

*Тема 3. Энергия движущегося АТТ. Качение.
Гироскоп*

П.1. Кинетическая энергия АТТ.

П.2. Качение.

П.3. Гироскоп.

П.4. Применение гироскопов.

П.1. Кинетическая энергия АТТ.

Кинетическая энергия – это часть механической энергии тела, которая связана с движением тела и обращается в 0 в отсутствие движения (когда $V = 0$).

При вращательном движении АТТ все точки тела движутся по окружностям и каждая имеет свою скорость и кинетическую энергию

$$E_{ki}^{BP} = \frac{m_i (v_i^{BP})^2}{2}. \quad \text{Известно также} \quad \vec{v}_i^{BP} = [\vec{\omega}, \vec{r}_i].$$

$$(v_i^{BP})^2 = (\omega \cdot r_i)^2 \Rightarrow$$

$$E_k^{BP} = \sum E_{ki}^{BP} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum (m_i r_i^2) = \frac{I \omega^2}{2} \quad - \text{ ответ.}$$

ТЕСТ

Кинетическая энергия вращения твердого тела
вокруг свободной оси:

$$E_{\kappa}^{BP} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

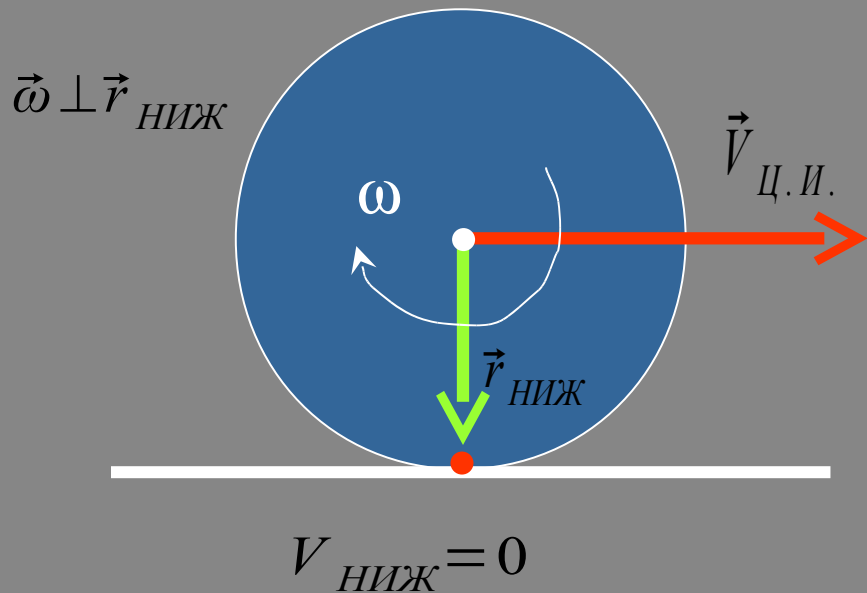
Кинетическая энергия произвольно движущегося АТТ:

$$E_{\kappa} = \frac{mv_{\text{ц.и.}}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

ТЕСТ

П.2. Качение.

Качение – перемещение тела по поверхности другого тела без скольжения.



$$\vec{V}_{\text{ниж}} = \vec{V}_{\text{ниж}}^{\text{ПОСТ}} + \vec{V}_{\text{ниж}}^{\text{ВР}}$$

$$\vec{V}_{\text{ниж}}^{\text{ВР}} = [\vec{\omega}, \vec{r}_{\text{ниж}}]$$

$$\vec{V}_{\text{ниж}}^{\text{ПОСТ}} = \vec{V}_{\text{ц.и.}}$$

$$\omega = \frac{V_{\text{ц.и.}}}{R}$$

Самая нижняя точка тела при соприкосновении с поверхностью остается неподвижной.

ТЕСТ

ЗАДАЧА. Найти кинетическую энергию катящегося диска, и показать, во сколько раз она больше, чем скользящего диска.

$$E_K = \frac{mV_{ц.и.}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{mV_{ц.и.}^2}{2} = \frac{3}{2} E_K^{пост} \quad - \text{ответ.}$$

П.3.Гироскоп.

Гироскоп с точки зрения техники это устройство, главной частью которого является ротор – массивное симметричное тело, которое быстро вращается вокруг своей оси симметрии.

Система подвески ротора – это очень точные подшипники специальной конструкции, обладающие очень малым трением.

Они закреплены на специальной подвеске так, чтобы обеспечить возможность вращения ротора вокруг трех осей.

Электромотор раскручивает ротор до 1000 и более оборотов в секунду. Для устранения влияния воздуха ротор иногда помещают в вакуум.

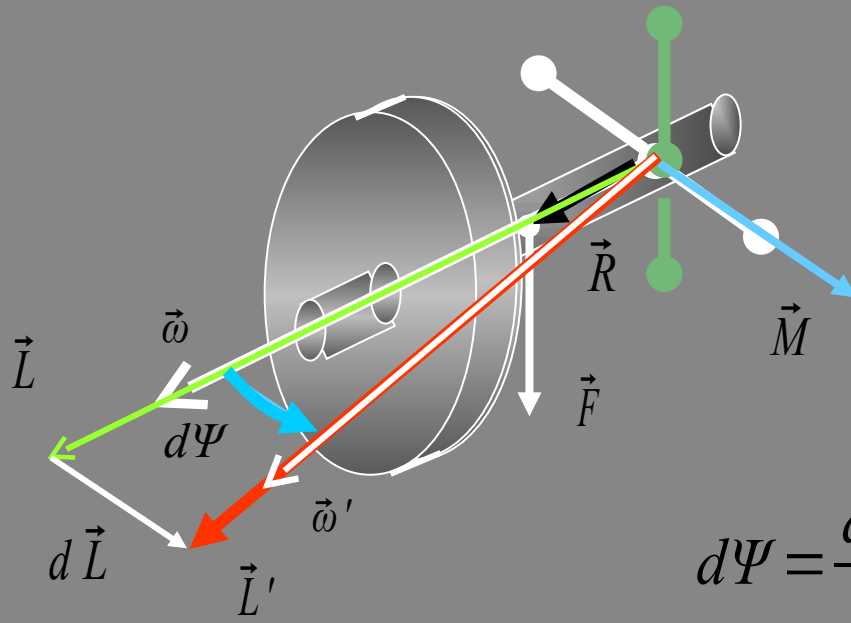
Основным уравнением для гироскопа является динамическое уравнение для момента импульса:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{СУМ}}.$$

Если $M_{\text{СУМ}} = 0$, то $\vec{L} = \text{const}$, т.е. не меняется ни по величине, ни по направлению. Это свойство гироскопа нашло широкое применение.

Однако, в реальной ситуации нельзя избавиться полностью от момента внешних сил. Обычно он связан с силой тяжести ротора.

Проблема: Что происходит с гироскопом, ось которого горизонтальна, под действием силы тяжести ротора?



$$\vec{M} = [\vec{R}, \vec{F}].$$

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt,$$

$$\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}.$$

$$d\Psi = \frac{dL}{L} \quad - \text{ поворот оси за время } dt.$$

Прецессией называется медленное движение (поворот) оси гироскопа в плоскости, перпендикулярной приложенной силе.

$d\Psi$ – угол прецессии.

ТЕСТ

Угловая скорость вращения ротора $\omega = \frac{d\phi}{dt}$.

Угловая скорость прецессии

$$\Omega_{\text{ПР}} = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{Mdt}{I\omega \cdot dt} = \frac{M}{I\omega} = \frac{RF}{I\omega}$$

- основное уравнение гироскопа.

П.4.Применение гироскопов.

Наиболее широко гироскопы применяются для устройств, обеспечивающих долговременное сохранение определенного направления в пространстве (гироскомпас, гиригоризонт, инерциальные системы ориентации в пространстве и т.д.).

В техническом устройстве добиваются, чтобы $\Omega_{\text{ПР}}$ была минимальна.

Полученная нами формула для угловой скорости прецессии гироскопа показывает четыре направления действий:

Уменьшать R .

Увеличивать I .

Уменьшать F .

Увеличивать ω .

Задача.

Вычислить допустимое смещение ΔR центра тяжести (инерции) гироскопа от центра подвеса, если ротор имеет форму диска, радиуса 10 см, вращается с частотой 60000 оборотов в минуту и допустимое смещение оси (прецессия) 1° в сутки.

Дано:

$$R = 10 \text{ см} = 0.1 \text{ м},$$

$$\nu = 60000 \text{ об/мин} = 1000 \text{ об/с},$$

$$\Omega_{\text{пр}} = 1 \text{ }^\circ/\text{сутки} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ рад/с}.$$

Найти ΔR .

Основные законы:

$$F = mg.$$

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{\Delta R \cdot F}{I \omega}.$$

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Определяем смещение центра тяжести:

$$\Delta R = \frac{I\omega \Omega_{\text{ПП}}}{F} = \frac{mR^2 2\pi\nu \Omega_{\text{ПП}}}{2mg} = \frac{\pi R^2 \nu \Omega_{\text{ПП}}}{g} \quad \text{- ответ в общем виде.}$$

Подставляем числовые значения:

$$\Delta R = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{10} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 0,6 \text{ мкм}.$$

Такая точность технически достижима.

СРС 1/2 стр.: Вычислить линейную скорость точек на ободе гироскопа, вращающегося так, как указано в задаче.