

## Лабораторно-практическое занятие № 3 АНАЛИЗ ОДНОФАЗНЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С $RL$ И $RC$ ПРИЕМНИКАМИ

### Типовые задачи

**Задача 3.1.** Заданы графики изменения  $u(t)$  и  $i(t)$  (с амплитудами  $U_m=141$  В;  $I_m=2,82$  А) для участка электрической цепи. Записать функции в тригонометрической и комплексной формах, если  $f = 50$  Гц. Определить полное сопротивление и угол сдвига фаз, используя данные таблицы 3.1. Построить схему замещения цепи.

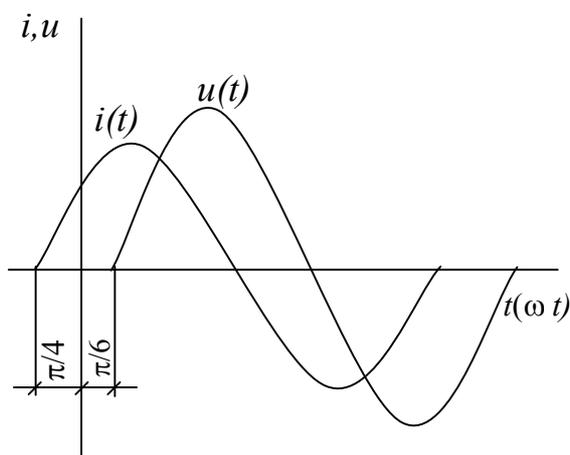


Рис. 3.1

### Решение

Напряжение  $u(t)$  и ток  $i(t)$  изменяются по синусоидальному закону (см. рис. 3.1) с одной частотой, следовательно, мгновенные значения тока и напряжения в цепи записываются:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u), \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $U_m$  — амплитудное значение напряжения;  $I_m$  — амплитудное значение

тока;  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота;  $f = 1/T$  — частота синусоидальных напряжения и тока;  $T$  — период;  $\psi_u$  — начальная фаза синусоидального напряжения;  $\psi_i$  — начальная фаза синусоидального тока

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}; \quad \psi_u = -\pi/6 = -30^\circ; \quad \psi_i = \pi/4 = 45^\circ. \quad (3.2)$$

Начальная фаза напряжения  $\psi_u$  имеет знак (-), так как синусоида  $u(t)$  сдвинута по оси абсцисс вправо от начала координат (величина самой функции при  $t=0$  имеет отрицательное значение). Напомним, что началом любой синусоиды полагается точка перехода функции из отрицательного значения в положительное значение. Поэтому же начальная фаза тока имеет знак (+), так как синусоида  $i(t)$  сдвинута по оси абсцисс влево от начала координат. Таким образом, в соответствии с (3.1) и (3.2) имеем:

$$u = 141 \cdot \sin(314t - 30^\circ) \text{ В}, \quad i = 2,82 \cdot \sin(314t + 45^\circ) \text{ А.}$$

Синусоидальные функции времени изображаются также *комплексными числами*, которые, по сути, аналитически описывают вращающиеся радиус-векторы на комплексной плоскости, рассматриваемые в момент времени  $t=0$ .

Комплексные изображения синусоидальных величин чаще всего записываются для действующих значений. Поэтому в первую очередь определим действующие значения тока и напряжения данной цепи:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2,82}{\sqrt{2}} = 2 \text{ А}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В.}$$

Представим  $u(t)$  и  $i(t)$  в комплексной форме (показательная форма записи комплексных чисел):

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} = 100 e^{-j30^\circ} \text{ В}, \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i} = 2 e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Модуль комплексного напряжения равен действующему значению напряжения  $U$  участка цепи, а аргумент – начальной фазе (начальная фаза синусоидального напряжения  $\psi_u$ ) и, соответственно, модуль комплексного тока равен действующему значению тока  $I$  участка цепи, а аргумент – начальной фазе (начальная фаза синусоидального напряжения  $\psi_i$ ). Напомним, что такое представление возможно, поскольку ток и напряжения изменяются с одной и той же угловой частотой и, следовательно, изображающие их векторы на комплексной плоскости взаимно неподвижны.

Определим полное комплексное сопротивление цепи

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= Z e^{j\varphi} = \underline{U} / \underline{I} = U e^{j\psi_u} / I e^{j\psi_i} = (100 e^{-j30^\circ}) / (2 e^{j45^\circ}) = \\ &= (100/2) e^{j(-30^\circ - 45^\circ)} = 50 e^{-j75^\circ} \text{ Ом}, \end{aligned}$$

где  $Z$  – полное сопротивление цепи, Ом;  $\varphi$  – разность фаз между током и напряжением (угол сдвига фаз),  $\varphi < 0$ .

В алгебраической форме записи комплексное сопротивление цепи  $\underline{Z}$  имеет вид (переход осуществляется с помощью формулы Эйлера):

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= Z e^{j\varphi} = Z \cos\varphi + jZ \sin\varphi = R + jX = \\ &= 50 \cos(-75^\circ) + j50 \sin(-75^\circ) = 12,94 - j48,3 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Здесь  $R$  – действительная часть (активное сопротивление), а  $X$  – мнимая часть (реактивное сопротивление) комплексного сопротивления цепи  $\underline{Z}$ .

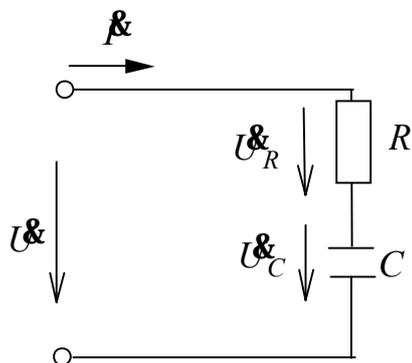


Рис. 3.2

Схема замещения цепи (рис. 3.2) представляется последовательным соединением резистивного элемента  $R$  и емкости  $C$ , так как мнимая часть  $X$  комплексного сопротивления цепи имеет отрицательный знак. Цепь носит “емкостной” характер. Об этом также свидетельствует отрицательный знак угла сдвига фаз. Ток опережает напряжение по фазе.

**Задача 3.2.** Записать в алгебраической и показательной формах выражение для полного комплексного сопротивления индуктивной катушки с параметрами  $R_K = 3$  Ом;  $L_K = 0,0127$  Гн,  $f = 50$  Гц, используя данные таблицы 3.2.

Построить на комплексной плоскости треугольник сопротивлений.

*Решение*

Схема замещения реальной индуктивной катушки (рис. 3.3) содержит соединенные последовательно элементы  $R_K$  и  $L_K$ .

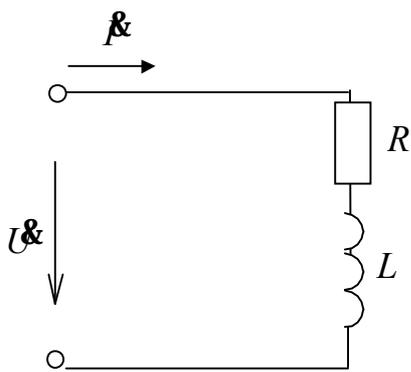


Рис. 3.3

Полное комплексное сопротивление цепи индуктивной катушки в алгебраической форме записи

$$\underline{Z}_K = R_K + j X_K = 3 + j4 \text{ Ом} , \quad (3.3)$$

где  $X_K = X_L = \omega L = 2\pi fL$  - индуктивное сопротивление, Ом;

$$X_K = \omega L_K = 2\pi f L_K = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,0127 = 3,99 \approx 4 \text{ Ом}.$$

На рис. 3.4 представлен треугольник сопротивлений, построенный в соответствии с формулой (3.3).

В показательной форме комплексное сопротивление цепи индуктивной катушки запишется  $\underline{Z}_K = Z_K e^{j\varphi}$  Ом.

Из простых геометрических соображений очевидно:

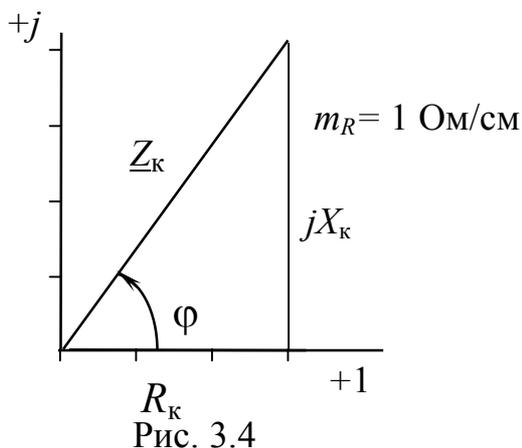


Рис. 3.4

$$Z_K = \sqrt{R_K^2 + X_K^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Ом};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_K}{R_K} = \arctg \frac{4}{3} = 53,13^\circ \approx 53^\circ,$$

где  $Z_K$  – полное сопротивление цепи;  $\varphi$  – разность фаз между током и напряжением, следовательно  $Z_K = 5e^{j53^\circ}$  Ом.

Так как  $\varphi > 0$  ( $+53^\circ$ ), то, как и все положительные углы, он откладывается от оси вещественных чисел против часовой стрелки. (рис. 3.4)

**Задача 3.3.** По показаниям приборов (рис. 3.5) определить параметры:  $R$ ,  $L$ ,  $\varphi$ ,  $Q$ ,  $S$  катушки, если  $I = 0,2$  А,  $U = 3$  В,  $P = 0,36$  Вт,  $f = 300$  Гц. Построить векторную диаграмму тока и напряжений, используя данные таблицы 3.3.

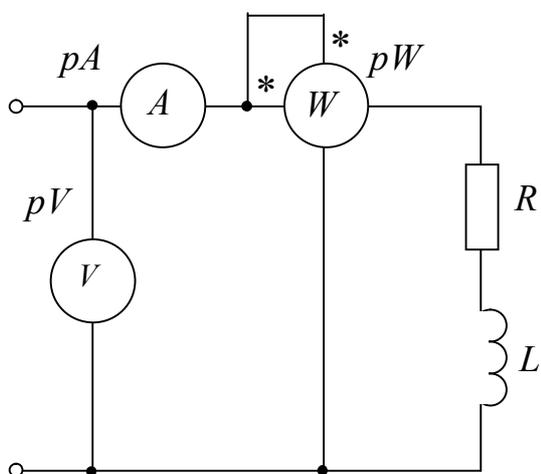


Рис. 3.5

### Решение

Электроизмерительные приборы показывают действующие значения тока и напряжения, так как в большинстве случаев в них используется принцип электромеханических преобразований.

В рассматриваемой цепи именно в *резистивном элементе R* происходит безвозвратное (активное) потребление мощности – энергия выделяется

в виде тепла и рассеивается в окружающую среду. Ваттметр измеряет именно эту мощность, которая пропорциональна квадрату действующего значения тока и величине активного сопротивления цепи  $R$

$$P_w = P_R = U_R I = RI^2 = UI \cos \varphi .$$

Следовательно,  $R = P_R / I^2 = 0,36 / (0,2)^2 = 9$  Ом

Полное сопротивление цепи  $Z$  можно определить как частное от деления действующего значения напряжения (показание вольтметра)

на действующее значение тока (показание амперметра) на входе цепи:

$$Z = U/I = 3/0,2 = 15 \text{ Ом.}$$

В то же время

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arccos \frac{R}{Z},$$

где  $X_L = \omega L = 2\pi fL$  – индуктивное сопротивление  $L$  элемента, Ом.

Тогда  $X_L$  и  $\varphi$  можно определить как

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ Ом,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arccos \frac{R}{Z} = \arccos \frac{9}{15} = 53,13^\circ \approx 53^\circ.$$

Индуктивность  $L$

$$L = X_L/\omega = X_L/(2\pi f) = 12/(2\pi \cdot 300) = 0,00637 \text{ Гн} = 6,37 \text{ мГн.}$$

Реактивная (индуктивная мощность) – характеризует скорость поступления энергии в магнитное поле катушки и возврат ее обратно источнику (обратимый процесс)

$$Q_L = U_L I = U I \sin\varphi = X_L I^2 = 12 \cdot (0,2)^2 = 0,48 \text{ вар.}$$

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q_L^2} = 3 \cdot 0,2 = 6 \text{ ВА.}$$

Для построения векторной диаграммы тока и напряжений цепи изобразим схему замещения (рис. 3.6).

В соответствии со вторым законом Кирхгофа в комплексной форме:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L. \quad (3.4)$$

Примем начальную фазу синусоидального тока  $\psi_i$  равной нулю. Тогда комплексный ток цепи

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i} = 0,2 e^{j0^\circ} = 0,2 \text{ А.} \quad (3.5)$$

Комплексные напряжения на элементах цепи в соответствии с законом Ома в комплексной форме

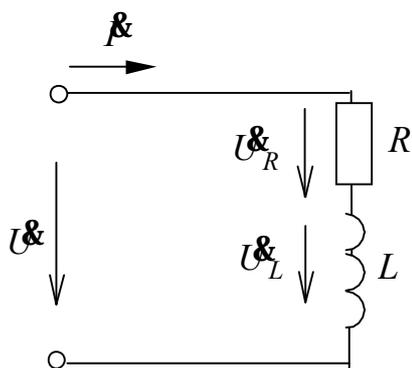


Рис. 3.6

$$\underline{U}_R = R \underline{I} = 9 \cdot 0,2 = 1,8 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_L = j \omega L \underline{I} = j X_L \underline{I} = j 12 \cdot (0,2) = j 2,4 = 2,4 e^{j90^\circ} \text{ В.} \quad (3.6)$$

Построение векторной диаграммы (совокупность расположенных на комплексной плоскости векторов, изображающих синусоидальные функции времени – напряжения и токи) начинаем с изображения в выбранном масштабе вектора (комплекса) тока  $\dot{I}$  согласно уравнению (3.5). Располагаем его вдоль оси вещественных чисел (+1), так как  $\psi_i = 0$  (рис. 3.7.)

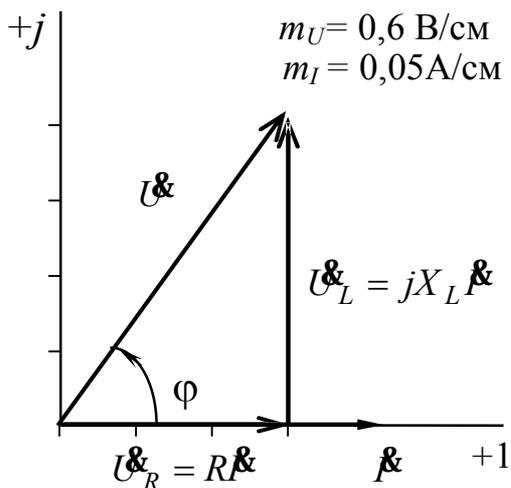


Рис. 3.7

Вектор комплексного напряжения на резистивном элементе  $\dot{U}_R$  (изображается в своем масштабе) располагается также вдоль оси вещественных чисел, так как ток и напряжение резистивного элемента совпадают по фазе. Вектор комплексного напряжения на индуктивном элементе  $\dot{U}_L$  располагается вдоль оси мнимых чисел (+j), так как  $\psi_{UL} = 90^\circ$  согласно уравнению (3.6), то есть напряжение на индуктивном элементе по фазе опережает ток на  $90^\circ$ .

Построение ведем в соответствии с уравнением (3.4). К концу вектора  $\dot{U}_R$  прибавляем вектор  $\dot{U}_L$  и, соединив его конец с началом координат, получаем вектор напряжения  $\dot{U}$  на входе цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = Ue^{j\psi_U};$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = 3\text{В};$$

$$\psi_U = \psi_I + \varphi = 0 + 53^\circ = 53^\circ.$$

### Варианты заданий к самостоятельной работе

Таблица 3.1

| Параметры | Вариант |       |      |        |       |       |      |        |
|-----------|---------|-------|------|--------|-------|-------|------|--------|
|           | 1       | 2     | 3    | 4      | 5     | 6     | 7    | 8      |
| $U_m$ , В | 141     | 14,1  | 282  | 28,2   | 42,3  | 56,4  | 84,6 | 98,7   |
| $I_m$ , А | 5,64    | 0,846 | 42,3 | 1,41   | 0,564 | 0,987 | 5,64 | 4,23   |
| $T$ , с   | 0,01    | 0,02  | 0,04 | 0,0025 | 0,025 | 0,02  | 0,01 | 0,0025 |

Окончание табл.3.1

|                |          |          |         |          |          |          |          |          |
|----------------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\psi_u$ , рад | $-\pi/4$ | $\pi/6$  | $\pi/2$ | $\pi/10$ | $\pi/9$  | $-\pi/8$ | $-\pi/4$ | $-\pi/8$ |
| $\psi_i$ , рад | $\pi/8$  | $-\pi/4$ | $\pi/8$ | $-\pi/8$ | $-\pi/5$ | $\pi/7$  | $-\pi/6$ | $\pi/10$ |

Таблица 3.2

| Параметры  | Вариант |        |         |         |       |        |        |         |
|------------|---------|--------|---------|---------|-------|--------|--------|---------|
|            | 1       | 2      | 3       | 4       | 5     | 6      | 7      | 8       |
| $R_k$ , Ом | 4       | 6      | 3       | 8       | 12    | 16     | 24     | 18      |
| $L_k$ , Гн | 0,00478 | 0,0255 | 0,00318 | 0,00239 | 0,051 | 0,0191 | 0,0143 | 0,00955 |
| $f$ , Гц   | 100     | 50     | 200     | 400     | 50    | 100    | 200    | 400     |

Таблица 3.3

| Параметры | Вариант |    |     |     |     |     |     |     |
|-----------|---------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|           | 1       | 2  | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
| $I$ , А   | 0,4     | 2  | 3   | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,4 | 1,8 |
| $U$ , В   | 20      | 48 | 60  | 12  | 36  | 90  | 120 | 360 |
| $P$ , Вт  | 6       | 60 | 45  | 10  | 12  | 72  | 180 | 450 |
| $f$ , Гц  | 100     | 50 | 200 | 400 | 50  | 100 | 200 | 400 |

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}; \quad \psi_u = -\pi/6 = -30^\circ; \quad \psi_i = \pi/4 = 45^\circ$$

$U_m$  – амплитудное значение напряжения;  $I_m$  – амплитудное значение тока;

$\omega = 2\pi f$  – угловая частота;  $f = 1/T$  – частота синусоидальных напряжения и тока;  $T$  – период;  $\psi_u$  – начальная фаза синусоидального напряжения;  $\psi_i$  – начальная фаза синусоидального тока.