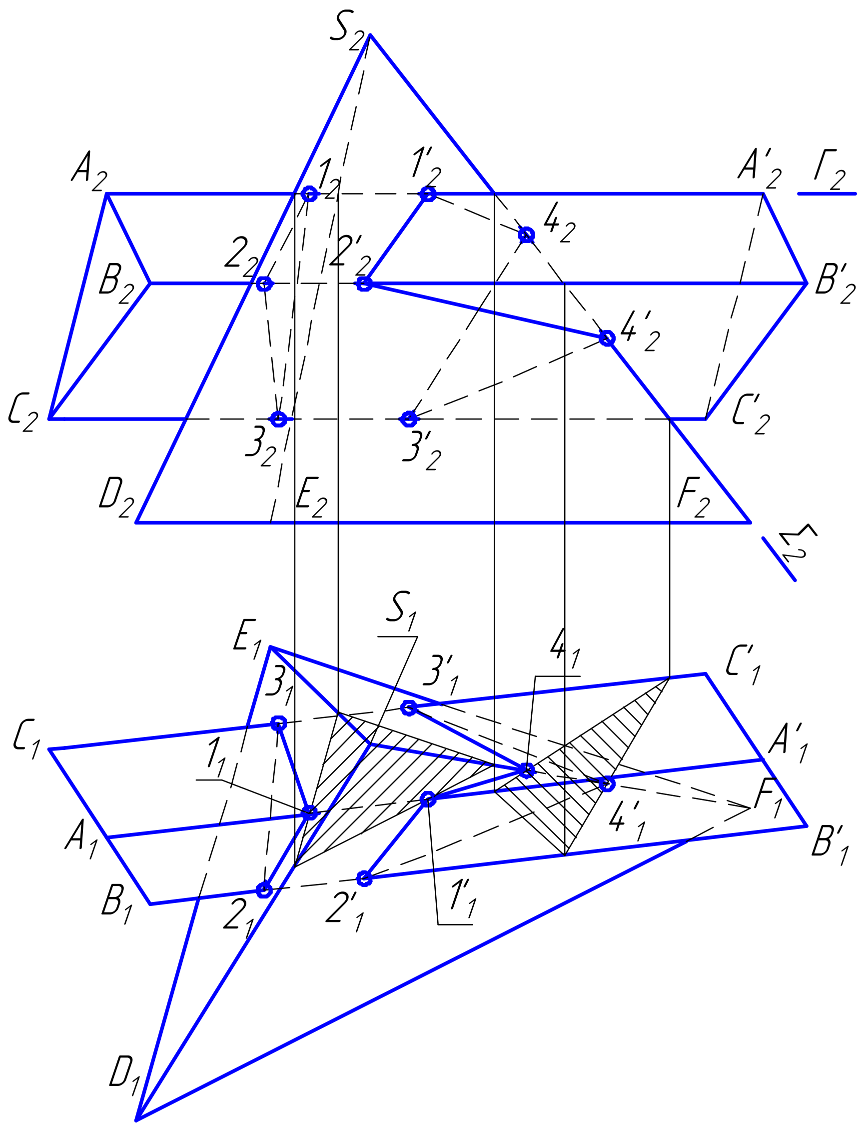


Рис.8.2

ми другого. При этом задача сводится к нахождению точек встречи прямой и плоскости. Обычно пользуются вторым способом.

Рассмотрим построение линии пересечения трёхгранных призмы и пирамиды, представленных на рис.8.2.

Через какое – либо ребро многогранника проводится проецирующая плоскость. Например, $Г_2$ проводится через ребро AA′ трёхгранной призмы. В проекции на $П_1$ сечение пирамиды представится в виде треугольника (на рисунке заштрихованного), стороны которого пересекают $A_1A'_1$ в точках 1_1 и $1'_1$, являющихся проекциями точек пересечения 1 и 1′ ребра AA′ призмы с гранями ESD и DSB пирамиды. Затем эти точки проецируются на $П_2$. Производя подобные операции с другими рёбрами призмы, получим остальные точки встречи рёбер призмы и граней пирамиды (2,2′ и 3,3′). Поскольку точки 1,2 и 3 лежат на одной грани ESD пирамиды, соединим их между собой с учётом видимости ломаной, являющейся одной из двух замкнутых линий, на которые распадается линия пересечения двух многогранников. Другая замкнутая линия проходит через две грани, поэтому для её проведения необходимо предварительно определить точки пересечения ребра SF пирамиды с гранями AA′C′C и BB′C′C призмы. С этой целью через SF следует провести фронтально проецирующую плоскость Σ_2. Горизонтальной проекцией сечения призмы этой плоскостью будет треугольник (на рисунке заштрихован), стороны которого пересекают ребро в точках 4_1 и $4'_1$. Полученные точки являются горизонтальными проекциями искомых точек встречи 4 и 4′. Последовательно соединяем между собой точки 1′,2′,4′,3′ и 4 с учётом видимости. В результате получим две проекции другой ломаной линии.

8. 2. Пересечение гранной и криволинейной поверхностей

В качестве примера рассмотрим пересечение поверхностей проецирующего цилиндра вращения и наклонной трехгранной призмы (рис.8.3). Используем здесь решение двух позиционных задач, а именно, задачу на пересечение поверхности с плоскостями (гранями многогранника) и с прямыми (рёбрами многогранника). Каждая из граней призмы является плоскостью общего положения, которая пересекает цилиндр по эллиптической кривой.

В качестве вспомогательных плоскостей – посредников в данном случае удобно взять горизонтальные плоскости уровня, которые рассекают призму по одинаковым треугольникам, а цилиндр – по окружностям, горизонтальные проекции которых совпадают.

Сторона MP основания призмы касается основания цилиндра в точке B, являющейся наинизшей точкой его сечения гранью MM′P′P. В плоскости NN′P′P имеется горизонталь, которая касается цилиндра в точке $D(D_1,D_2)$ и является наивысшей точкой его эллиптического сечения этой гранью. Сначала определяется положение D_1 путём проведения из центра окружности перпендикуляра к стороне N_1P_1, затем – горизонтальных проекций касательной и точки её пересечения с ребром NN′. После чего можно найти высоту расположения секущей плоскости Γ_2^3 и фронтальную проекцию D_2 точки D. Поскольку в грани MM′N′N нет горизонталей, касательных к цилиндру, то в ней отсутствуют экс-тремальные точки сечения. Крайние левая и правая (очерковые) обра-зующие цилиндра пересекают повер-хность призмы в точках A,C и E, положение гори-зон-тальных проекций которых оче-видно. Точки A и C прина-длежат грани MM′P′P и определяются с помощью секущих плоскостей Γ_2 и Γ_2^5 в последовательности, показанной на чертеже стрелками. Точка E лежит на грани NN′P′P и определяется с помощью плоскости Γ_2^4.

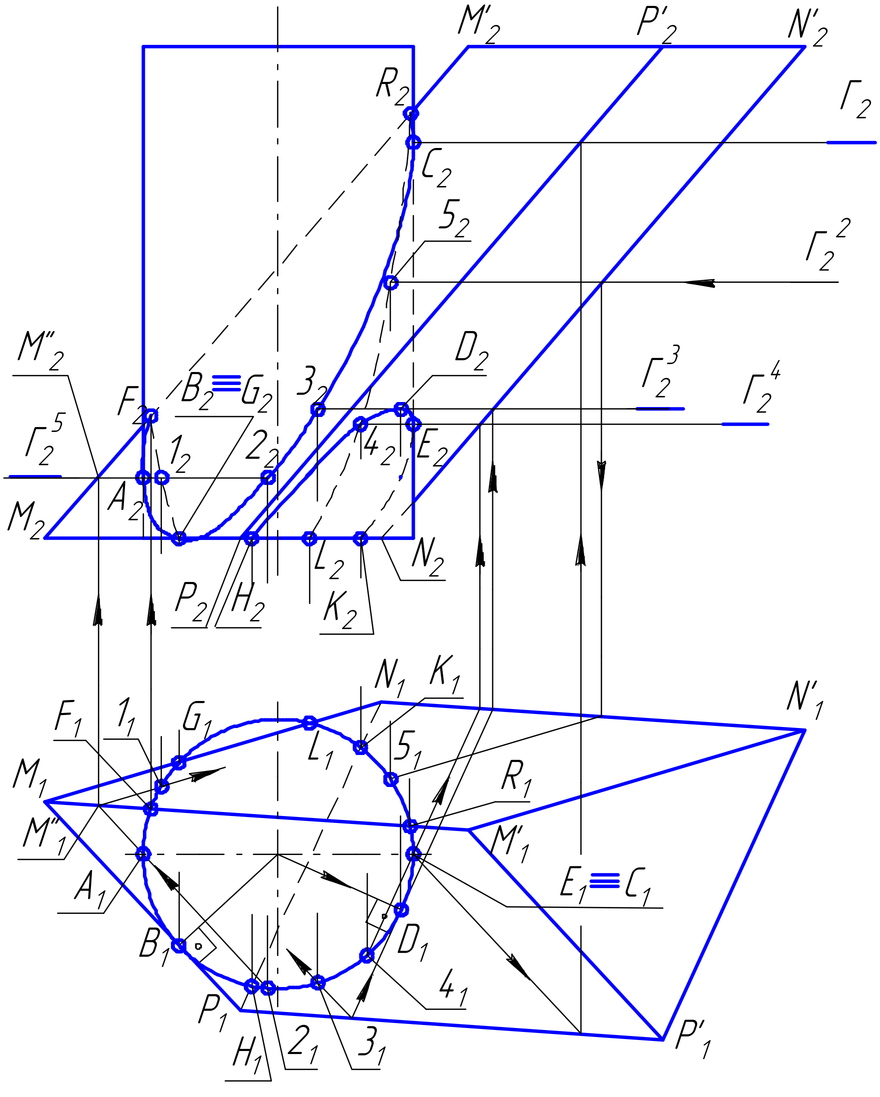


Рис.8.3.

Опорные точ-ки G,B,L,K и H, являющиеся точками пересечения оснований цилиндра и призмы, определяются на плоскости проекций Π_1 без дополнительных построений, а затем проецируются на Π_2. Промежуточные точки частично строятся с использованием имеющихся плоскостей посредников, а частично с помощью дополнительных. Точки F и R, лежащие на ребре MM′, опре-деляются по их горизонтальным проекциям.

Видимыми относительно плоскости проекций Π_2 будут те отрезки линий пересечения, которые принадлежат видимым частям поверхностей призмы и цилиндра.

Все линии пересечения являются горизонтально конкурирующими и совпадают на Π_1 с окружностью основания цилиндра.

8.3. Пересечение двух криволинейных поверхностей

Построение линии пересечения двух криволинейных поверхностей рассмотрено на примере, приведённом на рис.8.4, где представлено пересечение кругового конуса со сферой.

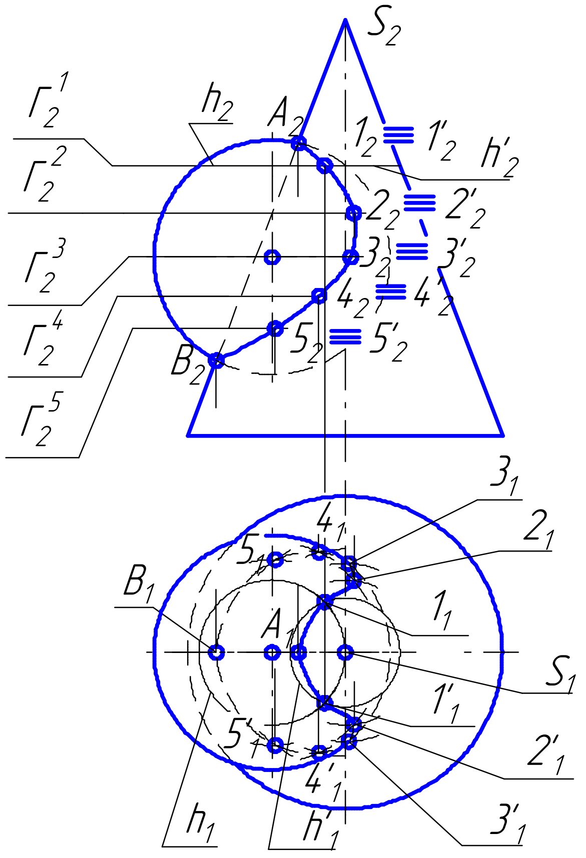


Рис.8.4.

В качестве вспомогательных секущих плоскостей выбираем горизонтальные секущие плоскости $Г_2^1$ - $Г_2^5$, пересекающие конус и сферу по окружностям, которые проецируются на горизонтальную плоскость проекций без искажения. Точки пересечения горизонтальных проекций окружностей будут горизонтальными проекциями точек искомой линии пересечения. Так на рис.8.4 секущая плоскость $Г_2^1$ рассекает сферу и конус по окружностям, горизонтальные проекции которых h_1 и h'_1 пересекаются в точках 1_1 и $1'_1$. Затем полученные точки проецируются на фронтальную плоскость проекций. Таким же образом строятся остальные точки линии пересечения. Опорные точки А и В определяются фронтальной проекцией, как точки пересечения очерковых линий конуса и сферы. Точки 3 и 3′ лежат на экваторе сферы и являются точками видимости для горизонтальной проекции линии пересечения. Та часть её, которая лежит выше экватора, видима, а которая ниже – невидима. Соединив найденные точки плавной кривой, получим линию пересечения поверхностей.

8.4. Особые случаи пересечения поверхностей вращения

Соосные поверхности вращения (поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям. Проекции этих окружностей на плоскость, параллельную оси вращения, вырождаются в прямые линии. На рис.8.5 (*а*,*б* и *в*) изображены соосные цилиндр и сфера, конус и сфера, цилиндр и конус.

Особенности пересечения соосных поверхностей вращения позволяют в качестве посредника при построении линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями использовать сферы.

Вспомогательная сфера проводится из точки пересечения осей поверхностей и пересекает каждую из них по окружностям. Точки пересечения этих окружностей являются общими для обеих поверхностей, то есть являются точками линии их пересечения. Такой метод построения носит название метод вспомогательных концентрических сфер. Он используется тогда, когда нельзя применить метод вспомогательных секущих плоскостей по той причине, что они не дают графически простых линий при пересечении поверхностей.

Метод вспомогательных сфер может применяться и в случае, когда оси поверхностей тел вращения не пересекаются. Тогда вводятся эксцентрические сферы, центр каждой из которых располагается на соответствующей оси враще-ния.

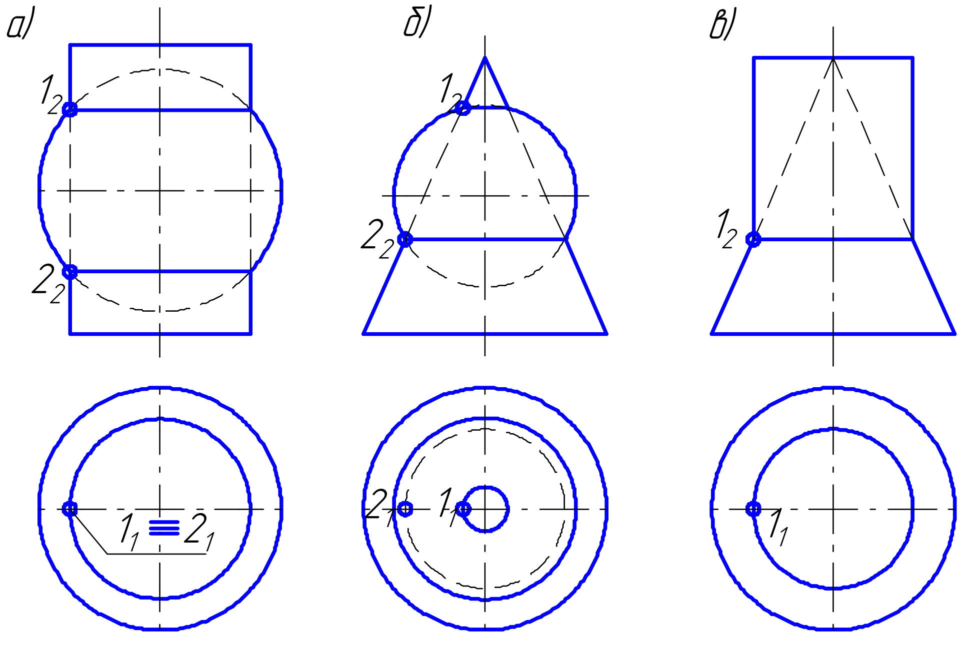


Рис.8.5.

На рис.8.6 представлено построение линии пересечения конуса и цилиндра вращения методом вспомогательных сфер. Оси вращения этих поверхностей пересекаются в точке O(O_2) и параллельны фронтальной плоскости проекций. Из точки O проводятся концентрические сферы, пересекающие поверхности по окружностям, которые вырождаются на $П_2$ в прямые линии. Точки пересечения этих линий являются точками пересечения поверхностей. Так на рис.8.6 сфера радиуса R даёт линии пересечения обеих поверхностей по прямым, пересекающимся в точке 3_2.

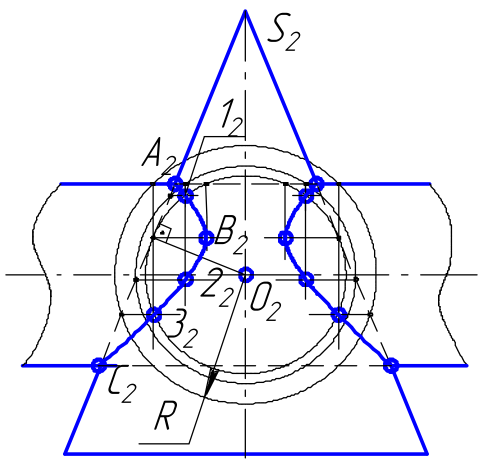


Рис.8.6.

В частном случае, когда пересекающиеся поверхности вращения второго порядка описаны вокруг общей сферы, линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.

Последнее положение формулируется **теоремой Монжа: если две поверхности второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второ-**

го порядка, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка.

На рис.8.7 приведены примеры, где пересекаются поверхности вращения (цилиндр и конус, а также два конуса), описанные вокруг общей сферы. Здесь пересечение происходит по эллипсам (построение сечений конуса см. раздел 7.1).

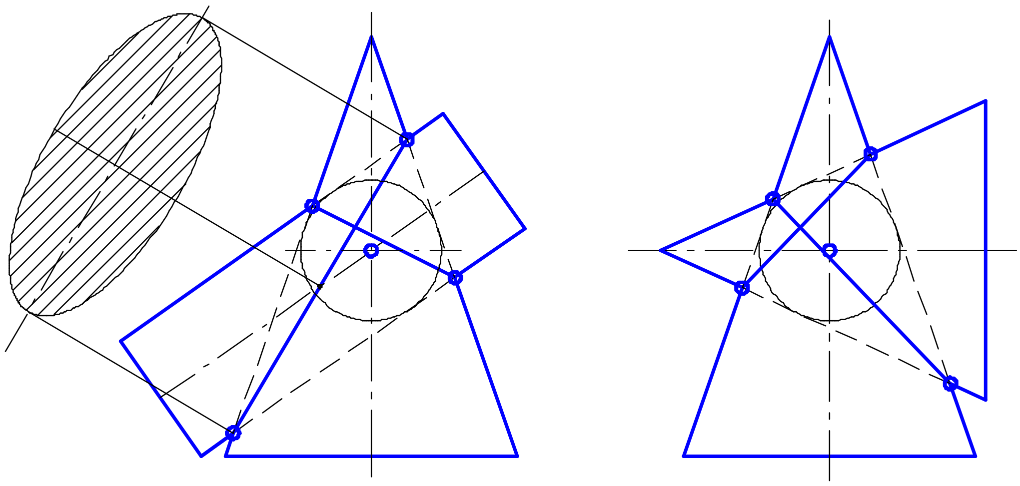


Рис.8.7.

На рис.8.8 *а* показаны два цилиндра равного диаметра с пересекающимися под прямым углом осями. Из точки пересечения осей проведена сфера, равная диаметру цилиндров. Обе поверхности пересекаются по линии, состоящей из двух эллипсов.

На рис.8.8 *б* также изображены два цилиндра равного диаметра, но их оси

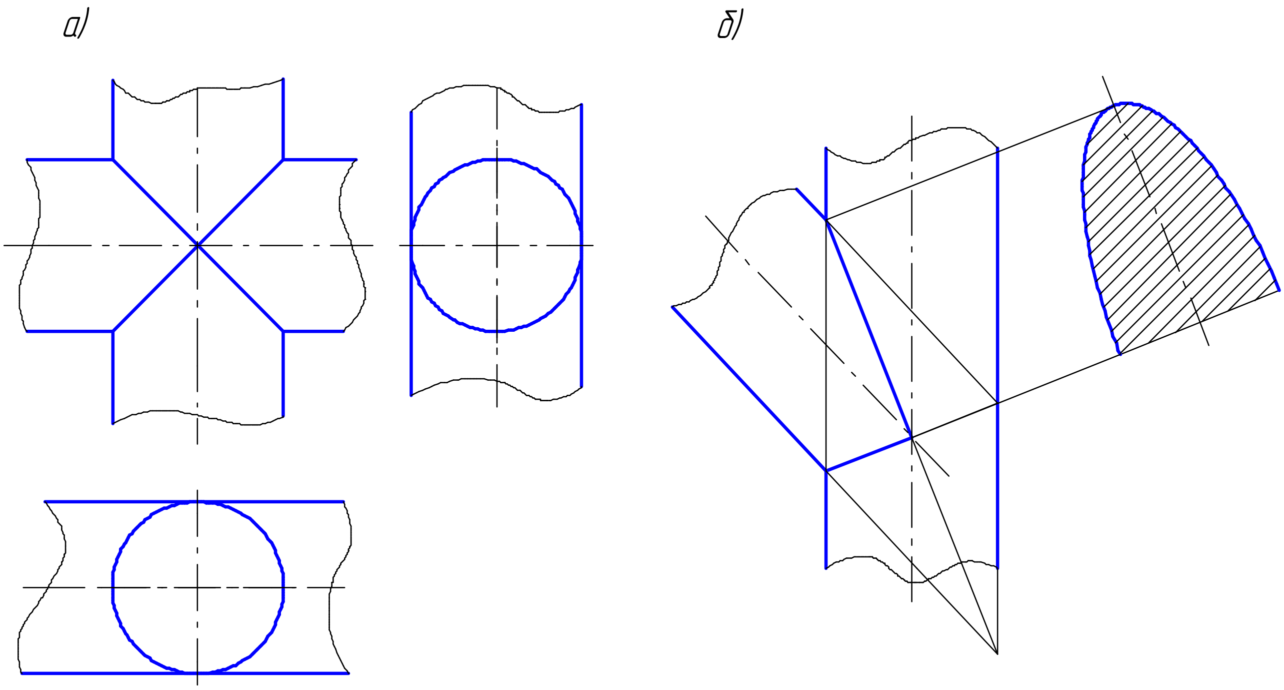


Рис.8.8.

пересекаются не под прямым углом. Линия пересечения составлена из половин двух эллипсов.

В реальных деталях машин и механизмов, особенно в тех, которые изготавливаются литьём, пересекающиеся поверхности плавно сопрягаются между собой по некоторому радиусу (рис.8.9). Чтобы не строить две близко расположенные линии пересечения сопрягающей поверхности с основными поверхностями, на чертеже условно проводят одну тонкую сплошную линию, которую на-

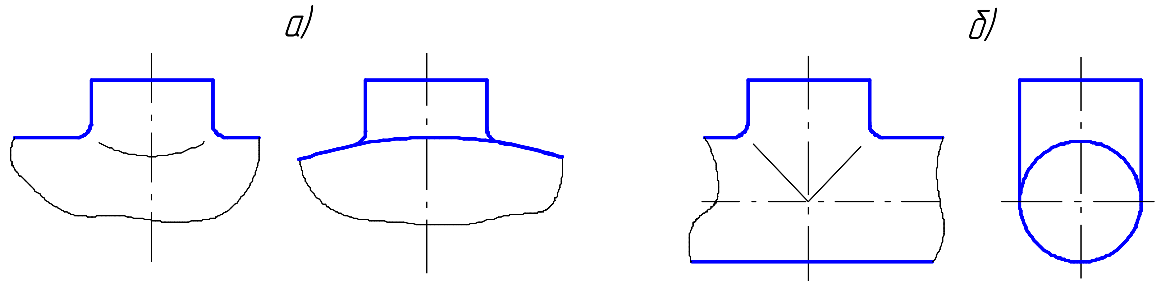


Рис.8.9

зывают линией перехода. Линия перехода заканчивается в точках пересечения очерковых линий основных поверхностей и заменяется простыми (циркульными) кривыми.

Для закрепления материала, изложенного в главах 6, 7 и 8, рекомендуется ответить на контрольные вопросы и решить задачи, приведённые в конце учебного пособия.

9. РАЗВЁРТЫВАНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развёрткой поверхности называется плоская фигура, получаемая при совмещении поверхности с плоскостью. При развёртывании поверхности на плоскости каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развёртке; линия поверхности переходит в линию развёртки; длины линий, величины плоских углов и площадей, ограниченных замкнутыми линиями, остаются неизменными. Теоретически точно развёртываются только гранные поверхности, торсы, конические и цилиндрические поверхности.

Обычно при развёртывании конических и цилиндрических поверхностей общего вида их аппроксимируют вписанными гранными поверхностями. Такие развёртки приближённо соответствуют натуре.

9. 1. Развёртки пирамидальных и конических поверхностей

Развёртки пирамидальных и конических поверхностей строят **способом треугольников (триангуляции)**. Этот метод сводится к построению истинных величин треугольных граней, из которых состоит пирамида или которыми заменяют развёртываемую коническую поверхность.

На рис.9.10 построена развёртка пирамиды SABC, усечённой фронтально

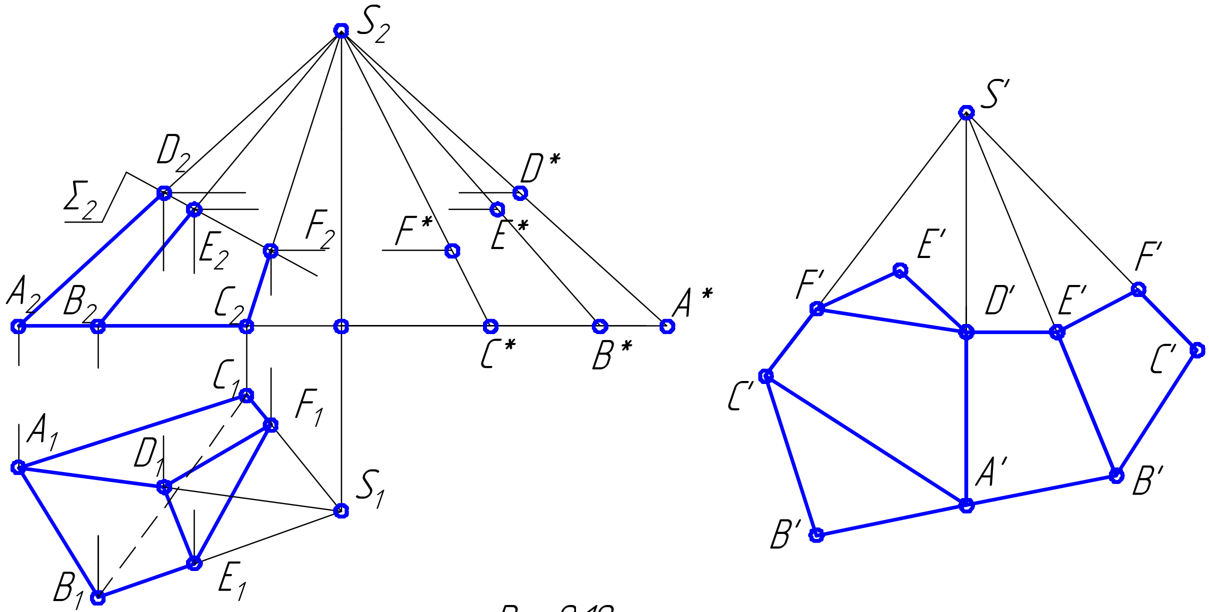


Рис.9.10.

проецирующей плоскостью $\Sigma(\Sigma_2)$. Для построения развёртки боковой поверхности пирамиды сначала строят истинную величину боковых рёбер. В данном случае они построены способом прямоугольных треугольников (см. раздел 2.2.2). В качестве одного катета взято превышение точки S над точками A,B и C, а второго – горизонтальные проекции рёбер. Гипотенузы S_2A^*, S_2B^* и S_2C^* дают истинную величину боковых рёбер. Так как основание пирамиды расположено горизонтально, то на плоскости Π_1 имеем истинную его величину. Кадая треугольная боковая грань на развёртке (на рисунке – справа) строится по трём известным сторонам. Натуральная величина расстояний точек D,E и F сечения пирамиды от вершины S (отрезки S_2D^*,S_2E^* и S_2F^*) определяется как показано на рисунке и откладывается от точки S' на развёртке. После построения развёртки боковой поверхности усечённой части пирамиды необходимо пристроить к ней треугольники A'B'C' и D'E'F', дающие истинную величину основания и сечения пирамиды.

На рис.9.11 способом триангуляции построена развёртка конической поверхности, которая заменена поверхностью вписанной в неё двенадцатиугольной пирамиды. Развёртка представляет собой симметричную фигуру. Осью симметрии является образующая S'O'. Натуральные величины образующих определены с помощью метода прямоугольных треугольников, как это было сделано в предыдущем примере. Развёртка состоит из примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной S'. Каждый из треугольников строится по трём сторонам, при этом две стороны равны истинным величинам образующих, а третья – хорде, стягивающей дугу окружности основания между соседними точками деления. Построенные на развёртке точки соединяются плавной кривой. На развёртке поверхности нанесена точка M(M') с помощью образующей S7(S'7').

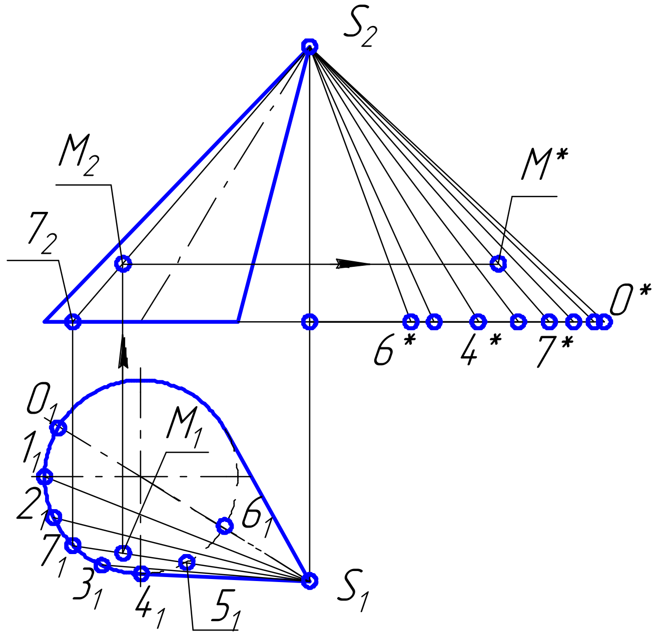


Рис.9.11.

Развёртка конической поверхности вращения представляет собой сектор круга, имеющий радиус, равный длине образующей конуса и длину дуги равную длине окружности его основания (рис.9.12). Угол при вершине сектора $\alpha = (R/l)\ 360°$, где R – радиус окружности основания, а l – длина образующей. Здесь коническая поверхность условно заменена поверхностью вписанной правильной двенадцатигранной пирамиды, а для построения развёртки применён способ триангуляции.

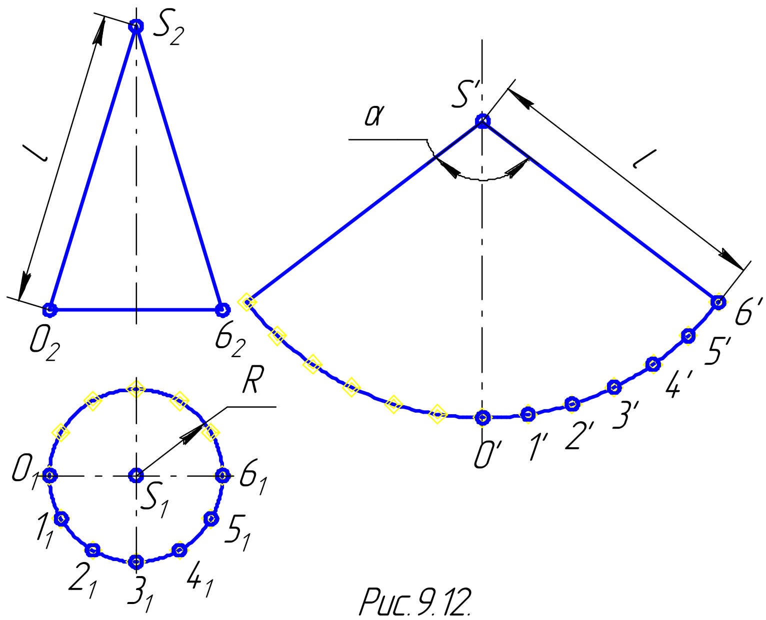


Рис.9.12.

9. 2. Развёртки призматических и цилиндрических поверхностей

Развёртки призматических и цилиндрических поверхностей строят способом нормального сечения.

Пусть призма (рис.9.13) расположена относительно плоскостей проекций так, что её боковые рёбра являются фронталями. Тогда они проецируются на Π_2

в натуральную величину и фронтально проецирующая плоскость $\Sigma(\Sigma_2)$, перпендикулярная к боковым рёбрам, определит нормальное сечение PQR призмы. Построив его натуральный вид введением дополнительной плоскости проекций Π_4,

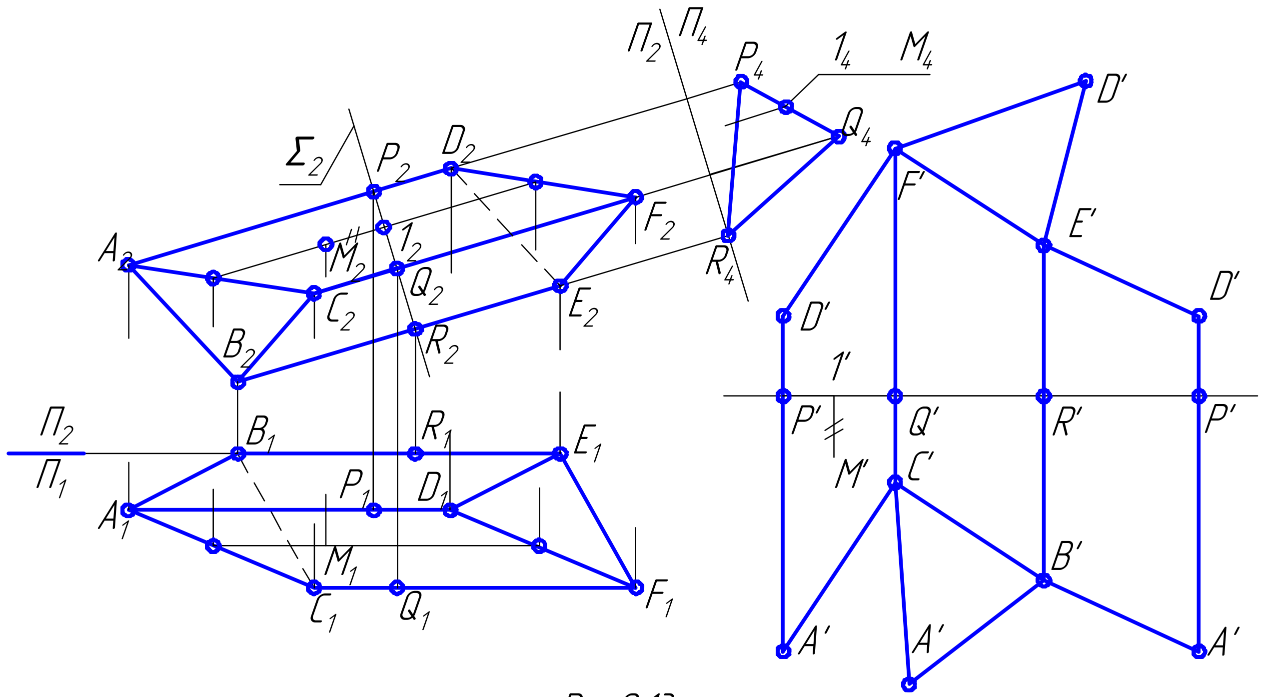


Рис.9.13.

найдём истинные величины P_4Q_4, Q_4R_4 и P_4R_4 сторон сечения, которые являются высотами параллелограммов, составляющих боковую поверхность призмы. Для построения развёртки нужно отложить на произвольной прямой натуральные величины сторон нормального сечения, затем через их концы провести прямые, перпендикулярные к этой прямой. Если теперь отложить на этих перпендикулярах по обе стороны от прямой $\overline{P}\,\overline{P}$ отрезки боковых рёбер, взятые с плоскости проекций Π_2, и соединить их концы, то получим развёртку боковой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания, будем иметь её полную развёртку. Точку М на поверхности призмы можно построить, проведя через неё соответствующую образующую так, как показано на чертеже.

Несмотря на то, что цилиндрические поверхности являются развёртывающимися, на практике строят приближённые развёртки, вписывая в них призматические поверхности.

Построим развёртку цилиндрической трубы кругового сечения (рис.9.14), состоящей из трёх элементов 1,2 и 3 одного диаметра, расположенных фронтально. Для построения развёртки следует предварительно развернуть элементы 1 и 3 вокруг своих осей на 180°, после чего оси всех элементов совпадут, а труба будет представлять собой единый цилиндр и займёт положение $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

Справедливость этого утверждения следует из рассмотрения углов α, β и γ. Нетрудно видеть, что $\alpha + \gamma = 180°$, но $\alpha = \beta$, так как оба прямоугольных треугольника, показанных на рисунке, имеют общую гипотенузу и равные между собой противолежащие катеты (диаметры всех элементов трубы по условию рав-

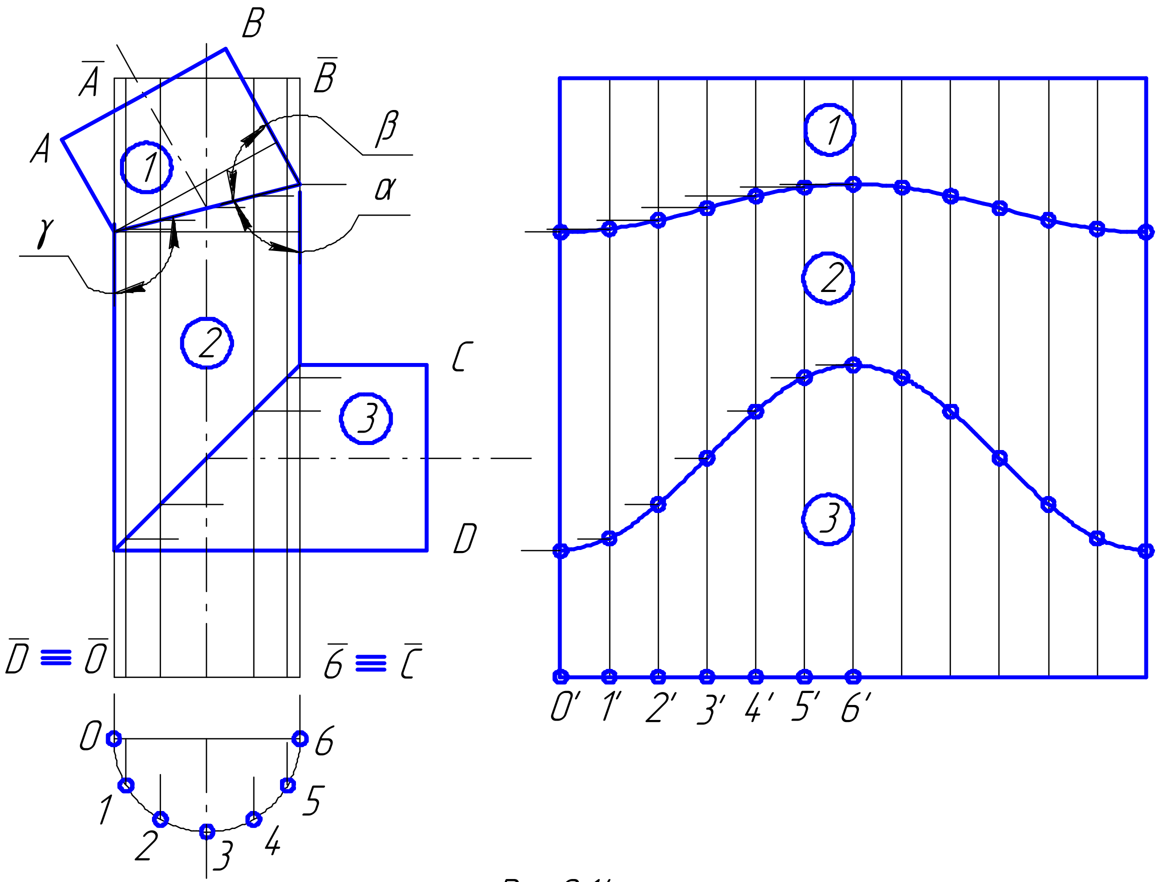


Рис. 9.14.

ны). Дугу полуокружности нормального сечения трубы разделим на шесть частей так, чтобы хорды, стягивающие эти части, возможно меньше отличались от дуг полуокружности. Далее проводим на поверхности цилиндра образующие, соответствующие точкам деления нормального сечения. На произвольной горизонтальной прямой откладываем хорды, а из их концов – образующие. В результате получим прямоугольную развёртку цилиндра. После этого переносим на неё так, как показано на чертеже, точки пересечения косых эллиптических сечений трубы с образующими и соединяем их плавными кривыми, которые представляют собой развёртки эллипсов.

Аналогично строится развёртка цилиндрической трубы, имеющей не плоскую, а пространственную ось.

10. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

10. 1. Общие сведения

Аксонометрическая проекция или аксонометрия даёт наглядное изображение предмета на одной плоскости. Слово **аксонометрия означает осеизмерение**.

Способ аксонометрического проецирования состоит в том, что данная фигура вместе с осями прямоугольных координат, к которым она отнесена в пространстве, параллельно проецируется на некоторую плоскость, принятую за плоскость аксонометрических проекций (её называют также картинной плоскостью). При различном взаимном расположении осей координат в пространстве и плоскости аксонометрической проекции, а также при разном направлении проецирования можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся друг от друга направлением аксонометрических осей и масштабами по ним.

В отечественной конструкторской документации аксонометрические проекции стандартизованы в ГОСТ 2.317 – 69. Он предусматривает три частных вида аксонометрических проекций: **ортогональную изометрию, ортогональную диметрию и фронтальную диметрию (косоугольную).**

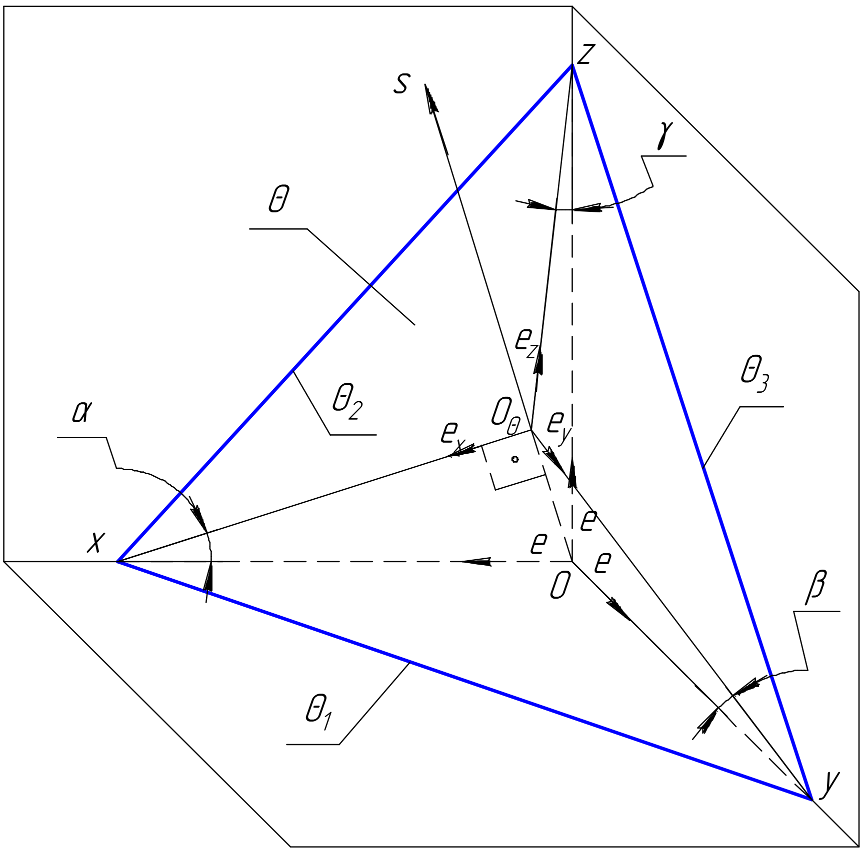


Рис.10.1.

Рассмотрим, как будут направлены аксонометрические оси, а также как будет осуществляться масштабирование по ним в случае направления проецирования, перпендикулярного аксонометрической плоскости проекций, то есть для прямоугольной аксонометрической проекции.

На рис.10.1 изображена **пространственная система ортогональных** координат Ox, Oy, Oz, а также единичные отрезки *e* на осях координат и их проекции в направлении *s* на некоторую **(картинную) плоскость Θ**, являющуюся аксонометрической плоскостью проекций.Проекции e_x,e_y,e_z отрезка *e* на соответствующих аксонометрических осях $O_\Theta x$, $O_\Theta y$, $O_\Theta z$ в общем случае не равны отрезку *e* и не равны между собой. Эти проекции явля- ются единицами измерения по аксонометрическим осям - аксонометрическими масштабами.

Отношения:

$$e_x/e = \mathrm{k};\ e_y/e = \mathrm{m};\ e_z/e = \mathrm{n}$$

называют коэфициентами искажения по аксонометричским осям.

В частном случае положение картинной плоскости можно выбрать таким, что аксонометрические единицы – отрезки e_x, e_y, e_z – будут равны между собой или будет равна между собой пара этих отрезков.

При $e_x = e_y = e_z$ (k = m = n) аксонометрическую проекцию называют **изометрической**, искажения по всем осям в ней одинаковы. При равенстве аксонометрических единиц по двум осям, обычно при $e_x = e_y \neq e_z$ ($\mathrm{k} = \mathrm{m} \neq \mathrm{n}$), имеем **диметрическую** проекцию. Если $e_x \neq e_y \neq e_z$ ($\mathrm{k} \neq \mathrm{m} \neq \mathrm{n}$), то проекцию называют **триметрической**.

Отрезки $O_\Theta x$, $O_\Theta y$, $O_\Theta z$ являются аксонометрическими проекциями отрезков Ox, Oy, Oz. Обозначим углы между осями координат и их проекциями на плоскости Θ через α, β, γ.

Тогда

$$O_\Theta x/\ Ox = \cos\alpha;\quad O_\Theta y/\ Ox = \cos\beta;\ O_\Theta z/\ Oz = \cos\gamma.$$

Эти отношения являются коэффициентами искажения, то есть

$$\mathrm{k} = \cos\alpha;\ \ \mathrm{m} = \cos\beta;\ \ \mathrm{n} = \cos\gamma.$$

Поскольку треугольники $O_\Theta xO$, $O_\Theta yO$ и $O_\Theta zO$ прямоугольные, то сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2[(\pi/2-\alpha)] + \cos^2[(\pi/2-\beta)] + \cos^2[(\pi/2-\gamma)] = 1.$$

Отсюда

$$\mathrm{Sin}^2\,\alpha + \mathrm{Sin}^2\,\beta + \mathrm{Sin}^2\,\gamma = 1$$

или

$$1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1,$$

следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2.$$

Таким образом

$$\mathrm{k}^2 + \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 = 2,$$

то есть сумма квадратов коэффициентов искажения равна 2.

10. 2. Ортогональная изометрия

В изометрической проекции все коэффициенты равны между собой:

$$\mathrm{k} = \mathrm{m} = \mathrm{n};\quad \mathrm{k}^2 + \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 = 2,$$

тогда

$$3\mathrm{k}^2 = 2,$$

откуда

$$\mathrm{k} = \sqrt{2/3} \approx 0{,}82.$$

Следовательно, при построении изометрической проекции размеры предмета, откладываемые по аксонометрическим осям, необходимо умножать на 0,82. Поскольку такой перерасчёт размеров неудобен, обычно изометрическую проекцию для упрощения выполняют без уменьшения размеров (искажения) по осям x, y, z, то есть принимают приведённый коэффициент искажения равным единице. При этом увеличение изображения предмета составляет 22% (1/0,82 = 1,22).

Каждый отрезок, направленный по осям x, y, z или параллельно им, сохраняет свою величину.

Расположение осей изометрической проекции показано на рис.10.2 б. Очевидно, что они расположены под углом 120° друг к другу. На рис.10.2 а показаны ортогональные, а на рис.10.2 б - изометрические проекции точки *A*.

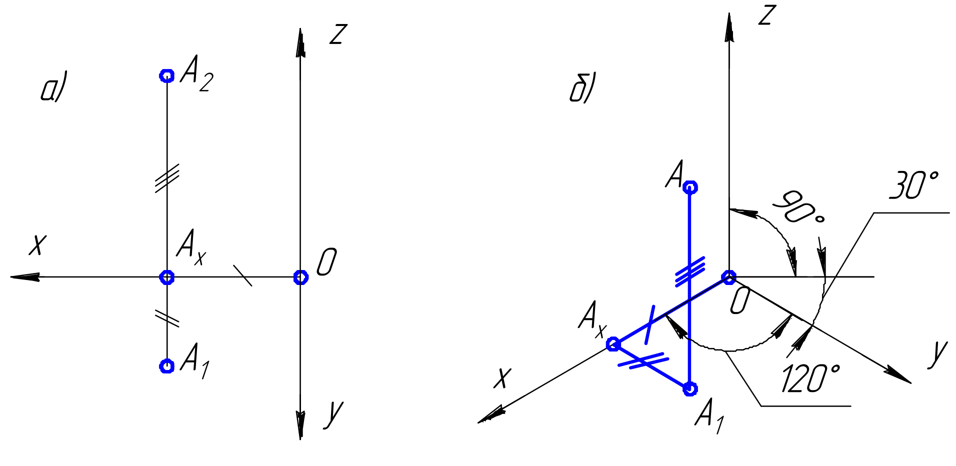


Рис.10.2.

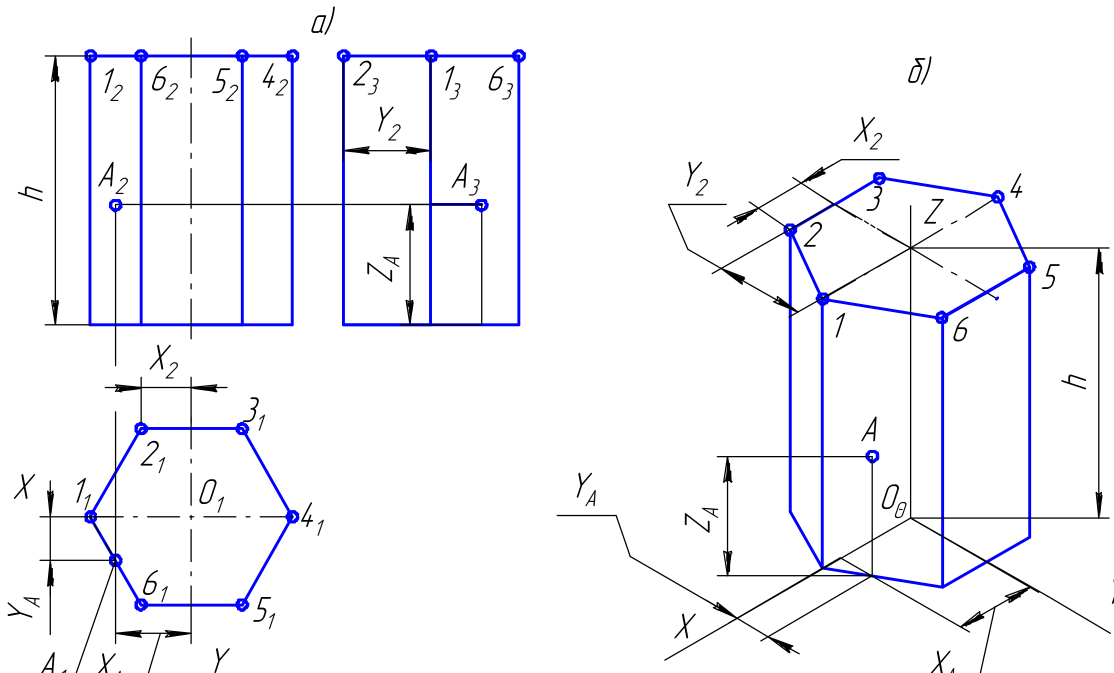


Рис.10.3.

Приведём пример построения в изометрии шестигранной призмы по данному чертежу в системе ортогональных проекций (рис.10.3 а, б). На изометрической оси *z*, откладывают высоту *h*, проводят линии, параллельные осям x и y. Отмечают на линии, параллельной оси *x*, положение точек 1 и 4. Для построения точки 2 определяют координаты этой точки на чертеже (x_2 и y_2) и, откла-дывая эти координаты на аксонометрическом изображении, строят точку 2.

Таким же образом строят точки 3, 5 и 6. Построенные точки верхнего основания соединяют между собой, проводят ребро из точки 1 до пересечения с осью *x*, затем – рёбра из точек 2, 5, 6. Рёбра нижнего основания проводят параллельно рёбрам верхнего. Построение точки А, расположенной на боковой грани, по координатам x_A (или y_A) и z_A очевидно из рисунка.

10. 3. Ортогональная диметрия

Коэффициенты искажения в **диметрической проекции** выбирают следующими:

$$k = n;\ \ m = \frac{1}{2}k.\ \ \text{Тогда}\ \ 2k^2 + \frac{1}{4}k^2 = 2;\ \ k = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94;\quad m \approx 0{,}47.$$

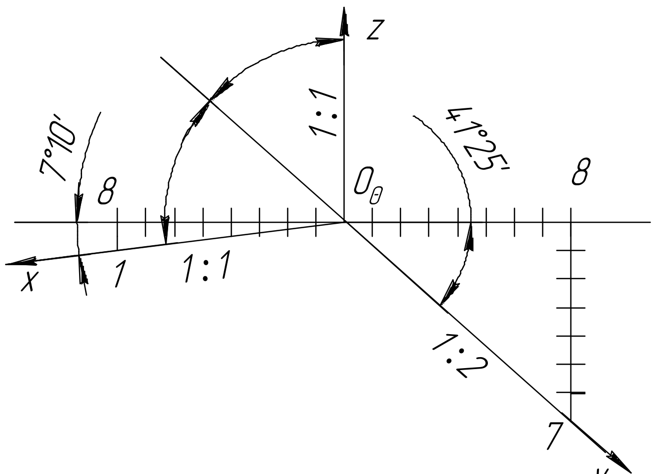


Рис.10.4.

В целях упрощения построений в сответствии с ГОСТ 2.317 – 69, как и в изометрических проекциях, приведённый коэффициент искажения по осям *x* и *z* принимают равным единице; по оси *y* коэффициент искажения равен 0,5. Следовательно, по осям *x* и *z* или параллельно им все размеры откладывают в натуральную величину, а по оси *y* размеры уменьшают вдвое. Увеличение в этом случае составляет 6% (выражается числом 1,06 = 1:0,94). Расположение осей *x* и *y* в диметрической проекции, полученное расчётным путём, показано на рис.10.4.

С достаточной для практических целей точностью в прямоугольной диметрии оси *x* и *y* можно строить по тангенсам углов:

$$\text{tg}\,7°10' \approx \frac{1}{8};\quad \text{tg}\,42°25' \approx \frac{7}{8}.$$

Продолжение оси *y* за центр O_Θ является биссектрисой угла $xO_\Theta z$, что также может быть использовано для построения оси *y*.

На рис.10.5 приведены окружности в аксонометрической (а) и диметрической (б) проекциях с указанием соответствующих значений величин осей эллипсов.

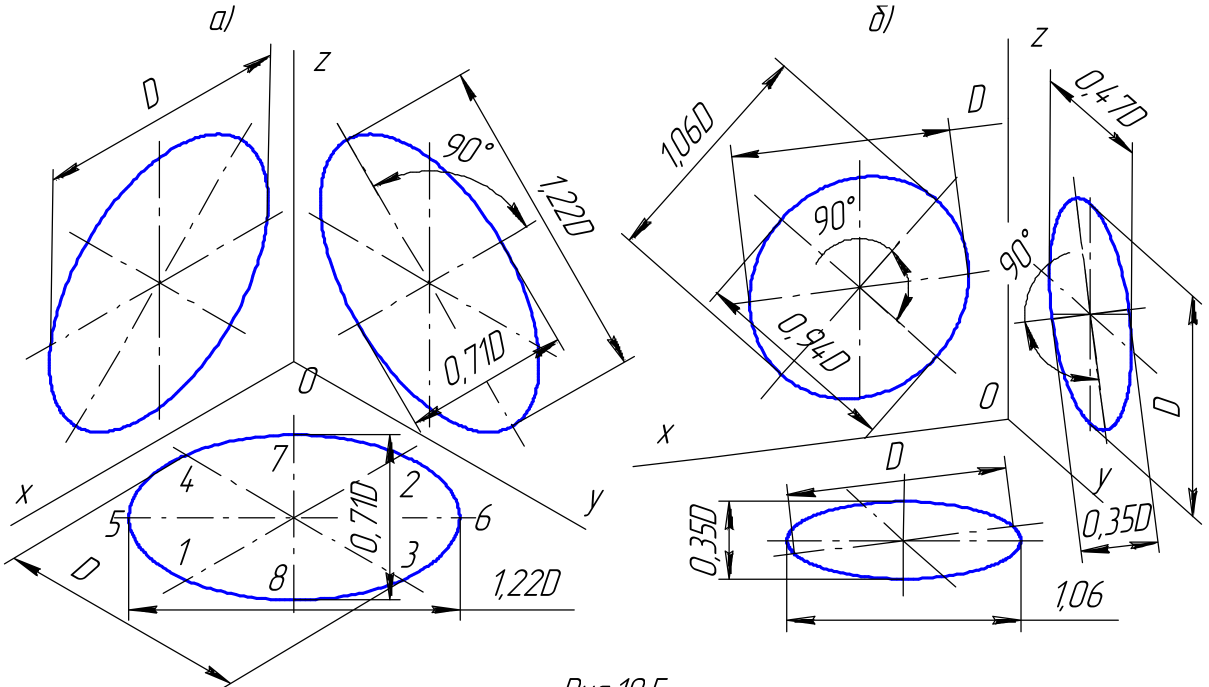


Рис.10.5.

10. 4. Косоугольная фронтальная диметрия

На практике часто бывает полезным построение такой аксонометричской проекции, в которой хотя бы одна из координатных плоскостей не искажалась. Очевидно, что для выполнения этого условия плоскость проекций должна быть параллельна одной из координатных плоскостей. При этом нельзя пользоваться ортогональным проецированием, так как координатная ось, перпендикулярная указан-ной координатной плоскости, изобразится точкой и изображение будет лишено наглядности. Поэтому пользуются косоугольным проецированием, при котором направление оси *y* выбирают так, чтобы углы между ней и осями *x* и *z* равнялись бы 135° (рис.10.6), а показатель искажения – 0,5. Такую косоугольную аксонометрию называют **фронтальной диметрией**. На том же чертеже показаны проекции окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных координатным. Окружность, расположенная в пло-скости, параллельной координатной плоскости xOz, спроецируется на плоскость проекций без искажения, а окружности, располо-

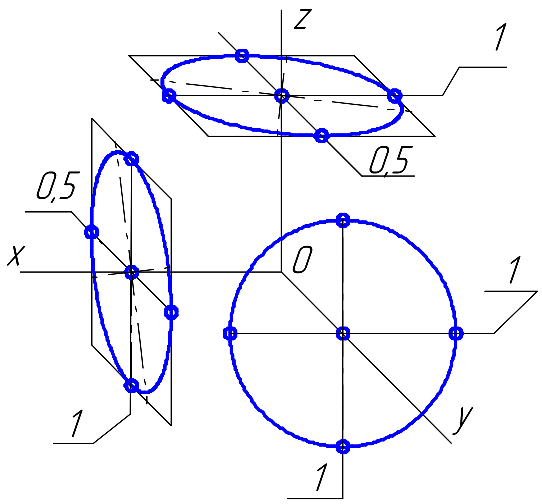


Рис.10.6.

женные в плоскостях, параллельных координатным плоскостям xOy и xOz, спроецируются в виде эллипсов. Эти эллипсы обычно строятся по сопряжённым диаметрам. На выносках приведены показатели искажения соответствующих диаметров изображаемых окружностей.

Контрольные вопросы к главам 9 и 10 приведены ниже (см. прил. 4 и 5).

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. М. 1985.
2. Гордон В.О., Семенцов – Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М. 1988.
3. Гордон В.О., Иванов Ю.Б., Солнцева Т.Е. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. М.,1989.
4. Лагерь А.И., Колесникова Э.А. Инженерная графика. М.,1985.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.,1983.
6. Чекмарёв А.А. Начертательная геометрия и черчение. М.,1987.

Учебно-методическая

1. Лунёв Б.П., Пачкория О.Н. Методическая разработка для практических занятий по начертательной геометрии. М.: МГТУ ГА, 1993.
2. Лунёв Б.П., Пачкория О.Н., Кондратьева Т.Е. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Методические указания и расчетно-графические работы. М.: МГТУ ГА, 1994.
3. Михненков Л.В. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по начертательной геометрии. «Позиционные и метрические задачи». М.: МГТУ ГА, 1997.
4. Михненков Л.В. Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по начертательной геометрии. «Взаимное пересечение многогранных и криволинейных поверхностей». М.: МГТУ ГА, 1997.
5. Подзей И.В., Пачкория О.Н. Начертательная геометрия. Пособие по подготовке к блочной аттестации. Блок №1. Точка, прямая, плоскость. М.: МГТУ ГА, 1999.

Приложение 1

Контрольные вопросы к главам 1 - 3

1. Какие методы проецирования Вы знаете?
2. Сформулируйте основные свойства прямоугольного (ортогонального) проецирования. Приведите примеры.
3. Как определить действительную длину прямой общего положения по её комплексному чертежу?
4. Сформулируйте теорему о проецировании прямого угла.
5. Как определить угол наклона прямой общего положения к плоскостям проекций?
6. В каких случаях используются осные чертежи, а когда безосные? Приведите примеры.
7. Приведите примеры чертежей частных положений прямых линий и укажите их названия.
8. Что называется следами прямой и плоскости?
9. Какие прямые называют линиями уровня?
10. Какие прямые называются проецирующими?
11. Какие точки называются конкурирующими?
12. Как определить видимость элементов пространства относительно данной плоскости проекций с помощью конкурирующих точек?
13. Приведите пример пропорционального деления отрезка прямой линии в заданном отношении AB : BC = m : n.
14. Расскажите о взаимном расположении прямых линий.
15. Как изображаются на чертежах пересекающиеся, скрещивающиеся и параллельные прямые общего положения?
16. Сформулируйте условия перпендикулярности двух прямых общего положения.
17. Как определить расстояние от точки до прямой частного положения на чертеже?
18. Какие прямые называются конкурирующими?
19. Покажите на примерах способы задания плоскости общего положения.
20. Покажите на примерах плоскости частного положения и назовите их.
21. Покажите на примерах особенности проецирующих плоскостей.
22. Покажите на примерах, как строят точки и линии в плоскости общего положения.
23. Покажите, как построить в плоскости общего положения горизонталь и фронталь.
24. Покажите, как построить в проецирующих плоскостях горизонтали и фронтали.
25. Можно ли провести проецирующую плоскость через прямую общего положения?
26. Как построить точку пересечения плоскости общего положения с прямой линией общего положения? Приведите примеры.

Продолжение прил. 1

27. Покажите на примерах построение прямой и плоскости, параллельных плоскости общего положения.
28. Расскажите , как построить прямую, перпендикулярную плоскости общего положения. Приведите примеры.
29. Приведите примеры построения прямой линии, перпендикулярной проецирующей плоскости.
30. Как определить на чертеже расстояние от точки до проецирующей плоскости? Приведите примеры.
31. Сформулируйте, как построить на чертеже плоскость, перпендикулярную другой плоскости общего положения. Приведите пример.
32. Сформулируйте, как построить на чертеже плоскость, параллельную другой плоскости.
33. Расскажите, как построить линию пересечения двух плоскостей. Приведите пример.
34. Как определяется видимость при пересечении двух плоскостей общего положения?

Приложение 2

Контрольные вопросы к главам 4 и 5

1. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины расстояния между двумя прямыми способом замены плоскостей проекций?
2. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины расстояния между двумя параллельными плоскостями способом замены плоскостей проекций?
3. Укажите последовательность определения натуральной величины отсека плоскости способом плоскопараллельного перемещения.
4. Каков алгоритм решения задачи по определению натуральной величины отсека произвольно расположенной плоскости способом замены плоскостей проекций?
5. Как определить угол между скрещивающимися прямыми?
6. Как определить угол между прямой и плоскостью?
7. Каков алгоритм решения задачи по определению натуральной величины угла пересечения двух плоскостей способом замены плоскостей проекций?
8. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины угла наклона плоскости общего положения к фронтальной плоскости проекций способом замены плоскостей проекций?
9. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины угла наклона плоскости общего положения к горизонтальной плоскости проекций способом замены плоскостей проекций?
10. Каков алгоритм решения задачи на определение центра окружности, вписанной в треугольник АВС, способом замены плоскостей проекций?

Продолжение прил. 2

11. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины расстояния между двумя прямыми способом замены плоскостей проекций?
12. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины расстояния между двумя параллельными плоскостями способом замены плоскостей проекций?
13. Укажите последовательность определения натуральной величины отсека плоскости способом плоскопараллельного перемещения.
14. Каков алгоритм решения задачи по определению натуральной величины отсека произвольно расположенной плоскости способом замены плоскостей проекций?
15. Как определить угол между скрещивающимися прямыми?
16. Как определить угол между прямой и плоскостью?
17. Каков алгоритм решения задачи по определению натуральной величины угла пересечения двух плоскостей способом замены плоскостей проекций?
18. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины угла наклона плоскости общего положения к фронтальной плоскости проекций способом замены плоскостей проекций?
19. Каков алгоритм решения задачи на определение натуральной величины угла наклона плоскости общего положения к горизонтальной плоскости проекций способом замены плоскостей проекций?
20. Каков алгоритм решения задачи на определение центра окружности, вписанной в треугольник АВС, способом замены плоскостей проекций?
21. Каков алгоритм решения задачи на определение центра окружности, описанной вокруг треугольника АВС, способом замены плоскостей проекций?

Приложение 3

Контрольные вопросы к главам 6 – 8

1. Какова классификация линий?
2. Как построить проекции окружности в плоскостях общего и частного положения?
3. Какие кривые линии Вы знаете?
4. Расскажите о цилиндрической винтовой линии.
5. Каковы основные принципы образования поверхности?
6. Расскажите о классификации поверхностей.
7. Что такое определитель поверхности?
8. Как образуются линейчатые поверхности?
9. Как образуются поверхности вращения?
10. Как образуются гранные поверхности?
11. Какие поверхности Вы знаете?
12. Как строится линия сечения поверхности плоскостью?

Продолжение прил. 3

13. Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового цилиндра?

14.Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового конуса?
15. Какие линии могут быть получены в сечении сферы?
16. Как строят линию пересечения двух поверхностей?
17. В чём сущность способа вспомогательных секущих плоскостей при построении линии пересечения двух поверхностей?
18. Каков алгоритм решения задач на определение точек пересечения кривой линии с поверхностью?
19. Каков принцип построения линии пересечения поверхностей, одна из которых занимает проецирующее положение?
20.В каких случаях удобно применять метод секущих сфер?
21. По каким линиям пересекаются соосные поверхности?
22. В чём суть теоремы Монжа?
23. По каким линиям пересекаются два прямых круговых цилиндра одного диаметра, если их оси пересекаются?

Приложение 4

Контрольные вопросы к главе 9

1. Что называется развёрткой поверхности?
2. Какие поверхности относятся к развёртывающимся поверхностям?
3. Можно ли построить развёртку неразвёртывающейся поверхности?
4. Каким способом строят развёртки пирамидальных (конических) поверхностей? В чём его сущность?
5. Какую форму имеет развёртка поверхности прямого кругового конуса?
6. Каким способом сроят развёртки призматических (цилиндрических) поверхностей?
7. Что собой представляет развёртка поверхности прямого кругового цилиндра?
8. Как нанести на развёртку поверхности точку, ей принадлежащую?

Приложение 5

Контрольные вопросы к главе 10

1. Что такое аксонометрия?
2. Как получается аксонометрический чертёж?
3. Что такое показатель (коэффициент) искажения?
4. Какие виды аксонометрии Вы знаете?
5. Как располагаются оси прямоугольной изометрии? Чему равны натуральные и приведённые показатели искажения в прямоугольной изометрии?
6. Каков масштаб изображения в стандартной прямоугольной изометрии?

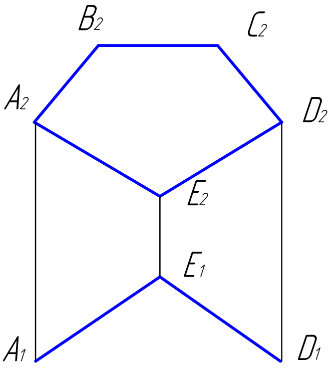
Продолжение прил. 5

7. Как располагаются оси прямоугольной диметрии? Чему равны натуральные и приведённые коэффициенты искажения в прямоугольной диметрии?
8. Каков масштаб изображения в стандартной прямоугольной диметрии?
9. Чему равны большая и малая оси эллипса в прямоугольной изометрии? в прямоугольной диметрии?

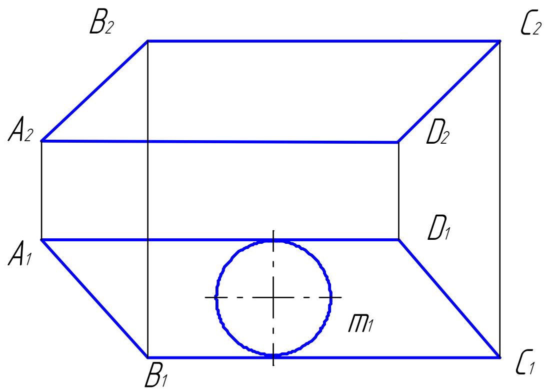
Приложение 6

Задачи к главам 1 – 3

1)



2)



1. Постройте горизонтальную проекцию плоского пятиугольника ABCDE.

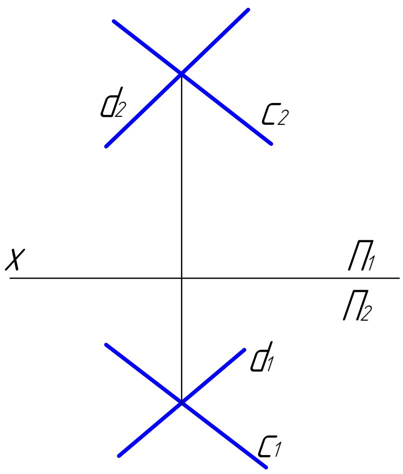
2. Постройте фронтальную проекцию окружности m, лежащей в плоскости ABC.

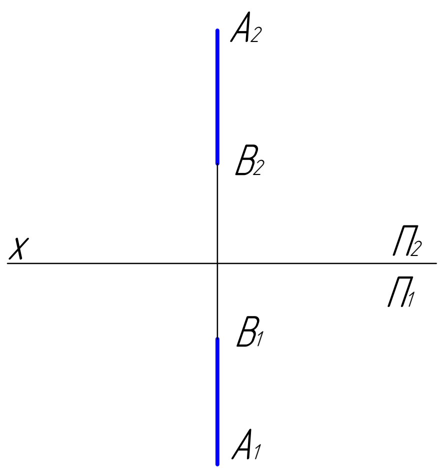
3)

4)

3.Постройте следы плоскости α(d⌒c).

4.Постройте следы прямой AB.

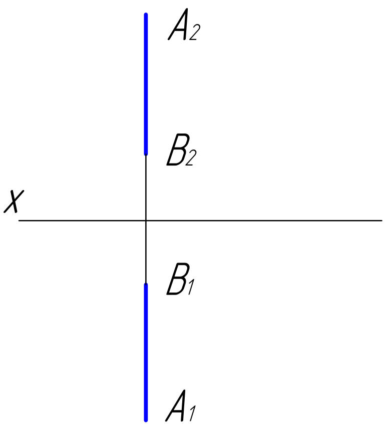


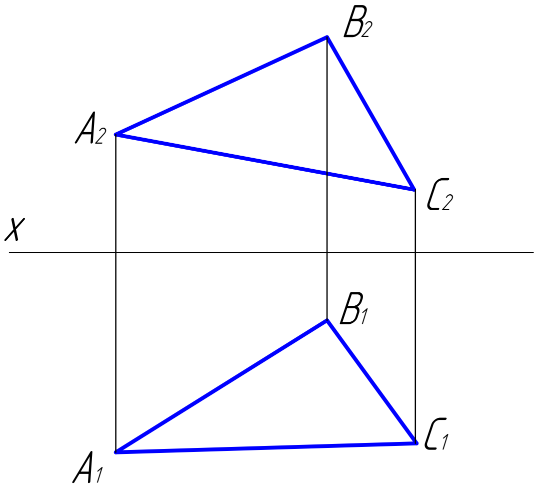


Продолжение прил. 6

5.Определите углы наклона прямой АВ к плоскостям $П_1$ и $П_2$.
6.В плоскости (АВС) найдите точку М, удалённую от плоскости $П_1$ на 25мм, а от плоскости $П_2$ на 35мм.

5)

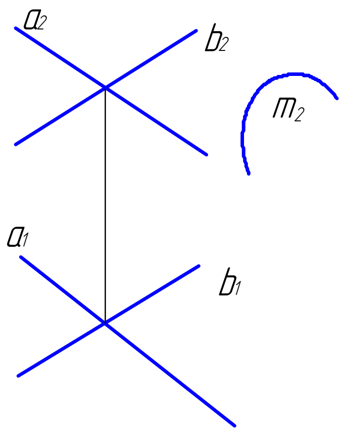




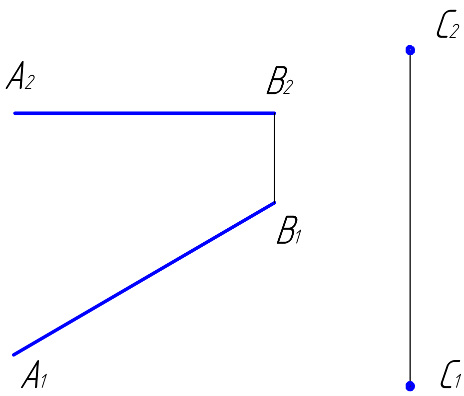
6)

7. Постройте горизонтальную проекцию кривой, лежащей в плоскости B($a \cap b$).
8. Определите расстояние от точки С до прямой АВ.

7)



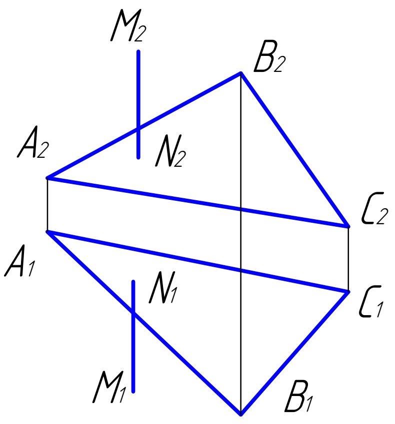
8)



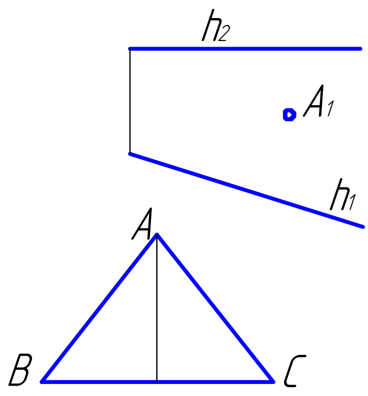
9.Найдите точку пересечения прямой MN с плоскостью α(ABC).
10. Постройте проекции равнобедренного треугольника АВС, основание которого лежит на прямой h. Проекция A_1 точки А задана.

Продолжение прил. 6

10)

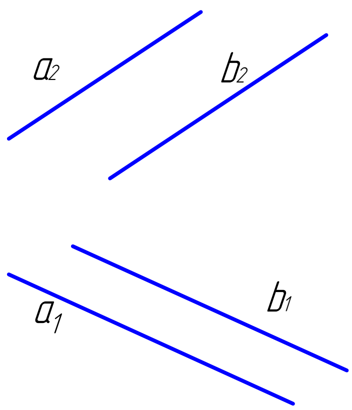


9)

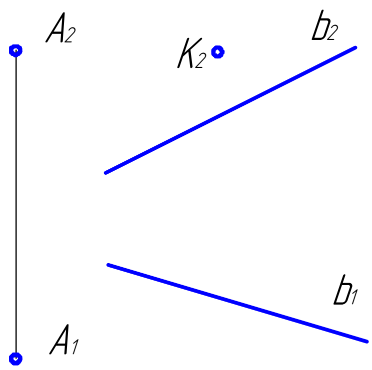


12)

11.Постройте плоскость, параллельную плоскости α(a||b) и удалённую от неё на расстояние 60мм.
12.В точке К, принадлежащей плоскости β(A,b), восставте перпендикуляр длиной 80мм.

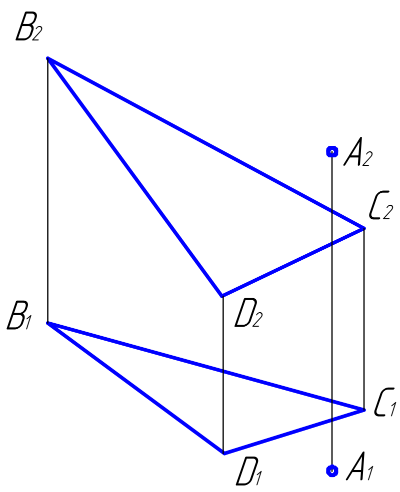


11)

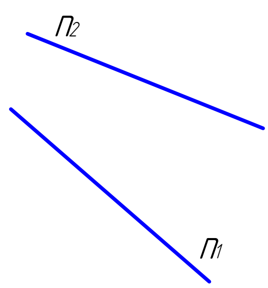


14)

13.Через точку А проведите плоскость, перпендикулярную плоскости α(BCD).
14.Постройте прямую m, перпендикулярную прямой n.



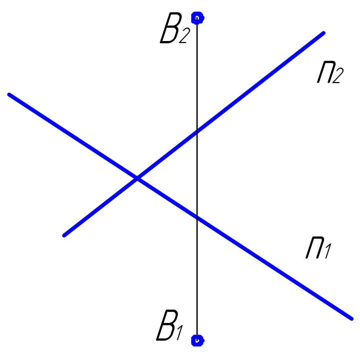
13)



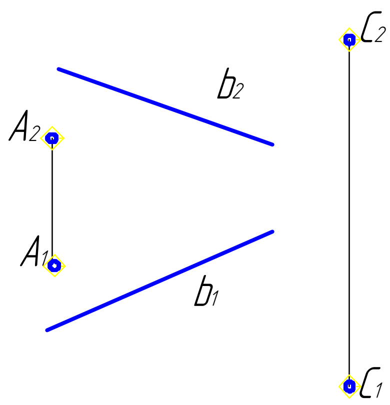
Продолжение прил. 6

15. Постройте точку А, симметричную точке В относительно прямой n.
16. На прямой b найдите точку, равноудалённую от точек А и С.

15)



16)

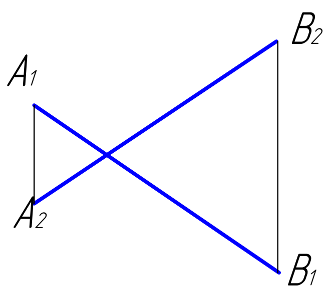


Приложение 7

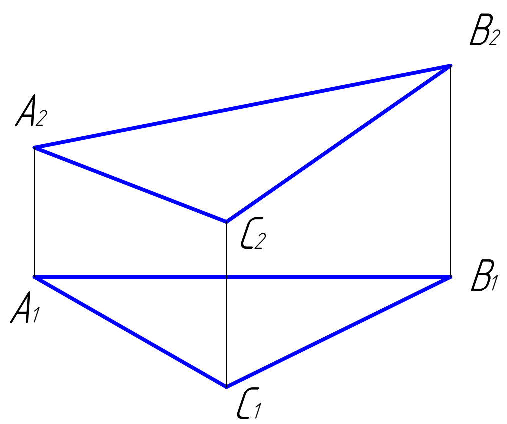
Задачи к главам 4 и 5

1.Определите натуральную величину отрезка АВ и угол его наклона к Π_2.
2.Определите угол наклона плоскости α(ABC) к плоскости Π_1.

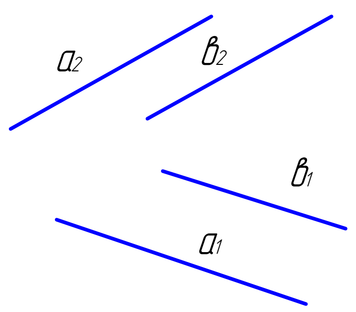
1)



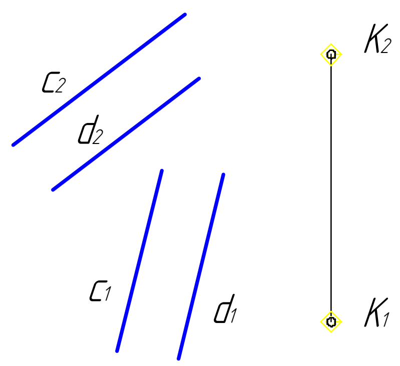
2)



3)



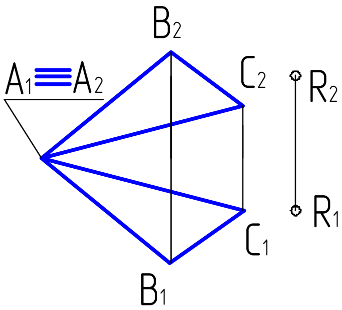
4)



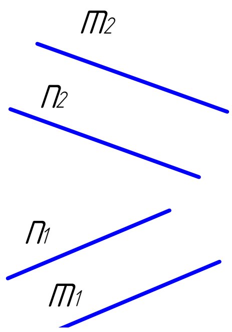
3.Определите угол наклона плоскости β(a || b) к плоскости Π_2.
4.Определите расстояние от точки К до плоскости γ(c || d).

Продолжение прил. 7

5)



6)



5. В плоскости γ(ABC) найдите точку, ближайшую к точке R.

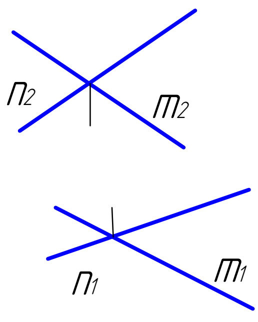
6.Найдите расстояние между прямыми m и n.

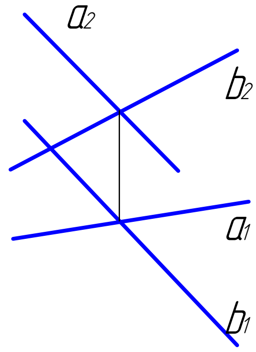
7)

8)

7.Найдите расстояние между прямыми m и n.

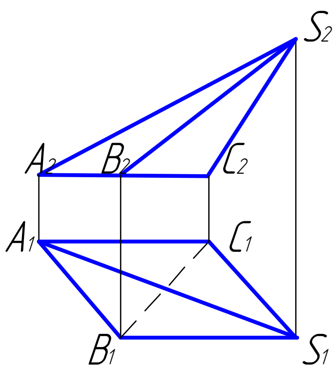
8.Найдите угол между пересекающимися прямыми a и b.

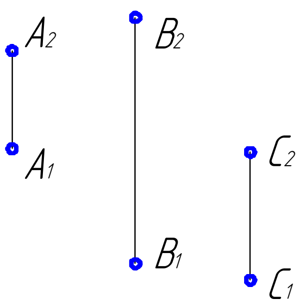




9)

10)





9.Найдите угол между гранями пирамиды SAB и SAC.

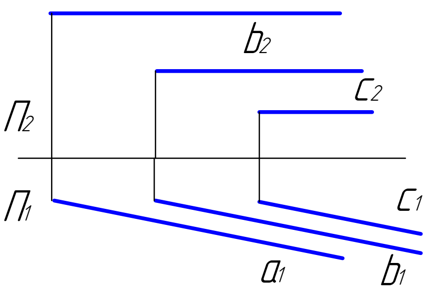
10.Постройте геометрическое место точек, равноудалённых от точек A,B,C.

11.Постройте геометрическое место точек, равноудалённых от прямых a,b,c.

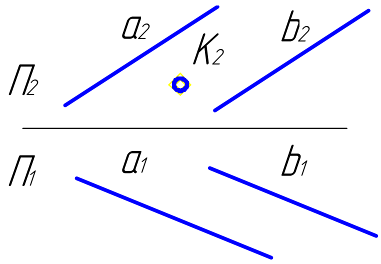
12.Постройте проекции прямого кругового конуса высотой 50мм, радиусом окружности основания 25мм с центром в точке К, лежащей в плоскости β(a||b).

Продолжение прил. 7

11)



12)

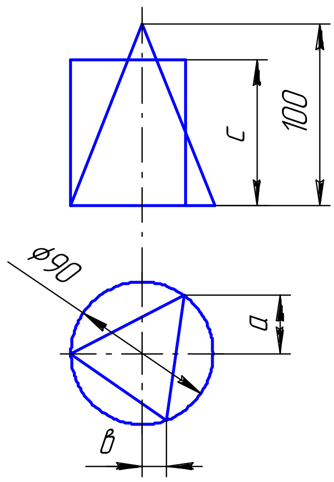


Приложение 8

Задачи к главам 6 – 8

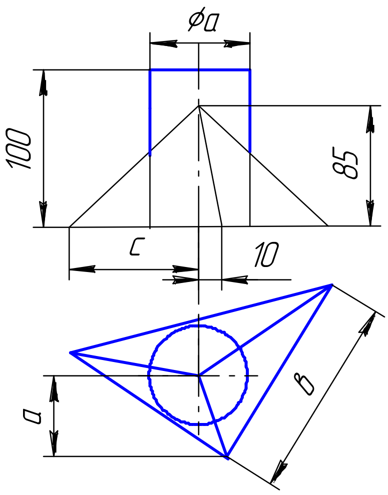
Постройте линии пересечения двух заданных геометрических тел.

1



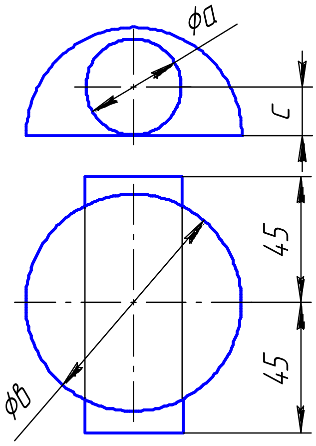
a=20 b=0 c=60

2



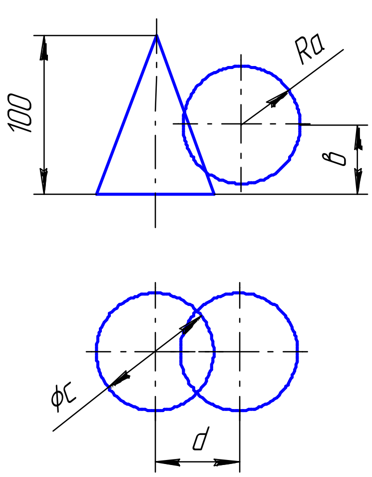
a=50 b=120 c=70 d=60

3



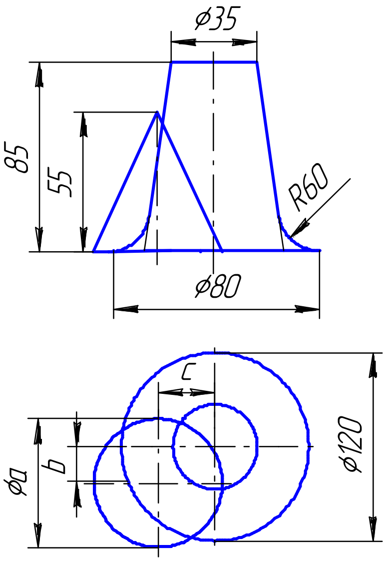
a=40 b=100 c=60

4



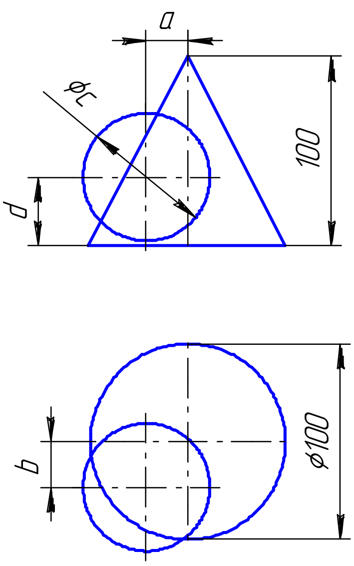
a=25 b=25 c=100 d=20

5



a=60 b=15 c=25

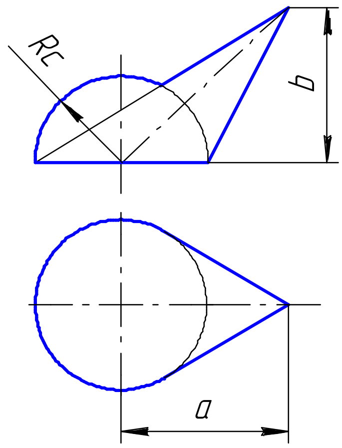
6



a=15 b=20 c=70 d=35

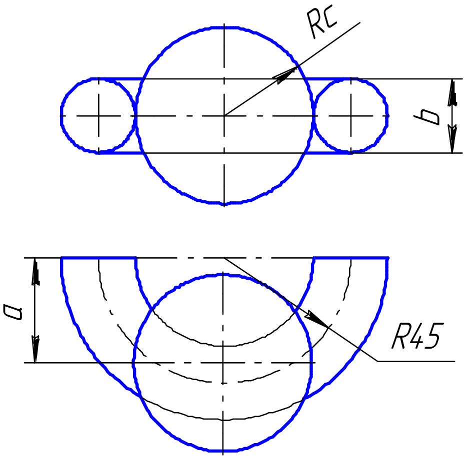
Продолжение прил. 8

7



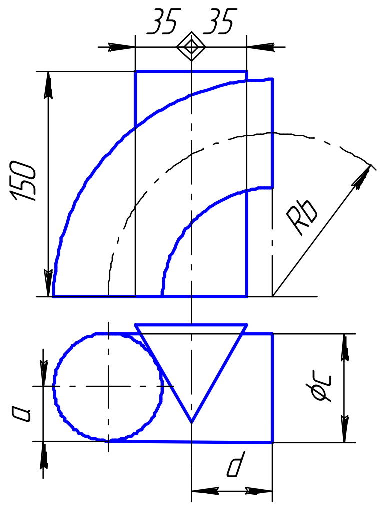
a=75 b=80 c=55

8



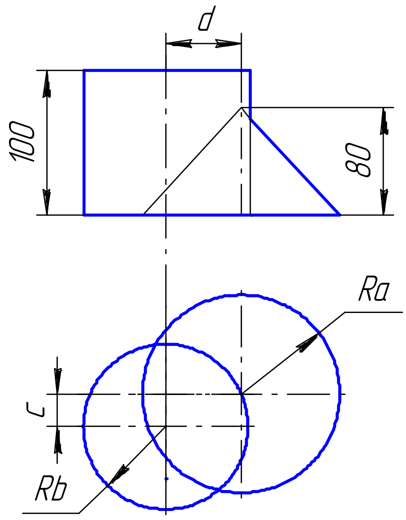
a=60 b=50 c=45

9



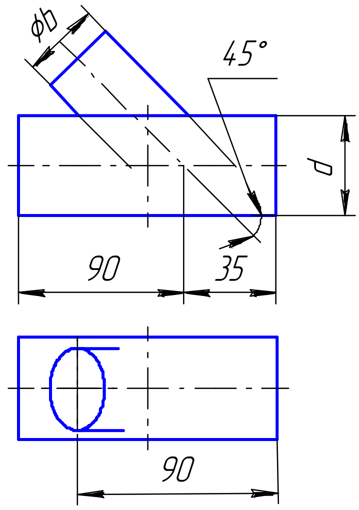
a=20 b=100 c=80 d=60

10



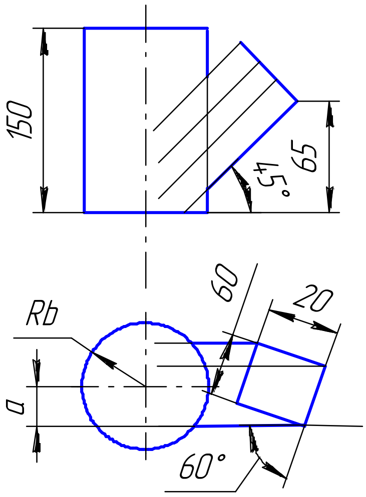
a=50 b=30 c=25 d=15

11



b=30 d=40

12



a=25 b=50

СОДЕРЖАНИЕ