Раздел 4. Колебания

Тема 1. Колебания без затухания.

П.1. Периодический процесс. Гармонические колебания. Характеристики гармонических колебаний.

П.2. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях (ГК). Дифференциальное уравнение ГК.

П.3. Пружинный маятник.

П.4. Гармонический осциллятор.

П.5. Математический маятник.

П.1. Периодический процесс. Гармонические колебания.

Процессы, происходящие в природе, очень часто имеют регулярно повторяющиеся части (с той или иной степенью точности).

Повторяются дни и ночи, времена года, движение Луны, Солнца и звезд, и т.д.

Большое значение имеют повторяющиеся процессы в технике.

Проблема: Каковы основные характеристики повторяющихся процессов и какими уравнениями они связаны?

Периодическим (колебательным) называется процесс, часть которого регулярно повторяется во времени.

Колебательной системой называют совокупность объектов, в которой происходит периодический процесс.

Полным колебанием называется минимальная часть периодического процесса, которая полностью повторяется.

Периодом называется длительность одного полного колебания.

Замечание1: через время, равное периоду, процесс полностью повторяется.

$A(t) = A(t \pm nT)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ есть любое целое число.

Замечание2: Периодический процесс есть абстракция (модель), т.к. он бесконечен во времени.

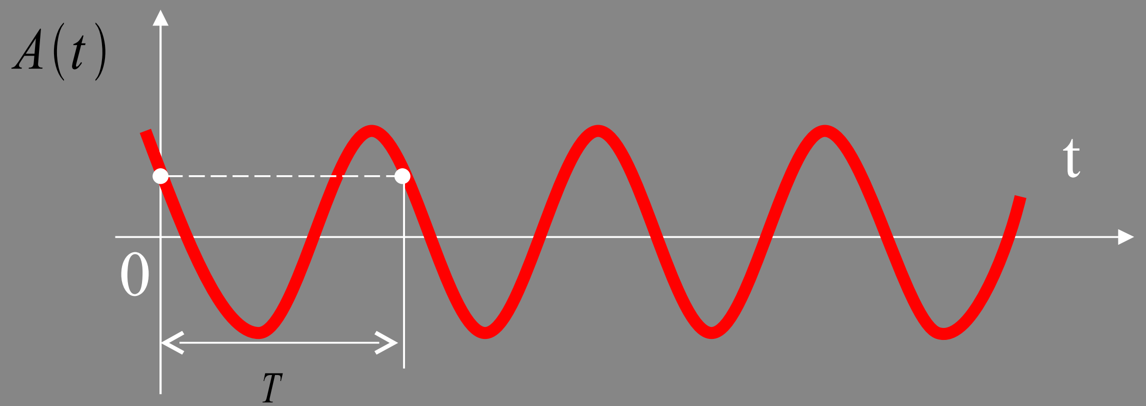
ТЕСТ

Частный случай периодического процесса – гармоническое колебание (ГК).

Гармоническим называется колебание, при котором физическая характеристика A(t) меняется по закону синуса или косинуса.

Общий вид закона изменения характеристики A при гармонических колебаниях с амплитудой A_m и начальной фазой φ_0 :

$$A(t) = A_m \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \phi_0\right).$$



ТЕСТ

Если «А» есть характеристика механического движения, тогда колебание называется механическим.

Если тело движется по оси X по гармоническому закону, то закон движения выглядит так:

$$x(t) = x_m \cdot cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \phi_0\right).$$

Идеальное гармоническое колебание есть абстрактная модель процесса, т.к. оно бесконечно во времени.

Но оно является хорошим приближением для исследования некоторых реальных процессов.

ТЕСТ

Характеристики гармонических колебаний:

x_m - *амплитуда есть максимальное отклонение смещения x от нулевого значения;*

$$\phi(t) = \left(2\pi\frac{t}{T} + \phi_0\right)$$ *- фаза, есть значение аргумента косинуса(или синуса) в произвольный момент времени t;*

φ_0 - *начальная фаза - значение аргумента косинуса (или синуса) в начальный момент времени $t_0 = 0$;*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$ *- циклическая частота.*

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)}$$ - закон движения.

Вопрос: Если гармоническое колебание есть абстракция, зачем же мы его исследуем?

Ответ: Математика позволяет заменить задачу о произвольном периодическом процессе на задачу о гармонических процессах. Любая периодическая функция раскладывается в ряд (интеграл) Фурье (есть сумма гармонических функций).

Алгоритм применения метода Фурье.

1. Реальное воздействие представляют, как совокупность гармонических воздействий (раскладывают в ряд или интеграл Фурье и находят амплитуды каждой гармонической силы).

2. Рассматривают воздействие каждой гармонической силы на исследуемую систему и вычисляют результат.

3. Суммируют (интегрируют) результаты и получают искомый результат от исходного воздействия.

П.2. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях (ГК). Дифференциальное уравнение ГК.

Проблема: Как связаны друг с другом кинематические характеристики движения колеблющейся МТ?

Пусть происходит гармоническое колебание по оси OX.

Для него закон движения $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Скорость $$v = \frac{dx}{dt} = \omega \cdot x_m(-sin(\omega t + \phi_0))$$ или

$$v = -\omega \cdot x_m \cdot sin(\omega t + \phi_0).$$

ВЫВОД: Скорость меняется тоже по гармоническому закону. Амплитуда скорости $v_m = \omega x_m$.

Из тригонометрии: $\sin(\varphi + \pi) = - \sin\varphi$, $\cos(\varphi + \pi/2) = - \sin\varphi$.

Следовательно, начальная фаза у скорости больше начальной фазы смещения на $\pi/2$.

Ускорение: $$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 \cdot x(t),$$

отсюда: $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

- *дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний*

Вывод: Само дифференциальное уравнение определяет только частоту колебаний ω - это корень из множителя при x.

Для нахождения амплитуды x_m и начальной фазы φ_0 нужны 2 дополнительных условия, например, начальное положение x_0 и начальная скорость тела v_0 при $t = 0$.

ТЕСТ

Задача: Найти уравнения связи начальных условий с параметрами, входящими в закон движения при гармонических колебаниях.

Используем закон движения и закон скорости, полагая в них $t = 0$:

$$\begin{cases} x_0 = x_m \cos\varphi_0 \\ v_0 = -\omega x_m \sin\varphi_0 \end{cases}$$

первое умножаем на ω, оба возводим в квадрат и суммируем:

$$\omega^2 x_0^2 + v_0^2 = (\omega x_m)^2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Теперь делим 2-ое уравнение на 1-ое: $tg\,\phi_0 = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}.$

Задача решена.

ТЕСТ

П.3. Пружинный маятник.

Проблема: Как применять полученные результаты для решения вопроса о возможности колебаний и их характеристиках?

Алгоритм решения:

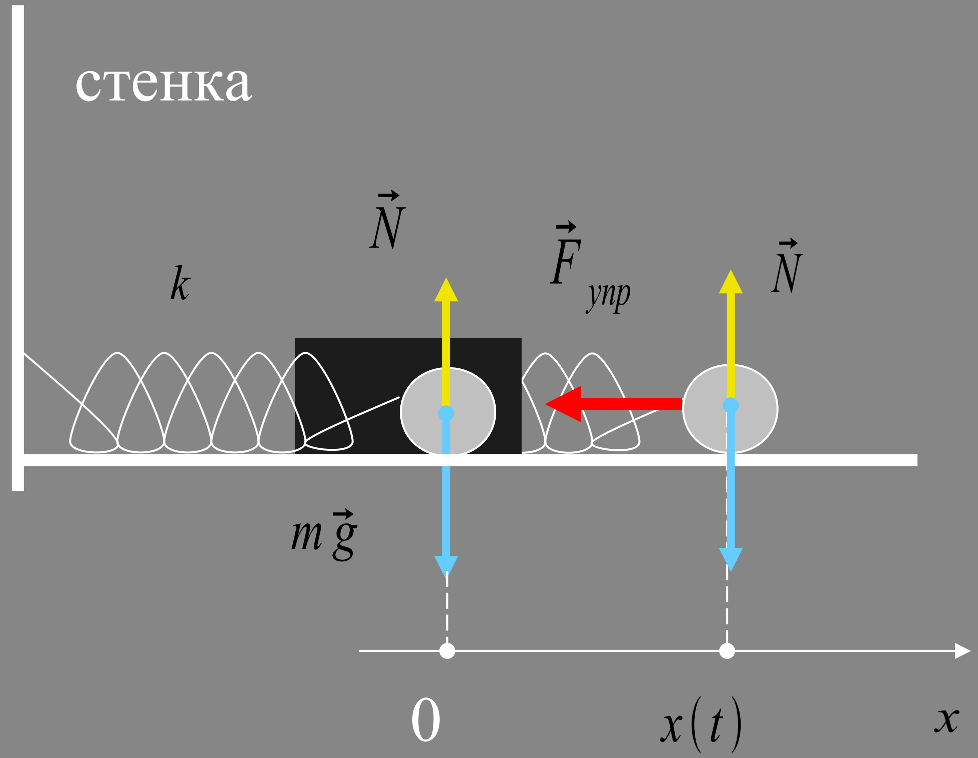
1) Использовать известные физические законы, которым подчиняется данная система. Составить систему уравнений.

2) Трансформировать их, стремясь получить дифференциальное уравнение колебаний для какой-нибудь характеристики этой системы.

3) Если это удалось – колебания возможны. Если уравнение связи не похоже на указанное дифференциальное уравнение, то колебаний в системе не будет.

Пример. Проанализировать движение шарика на невесомой и абсолютно упругой пружинке. Жесткость пружины – k; m – масса шарика.

Пусть шарик лежит на идеально гладкой горизонтальной поверхности, пружина соединяет его с массивной стенкой.



Закон Гука:

$$\boxed{F_{УПР.X} = -kx}$$

1) Основной закон - второй закон Ньютона: $m\vec{a}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i.$

2) Конкретизируем второй закон Ньютона: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-F_{УПР},$

3) Трансформируем: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx\Rightarrow \quad \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0,$

причем $\dfrac{k}{m}=const.$ Сравниваем с $\dfrac{d^2x}{dt^2}+const\cdot x=0.$

4) Делаем вывод: получили дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний, следовательно,

в системе возможны гармонические колебания.

Такую систему будем называть пружинный маятник.

Частота этих колебаний $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}.$

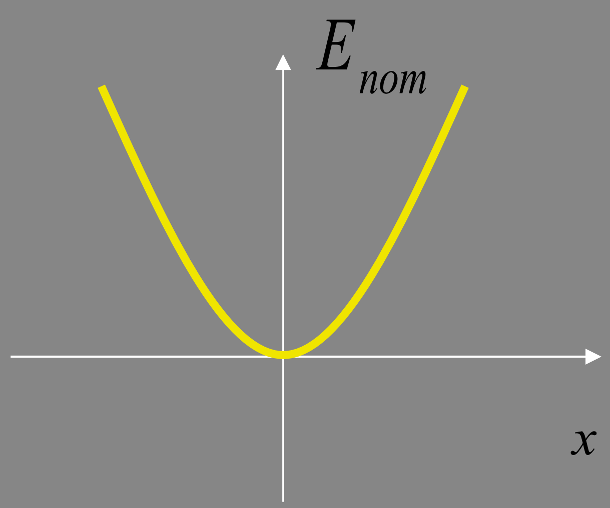
ТЕСТ

П.4. Гармонический осциллятор.

Определение. *Если на тело действует сила, формула для которой совпадает с законом Гука, тогда такая сила называется квазиупругой.*

Если на тело действует квазиупругая сила, потенциальная энергия выглядит так

$$E_{пот} = \frac{kx^2}{2}.$$



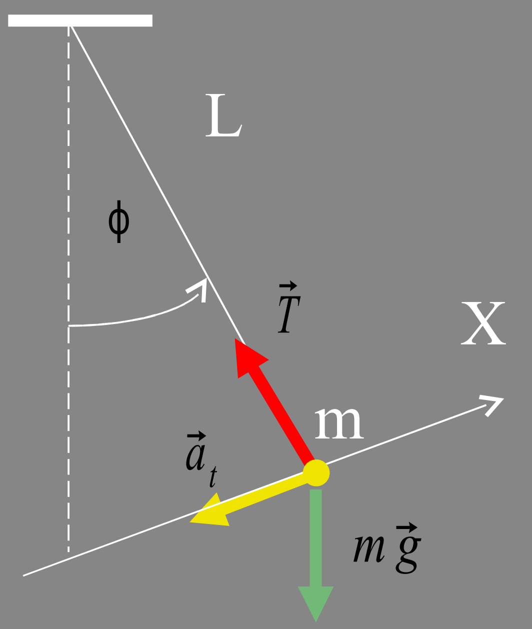
Такая зависимость называется параболической «потенциальной» ямой.

Гармонический осциллятор – *тело совершающее гармонические колебания в «параболической потенциальной яме».*

ТЕСТ

П.5. Математический маятник.

Это модель, состоящая из МТ, подвешенной на <u>идеальной</u> нити (невесомая, нерастяжимая), находящейся в <u>однородном</u> гравитационном поле, и совершающей бесконечно <u>малые</u> отклонения от положения равновесия.



В соответствии со вторым законом Ньютона $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i,$ или

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

Выбираем ось X по касательной к окружности, по которой движется МТ.

После проектирования на ОХ $ma_X = -\,mg\,\mathrm{Sin}(\varphi).$

Далее используем условие малости угла отклонения $\sin(\varphi) = \varphi$ и уравнение связи углового и линейного ускорений $a_{tX} = \varepsilon_Z R$. Кроме того, $a_X = a_{tX}$:

$$mR\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\phi\,,$$

отсюда получим (учитывая, что R = L) $\dfrac{d^2\phi}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\phi = 0,$ или

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0, \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = const\,.$$

<u>Вывод</u>: математический маятник может совершать гармонические колебания

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}\,.$

ТЕСТ