Тема 2. Свободные затухающие колебания. Вынужденные колебания. Сложение колебаний

П.1. Свободные затухающие колебания.

П.2. Логарифмический декремент затухания. Апериодический процесс

П.3. Вынужденные колебания

П.4. Сложение гармонических колебаний скалярных и сонаправленных характеристик.

П.5. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

П.1. Свободные затухающие колебания.

Проблема: Могут ли свободные колебания в реальной механической системе продолжаться бесконечно долго?

Решение: Надо исследовать реальную систему, в которой действуют силы, уменьшающие амплитуду колебаний.

Затухающими называются колебания, амплитуда которых асимптотически стремится к нулю.

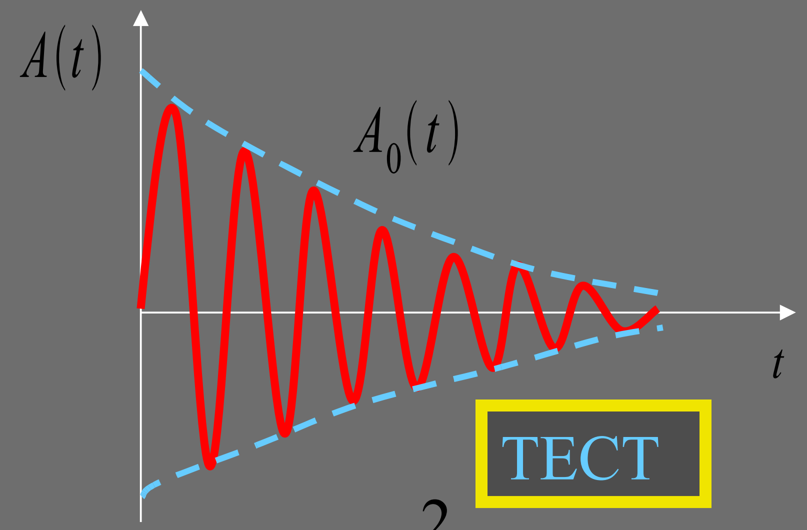
Рассмотрим экспоненциально затухающие колебания, у которых

$$A(t) = A_0(t)\cdot \cos(\omega t + \phi_0),$$

где амплитуда

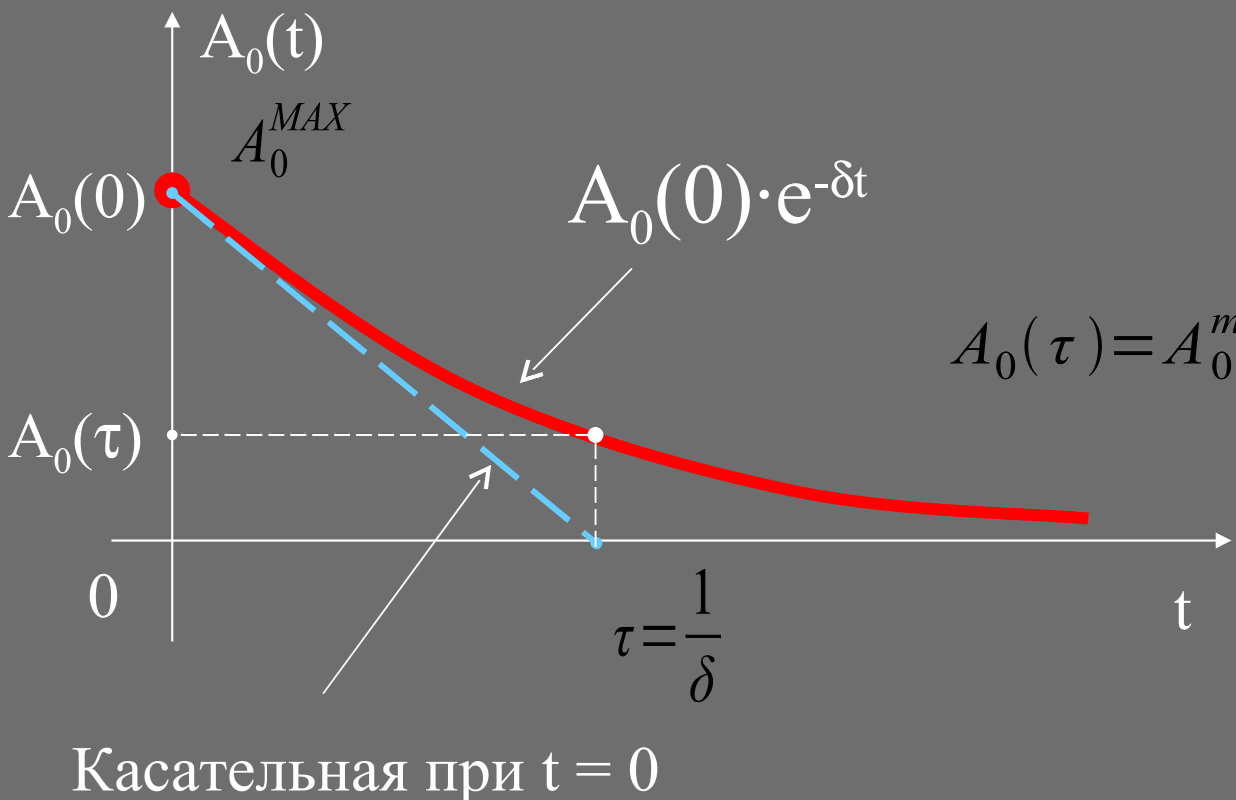
$$A_0(t) = A_0^{MAX}\cdot e^{-\delta t}.$$

экспонента



ТЕСТ

Экспоненциальная зависимость амплитуды от времени:



$$A_0(\tau)=A_0^{max}/e\approx 0,37\,A_0^{max}$$

τ - <u>постоянная времени затухания колебаний</u>. *Это время, в течение которого амплитуда убывает в «е» раз и становится равной* $0.37\,A_0^{MAX}$.

За время, равное 3τ, амплитуда колебаний становится пренебрежимо малой и можно считать, что колебания «исчезают», «прекращаются», «затухают».

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний характеристики А можно получить, дифференцируя закон экспоненциально затухающих колебаний:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + 2\delta \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$A(t) = A_0^{max} e^{-\delta t} cos(\omega t + \phi_0), \quad \text{где} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Вопрос: в какой механической системе возможны свободные экспоненциально затухающие колебания?

Пусть физическая характеристика А есть координата х МТ, тогда для механических затухающих колебаний дифференциальное уравнение таково

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0.$$

Используем определения ускорения и скорости:

$$a_X+2\delta\cdot v_X+\omega_0^2x=0\,|\times m$$ умножим на m и перегруппируем:

$$ma_X=-m2\delta\cdot v_X-\omega_0^2x\cdot m\,,\qquad \underbrace{\omega_0^2=\frac{k}{m}}_{const}.$$

ТЕСТ ТЕСТ

По второму закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_{СУМ} \Rightarrow$

$$ma_X = \underbrace{-rv_X}_{F_{ТР.X}} - \underbrace{kx}_{F_{УПР.X}}.$$

Справа стоят силы: $F_{УПР.X} = - k\ x$, и $F_{ТР.X} = - rv_X$.

$F_{ТР.X} = - rv$ *это сила вязкого трения, пропорциональная скорости и направленная против движения.*

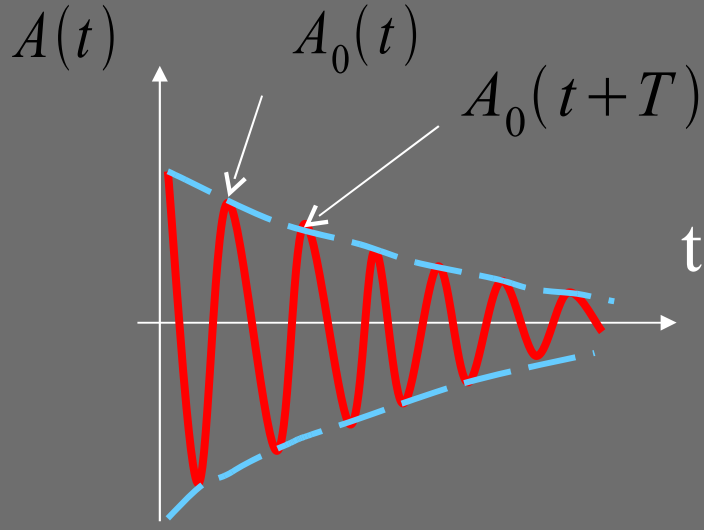
Вывод: Если у нас есть механическая система - модель которой упругий маятник при наличии силы вязкого трения, пропорциональной скорости и направленной против скорости, то в такой системе возможны свободные затухающие колебания с экспоненциально убывающей амплитудой.

П.2. Логарифмический декремент затухания. Апериодический процесс

<u>Проблема</u>: Как связаны друг с другом две соседние амплитуды затухающих колебаний?

<u>Логарифмическим декрементом затухания</u> называется натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд:

$$\Lambda = \ln\frac{A_0(t)}{A_0(t+T)} = \delta T.$$



Логарифмический декремент затухания есть дополнительная характеристика затухающих колебаний.

Уравнение связи логарифмического декремента и количества полных колебаний до момента, когда амплитуда уменьшится в е раз:

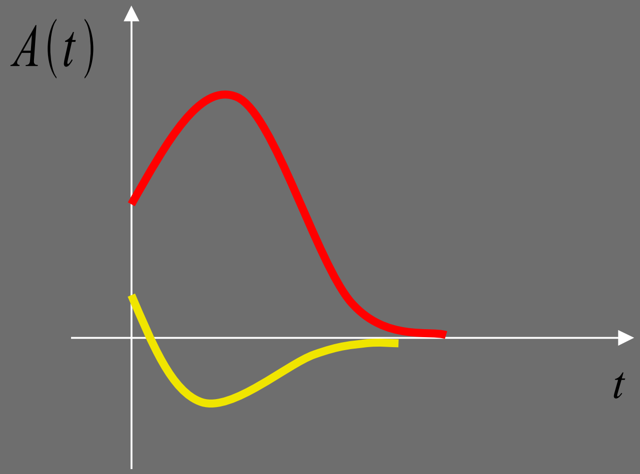
$$\frac{1}{\Lambda} = N_e$$

где N_e – количество полных колебаний, после реализации которых амплитуда уменьшается в «*e*» раз.

ТЕСТ

Апериодический процесс

Апериодический процесс – это процесс, происходящий при очень сильном затухании.



Частота свободных затухающих колебаний: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

становится мнимой при $\omega_0 < \delta$.

Процесс называется апериодическим, если закон движения A(t) имеет 1 максимум (или минимум), после которого характеристика «А» асимптотически стремится к 0 .

График зависимости A(t) уже мало похож на синусоиду!

Механическая энергия быстро переходит в тепловую.

ТЕСТ

П.3. Вынужденные колебания

Проблема: Как возникают колебания и чем они поддерживаются?

Любое движение возникает и изменяется при наличии внешнего воздействия.

Вынужденными называются колебания, возникающие при наличии внешнего воздействия.

Для вынужденных колебаний второй закон Ньютона будет выглядеть так:

$$m\vec{a}=\vec{F}_{УПР}+\vec{F}_{ТР}+\vec{F}_{ВНЕ}(t).$$

В системе есть квазиупругая сила и сила трения.

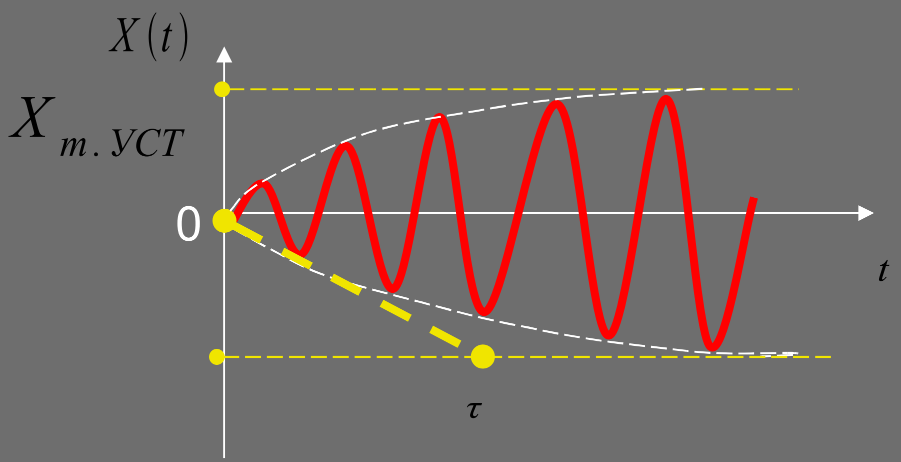
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=F_{вне}(t).$$

ТЕСТ

Пусть $F(t)=F_m cos(\Omega t+\phi_1)$ - гармоническая функция.

Такое дифференциальное уравнение имеет решение, равное <u>сумме</u> двух решений (см. математику).

При t → ∞ решение останется одно. Оно близко к <u>гармоническому</u>, если F(t) - гармоническая функция.



τ - постоянная времени установления колебаний.

Огибающая имеет вид

$$\boxed{1 - \exp(-t/\tau)}\ .$$

Через 3τ колебания становятся практически установившимися и закон движения будет

$$X(t)=X_m^{уст}\cos(\Omega t+\phi).$$

<u>В установившемся режиме</u> происходят колебания с частотой вынуждающей силы и постоянной амплитудой.

Амплитуда установившихся колебаний

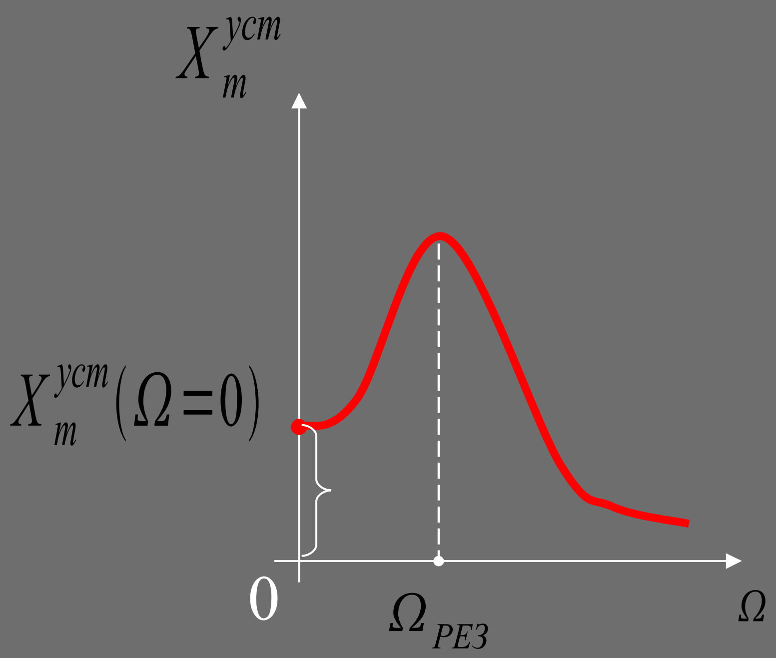
$$X_m^{УСТ}=\frac{F_m}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}},\qquad tg(\phi-\phi_1)=\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}.$$

ВЫВОД: <u>Амплитуда</u> установившихся колебаний зависит от амплитуды и частоты внешней силы, а также от частоты собственных колебаний и коэффициента затухания.

ТЕСТ

ЗАДАЧА: проанализировать зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты вынуждающей силы.

График соответствующей зависимости :



Если на систему действует постоянная сила (т.е. $\Omega = 0$), появляется постоянное смещение .

$$X_m^{уст}(\Omega=0)=\frac{F_m}{k}.$$

Затем, при увеличении частоты внешней силы амплитуда сначала растет, достигает максимума, а затем асимптотически стремится к 0.

Резонанс – резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний, при приближении частоты вынуждающей силы к некоторому (резонансному) значению.

$$\Omega_{РЕЗ}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}\,.$$

Добротность показывает, как резко увеличивается амплитуда при резонансе:

$$Q=\frac{X_{m.\,рез}^{уст}}{X_m^{уст}(\Omega=0)}=\frac{\omega_0}{2\delta}\,.$$

При $\delta \to 0$ $Q \to \infty$.

ТЕСТ ТЕСТ ТЕСТ

П.4. Сложение гармонических колебаний скалярных и сонаправленных характеристик.

Два колебательных движения называются <u>независимыми</u>, если при участии МТ в двух этих движениях, закон движения есть <u>сумма</u> законов движения для каждого колебания:

$$\boxed{A(t) = A_1(t) + A_2(t).}$$

Для двух гармонических колебаний скалярной физической характеристики А с одинаковыми амплитудами A_0

$$A_1(t)=A_0 cos(\omega_1 t+\Phi_1), \quad A_2(t)=A_0 cos(\omega_2 t+\Phi_2),$$

используя правила тригонометрии, получим:

$$A(t)=\underbrace{2A_0 Cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\right)}_{A_m(t)}\cdot Cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right).$$

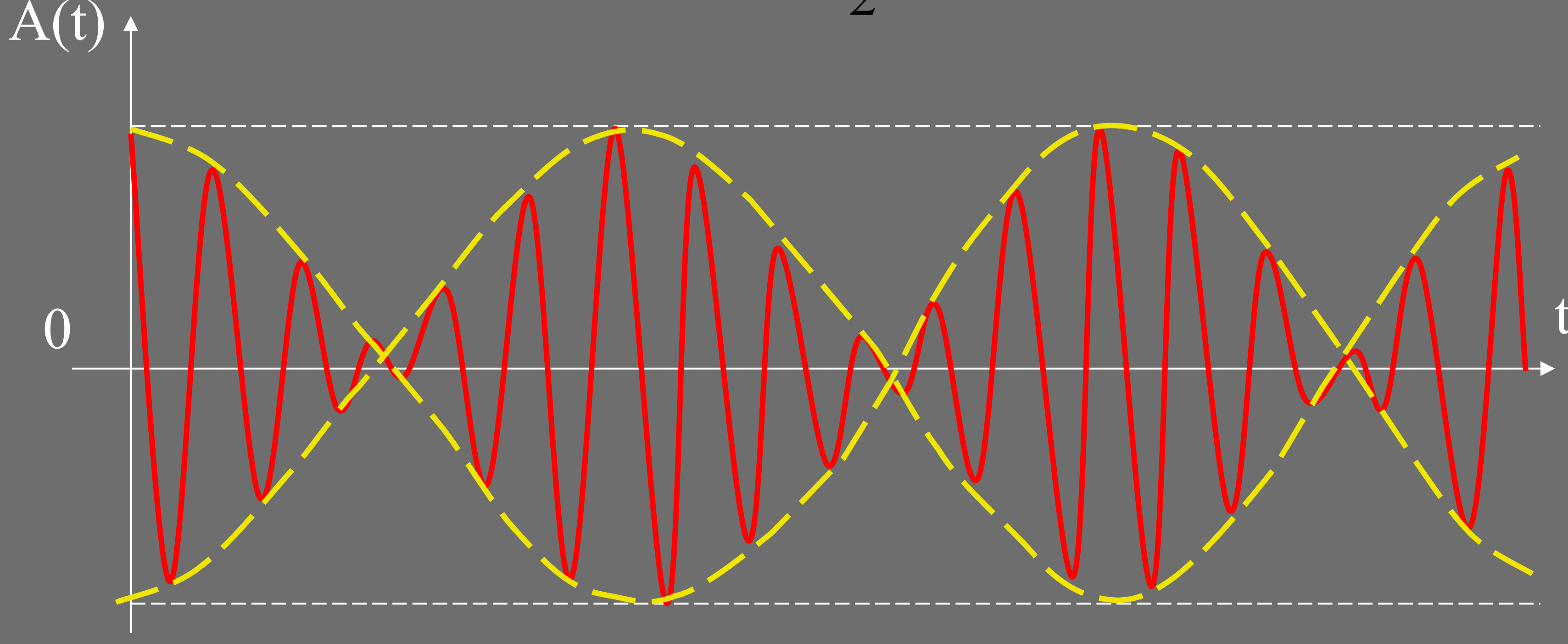
ТЕСТ

Получилось колебание, у которого амплитуда меняется со временем с частотой

$$\Omega_{БИЕН} = \frac{\Delta\omega}{2},$$

а частота колебаний равна средней частоте слагаемых

$$\omega_{СР} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$



Биениями *называются периодические* *изменения амплитуды* *суммарного колебания при сложении гармонических колебаний скалярной характеристики с* *близкими* *частотами.*

Замечание: Аналогичная картина будет наблюдаться и для колебаний векторной характеристики, если оба колебательных процесса имеют сонаправленные векторы данной характеристики.

ТЕСТ

П.5. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

Пусть взаимно перпендикулярные колебания – это колебания, совершаемые МТ в двух взаимно перпендикулярных направлениях, например, по осям OX и OY.

$$x(t) = A_{10}\cos(\omega_1 t + \Phi_1),$$
$$y(t) = A_{20}\cos(\omega_2 t + \Phi_2).$$

Если $\omega_1/\omega_2 = m_1/m_2$, где m – <u>целые</u> числа, траектория движения МТ является <u>замкнутой</u> кривой, которая называется ***<u>фигурой Лиссажу</u>***.

<u>Фигурой Лиссажу</u> называется траектория движения МТ, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с кратными частотами.

ТЕСТ

При одинаковых частотах ортогональных колебаний траектория движения МТ определяется следующим уравнением:

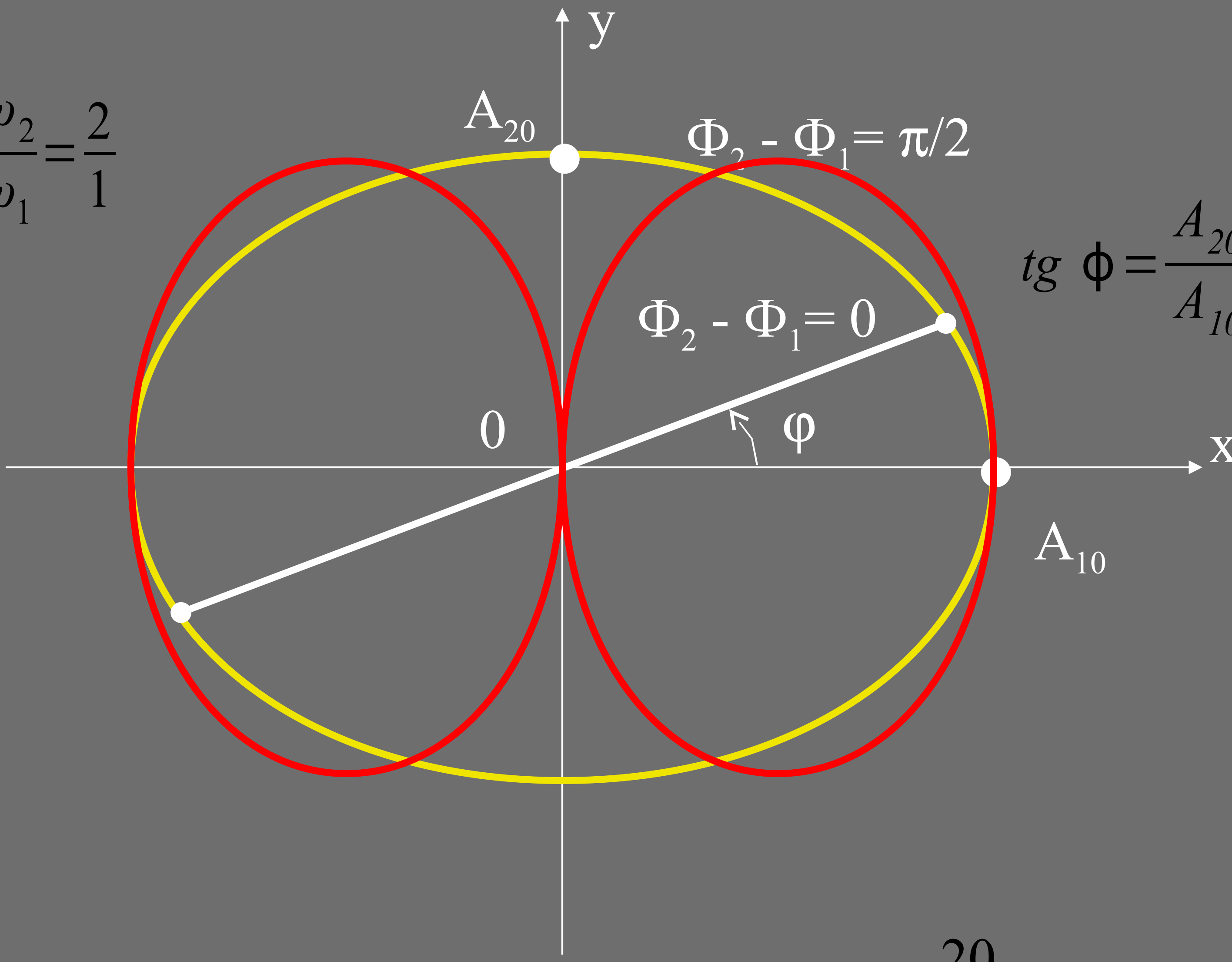
$$\frac{x^2}{A_{10}^2}+\frac{y^2}{A_{20}^2}-\frac{2\,xy}{A_{10}\cdot A_{20}}\cdot Cos(\Phi_2-\Phi_1)-Sin^2(\Phi_2-\Phi_1)=0\,.$$

При одинаковых частотах, траектория движения – эллипс, окружность или прямая.

При неодинаковых частотах – некоторая сложная кривая, которая будет замкнутой только при кратных частотах.

Траектории движения МТ, участвующей в двух ортогональных колебаниях.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2}{1}$$



$$tg\ \phi = \frac{A_{20}}{A_{10}}$$

СРС ½ стр. Доказать, что траектория есть

1) эллипс при $Ф_2 – Ф_1 = \pi/2$, и $A_{20} – A_{10} \neq 0$,

2) окружность при $Ф_2 – Ф_1 = \pi/2$, и $A_{20} – A_{10} = 0$,

3) прямая при $Ф_2 – Ф_1 = 0$, и $A_{20} – A_{10} \neq 0$, а также доказать, что

$$tg\ \phi = \frac{A_{20}}{A_{10}}.$$