ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»

Кафедра технической эксплуатации ЛА и АД

П.К. Кабков

ВЕРОЯТНОСТНО – СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЛА

ПОСОБИЕ
по проведению практических занятий

для студентов III курса
специальности 130300
дневного обучения

Москва 2005

1. Общие положения

1.1. Целью проведения практических занятий является овладение научными методами анализа, систематизация и обобщение теоретических знаний, приобретенных при изучении лекционного материала по дисциплине «Вероятностно-статистические модели эксплуатации ЛА»; приобретение навыков и умений применять теоретические знания к решению практических задач, возникающих при эксплуатации летательных аппаратов.

1.2. Практические занятия включают решения задач по всем основным темам дисциплины: формирование вероятностно-статистической модели и проверка ее соответствия экспериментальным данным с помощью критериев согласия; проведение точечной и интервальной оценок характеристик случайных величин объектов эксплуатации; анализ различных моделей изменения параметров объектов и характеристик процессов их функционирования; формирование моделей статистического контроля объектов; анализ марковских и полумарковских процессов эксплуатации объектов.

1.3. Пособие по каждому практическому занятию содержит название темы и цель занятия, краткие теоретические сведения по теме занятия и собственно задание для самостоятельной работы. По каждому занятию предусмотрено несколько вариантов исходных данных. Кроме того, преподаватель может выдать студентам дополнительные варианты.

1.4. По результатам выполнения каждого практического занятия студентом составляется отчет. Отчет должен содержать тему занятия, исходные данные выполненного варианта, необходимые теоретические зависимости, результаты расчетов в виде таблиц или графиков и выводы. В каждом отчете студент проставляет дату выполнения работы, указывает номер группы, свою фамилию и подписывает отчет.

2. Практические занятия

2.1. Практическое занятие №1.

Тема: Формирование вероятностно-статистической модели с использованием законов распределения непрерывных случайных величин.

Цель работы: Приобрести навыки формирования вероятностно-статистических моделей на основе непрерывных законов распределения случайных величин.

2.1.1. Необходимые теоретические сведения

Для формирования вероятностно-статистических моделей объектов эксплуатации ЛА применяют следующие законы распределения непрерывных случайных величин: нормальный, экспоненциальный и Вейбулла.

Исходным материалом создания модели являются статистические данные, отражающие характер функционирования и особенности эксплуатации летательных аппаратов. Этот исходный материал представляет собой совокупность значений случайных величин: $X_1, X_2, \ldots X_n$.

Первой операцией статистической обработки результатов является построение вариационного ряда – расположение совокупности чисел в порядке возрастания. Затем статистические данные необходимо сгруппировать в интервалы. Приближенная оценка длины интервала может быть сделана по следующей формуле

$$\Delta x = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3,2 \lg n} \tag{1.1}$$

Используя сгруппированные данные, строят гистограмму плотностей распределения и гистограмму частостей.

Значение статистической плотности распределения в некотором i-м интервале рассчитывается по формуле:

$$f_i^*(x) = \frac{\Delta n_i}{n \Delta x}, \tag{1.2}$$

где Δn_i - число членов выборки, попавших в i-й интервал.

Частость, отражающая вероятность нахождения случайной величины X в i-м интервале, равна

$$P_i^* = \frac{\Delta n_i}{n} \tag{1.3}$$

По виду гистограммы, сравнивая ее с графиками плотностей распределений, приведенных в таблице 1.1, делают предположение о виде закона распределения, т. е. формируют вероятностно-статистическую модель рассматриваемого процесса эксплуатации.

Следующим шагом является определение параметров выбранной в качестве модели эмпирической функции распределения – математического ожидания m и дисперсии $Д$ (среднеквадратического отклонения σ). Эти величины определяются методом моментов с использованием гистограммы частостей.

Математическое ожидание исследуемой случайной величины есть начальный момент первого порядка

$$m = \sum_{i=1}^{k} X_i P_i^*, \tag{1.4}$$

где k – число интервалов разбиения вариационного ряда,

X_i – расстояние от середины i-го интервала до начала координат.

Дисперсия, характеризующая разброс случайной величины около математического ожидания, есть центральный момент второго порядка

$$D[X]=\sum_{i=1}^{k}\left(X_i-m\right)^2 P_i^* \tag{1.5}$$

Как известно,

$$\sigma=\sqrt{D[X]} \tag{1.6}$$

Для завершения формирования вероятностно-статистической модели необходимо определить параметры теоретического закона распределения, принятого в качестве математического выражения модели.

Экспоненциальный закон распределения (см. табл. 1.1) определяет один параметр - λ, при этом

$$\lambda=\frac{1}{m}. \tag{1.7}$$

Нормальный закон распределения определяется двумя параметрами: математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением σ, определенными методом моментов в соответствии с формулами (1.4), (1.5) и (1.6).

Распределение Вейбулла является двухпараметрическим: величина a есть параметр масштаба и величина b – параметр формы распределения. Чтобы определить эти величины необходимо воспользоваться таблицей 1.2. Сначала определяется коэффициент вариации

$$U=\frac{\sigma}{m}=\frac{C_b}{K_b} \tag{1.8}$$

По таблице 1.2 для этого значения коэффициента вариации определяется значение параметра b и значения величин K_b и C_b. Параметр a определяется по формуле

$$a=\frac{m}{K_b}, \tag{1.9}$$

или по формуле

$$a=\frac{\sigma}{C_b} \tag{1.10}$$

2.1.2. Варианты заданий

Статистические данные наработки до отказа элементов авиационной техники (в часах)

1 вариант

70	133	178	212	283	317	420	460	500	532
595	645	742	788	822	856	929	995	1079	1126
1193	1279	1366	1432	1497	1624	1719	1863	2195	2730

2 вариант

43	127	165	203	278	296	412	449	495	514
576	638	696	776	803	852	921	995	1072	1124
1180	1275	1346	1393	1454	1617	1709	1833	1968	2652

3 вариант

31	61	92	121	149	180	209	238	266	295
322	350	377	400	469	509	554	599	644	688
700	732	776	790	800	868	936	1003	1069	1136
1200	1302	1402	1501	1600	1748	1883	2000	2200	2400

4 вариант

46	91	138	181	223	270	313	357	399	442
483	525	565	600	703	763	831	898	966	1032
1050	1098	1164	1185	1200	1302	1404	1504	1603	1704
1800	1953	2103	2251	2400	2622	2824	3000	3300	3600

5 вариант

20	60	120	180	250	300	320	350	370	410
460	520	650	700	720	750	780	850	900	950
1000	1100	1130	1180	1250	1300	1350	1400	1500	1550
1650	1700	1750	1850	1950	2050	2100	2150	2250	2300
2500	2600	2650	2750	2850	2950	3000	3250	3500	3950

6 вариант

10	15	17	20	22	25	25	26	30	32
32	39	41	42	45	45	47	50	52	53
54	59	60	60	62	64	65	67	67	73
73	74	74	77	78	79	84	85	86	89
89	90	92	93	93	96	96	99	100	100

7 вариант

20	50	60	100	150	180	200	250	300	320
330	350	360	370	380	410	460	520	550	600
650	700	720	750	780	800	850	900	650	1000
1100	1130	1180	1250	1300	1350	1400	1500	1550	1650
1750	1850	1950	2050	2150	2300	2500	2850	3500	3200

8 вариант

50	120	190	250	330	350	420	490	560	630
700	750	770	810	870	940	1000	1050	1080	1150
1190	1210	1270	1330	1310	1460	1520	1560	1610	1680
1760	1820	1900	1910	2050	2120	2200	2280	2350	2410
2530	2650	2700	2710	2820	2950	3180	3320	3550	3900

Статистические данные замеров времени выполнения работы путем хронометража (в часах)

9 вариант Замена передней ноги шасси

3,4	3,5	3,5	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7	3,7	3,7
3,8	3,8	3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
3,9	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,1
4,1	4,1	4,1	4,1	4,1	4,2	4,2	4,2	4,2	4,2
4,3	4,3	4,3	4,3	4,4	4,4	4,4	4,5	4,5	4,6

10 вариант Замена двигателя (без его опробования и облета самолета)

2,1	2,2	2,2	2,25	2,25	2,25	2,3	2,3	2,3	2,3
2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44
2,44	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,6
2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,64	2,64	2,64	2,64	2,64
2,7	2,7	2,7	2,7	2,75	2,75	2,75	2,8	2,8	2,9

Таблица 1.1. Характеристики некоторых законов распределения

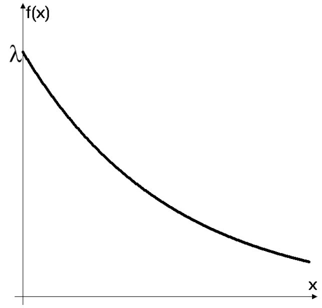
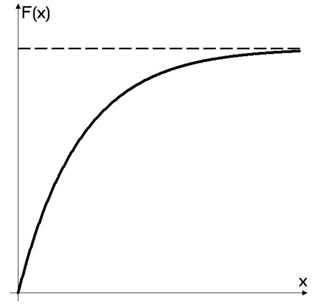
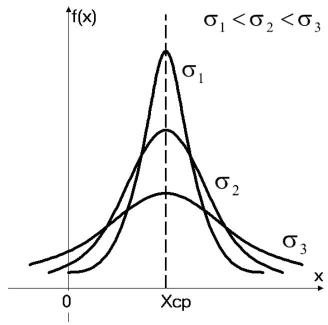
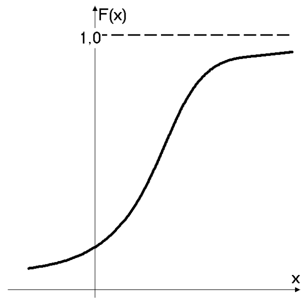
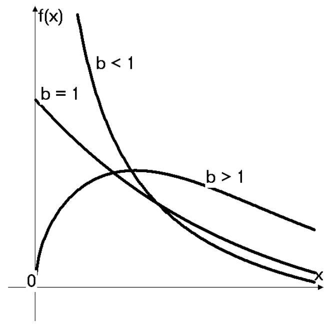
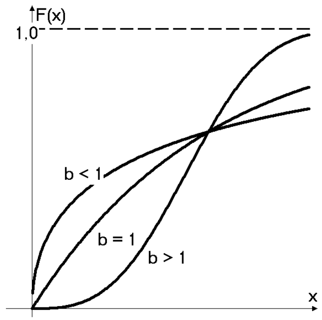
Наименование закона распределения	Параметры	Математические выражения		График	
		плотности распределения	функции распределения	плотности распределения	функции распределения
Экспоненциальный	λ	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$F(x)=1-e^{-\lambda x}$		
Нормальный	X_{cp} σ	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t-x_{cp})^2}{2\sigma^2}}dt$	$F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t-x_{cp})^2}{2\sigma^2}}dt$		
Вейбулла	a b	$f(x)=\dfrac{b}{a}x^{b-1}e^{-\frac{1}{a}x^{b}}$	$F(x)=1-e^{-\frac{1}{a}x^{b}}$		

Таблица 1.2

Коэффициенты для распределения Вейбулла

b	K_b	C_b	ν
0,2	120	1900	15,83
0,3	8,86	46,9	5,29
0,4	3,32	10,4	3,14
0,5	2,00	4,47	2,24
0,6	1,50	2,61	1,74
0,7	1,27	1,86	1,46
0,8	1,13	1,43	1,26
0,9	1,05	1,17	1,11
1,0	1,00	1,00	1,00
1,1	0,965	0,878	0,910
1,2	0,941	0,787	0,837
1,3	0,924	0,716	0,775
1,4	0,911	0,659	0,723
1,5	0,903	0,612	0,678
1,6	0,897	0,574	0,640
1,7	0,892	0,540	0,605
1,8	0,889	0,512	0,575
1,9	0,887	0,485	0,547
2,0	0,886	0,463	0,523
2,1	0,886	0,441	0,498
2,2	0,886	0,425	0,480
2,3	0,886	0,409	0,461
2,4	0,887	0,394	0,44
2,5	0,887	0,380	0,428
3,0	0,893	0,326	0,365
3,5	0.900	0,285	0,316
4,0	0,906	0,255	0,281

$$t_{cp} = a\,K_b\,,\;\sigma(t) = a\,C_b$$

2.1.3. Последовательность выполнения работы

1. Получение варианта исходных данных.
2. Разбиение вариационного ряда на интервалы.
3. Определение величины n_i – количества значений случайной величины, попавшей в i-й интервал.
4. Расчет значений частостей P_i^* для каждого интервала.
5. Построение гистограммы частостей.
6. Определение математического ожидания m и среднеквадратического отклонения σ методом моментов.
7. Выбор теоретического выражения для вероятностно-статистической модели.
8. Определение параметров модели.
9. Оформление отчета по работе.

2.2. Практическое занятие №2

Тема: Проверка соответствия выбранной модели экспериментальным данным с помощью критериев согласия.

Цель работы: Приобрести навыки использования критериев согласия для проверки качества выбранной модели.

2.2.1. Необходимые теоретические сведения

При определении соответствия выбранной вероятностно-статистической модели экспериментальным данным наиболее распространенным является критерий Пирсона (критерий χ^2). Критерий χ^2 рассчитывается по формуле

$$\chi^2_{рас} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\Delta n_i - Np_i\right)}{Np_i}, \tag{2.1}$$

где k – число интервалов разбиения экспериментальных данных при построении гистограммы;

Δn_i - число значений случайной величины в *i*-м интервале;

N - общее число значений случайной величины;

P_i - вероятность попадания случайной величины в *i*-й интервал в соответствии с теоретическим значением закона распределения выбранной модели (не путать со значением P_i^* - частостью, определенной по опытным данным).

Величина P_i есть разность значений теоретической функции распределения у границ *i*-го интервала

$$P_i = F(X_{i+1}) - F(X_i), \tag{2.2}$$

где $F(X_{i+1})$ и $F(X_i)$ - значения функции распределения, соответствующей выбранной модели, у дальней и ближней границ интервала.

Для случая, когда в качестве модели выбрано экспоненциальное распределение, значения $F(X_{i+1})$ и $F(X_i)$ могут быть рассчитаны непосредственно по формулам

$$F(X_i) = 1 - e^{-\lambda X_i} \text{ и } F(X_{i+1}) = 1 - e^{-\lambda X_{i+1}}.$$

Значение P_i в этом случае будет равно

$$P_i = e^{-\lambda X_i} - e^{-\lambda X_{i+1}} \tag{2.3}$$

Если в качестве вероятностно-статистической модели выбрано нормальное распределение, то величины $F(X_{i+1})$ и $F(X_i)$ определяются с помощью таблицы нормального распределения (таблица 2.1). Вход в таблицу для реального значения случайной величины *X*, ее математического ожидания *m* и среднего квадратичного отклонения σ производится по значению величины $S = \dfrac{x-m}{\sigma}$. Если $X < m$, то $S < 0$ и $F\left(-x\right) = 1 - F\left(x\right)$, если $S > 0$, то берется непосредственно табличное значение.

Если вероятностно-статистическая модель представлена распределением Вейбулла, то значения $F(X_{i+1})$ и $F(X_i)$ рассчитываются по формулам

$$F(X_{i+1}) = 1 - e^{-\frac{X_{i+1}}{a}} \text{ и } F(X_i) = 1 - e^{-\frac{X_i}{a}}.$$

Значение P_i будет, таким образом, равно

$$P_i = e^{-\frac{X_i^b}{a}} - e^{-\frac{X_{i+1}^b}{a}} \tag{2.4}$$

Значения параметров распределения *a* и *b* определены при выполнении практического занятия №1.

При b = 1 получаем формулу 2.3, соответствующую экспоненциальному распределению при $\lambda = \frac{1}{a}$.

После определения значений P_i для всех интервалов разбиения рассчитывается величина критерия $\chi^2_{рас}$ по формуле 2.1., затем по таблице 2.2 необходимо определить значение $\chi^2_{таб}$. Таблица 2.2 имеет два входа: уровень значимости α (или доверительная вероятность $\gamma = 1 - \alpha$) и число степеней свободы r

$$r = K - 1 - l \qquad (2.5)$$

где K - количество интервалов разбиения исходного массива опытной информации;

l - число независимых условий связи, накладываемых на закон распределения, выбранный в качестве вероятностно-статистической модели.

Для экспоненциального закона распределения $l = 1$ (один определяющий параметр - λ), для нормального закона $l = 2$ (математическое ожидание m и среднее квадратичное отклонение σ), для закона Вейбулла $l = 2$ (параметры a и b).

Если при сравнении расчетного и табличного значений критерия χ^2 окажется, что $\chi^2_{рас} \le \chi^2_{таб}$, то выбранная вероятностно-статистическая модель соответствует экспериментальным данным. Если $\chi^2_{рас} > \chi^2_{таб}$, то модель не соответствует экспериментальным данным. Заметим, что $\chi^2_{таб}$ существенно зависит от того, какую доверительную вероятность γ приняли в качестве приемлемой. В любом случае следует принимать $\gamma > 0{,}5$ и чем больше γ, тем лучше соответствует выбранная модель экспериментальным данным. Практически следует принимать $\gamma \ge 0{,}7$.

2.2.2. Варианты заданий

В качестве вариантов заданий могут быть приняты варианты практического занятия №1.

2.2.3. Последовательность выполнения работы

1. Получение варианта исходных данных.
2. Построение гистограммы и определение величин Δn_i и P_i^* способом, изложенным в практическом занятии №1.
3. Расчет значений P_i для теоретического закона распределения, выбранного в качестве вероятностно-статистической модели.
4. Расчет значения $\chi^2_{рас}$.
5. Определение числа степеней свободы r и выбор доверительной вероятности γ.
6. По значениям r и γ определить по таблице 2.2 $\chi^2_{таб}$.
7. Сравнить $\chi^2_{рас}$ и $\chi^2_{таб}$ и сделать заключение о соответствии выбранной модели опытным данным.
8. Оформить отчет по работе.

Таблица 2.1. Значения $F_0(x)$

S		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0,	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0,	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0,	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0,	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0,	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0,	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	0,	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	0,	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0,	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0,	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0.9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5543	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8030	8077	8124	8169
2,1	0,9 .	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	8500	8537	8574
2,2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	0,99	1802	2024	2240	2451	2656	2857	3053	3244	3431	3613
2,5	0,99	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2,6	0,99	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	0,99	6533	6636	6736	6833	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	0,99	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	0,99	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605
3,0	0,99	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999

Продолжение табл. 2.1.

S		0	l	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,99	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999
3,1	$0,9^3$	0324	0646	0957	1260	1553	1836	2112	2378	2636	2886
3,2	$0,9^3$	3129	3363	3590	3810	4024	4230	4429	4623	4810	4991
3,3	$0,9^3$	5166	5335	5499	5658	5811	5959	6103	6242	6376	6505
3,4	$0,9^3$	6631	6752	6869	6982	7091	7197	7299	7398	7493	7585
3,5	$0,9^3$	7674	7760	7842	7922	7999	8074	8146	8215	8282	8347
3,6	0.9^3	8409	8469	8527	8583	8637	8689	8739	8787	8834	8879
3,7	$0,9^3$	8922	8964	9004	9043	9080	9116	9150	9184	9216	9247
3,8	$0,9^4$	2765	3052	3327	3593	3848	4094	4331	4558	4777	4988
3,9	$0,9^4$	5190	5385	5573	5753	5926	6092	6252	6406	6554	6696
4,0	$0,9^4$	6833	6964	7090	7211	7327	7439	7546	7649	7748	7843
4,1	$0,9^4$	7934	8022	8106	8186	8264	8338	8409	8477	8542	8605
4,2	$0,9^4$	8665	8723	8778	8832	8882	8931	8978	9023	9066	9107
4,3	$0,9^5$	1460	1837	2198	2544	2876	3193	3497	3788	4066	4332
4,4	$0,9^5$	4588	4832	5065	5288	5502	5706	5902	6089	6268	6439
4,5	$0,9^5$	6602	6759	6908	7051	7187	7318	7442	7561	7675	7784
4,6	$0,9^5$	7888	7987	8081	8172	8258	8340	8419	8494	8566	8634
4,7	$0,9^5$	8699	8761	8821	8877	8931	8983	9032	9079	9124	9166
4,8	$0,9^6$	2067	2454	2822	3173	3508	3827	4131	4420	4696	4958
4,9	$0,9^6$	5208	5446	5673	5888	6094	6289	6475	6652	6821	6981
5,0	$0,9^6$	7134	7278	7416	7548	7672	7791	7904	8011	8113	8210
5,1	$0,9^6$	8302	8389	8472	8551	8626	8698	8765	8830	8891	8949
5,2	$0,9^7$	004	056	105	152	197	240	280	318	354	388
5,3	$0,9^7$	421	452	481	509	539	560	584	606	628	648
5,4	$0,9^7$	667	685	702	718	734	748	762	775	787	799
5,5	$0,9^7$	810	821	831	840	849	857	865	873	880	886
5,6	$0,9^7$	893	899	905	910	915	920	924	929	933	936
5,7	$0,9^8$	40	44	47	50	53	55	58	60	63	65
5,8	$0,9^8$	67	69	71	72	74	75	77	78	79	81
5,9	$0,9^8$	82	83	84	85	86	87	87	88	89	90
6,0	$0,9^8$	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Таблица 2.2. Значения χ^2 *в зависимости от* r *и* γ.

γ / r	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	10,74	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,73	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	1,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	22,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	29,3	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	2,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

2.3. Практическое занятие №3

Тема: Проведение точечной и интервальной оценок характеристик случайных величин объектов эксплуатации.

Цель работы: Приобрести навыки расчетов точечных и интервальных оценок характеристик экспериментальных данных.

2.3.1. Необходимые теоретические сведения.

Оценки называются точечными, если значения случайных характеристик объектов определяются непосредственно по выборке случайных чисел. Такая характеристика называется выборочной характеристикой u.

Основными выборочными характеристиками являются следующие величины:

выборочная средняя (например, средняя наработок до отказа)

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i; \tag{3.1}$$

выборочное среднее число событий (например, среднее число отказов)

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i; \tag{3.2}$$

выборочное среднеквадратичное отклонение

$$\bar{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \bar{t}\right)^2}; \tag{3.3}$$

выборочное среднеквадратичное число событий

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}, \tag{3.4}$$

где n - объем выборки (число наблюдаемых величин).

Характеристика u является случайной величиной. С некоторой вероятностью α (уровень значимости) случайные значения величины u попадут в некоторый интервал вокруг истинного значения u_0 (рис. 3.1а)

$$u_0 - \varepsilon_1 \le u \le u_0 + \varepsilon_2 \tag{3.5}$$

Правомерна обратная постановка задачи: определить интервал около вычисленной характеристики u, который накроет истинное значение u_0 (рис. 3.1б)

$$u - \varepsilon_1 \le u_0 \le u + \varepsilon_2 \tag{3.6}$$

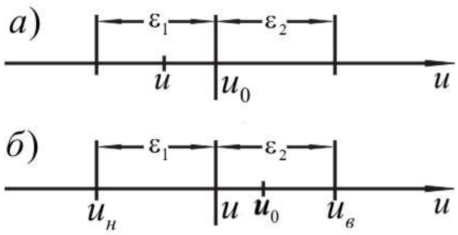


Рис. 3.1

Интервал от $u-\varepsilon_1$ до $u+\varepsilon_2$ имеет случайные концы и носит название доверительного интервала, а вероятность α называется доверительной вероятностью (или уровнем доверия).

$u_н$ = u- ε_1 - нижняя доверительная граница,

$u_в$ = u+ ε_2 - верхняя доверительная граница.

Доверительные границы определяют интервал, в котором с достаточно высокой вероятностью α должно находиться истинное значение u_0.

Оценка истинного значения характеристики случайной величины с помощью доверительных границ называется интервальной оценкой.

Если считать $\varepsilon_2 = \infty$, то величина u_0 будет находиться в интервале от $u-\varepsilon_1$ до бесконечности с вероятностью α_1.

$$P\left(u_0 \geq u-\varepsilon_1\right)=\alpha_1 \tag{3.7}$$

Если $\varepsilon_1 = u_0$, т. е. $u-\varepsilon_1 = 0$, то величина u_0 будет не больше $u+\varepsilon_2$, или, другими словами, находиться в интервале от 0 до $u+\varepsilon_2$ с вероятностью α_2

$$P\left(u_0 \geq u+\varepsilon_2\right)=\alpha_2 \tag{3.8}$$

Выражения (3.7) и (3.8) определяют односторонние доверительные границы для характеристики u_0.

Односторонние доверительные границы применяются в тех случаях, когда надо убедиться, что одна случайная величина строго больше другой (или строго меньше другой).

Двусторонние доверительные границы применяются в тех случаях, когда при сравнении двух случайных величин представляют одинаковый интерес как положительные, так и отрицательные разницы между изучаемыми величинами.

Доверительные границы определяются в зависимости от вида закона распределения исследуемой случайной величины.

Для случая нормального распределения доверительные границы определяются по критерию Стьюдента. В соответствии с распределением Стьюдента, отклонение выборочной средней $\overline{x_в}$ от математического ожидания x_0 при наличии выборочного объема n x_1, $x_2, \ldots x_n$ равно

$$\varepsilon = t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3.9}$$

для нижней доверительной границы математического ожидания на основании формулы (3.5) получаем

$$u_н = x_в - t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3.10}$$

соответственно для верхней доверительной границы имеем

$$u_в = x_в + t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3.11}$$

где $\sigma_в$ - выборочное среднее отклонение (см. формулу 3.3).

В формулах 3.10 и 3.11 t_a - коэффициенты Стьюдента, помещенные в таблице 3.1. Вход в таблицу производится по значению двухсторонней вероятности α^* и величины степени свободы $K = n-1$.

Если случайная величина x имеет экспоненциальное распределение с параметром λ и на опыте наблюдаются значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ этой случайной величины, опытное значение этого параметра λ_{ii} определяется по уравнению

$$\frac{1}{\lambda_{ii}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.12}$$

доверительные границы находятся по формулам

$$u_i = \lambda_н = \frac{\lambda_{0m}}{r_1} \tag{3.13}$$

$$u_a = \lambda_в = \frac{\lambda_{on}}{r_3} \tag{3.14}$$

где r_1 и r_3 определяются по таблицам 3.2а и 3.2б

Если случайная величина x имеет распределение Вейбулла с параметрами *a* и *b*, то справедливо уравнение (см. табл. 1.1)

$$F(x) = 1 - e^{\frac{x^b}{a}} \tag{3.15}$$

сравнивая эту формулу с формулой для экспоненциального распределения, можно заметить , что случайная величина $y = x^b$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = a^{-b}$. Зная из эксперимента значения x_i, можно определить $\overline{x}$ по формуле (3.1) и σ_x по формуле (3.3)и по величине коэффициента вариации $U = \frac{\sigma_x}{\overline{x}}$ по таблице 1.2 определить b и K_b.

Определив величину b, определяем значение y_i

$$y_1 = x_1^b,\ y_2 = x_2^b, \dots\ y_n = x_n^b \tag{3.16}$$

среднее значение $\overline{y}$ равно

$$\frac{1}{\lambda_{ii}} = \overline{y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i} = a_{on}^b \tag{3.17}$$

и

$$a_{on} = \sqrt[b]{\overline{y}} \tag{3.18}$$

так как для распределения Вейбулла $\overline{x} = x_{cp} = aK_b$, то

$$x_{cpon} = K_b \sqrt[b]{\overline{y}} \qquad \text{или } \overline{x_{on}} \tag{3.19}$$

Нижняя доверительная граница

$$x_{cpн} = K_b \sqrt[b]{r_3 \overline{y}} \qquad \text{или } \overline{x_н} \tag{3.20}$$

Верхняя доверительная граница

$$x_{cpв} = K_b \sqrt[b]{r_1 \overline{y}} \tag{3.21}$$

r_1 и r_3 определяются по тем же таблицам .

Для параметра *a* распределения Вейбулла нижняя и верхняя доверительные границы определяются по зависимостям

$$a_н = \sqrt[u]{r_3 \overline{y}} \tag{3.22}$$

$$a_b = \sqrt[b]{r_1 \overline{y}} \tag{3.23}$$

2.3.2. Варианты заданий

В качестве вариантов заданий могут быть приняты варианты практического занятия №1.

2.3.3. Последовательность выполнения работы

1. Получение варианта исходных данных.
2. Определение величины $\overline{x}$ по формуле (3.1) и величины σ по формуле (3.3).
3. Для случая нормального распределения по таблице 3.1 определяем значение t_α, задавшись значением α^* и войдя в нее по значению числа степеней свободы $K = n - 1$;

Определяем значение нижней доверительной границы $\overline{x} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$ и верхней доверительной границы $\overline{x} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$.

4. В случае экспоненциального распределения λ_{on} определяется по формуле (3.12), а нижняя и верхняя границы по формулам (3.13) и (3.14).
5. В случае распределения Вейбулла по формуле (3.19) определяется $x_{cp_{on}}$, а нижняя и верхняя границы – по формулам (3.20) и (3.21).

Таблица 3.1

Значения коэффициента Стьюдента t_α

k \ α^*	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,3995	0,999
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	31,60
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	12,92
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,500	4,029	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,897	3,355	3,833	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,781
10	1,372	1,813	2,228	2,764	3,169	3,581	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,373	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,977	3,326	4,141
15	1,341	1,753	2,131	2,603	2,947	3,286	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,584	2,921	3,252	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,540	2,861	3,174	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,850
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,792
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,745
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,707
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,674
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,705	2,971	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,496
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,460
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887	3,416
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,391
150	1,287	1,655	1,976	2,352	2,609	2,89	3,357
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	2,839	3,340
300	1,284	1,650	1968	2,339	2,592	2,828	3,323
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	2,820	3,310
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,291

Таблица 3.2а

Значение коэффициента r_1

m \ α	0,999	0,990	0,975	0,950	0,900	0,800
1	1000	100	40	19,5	9,50	4,48
2	44,0	13,5	8,26	5,63	3,77	2,42
3	15,7	6,88	4,84	3,66	2,73	1,95
4	9,33	4,85	3,67	2,93	2,29	1,74
5	6,76	3,91	3,08	2,54	2,05	1,62
6	5,43	3,36	2,73	2,29	1,90	1,54
7	4,60	3,00	2,49	2,13	1,80	1,48
8	4,06	2,75	2,31	2,01	1,72	1,43
9	3,67	2,56	2,19	1,91	1,66	1,40
10	3,38	2,42	2,08	1,83	1,61	1,37
11	3,15	2,31	2,00	1,78	1,57	1,35
12	2,96	2,21	1,93	1,73	1,53	1,33
13	2,83	2,13	1,88	1,69	1,50	1,31
14	2,69	2,06	1,83	1,65	1,48	1,29
15	2,59	2,01	1,78	1,62	1,46	1,28
20	2,23	1,81	1,64	1,51	1,37	1,24
25	2,02	1,68	1,55	1,44	1,33	1,21
30	1,98	1,60	1,48	1,39	1,29	1,18
40	1,72	1,50	1,40	1,32	1,24	1,16
50	1,61	1,43	1,35	1,28	1,21	1,14
60	1,56	1,38	1,31	1,25	1,19	1,12
80	1,47	1,32	1,26	1,21	1,16	1,10
100	1,40	1,28	1,23	1,19	1,14	1,09
150	1,31	1,22	1,18	1,15	1,12	1,07
200	1,26	1,19	1,16	1,13	1,10	1,06
250	1,23	1,17	1,14	1,11	1,09	1,06
300	1,21	1,15	1,12	1,10	1,08	1,05
400	1,18	1,13	1,11	1,09	1,07	1,04
500	1,16	1,11	1,09	1,08	1,06	1,04
600	1,14	1,10	1,08	1,07	1,05	1,04
800	1,12	1,09	1,07	1,06	1,05	1,03
1000	1,11	1,08	1,06	1,05	1,04	1,03

Таблица 3.2б

Значение коэффициента r_3

m \ α	0,999	0,990	0,975	0,950	0,900	0,800
1	0,14	0,22	0,27	0,33	0,43	0,62
2	0,22	0,30	0,36	0,42	0,51	0,67
3	0,27	0,36	0,42	0,48	0,57	0,70
4	0,31	0,40	0,46	0,52	0,60	0,73
5	0,34	0,43	0,49	0,55	0,62	0,75
6	0,36	0,46	0,52	0,57	0,65	0,76
8	0,41	0,50	0,56	0,61	0,68	0,78
10	0,44	0,53	0,58	0,64	0,70	0,80
15	0,50	0,59	0,64	0,68	0,74	0,83
20	0,54	0,63	0,67	0,72	0,77	0,85
25	0,58	0,66	0,70	0,74	0,79	0,86
30	0,60	0,68	0,72	0,76	0,80	0,87
40	0,64	0,71	0,75	0,78	0,83	0,88
50	0,67	0,74	0,77	0,80	0,84	0,89
60	0,70	0,76	0,79	0,82	0,86	0,90
80	0,73	0,78	0,81	0,84	0,87	0,91
100	0,75	0,80	0,83	0,86	0,88	0,92
152	0,79	0,84	0,86	0,88	0,90	0,93
200	0,81	0,86	0,88	0,89	0,92	0,94
250	0,83	0,87	0,89	0,90	0,92	0,95
300	0,84	0,88	0,90	0,91	0,93	0,95
400	0,86	0,89	0,91	0,92	0,94	0,96
500	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94	0,96
600	0,89	0,91	0,92	0,94	0,95	0,97
800	0,90	0,92	0,93	0,94	0,96	0,97
1000	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97

2.4. Практическое занятие №4

Тема: Прогнозирование случайных характеристик объектов по времени работы.

Цель работы: Приобрести навыки расчетов изменений случайных характеристик объектов и научиться прогнозировать эти характеристики.

2.4.1. Необходимые теоретические сведения.

Одной из важнейших случайных характеристик объектов эксплуатации по времени работы является вероятность безотказной работы, которая может быть определена по формуле

$$P(t) = 1 - F(t) \tag{4.1}$$

где $F(t)$ - интегральная функция распределения наработки до отказа, значение которой может быть определено, если известен закон распределения времени наработки до отказа.

Для основных законов распределения соответствующие зависимости имеют следующий вид:

для экспоненциального закона

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{4.2}$$

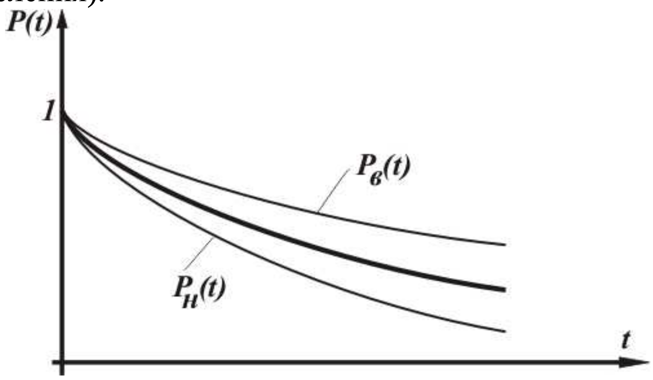
для нормального закона

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t-x_{cp})^2}{2\sigma^2}} dt \tag{4.3}$$

для закона Вейбулла

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{1}{a}t^b} \tag{4.4}$$

По формуле (4.1) с использованием зависимостей (4.2), (4.3) и (4.4) для $F(t)$ можно рассчитать значения $P(t)$, т. е. изменение вероятности безотказной работы. В самом общем виде величина $P(t)$ будет иметь вид спадающей от единицы кривой (своей для каждого закона распределения).



Для полноты картины необходимо определить верхние $P_в(t)$ и нижние $P_н(t)$ доверительные границы величин $P(t)$.

Наиболее просто рассчитать кривые $P_в(t)$ и $P_н(t)$ для экспоненциального закона, подставив в формулу (4.2) значения

$$\lambda_н = \frac{\lambda_{оп}}{r_1} \text{ и } \lambda_в = \frac{\lambda_{оп}}{r_3},$$

где $\lambda_{оп}$ - параметр базовой кривой, построенной по исходным опытным данным,

r_1 и r_3 - величины, определяемые по таблицам 3.2а и 3.2б.

В случае нормального распределения кривые $P_в(t)$ и $P_н(t)$ рассчитываются с учетом значений $F(t)$ нормального закона, определенных для различных t с учетом новых значений t_{cp}:

$$t_{срн} = t_{ср} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \tag{4.5}$$

$$t_{срн} = t_{ср} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \tag{4.6}$$

где величина t_α определяется по таблице 3.1.

В случае распределения Вейбулла кривые $P_в(t)$ и $P_н(t)$ рассчитываются с учетом значений $F(t)$ этого распределения для различных t с учетом новых значений $a_н$ и $a_в$:

$$a_н = \sqrt[b]{r_3 \overline{y}} \tag{4.7}$$

$$a_в = \sqrt[b]{r_1 \overline{y}} \tag{4.8}$$

где $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad y_i = t_i^b$, а r_1 и r_3 определяются по таблицам 3.2а и 3.2б.

Таким образом, последовательность вычислений в случае распределения Вейбулла состоит в следующем:

по опытным данным $t_i \ (i = 1, 2, \ldots n)$ определяется математическое ожидание $\overline{t}$ и среднеквадратическое отклонение σ (методом моментов или по формулам (3.1) и (3.3)), затем определяется коэффициент вариации $U = \frac{\sigma}{\overline{t}}$, по которому из таблицы 1.2 определяется параметр b, определяются значения $y_i = t_i^b$ и значение величины $\overline{y}$; по формулам (4.7) и (4.8) определяются верхняя и нижняя границы параметра a, предварительно определив значения r_1 и r_3 по таблице ; окончательно определяются значения

$$P_н(t) = e^{-\frac{1}{a_н}t^b} \tag{4.9}$$

$$P_в(t) = e^{\frac{1}{a_в}t^b} \tag{4.10}$$

2.4.2. Варианты заданий

В качестве вариантов заданий могут быть приняты варианты практического занятия №1.

2.4.3. Последовательность выполнения работы

1. Получение варианта исходных данных.
2. Определение величин $t_{ср}$ и σ по формулам (3.1) и (3.3).
3. Для экспоненциального закона определение величины $\lambda = \frac{1}{t_{ср}}$ и расчет базовой кривой $P(t)$ по формулам (4.1) и (4.2).
4. Определение величин $\lambda_н$ и $\lambda_в$ и построение кривых $P_н(t)$ и $P_в(t)$.
5. Для нормального закона построение базовой кривой $P(t)$ с использованием таблицы нормального закона.
6. Определение $t_{срн}$ и $t_{срв}$ по формулам (4.5) и (4.6) и построение кривых $P_н(t)$ и $P_в(t)$ с использованием таблиц нормального закона.
7. Для закона Вейбулла руководствоваться последовательностью вычислений, описанных в п. 2.4.1.

2.5. Практическое занятие №5

Тема: Анализ дискретных моделей случайных характеристик объектов эксплуатации (биномиальный закон).

Цель работы: Приобрести навыки использования дискретных моделей объектов эксплуатации.

2.5.1. Необходимые теоретические сведения

Биномиальный закон дает вероятность P того, что в последовательности из n независимых испытаний интересующее нас событие наступает ровно k раз. В каждом из испытаний это событие происходит с одной и той же вероятностью p; соответственно непоявление этого события $q = 1 - p$.

Рассматриваемая вероятность P (функция частот) равна

$$P(k,n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{5.1}$$

Функция распределения равна

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{i} C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{5.2}$$

где $0 < i < n$, n – целое число.

Математическое ожидание числа ожидаемых событий

$$M(k) = np \tag{5.3}$$

Дисперсия равна

$$D(k) = npq \tag{5.4}$$

Коэффициент вариации равен

$$U = \frac{\sigma(k)}{M(k)} = \sqrt{\frac{q}{np}} \tag{5.5}$$

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний искомое событие не появится, равна

$$P(k=0,n,p) = \frac{n!}{0!(n-0)!} p^0 q^n = q^n \tag{5.6}$$

Вероятность того, что в каждом испытании появится ожидаемое событие, т. е. $k = n$, равна

$$P(k=n,n,p) = \frac{n!}{n!(n-k)!} p^n q^{n-n} = p^n \tag{5.7}$$

Вероятность того, что появится хотя бы одно событие при n испытаниях, равна

$$1 - P(k=0,n,p) = 1 - q^n = 1 - (1-p)^n \tag{5.8}$$

Вероятность того, что появится ровно одно событие, т. е. $k = 1$, равна

$$P(k=1,n,p) = \frac{n!}{1!(n-1)!} p^1 \cdot q^{n-1} = npq^{n-1} \tag{5.9}$$

Вероятность того, что будет не более одного ожидаемого события, равна

$$P(k \le 1,n,p) = \sum_{k=0}^{1} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k} = q^n + npq^{n-1} \tag{5.10}$$

Соответственно, ровно два события, т. е. $k = 2$, равна

$$P(k=2,n,p) = \frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 \cdot q^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} p^2 \cdot q^{n-2} \tag{5.11}$$

Вероятность того, что будет не более двух ожидаемых событий, равна

$$P(k \le 2,n,p) = \sum_{k=0}^{2} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k} = q^n + npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2} \tag{5.12}$$

2.5.2. Задание

Эксплуатируется *n* изделий (самолетов). За какое-то время эксплуатации (например, между регламентами) выявлено, что вероятность отказа изделия (блока, прибора, элемента) равна *p*. Для указанных ниже вариантов определить:

- математическое ожидание, дисперсию и коэффициент вариации числа отказавших изделий;
- вероятность того, что все изделия будут исправны;
- вероятность того, что все изделия будут неисправны;
- вероятность того, что будет неисправно хотя бы одно изделие;
- вероятность того, что будет неисправно ровно одно изделие;
- вероятность того, что будет неисправно не более одного изделия;
- вероятность того, что будут неисправны ровно два изделия
- вероятность того, что будут неисправны не более двух изделий.

2.5.3. Варианты заданий

№№ вариантов	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2	0,225	0,25	0,275	0,3
n	10	10	10	10	10	10	10	10	10

2.5.4. Последовательность выполнения работы

1. Получение варианта исходных данных.
2. Определение величин $M(K)$, $D(K)$ и U по формулам (5.6), (5.7) и (5.8).
3. Определение вероятностей, указанных в задании.

2.6. Практическое занятие №6

Тема: Анализ дискретных моделей случайных характеристик объектов эксплуатации (Пуассоновский закон).

Цель работы: Приобрести навыки использования дискретных моделей эксплуатации.

2.6.1. Необходимые теоретические сведения.

Закон Пуассона является предельным случаем биномиального закона, когда вероятность *p* появления интересующего нас события довольно мала, а само число экспериментов достаточно велико. При этом произведение *np* стремится к некоторой постоянной величине λ

$$\lambda = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} np \tag{6.1}$$

Параметр λ в зависимости от существа задачи может иметь различный физический смысл, например, это может быть интенсивность отказов.

Вероятность того, что рассматриваемое событие в достаточно длительной серии испытаний появится ровно *K* раз (функция частот), равна

$$P_K = \frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda} = \frac{(np)^K}{K!}e^{-np} \tag{6.2}$$

Функция распределения для рассматриваемого закона равна

$$F(K) = Bep(X < x) = \sum_{i=0}^{i}\frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda} = \sum_{i=0}^{i}\frac{(np)^K}{K!}e^{-np} \tag{6.3}$$

Математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации равны

$$M(K) = \lambda = np \tag{6.4}$$

$$D(K) = \lambda = np \tag{6.5}$$

$$U(K) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{np}} \tag{6.6}$$

Вероятность того, что в среднем из *n* испытаний не появится ни одного интересующего нас события, равна

$$P_{K=0} = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \tag{6.7}$$

Вероятность того, что появится хотя бы одно событие, равна

$$1 - P_{K=0} = 1 - e^{-\lambda} \tag{6.8}$$

Вероятность того, что появится ровно одно событие, равна

$$P_{K=1} = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \tag{6.9}$$

Вероятность того, что появится не более одного события, равна

$$P_{K\le 1} = \sum_{i=0}^{1}\frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = (1+1)\lambda e^{-\lambda} = 2\lambda e^{-\lambda} \tag{6.10}$$

Вероятность того, что появится ровно два события, равна

$$P_{K=2} = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \tag{6.11}$$

Вероятность того, что появится не более двух событий, равна

$$P_{K\le 2} = \sum_{i=0}^{2}\frac{\lambda^K}{K!}e^{-\lambda} = P_{K=0} + P_{K=1} + P_{K=2} = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!}\right)e^{-\lambda} \tag{6.12}$$

2.6.2. Задание

Исследуются на надежность *n* изделий (блоков, приборов, элементов). Выявлено, что параметр распределения их отказов равен λ.

Для указанных ниже вариантов определить:

- математическое ожидание, дисперсию и коэффициент вариации числа отказов;
- вероятность того, что в среднем из n испытаний не обнаружится ни одного отказа;
- вероятность того, что обнаружится хотя бы одно отказавшее изделие;
- вероятность того, что обнаружится ровно одно отказавшее изделие;
- вероятность того, что обнаружится не более одного отказавшего изделия;
- вероятность того, что обнаружится ровно два отказавших изделия;
- вероятность того, что появится не более двух отказавших изделий.

2.6.3. Варианты заданий

№№ вариантов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
λ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
p	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01	0,0015	0,0016	0,0017	0,0018	0,0019
n	100	100	100	100	100	100	1000	1000	1000	1000	1000

2.6.4. Последовательность выполнения работы

1. Получение варианта исходных данных.
2. Определение величин $M(K)$, $D(K)$ и U по формулам (6.4), (6.5) и (6.6).
3. Определение вероятностей, указанных в задании.

a. Практическое занятие №7

Тема: Определение оперативных характеристик контроля.

Цель работы: Приобрести навыки построения оперативных характеристик контроля.

i. Необходимые теоретические сведения.

Оперативная характеристика $L(q)$ – это выраженная уравнением, графиком или таблицей зависимость вероятности приема партии от уровня качества (дефектности) принимаемой продукции q. Уровень качества (дефектность) – это доля дефектных изделий m в партии, т. е. $q = \frac{m}{N}$. Вероятность приема партии – это вероятность того, что количество дефектных изделий в партии будет не больше заданного уровня C, т. е. $L(q) = P(m \le C)$.

В настоящем практическом занятии оперативная характеристика строится в виде графика. Исходными данными для построения оперативной характеристики являются:

вид закона, устанавливающего вероятность появления того или иного количества дефектных изделий в выборке (биномиальный или Пуассоновский);

объем выборки N;

вероятность появления дефектного изделия $q = \frac{m}{N}$;

величина приемочного уровня качества q_0;

величина браковочного уровня качества q_m;

заданный приемлемый уровень дефектности C.

Для случая биномиального закона последовательность расчета функции $L(q)$ состоит в следующем:

при $q = 0$ (все изделия в партии исправны) $L(q) = 1$, при $q = 1$ (все изделия в партии дефектны) $L(q) = 0$ (7.1)

для $q = q_0 \left(m_0 = Nq_0\right)$ определяется величина $1-\alpha$, где α - риск поставщика; в соответствии с биномиальным законом

$$L\left(q = q_0\right) = \left(1-\alpha\right) = \frac{N!}{m_0!\left(N-m_0\right)!} q_0^{m_0} \left(1-q_0\right)^{N-m_0} \tag{7.2}$$

при $C = m_0 = 0$

$$\left(1-\alpha\right) = \left(1-q_0\right)^N \tag{7.2.1}$$

при $C = m_0 = 1$

$$\left(1-\alpha\right) = Nq_0\left(1-q_0\right)^{N-1} + \left(1-q_0\right)^N \tag{7.2.2}$$

для $q = q_m \left(m_m = q_m N\right)$ для того же закона следует выражение для риска заказчика β

$$L\left(q = q_m\right) = \frac{N!}{m_m!\left(N-m_m\right)!} q_m^{m_m} \left(1-q_m\right)^{N-m_m} \tag{7.3}$$

при $C = m_0 = 0$

$$\beta = \left(1-q_m\right)^N \tag{7.3.1}$$

при $C = m_0 = 1$

$$\beta = Nq_m\left(1-q_m\right)^{N-1} + \left(1-q_m\right)^N \tag{7.3.2}$$

для любой промежуточной точки $q(m = qN)$

$$L\left(q\right) = \frac{N!}{m!\left(N-m\right)!} q^m \left(1-q\right)^{N-m} \tag{7.4}$$

при $C = m_0 = 0$

$$L(q)=(1-q)^N \qquad (7.4.1)$$

при $C=m_0=1$

$$L(q)=Nq(1-q)^{N-1}+(1-q)^N \qquad (7.4.2)$$

Последовательность расчетов оперативной характеристики контроля с использованием распределения Пуассона остается той же.

при q = 0 $L(q)$ = 1, при q = 1 ($L(q)$ = 0 (7.5)

для $q=q_0$

$$L(q=q_0)=(1-\alpha)=\frac{(Nq_0)^{m_0}}{m_0}e^{-Nq_0} \qquad (7.6)$$

при $C=m_0=0$

$$1-\alpha=e^{-Nq_0} \qquad (7.6.1)$$

при $C=m_0=1$

$$1-\alpha=e^{-Nq_0}(1+Nq_0)+e^{-Nq_0}=e^{-Nq_0}(2+Nq_0) \qquad (7.6.2)$$

для $q=q_m$

$$\beta=e^{-Nq_m}\frac{(Nq_m)^{m_m}}{m_m!} \qquad (7.7)$$

при $C=m_m=0$

$$\beta=e^{-Nq_m} \qquad (7.7.1)$$

при $C=m_m=1$

$$\beta=e^{-Nq_m}(1+Nq_m)+e^{-Nq_m}=e^{-Nq_m}(2+Nq_m) \qquad (7.7.2.)$$

для любой промежуточной точки q

$$L(q)=\frac{(Nq)^m}{m!}e^{-Nq} \qquad (7.8)$$

при $C=m=0$

$$L(q)=e^{-Nq} \qquad (7.8.1)$$

при $C=m=1$

$$L(q)=e^{-Nq}(1+Nq)+e^{-Nq}=e^{-Nq}(2+Nq)^N \qquad (7.8.2)$$

Характер изменения графика $L(q)$ приведен на рис. 7.1.

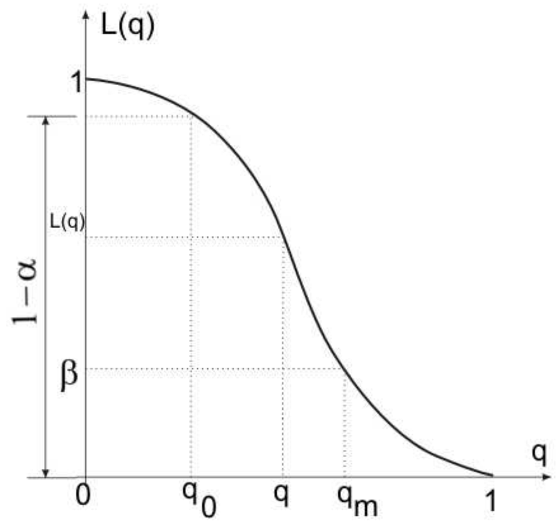


Рис. 7.1

ii. Варианты заданий

Биномиальный закон

№ вар	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
C	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
N	6	6	6	6	6	6	8	8	8	8	8	8	10	10	10	10	10	10
q_0	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
q_m	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4

Пуассоновский закон

№ вар	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
C	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
N	10	10	10	10	10	10	100	100	100	100	100	100	500	500	500	500	500	500
q_0	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
q_m	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,003	0,003	0,004	0,004	0,005	0,005

iii. Последовательность выполнения работы

1. Получение варианта исходных данных.
2. Рассчитать значения $L(q)$ с использованием биномиального закона для $q = q_0$, $q = q_m$ и 2…3-х промежуточных значений q.
3. Рассчитать значения $L(q)$ с использованием Пуассоновского закона для $q = q_0$, $q = q_m$ и 2…3-х промежуточных значений q.
4. Построить графики $L(q)$ по рассчитанным значениям $L(q)$.

b. Практическое занятие №8

Тема: Формирование моделей статистического контроля по альтернативному признаку.

Цель работы: Приобрести навыки разработки моделей статистического контроля.

i. Необходимые теоретические сведения.

Статистический контроль объектов по альтернативному признаку применяется для различных процедур контроля: приемочного контроля партии изделий, оценки эффективности режимов технического обслуживания и в других случаях, когда решение принимается по правилу "да – нет" (годен – негоден, эффективен – неэффективен).

Для формирования моделей статистического контроля по альтернативному признаку используется оперативная характеристика контроля с использованием биномиального закона или закона Пуассона.

Для определенности будем рассматривать модель статистического контроля при приемке партии изделий.

При организации приема партии изделий заблаговременно необходимо установить:

q_0 - приемочный уровень качества;

q_m - браковочный уровень качества;

β - риск заказчика;

α - риск поставщика;

C - допустимое количество брака в партии.

Принимая партию из N изделий, необходимо определить объем выборки n. Условие приемки партии

$$m \le C$$

Взаимосвязь перечисленных параметров определяется видом закона распределения.

Для биномиального закона имеем следующую совокупность соотношений:

$$P(q) = \frac{n!}{m!(n-m)!} q^m (1-q)^{n-k} \tag{8.1}$$

При $C = m_0 = 0$ можно из (8.1) получить

$$(1-\alpha) = (1-q_0)^n,$$

откуда следует

$$n = \frac{\lg(1-\alpha)}{\lg(1-q_0)}; \tag{8.2}$$

$$\beta = (1-q_m)^n,$$

откуда следует

$$q_m = 1 - \beta^{\frac{1}{n}}. \tag{8.3}$$

Для закона Пуассона могут быть записаны следующие соотношения

$$P(q) = \frac{(nq)^m}{m!} e^{-nq} \tag{8.4}$$

При $C = m_0 = 0$ из (8.4) следует

$$(1-\alpha) = e^{-nq_0},$$

откуда следует

$$n = -\frac{\ln(1-\alpha)}{q_0}; \tag{8.5}$$

$$\beta = e^{-nq_m},$$

откуда следует

$$q_m = -\frac{\ln \beta}{n}. \quad (8.6)$$

ii. Задание

Для приведенных ниже вариантов определить необходимый объем выборки n и браковочный уровень качества при $C = 0$.

iii. Варианты заданий

Биномиальный закон

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_0	0,01	0,01	0,01	0,01	0,005	0,005	0,005	0,005	0,001	0,001	0,001	0,001
α	0,05	0,05	0,1	0,1	0,05	0,05	0,1	0,1	0,05	0,05	0,1	0,1
β	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1

Пуассоновский закон

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_0	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
α	0,01	0,01	0,01	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
β	0,35	0,13	0,05	0,35	0,13	0,05	0,006	0,08	0,13	0,15	0,17	0,2

iv. Последовательность выполнения работы

1. Получить вариант исходных данных.
2. Определить величины n и q_m при $C = 0$ для случая биномиального закона.
3. Определить величины n и q_m при $C = 0$ для случая закона Пуассона.

2.9. Практическое занятие №9

Тема: Анализ моделей изменения параметров объектов.

Цель работы: Приобрести навыки расчетов изменения параметров объектов в процессе эксплуатации.

v. Необходимые теоретические сведения.

Техническое состояние – совокупность подверженных изменению в процессе эксплуатации свойств объекта. В процессе эксплуатации техническое состояние объекта изменяется. Изменение параметров является случайным процессом $\eta(t)$, протекающим под воздействием различных эксплуатационных факторов.

Конкретные реализации случайного процесса $\eta(t)$ могут сильно отличаться друг от друга (сильное перемешивание) и сравнительно слабо (слабое перемешивание). В последнем случае могут использоваться линейные и экспоненциальные модели изменения параметров.

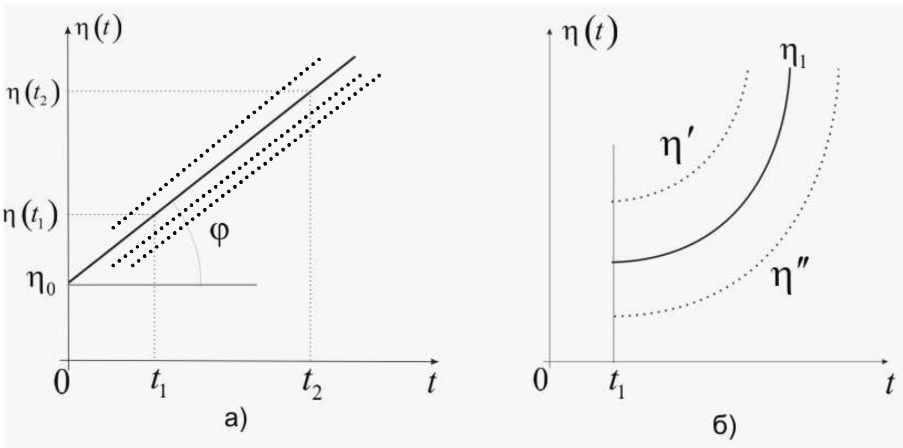


Рис. 9.1

В случае линейной модели уравнение функции $\eta(t)$ выражается просто

$$\eta(t) = \alpha t + \eta_0 \tag{9.1}$$

где $\alpha = tg\varphi$.

Если имеются данные по параметру $\eta(t)$ для двух значений времени t_1 и t_2, то уравнение прямой (9.1) может быть записано в следующем виде

$$\eta(t) = \left[\frac{\eta(t_2) - \eta(t_1)}{t_2 - t_1}\right] \cdot t + \left[\eta(t_1) - t_1 \frac{\eta(t_2) - \eta(t_1)}{t_2 - t_1}\right] \tag{9.2}$$

Линейная модель справедлива при постоянной скорости изменения параметра $\eta(t)$.

Если скорость U изменения параметра $\eta(t)$ пропорциональна этому параметру, т. е.

$$U = \frac{d\eta(t)}{dt} = c + k\eta(t), \tag{9.3}$$

то, интегрируя правую и левую части этого уравнения при начальных условиях t_1 и $\overline{\eta}(t_1)$, получим экспоненциальную зависимость

$$\overline{\eta}(t) = \left[\overline{\eta}(t_1) + \frac{V}{k}\right] e^{(t-t_1)k} - \frac{c}{k} \tag{9.4}$$

vi. Варианты заданий

1 вариант. В авиакомпанию поступил новый самолет Ил-96-300 с двигателями ПС-90А. Средний удельный расход топлива в начале эксплуатации составил 0,58 кг/кгс·ч. В дальнейшем расход стал изменяться.

Начало экспл.	6 мес.	1 г. 6 мес.	2 г.	2 г. 6 мес.	3 г.
0,58	0,595	0,6	0,615	0,62	0,635

2 вариант. В авиакомпанию поступил после ремонта двигатель НК-8-2У самолета Ту-154. Средний удельный расход топлива в начале эксплуатации после ремонта составил 0,800 кг/кгс·ч. В дальнейшем расход стал изменяться.

Начало экспл.	6 мес.	1 г. 6 мес.	2 г.	2 г. 6 мес.	3 г.
0,800	0,825	0,835	0,87	0,875	0,95

Сформировать модель изменения этого параметра.

vii. Последовательность выполнения работы

1. Получить вариант исходных данных.
2. Построить график изменения параметров.
3. Сформировать модель изменения этого параметра.

2.10. Практическое занятие №10

Тема: Формирование моделей полумарковских процессов эксплуатации объектов.

Цель работы: Приобрести навыки формирования и анализа полумарковских процессов эксплуатации.

2.10.1. Необходимые теоретические сведения.

Случайный процесс, при котором переходы между состояниями являются Марковскими, а времена нахождения в любом из состояний описываются произвольной функцией распределения (в том числе постоянным временем), называется полумарковским.

Один из характерных примеров полумарковского процесса эксплуатации – замена агрегата. Замена агрегата может быть вызвана следующими причинами:

- замена после отработки заданного ресурса T_p;
- замена при отказе агрегата $\left(\eta(t) \geq \eta^{**}\right)$, η^{**} – технический параметр, при достижении которого наступает отказ;
- замена при достижении допустимого уровня η^{*} параметра $\left(\eta(t) \geq \eta^{*}\right)$ при непрерывном контроле (профилактическая замена);
- замена при достижении допустимого уровня η^{*} параметра при дискретном контроле.

Процесс эксплуатации с заменой агрегата может быть представлен как процесс нахождения агрегата в следующих состояниях:

И – исправен (использование на самолете);

Н – неисправен;

В – восстановление;

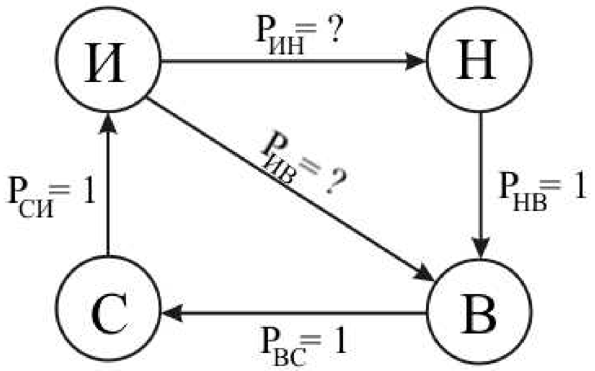
З – профилактическая замена;

С – хранение на складе;

П – проверка исправности.

В настоящей работе рассматривается процесс с одной неисправностью и схемы замены по наработке и профилактическая замена при непрерывном контроле.

Граф состояний замены по наработке



Уравнения:

Для состояния И:

$$\pi_C P_{СИ} - \pi_И P_{ИВ} - \pi_И P_{ИН} = 0 \quad (10.1)$$

Для состояния Н:

$$\pi_И P_{ИН} - \pi_Н P_{НВ} = 0 \quad (10.2)$$

Для состояния В:

$$\pi_Н P_{НВ} + \pi_И P_{ИВ} - \pi_В P_{ВС} = 0 \quad (10.3)$$

Для состояния С:

$$\pi_В P_{ВС} - \pi_С P_{СИ} = 0 \quad (10.4)$$

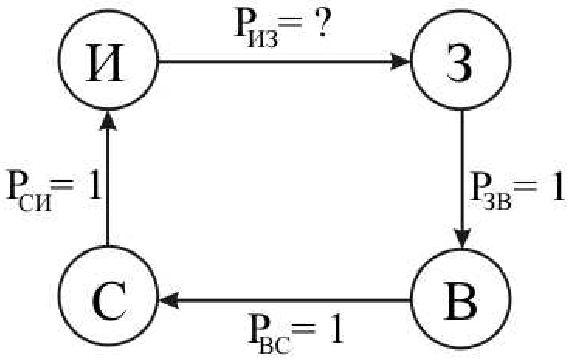
Нормировочное условие:

$$\pi_И + \pi_Н + \pi_В + \pi_С = 1 \quad (10.5)$$

Решение дает:

$$\pi_Н = \frac{P_{ИН}}{3 + P_{ИН}}; \pi_И = \pi_С = \pi_В$$

Граф состояний замены при непрерывном контроле



Уравнения:

Для состояния И:

$$\pi_C P_{СИ} - \pi_И P_{ИЗ} = 0 \qquad (10.6)$$

Для состояния С:

$$\pi_В P_{ВС} - \pi_С P_{СИ} = 0 \qquad (10.7)$$

Для состояния В:

$$\pi_З P_{ЗВ} - \pi_В P_{ВС} = 0 \qquad (10.8)$$

Для состояния З:

$$\pi_И P_{ИЗ} - \pi_З P_{ЗВ} = 0 \qquad (10.9)$$

Нормировочное условие:

$$\pi_И + \pi_С + \pi_З + \pi_В = 1 \qquad (10.10)$$

Решение дает:

$$\pi_С = \pi_И P_{ИЗ};\pi_В = \pi_С = \pi_И P_{ИЗ};\pi_З = \pi_В = \pi_И P_{ИЗ};\pi_З = \pi_И P_{ИЗ}$$

$$\pi_И + \pi_И P_{ИЗ} + \pi_И P_{ИЗ} + \pi_И P_{ИЗ} = 1;\pi_И(1+3P_{ИЗ}) = 1;\pi_И \frac{1}{1+3P_{ИЗ}}$$

2.10.2. Задание

Для схем замен по наработке и при непрерывном контроле составить графы состояний и определить величины π_i нахождения агрегата в каждом состоянии в соответствии с приведенными ниже вариантами заданий.

2.10.3. Варианты заданий

№ вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_{ИН}$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,12	0,15

$$P_{НВ} = P_{ВС} = P_{СИ} = 1$$

$P_{ИЗ}$	0,15	0,12	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

$$P_{ЗВ} = P_{ВС} = P_{СИ} = 1$$

2.11. Практическое занятие №11

Тема: Анализ регрессивных моделей характеристик процессов функционирования объектов.

Цель работы: Приобрести навыки составления и анализа регрессивных моделей функционирования объектов.

2.11.1. Необходимые теоретические сведения.

Регрессия – зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от некоторой другой случайной величины или от нескольких случайных величин.

По данным индивидуальных наблюдений значений случайных величин эти наблюдения можно нанести на координатную сетку. Каждому значению x будет соответствовать свое значение y. В результате мы получим множество точек, отражающих индивидуальные наблюдения (рис. 11.1).

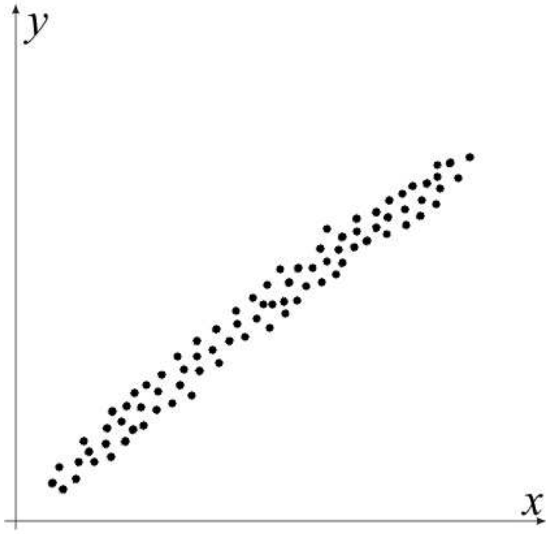


Рис. 11.1

Чтобы выявить характер зависимости между изменениями двух случайных величин, необходимо произвести обработку полученных экспериментальных данных.

Один из методов обработки состоит в следующем. Производится группирование экспериментальных данных по какому-либо признаку (например, по типам самолетов), определяются средние значения по группам и по этим средним значениям строится график зависимости $y = f(x)$.

Второй, более громоздкий, путь состоит в построении этой зависимости методом наименьших квадратов.

Заключительным этапом регрессивного анализа является подбор функции, наилучшим образом отражающей зависимость $y = f(x)$. Такими функциями могут быть линейные, квадратичные, полиномодальные, экспоненциальные и т. п.

Рассмотрим способ подбора линейной функции. Общий вид линейной функции есть

$$y = a + bx \tag{11.1}$$

Зададимся условием, что линия регрессии должна проходить через две характерные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Для определения постоянных a и b имеем систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Решаем эту систему

$$y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1)$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{11.3}$$

и

$$a = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \tag{11.4}$$

или

$$a = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 \tag{11.5}$$

Сущность метода наименьших квадратов состоит в том, что подбирается функция $f(x)$ так, чтобы сумма квадратов отклонений значений y_i от $f(x_i)$ была минимальной

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i) \right]^2 = \min \tag{11.6}$$

Рассмотрим один из практических способов реализации метода нименьших квадратов.

Пусть в опыте зарегистрирована совокупность значений (x_i, y_i). Подготовительные вычисления выполняются в соответствии с таблицей 11.1.

Таблица 11.1

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	x_1	y_1	x_1^2	$x_1 y_1$
2	x_2	y_2	x_2^2	$x_2 y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	x_n^2	$x_n y_n$
Суммы	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
Средние значения	$M_x = \frac{\sum x_i}{n}$	$M_y = \frac{\sum y_i}{n}$		

Значения величин a и b вычисляются по следующим формулам

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n M_x M_y}{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - n (M_x)^2} \tag{11.7}$$

$$a = M_y - b M_x \tag{11.8}$$

Если функция $f(x)$ предполагается нелинейной, то подбор подходящей зависимости требует определенного навыка. Подбирается такой вид функции, которая по мнению исследователя наилучшим образом отражает распространение экспериментальных точек.

В некоторых случаях вид этой функции может быть определен исходя из физической сущности решаемой задачи.

Если предполагаемая функция нелинейная, то определение ее параметров может быть сделано как и для линейной функции, исходя из требования прохождения функции через некоторые опорные точки. Проиллюстрируем этот метод на примере квадратичной функции

$$y = a + bx + cx^2 \tag{11.9}$$

Для трех базовых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ и (x_3, y_3) имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 \\ y_3 &= a + bx_3 + cx_3^2 \end{aligned} \right\} \tag{11.10}$$

Из решения этой системы уравнений определяем значения величин a, b и с.

Если предполагаемая функция есть функция степенного вида $y = ax^b$, то целесообразно экспериментальные точки нанести в логарифмической системе координат. В этом случае точки должны лечь примерно на одну прямую линию.

Уравнение этой прямой будет иметь вид

$$z = C + bu \tag{11.11}$$

где

$$z = \lg y$$

$$C = \lg a$$

$$u = \lg x$$

Определив постоянные С и b в функции (11.11), как это описано для линейной функции, получаем значение $a = 10^C$ и окончательный вид функции

$$y = 10^C x^b \tag{11.12}$$

2.11.2. Варианты заданий

1 Вариант. В таблицах 11.2, 11.3, 11.4 и 11.5 приведены данные по взлетным массам m и величине тяги двигателей P для самолетов различных классов. Провести анализ зависимости $P = f(m)$, построить линию регрессии и подобрать функцию, отражающую эту зависимость.

Таблица 11.2. Самолеты местных воздушных линий

Типы самолетов	Як-40	Ан-24	Ан-28	Ил-114
Взлетная масса, т	16,1	21,8	6,5	21,0
Взлетная тяга двигателей, кгс	3000	5100	1920	5000

Таблица 11.3. Самолеты ближних магистральных воздушных линий

Типы самолетов	Ту-134	Як-42	МД-81
Взлетная масса, т	47,0	57,0	63,5
Взлетная тяга двигателей, кгс	13600	13000	17400

Таблица 11.4. Средне магистральные пассажирские самолеты

Типы самолетов	Ту-154В	Ту-154М	Ту-204
Взлетная масса, т	98	100	93,5
Взлетная тяга двигателей, кгс	31500	33000	36000

Таблица 11.5. Дальне магистральные пассажирские самолеты

Типы самолетов	Ил-62М	Ил-86	Ил-96-300
Взлетная масса, т	167	210	216
Взлетная тяга двигателей, кгс	44000	52000	64000

2 Вариант. В таблице 11.6 приведены данные о налетах на отказ, выявленные в полете T_n, а в таблице 11.7 – на отказ, выявленные на земле T_c и соответствующие им взлетные массы самолетов $m_{вз}$. Провести анализ зависимостей $T_n = f(m_{вз})$ и $T_c = f(m_{вз})$, построить линии регрессии и подобрать функции, иллюстрирующие эти зависимости.

Таблица 11.6

Взлетная масса, т	5,1	12,3	48	87	157	162	200
Налет на отказ, выявленный в полете, T_n	316	178	78	58	61	50	33

Таблица 11.7

Взлетная масса, т	5,8	6,0	12,3	21	45	50	87	157	168	200
Налет на отказ, выявленный на земле, T_c	128	110	74	48	30	15	20	18	16	8,5

2.11.3. Последовательность выполнения работы

1. Получить вариант работы.
2. Нанести на координатную сетку исходные данные варианта задания.
3. Сделать предположение о характере регрессионной зависимости.
4. В случае предположения о линейной функции произвести обработку исходных данных методом наименьших квадратов.
5. Построить линию регрессии и записать выражение, описывающее линию регрессии.