МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Н.А. Ерзакова

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ПОСОБИЕ
к практическим занятиям
и контрольные задания

для студентов III курса
всех специальностей
дневного обучения

Москва — 2007

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**”

Кафедра прикладной математики
Н.А. Ерзакова

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ПОСОБИЕ
к практическим занятиям
и контрольные задания

для студентов III курса
всех специальностей
дневного обучения

Москва — 2007

ББК 22.161.5
Е70

Рецензент: докт. техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов

Ерзакова Н.А.

Е70 Уравнения в частных производных: Пособие к практическим занятиям и контрольные задания.- М.: МГТУ ГА, 2007. – 52 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины СД.02 " Уравнения в частных производных " по Учебному плану специальности 230401 для студентов III курса дневного обучения, утвержденному в 2001 г.

Пособие может быть полезным для аспирантов и преподавателей технических вузов, университетов, для научных работников и инженеров; также может быть использовано при дистанционной форме обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 08.02.07 г. и методического совета 28.02.07 г.

Редактор

Подписано в печать

Печать офсетная	Формат 60x84 1/16	2,2 уч.-изд. л.
3,25 усл. печ. л.	Заказ №.	Тираж 250 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д. 6а

Содержание

Введение

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, ..., x_n)$**,** независимые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется **дифференциальным уравнением с частными производными**.

Оно имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

где F - заданная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1), называется **порядком уравнения с частными производными**.

Уравнение с частными производными называется **квазилинейным**, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции.

Уравнение с частными производными называется **линейным**, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее частных производных.

В целях более глубокого изучения материала по теории уравнений в частных производных рекомендуется литература:

1. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – 2-е изд., испр.- М.: МЦНМО, 2003.
2. Владимиров В.С.Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Арсенин В.Я.Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. М.: Наука, 1966.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
5. Кошляков Н.С.Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М.: Высшая школа, 1970.
6.Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И. Кириллова.- М.: Физматлиы, 2001.

1. Уравнения первого порядка

1.1. Квазилинейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение

$$au'_x + bu'_y = c, \tag{1.1.1}$$

где a, b, c - заданные функции от x, y, u, которые в рассматриваемой области имеют непрерывные частные производные первого порядка и удовлетворяют уравнению $a^2 + b^2 \neq 0$. Решение $u = u(x, y)$ уравнения (1.1.1) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (x, y, u). Эта поверхность называется **интегральной поверхностью**. Функции $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$, $c(x, y, u)$ определяют некоторое поле направлений в пространстве (x, y, u). Интегральные кривые, соответствующие этому полю направлений, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} \tag{1.1.2}$$

и называются **характеристическими кривыми** или **характеристиками** уравнения (1.1.1). Если ввести параметр s, изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (1.1.2) примут вид

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \ \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \ \frac{du}{ds} = c(x, y, u). \tag{1.1.3}$$

Задача Коши. Пусть пространственная кривая l задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, причем $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$. Обозначим через l_0 проекцию l на плоскость XOY.

Задача Коши для уравнения (1.1.1) ставится так: **в окрестности проекции l_0 найти интегральную поверхность уравнения (1.1.1), проходящую через заданную кривую** l, т.е. найти такое решение уравнения (1.1.1), которое принимает заданные значения в точках кривой l_0.

Обозначим $\Delta = x'_s y'_t - x'_t y'_s = ay'_t - bx'_t$.

Теорема. Если $\Delta \neq 0$ всюду на начальной кривой l, то задача Коши для уравнения (1.1.1) имеет одно и только одно решение. Если $\Delta = 0$ всюду на l, то для того чтобы задача Коши имела решение, кривая l должна быть характеристикой. В этом случае задача Коши имеет бесконечно много решений.

Постановка задачи. Решить задачу Коши для уравнения (1.1.1) и кривой l, заданной в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$.

План решения.

1.Записываем систему (1.1.3).

2. Находим решение системы, выраженное через начальные значения переменных (x, y, u):

$x = \varphi_1(s, x_0, y_0, u_0)$, $y = \varphi_2(s, x_0, y_0, u_0)$, $u = \varphi_3(s, x_0, y_0, u_0)$.

3. Так как кривая l задана как $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, то, полагая $x_0 = x(t)$, $y_0 = y(t)$, $u_0 = u(t)$ в $x = \varphi_1(s, x_0, y_0, u_0)$, $y = \varphi_2(s, x_0, y_0, u_0)$, $u = \varphi_3(s, x_0, y_0, u_0)$, исключаем x_0, y_0, u_0.

4. Вычисляем определитель $\Delta = x'_s y'_t - x'_t y'_s$.

5. Если определитель не обращается в нуль при $s = 0$ и $t \neq 0$, то исключая s и t, мы получим уравнение интегральной поверхности $u = u(x, y)$ - решение задачи Коши.

6. Если определитель обращается в нуль при $s = 0$ и l является характеристикой, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

7. Если определитель обращается в нуль при $s = 0$ и l - не характеристика, то либо уравнение не имеет решений, либо существует решение $u = u(x, y)$, не являющееся непрерывно дифференцируемым.

Пример 1.1.1. Решить задачу Коши для уравнения $(y^2 - u)u'_x + yu'_y = u$.

Решение. Система (1.1.3) имеет вид $\frac{dx}{ds} = y^2 - u$, $\frac{dy}{ds} = y$, $\frac{du}{ds} = u$ и ее решение, выраженное через начальные значения переменных (x, y, u), будет

$$x = \left(\frac{1}{2} y_0^2 e^s - u_0\right) e^s + x_0 + \left(u_0 - \frac{1}{2} y_0^2\right), \quad y = y_0 e^s, \quad u = u_0 e^s. \quad (1.1.4)$$

Предположим, что кривая l, через которую должна проходить интегральная поверхность, задана уравнениями

$$x_0 = 1, \ y_0 = t, \ u_0 = \frac{1}{2} t^2. \quad (1.1.5)$$

Подставив (1.1.5) в (1.1.4), получим

$$x = \frac{t^2}{2}\left(e^s - 1\right)e^s + 1, y = te^s, u = \frac{t^2}{2} e^s.$$

Определитель

$$\Delta = x'_s y'_t - x'_t y'_s = \frac{t^2}{2} e^{2s},$$

не обращается в нуль при $s = 0$ и $t \neq 0$. Исключая s и t, мы получим уравнение интегральной поверхности

$$u = 1 - x + \frac{y^2}{2}.$$

Пусть теперь кривая l задана уравнениями:

$$x_0 = 0, \ y_0 = t, \ u_0 = t^2. \quad (1.1.6)$$

Подставляя (1.1.6) в (1.1.4), найдем, что

$$x = t^2 e^s \left(chs - 1\right), \ y = te^s, \ u = t^2 e^s.$$

Определитель $\Delta = te^s (e^s - 1)$ обращается в нуль при $s = 0$, т.е. вдоль l, хотя l не характеристика. Исключая s и t, мы получим уравнение интегральной поверхности

$$u(x, y) = y\left(y \pm \sqrt{2x}\right),$$

т.е. две интегральные поверхности уравнения, проходящие через кривую

(1.1.6) . В данном случае $u'_x = \pm \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ и эта частная производная обращается в бесконечность вдоль линии (1.1.6). □

1.0.1. Решить задачу Коши:

а) $(y^3 + u)u'_x + yu'_y = u$; кривая l задана уравнениями

$$x_0 = 1,\ y_0 = t,\ u_0 = -\frac{1}{3}t^3.$$

б) $(y^3 + u)u'_x + \dfrac{2}{3}yu'_y = u$; кривая l задана уравнениями

$$x_0 = 1,\ y_0 = t,\ u_0 = -\frac{1}{2}t^3.$$

в) $(y + u)u'_x + (y - 1)u'_y = 2u + 2y^2$; кривая l задана уравнениями

$$x_0 = -\frac{1}{2},\ y_0 = t,\ u_0 = t^2.$$

г) $(x - 1)u'_x + (2x + u)u'_y = u + 2x^2$; кривая l задана уравнениями

$$x_0 = 1,\ y_0 = t^2 - 1,\ u_0 = t^2 + 1.$$

д) $(x - 2)u'_x + (4x + u)u'_y = u + 2x^2$; кривая l задана уравнениями

$$x_0 = 1,\ y_0 = t^2,\ u_0 = t^2 + 1.$$

2. Классификация уравнений второго порядка

2.1. Тип и канонический вид уравнения

Постановка задачи. Определить тип уравнения

$$a_{11}(x,y)u''_{xx} + 2a_{12}(x,y)u''_{xy} + a_{22}(x,y)u''_{yy} + \\ + a_1(x,y)u'_x + a_2(x,y)u'_y + a_0(x,y)u = f(x,y) \qquad (2.1.1)$$

и привести его к каноническому виду.

План решения. Тип уравнения (2.1.1) определяется знаком выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ в некоторой точке, то уравнение (2.1.1) называется уравнением гиперболического типа в этой точке;

если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ в некоторой точке, то уравнение (2.1.1) называется уравнением эллиптического типа в этой точке;

если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ в некоторой точке, то уравнение (2.1.1) называется уравнением параболического типа в этой точке.

Замечание. Уравнение (2.1.1) может менять свой тип при переходе из одной точки в другую. Например, уравнение $yu''_{xx} + u''_{yy} = 0$ является уравнением эллиптического типа в точках (x,y), $y > 0$, параболического типа в точках $(x,0)$ и гиперболического типа в точках (x,y), $y < 0$.

Чтобы привести уравнение (2.1.1) к каноническому виду, нужно сделать в нем замену переменных:

$$x, y \to \xi = h_1(x,y),\ \eta = h_2(x,y), \qquad (2.1.2)$$

где

• в случае уравнения гиперболического типа $h_1(x,y)$ и $h_2(x,y)$ - независимые общие интегралы уравнения характеристик

$$a_{11}(x,y)(dy)^2 - 2a_{12}(x,y)dydx + a_{22}(x,y)(dx)^2 = 0; \qquad (2.1.3)$$

• в случае уравнения параболического типа $h_1(x,y)$ - общий интеграл уравнения характеристик (2.1.3) и $h_2(x,y)$ - произвольная дважды дифференцируемая функция, не выражающаяся через $h_1(x,y)$;

• в случае уравнения эллиптического типа $h_1(x,y)$ и $h_2(x,y)$ - вещественная и мнимая части любого из двух общих интегралов уравнения характеристик (2.1.3).

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11}, a_{12} и a_{22}.

2. Вычисляем выражение $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ и определяем области его знакоопределенности.

3. Делаем вывод о типе уравнения (2.1.1).

4. Находим общие интегралы уравнения характеристик (2.1.3).

5. В уравнении (2.1.1) делаем замену переменных (2.1.2). При этом по правилу дифференцирования сложной функции

$$u'_x \to u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x, \quad u'_y \to u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y,$$

$$u''_{xx} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_x + 2u''_{\xi\eta} \xi'_x \eta'_x + u''_{\eta\eta} \eta'^2_x + u'_\xi \xi''_{xx} + u'_\eta \eta''_{xx},$$

$$u''_{xy} \to u''_{\xi\xi} \xi'_x \xi'_y + u''_{\xi\eta} (\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + u''_{\eta\eta} \eta'_x \eta'_y + u'_\xi \xi''_{xy} + u'_\eta \eta''_{xy},$$

$$u''_{yy} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_y + 2u''_{\xi\eta} \xi'_y \eta'_y + u''_{\eta\eta} \eta'^2_y + u'_\xi \xi''_{yy} + u'_\eta \eta''_{yy}.$$

В результате замены переменных уравнение (2.1.1) примет один из трех канонических видов:

• в случае уравнения гиперболического типа

$$u''_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta);$$

• в случае уравнения параболического типа

$$u''_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta);$$

• в случае уравнения эллиптического типа

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta).$$

Записываем ответ.

Пример 2.1.1. Определить тип уравнения

$$u''_{xx} - 4u''_{xy} - 21u''_{yy} + 2u'_x - 3u'_y + 5u = x^2 \qquad (2.1.4)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение.

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11}, a_{12} и a_{22}. Имеем

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{22} = -21.$$

2. Вычисляем выражение

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 + 21 = 25 > 0.$$

3. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ при всех x, y, уравнение (2.1.4) является уравнением гиперболического типа во всей плоскости XOY.

4. Находим общие интегралы уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 4dydx - 21(dx)^2 = 0. \qquad (2.1.5)$$

Решая это уравнение относительно dy, получаем $dy = 3dx$ и $dy = -7dx$. Следовательно, уравнение характеристик (2.1.5) имеет два интеграла:

$h_1(x,y) = y - 3x$ и $h_2(x,y) = y + 7x$.

5. В уравнении (2.1.4) делаем замену переменных $x, y \to \xi = h_1(x,y) = y - 3x,\ \eta = h_2(x,y) = y + 7x$. При этом по правилу дифференцирования сложной функции

$$u'_x \to u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = -3u'_\xi + 7u'_\eta, \quad u'_y \to u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi + u'_\eta,$$

$$u''_{xx} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_x + 2u''_{\xi\eta} \xi'_x \eta'_x + u''_{\eta\eta} \eta'^2_x + u'_\xi \xi''_{xx} + u'_\eta \eta''_{xx} = 9u''_{\xi\xi} - 42u''_{\xi\eta} + 49u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{xy} \to u''_{\xi\xi} \xi'_x \xi'_y + u''_{\xi\eta} (\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + u''_{\eta\eta} \eta'_x \eta'_y + u'_\xi \xi''_{xy} + u'_\eta \eta''_{xy} = -3u''_{\xi\xi} + 4u''_{\xi\eta} + 7u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{yy} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_y + 2u''_{\xi\eta} \xi'_y \eta'_y + u''_{\eta\eta} \eta'^2_y + u'_\xi \xi''_{yy} + u'_\eta \eta''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}.$$

В результате замены переменных уравнение (2.1.4) принимает вид:

$$9u''_{\xi\xi} - 42u''_{\xi\eta} + 49u''_{\eta\eta} + 12u''_{\xi\xi} - 16u''_{\xi\eta} - 28u''_{\eta\eta} - 21u''_{\xi\xi} - 42u''_{\xi\eta} - 21u''_{\eta\eta} -$$

$$- 6u'_\xi + 14u'_\eta - 3u'_\xi - 3u'_\eta + 5u = \left(\frac{\eta - \xi}{10}\right)^2,$$

т.е. уравнение (2.1.4) приводится к каноническому виду

$$u''_{\xi\eta} = -\frac{10}{100}u'_\xi + \frac{11}{100}u'_\eta + \frac{5}{100}u - \frac{1}{100}\left(\frac{\eta - \xi}{10}\right)^2$$

как в случае уравнения гиперболического типа $u''_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta)$.

Ответ: уравнение (2.1.4) является уравнением гиперболического типа во всей плоскости XOY и имеет канонический вид

$$u''_{\xi\eta} = -\frac{10}{100}u'_\xi + \frac{11}{100}u'_\eta + \frac{5}{100}u - \frac{1}{100}\left(\frac{\eta - \xi}{10}\right)^2,$$

где $\xi = y - 3x,\ \eta = y + 7x$. □

Пример 2.1.2. Определить тип уравнения

$$u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} + u'_x - u'_y + u = xy \qquad (2.1.6)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение.

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11}, a_{12} и a_{22}. Имеем

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -1,\ a_{22} = 1.$$

2. Вычисляем выражение

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 1 = 0.$$

3. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ при всех x, y, уравнение (2.1.6) является уравнением параболического типа во всей плоскости XOY.

4. Находим общие интегралы уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 2dydx + (dx)^2 = 0. \qquad (2.1.7)$$

Решая это уравнение относительно dy, получаем $dy = -dx$.

Следовательно, уравнение характеристик (2.1.7) имеет единственный интеграл $h_1(x,y) = y + x$.

5. В уравнении (2.1.6) делаем замену переменных $x, y \to \xi = h_1(x,y) = y + x,\ \eta = y$. При этом по правилу дифференцирования сложной функции

$$u'_x \to u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\xi, \quad u'_y \to u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi + u'_\eta,$$

$$u''_{xx} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_x + 2u''_{\xi\eta} \xi'_x \eta'_x + u''_{\eta\eta} \eta'^2_x + u'_\xi \xi''_{xx} + u'_\eta \eta''_{xx} = u''_{\xi\xi},$$

$$u''_{xy} \to u''_{\xi\xi} \xi'_x \xi'_y + u''_{\xi\eta} (\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + u''_{\eta\eta} \eta'_x \eta'_y + u'_\xi \xi''_{xy} + u'_\eta \eta''_{xy} = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta},$$

$$u''_{yy} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_y + 2u''_{\xi\eta} \xi'_y \eta'_y + u''_{\eta\eta} \eta'^2_y + u'_\xi \xi''_{yy} + u'_\eta \eta''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}.$$

В результате замены переменных уравнение (2.1.6) принимает вид:

$$u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} + u'_\xi - u'_\xi - u'_\eta + u = (\xi - \eta)\eta,$$

т.е. уравнение (2.1.6) приводится к каноническому виду $u''_{\eta\eta} = u'_\eta - u + (\xi - \eta)\eta$ как в случае уравнения параболического типа $u''_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta)$.

Ответ: уравнение (2.1.6) является уравнением параболического типа во всей плоскости XOY и имеет канонический вид $u''_{\eta\eta} = u'_\eta - u + (\xi - \eta)\eta$, где $\xi = y + x,\ \eta = y$. □

Пример 2.1.3. Определить тип уравнения

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yy} + 6u'_x + 6u'_y - 3u = x + y^2 \tag{2.1.8}$$

и привести его к каноническому виду.

Решение.

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11}, a_{12} и a_{22}. Имеем

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{22} = 2.$$

2. Вычисляем выражение

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 2 = -1 < 0.$$

3. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ при всех x, y, уравнение (2.1.8) является уравнением эллиптического типа во всей плоскости XOY.

4. Находим общие интегралы уравнения характеристик:

$$(dy)^2 - 2dydx + 2(dx)^2 = 0. \tag{2.1.9}$$

Решая это уравнение относительно dy, получаем $dy = (1+i)dx$ и $dy = (1-i)dx$. Следовательно, уравнение характеристик (2.1.9) имеет два комплексных интеграла: $f_1(x,y) = y - x - ix$, $f_2(x,y) = y - x + ix$. Положим $h_1(x,y) = \operatorname{Re} f_1(x,y) = y - x$, $h_2(x,y) = \operatorname{Im} f_2(x,y) = x$.

5. В уравнении (2.1.8) делаем замену переменных $x, y \to \xi = h_1(x,y) = y - x,\ \eta = x$. При этом по правилу дифференцирования сложной функции

$$u'_x \to u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = -u'_\xi + u'_\eta, \quad u'_y \to u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi,$$

$$u''_{xx} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_x + 2u''_{\xi\eta} \xi'_x \eta'_x + u''_{\eta\eta} \eta'^2_x + u'_\xi \xi''_{xx} + u'_\eta \eta''_{xx} = u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{xy} \to u''_{\xi\xi} \xi'_x \xi'_y + u''_{\xi\eta} (\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + u''_{\eta\eta} \eta'_x \eta'_y + u'_\xi \xi''_{xy} + u'_\eta \eta''_{xy} = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta},$$

$$u''_{yy} \to u''_{\xi\xi} \xi'^2_y + 2u''_{\xi\eta} \xi'_y \eta'_y + u''_{\eta\eta} \eta'^2_y + u'_\xi \xi''_{yy} + u'_\eta \eta''_{yy} = u''_{\xi\xi}.$$

В результате замены переменных уравнение (2.1.8) принимает вид:

$$u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} + 2u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + 2u''_{\xi\xi} + 6(-u'_\xi + u'_\eta) + 6u'_\xi - 3u = (\xi - \eta)^2 + \eta,$$

т.е. уравнение (2.1.8) приводится к каноническому виду

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = -2u'_\eta + u + (\xi - \eta)^2 + \eta$$

как в случае уравнения эллиптического типа

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta).$$

Ответ: уравнение (2.1.8) является уравнением эллиптического типа во всей плоскости XOY и имеет канонический вид

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = -2u'_\eta + u + (\xi - \eta)^2 + \eta,$$

где $\xi = y - x,\ \eta = x$. □

2.0.1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду:

а) $u''_{xx} + 2u''_{xy} - 3u''_{yy} + 2u'_x + 7u'_y - 3u = 0$; б) $4u''_{xx} - 8u''_{xy} + u''_{yy} - 2u'_x + 2u'_y - 3u = 0$;

в) $8u''_{xx} - 6u''_{xy} - u''_{yy} - u'_x - 3u'_y - u = 0$; г) $u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} - 3u'_x + 2u'_y - 5u = 0$;

д) $2u''_{xx} + 8u''_{xy} + 8u''_{yy} - u'_x - 2u'_y - 5u = 0$; е) $u''_{xx} - 6u''_{xy} + 9u''_{yy} + 4u'_x - 3u'_y - 7u = 0$.

3. Тригонометрические ряды Фурье

3. 1. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$ называется ряд вида: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$, где $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$,

$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$, $b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$.

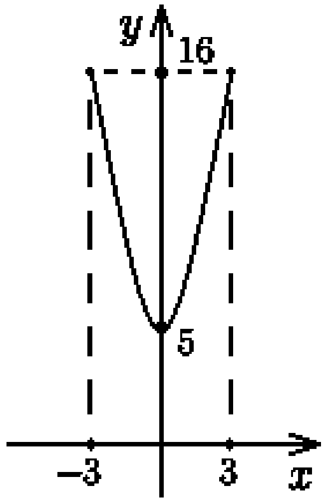

Рис. 3.1.1. График функции $x^2 + 5$.

При разложении в ряд Фурье полезно знать, что для нечетной функции $f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) на симметричном интервале $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$, а для четной функции $f(x)$ ($f(-x) = f(x)$) на симметричном интервале $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$. Поэтому при разложении в ряд Фурье на симметричном интервале для нечетной функции $f(x)$ имеем $a_0 = a_k = 0$, а для четной функции $f(x)$ имеем $b_k = 0$. Если функция общего вида, то нужно находить все коэффициенты. Кроме того, следует учесть, что $\cos\pi k = (-1)^k$, $\sin\pi k = 0$, $\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \int_{0}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx = 0$.

Пример 3.1.1. Разложить функцию $x^2 + 5$ (рис. 3.1.1) в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-3, 3)$.

Решение. Заметим, что

1) интервал $(-3, 3)$ симметричный относительно начала координат,

2) функция $y = x^2$ четная.

Поэтому в силу 1), 2) разложим по отдельности каждое слагаемое функции $f(x) = 5 + x^2$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-3, 3)$.

Ряд Фурье для 5 будет 5. Для функции x^2 в силу ее четности ряд Фурье совпадет с разложением по косинусам. Вычисляем $a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 6$,

$$a_k = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2\cos\frac{k\pi x}{3}dx = \left|\begin{array}{c} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \cos\frac{k\pi x}{3}dx, v = \frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3}\end{array}\right| =$$

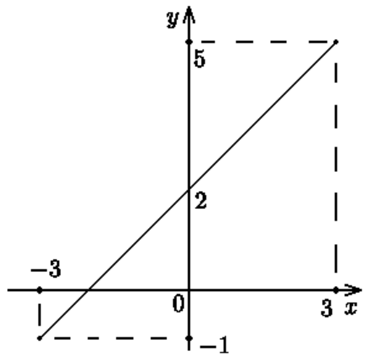

Рис. 3.1.2. График функции $2+x$.

$$= \frac{2}{3}\left(x^2\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 - 2\frac{3}{k\pi}\int_0^3 x\sin\frac{k\pi x}{3}dx\right) = \left|\begin{array}{c} u = x, du = dx \\ dv = \sin\frac{k\pi x}{3}dx, v = -\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\end{array}\right| =$$

$$= -\frac{4}{k\pi}\left(-x\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{k\pi}\int_0^3\cos\frac{k\pi x}{3}dx\right) = \frac{36}{k^2\pi^2}(-1)^k = \frac{(-1)^k 36}{k^2\pi^2}.$$

$$x^2 = 3 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 36}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{3} \text{ и } 5 + x^2 = 8 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 36}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{3}.$$

Ответ: $5 + x^2 = 8 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 36}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{3}$. □

Пример 3.1.2. Разложить функцию $f(x) = 2 + x$ (рис. 3.1.2) в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-3,3)$.

Решение. Заметим, что

1) интервал $(-3,3)$ симметричный относительно начала координат,

2) функция $y = x$ нечетная.

Поэтому в силу 1), 2) разложим по отдельности каждое слагаемое функции $f(x) = 2 + x$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-3,3)$.

Ряд Фурье для 2 будет 2. Для функции x в силу ее нечетности ряд Фурье совпадет с разложением по синусам. Вычисляем

$$b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{k\pi x}{3}dx = \left|\begin{array}{c} u = x, du = dx \\ dv = \sin\frac{k\pi x}{3}dx, v = -\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-x\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{k\pi}\int_0^3\cos\frac{k\pi x}{3}dx\right) = -\frac{6}{k\pi}(-1)^k = \frac{6}{k\pi}(-1)^{k+1}.$$

Ряды Фурье имеют вид:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi x}{3} \text{ и } 2 + x = 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi x}{3}. \square$$

3.2. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(0,l)$

Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(0,l)$ определяется не однозначно, в частности, а) по системе $1, \cos\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, ..., \cos\frac{n\pi}{l}x, ...$; б) по системе $\sin\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, ..., \sin\frac{n\pi}{l}x, ...$.

В случае а) функция $f(x)$ продолжается на симметричный интервал как четная функция. Поэтому вычисляются только a_0, a_k по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx .$$

В случае б) функция $f(x)$ продолжается на симметричный интервал как нечетная функция. Поэтому вычисляются только b_k по формуле

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx .$$

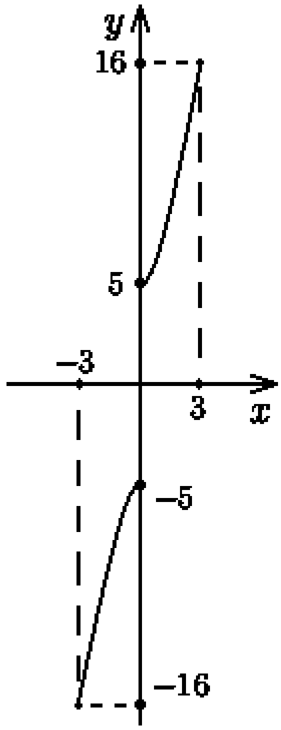

Рис. 3.2.1.

Пример 3.2.1. Разложить функцию $f(x) = 5 + x^2$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(0,3)$ а) по системе $1, \cos\frac{\pi}{3}x, \cos\frac{2\pi}{3}x, ..., \cos\frac{n\pi}{3}x, ...$;

б) по системе $\sin\frac{\pi}{3}x, \sin\frac{2\pi}{3}x, ..., \sin\frac{n\pi}{3}x, ...$.

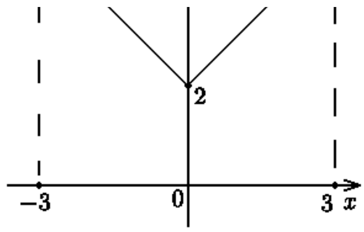

Рис. 3.2.2.

Решение. Случай а) рассмотрен в примере 3.1.1, так как $f(x) = 5 + x^2$ четная функция на интервале $(-3,3)$. Поэтому решаем случай б), когда функция продолжена нечетным образом (рис. 3.2.1). Вычисляем

$$b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 (5+x^2)\sin\frac{k\pi x}{3}dx = \left| \begin{matrix} u=5+x^2,\ du=2xdx \\ dv=\sin\frac{k\pi x}{3}dx,\ v=-\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-(5+x^2)\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 + 2\frac{3}{k\pi}\int_0^3 x\cos\frac{k\pi x}{3}dx\right) = \left|\begin{matrix}u=x,\ du=dx\\ dv=\cos\frac{k\pi x}{3}dx,\ v=\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-(5+x^2)\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 + 2\frac{3}{k\pi}\left(x\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 - \frac{3}{k\pi}\int_0^3\sin\frac{k\pi x}{3}dx\right)\right)=$$

$$= \frac{2}{3}\left(-(5+x^2)\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 + 2\frac{27}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3\right) = = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{k\pi}(-(5+3^2)(-1)^k+5)+\frac{54}{k^3\pi^3}\left((-1)^k-1\right)\right)=$$

$$\frac{2}{k\pi}(14(-1)^{k+1}+5)+\frac{36}{k^3\pi^3}\left((-1)^k-1\right).$$

Ответ: а) $5+x^2 = 8+\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 36}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{3}$;

б) $5+x^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}(14(-1)^{k+1}+5)+\frac{36}{k^3\pi^3}\left((-1)^k-1\right)\right)\sin\frac{k\pi x}{3}$. □

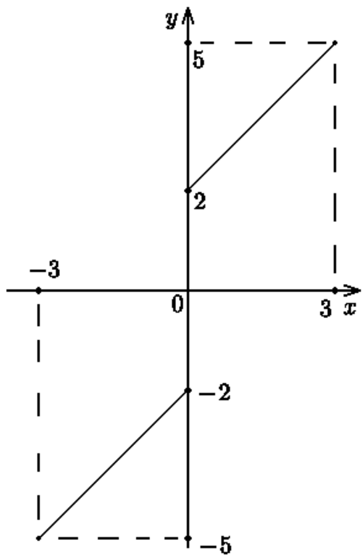

Рис. 3.2.3.

Пример 3.2.2. Разложить функцию $f(x) = 2+x$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(0,3)$

а) по системе $1, \cos\frac{\pi}{3}x, \cos\frac{2\pi}{3}x, ..., \cos\frac{n\pi}{3}x, ...$;

б) по системе $\sin\frac{\pi}{3}x, \sin\frac{2\pi}{3}x, ..., \sin\frac{n\pi}{3}x, ...$.

Решение. а) Функция продолжена четным образом (рис. 3.2.2). Поэтому вычисляем $a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (2+x)dx = 7$,

$$a_k = \frac{2}{3}\int_0^3 (2+x)\cos\frac{k\pi x}{3}dx = = \left|\begin{matrix}u=2+x,\ du=dx\\ dv=\cos\frac{k\pi x}{3}dx,\ v=\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left((2+x)\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3 - \frac{3}{k\pi}\int_0^3\sin\frac{k\pi x}{3}dx\right) = = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3\right) = \frac{6}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right) =$$

$$= \left| k=2m+1 \right| = \frac{12}{(2m+1)^2\pi^2}.$$

Отсюда $2+x = \frac{7}{2}+\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{12}{(2m+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{3}$. □

б) Функция продолжена нечетным образом (рис. 3.2.3). Поэтому вычисляем только

$$b_k=\frac{2}{3}\int_0^3(2+x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx=\left|\begin{array}{c}u=2+x,du=dx\\ dv=\sin\frac{k\pi x}{3}dx,v=-\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-(2+x)\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3+\frac{3}{k\pi}\int_0^3\cos\frac{k\pi x}{3}dx\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{15(-1)^k}{k\pi}+\frac{5}{k\pi}\right)=\frac{10}{3k\pi}(1-3(-1)^k).$$

Отсюда $2+x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{3k\pi}(1-3(-1)^k)\sin\frac{k\pi x}{3}$.□

Пример 3.2.3. Разложить функцию $\sin^3\frac{\pi}{l}x$ в ряд Фурье на интервале $(0,l)$ по системе $\sin\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{2\pi}{l}x,...,\sin\frac{n\pi}{l}x,...$.

Решение. Здесь лучше использовать известную тригонометрическую формулу

$$\sin^3\varphi=\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{4}\sin3\varphi. \qquad (3.2.1)$$

Получаем ответ: $\sin^3\frac{\pi}{l}x=\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{l}x-\frac{1}{4}\sin3\frac{\pi}{l}x$.

Итак,

$$\sin^3\frac{\pi}{l}x=\frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{l}x-\frac{1}{4}\sin3\frac{\pi}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Сравнивая с коэффициентами b_k из формулы $b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, заключаем, что $b_1=\frac{3}{4}$, $b_3=-\frac{1}{4}$, $b_k=0$ при всех k, отличных от 1 и 3.

Другими словами, если бы мы воспользовались изначально этой формулой, то получили бы

$$b_1=\frac{2}{l}\int_0^l\sin^3\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi x}{l}dx=\frac{3}{4},b_3=\frac{2}{l}\int_0^l\sin^3\frac{\pi x}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}dx=-\frac{1}{4},\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l\sin^3\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=0$$

при всех k, отличных от 1 и 3.□

3.0.1. Разложить функцию $y=f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0,l)$ по указанной системе:

а) $f(x)=x(1-x)$, $l=1$, по $\sin\pi x,\sin2\pi x,...,\sin n\pi x,...$;

б) $f(x)=x+1$, $l=1$, по $1,\cos\pi x,\cos2\pi x,...,\cos n\pi x,...$.

3.0.2. Используя тригонометрические формулы (3.2.1),

$$\cos^3\varphi=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos3\varphi, \qquad (3.2.2)$$

разложить функцию $f(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi,\pi)$:

а) $f(\varphi)=2\cos^3\varphi-\sin^3\varphi+\sin\varphi$; б) $f(\varphi)=4\cos^3\varphi+4\sin^3\varphi+\cos\varphi+2$;

в) $f(\varphi)=\cos^3\varphi-2\sin^3\varphi-\cos\varphi+\sin\varphi$; г) $f(\varphi)=-4\cos^3\varphi+\sin\varphi+7$;

д) $f(\varphi)=12\sin^3\varphi+\cos\varphi-\sin\varphi$; е) $f(\varphi)=2\cos^3\varphi+4\sin^3\varphi-2\cos\varphi+4\sin\varphi$.

4. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля.

4.1. Задача Штурма - Лиувилля.

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение:

$$\boxed{p_0 y'' + p_1 y' + (l + p_2) y = 0}, \qquad (4.1)$$

где [illegible], [illegible], [illegible] - вещественные функции вещественной переменной $x \in [a, b]$, а [illegible]- комплексный параметр, $p_0 > 0$ в (a, b).

Дифференциальные формы

$$\widetilde{L}y = p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y, \qquad \widetilde{L}^+ y = (p_0 y)'' - (p_1 y)' + p_2 y \qquad (4.2)$$

называют **сопряженными.** Символы [illegible] и [illegible] означают здесь **правила** или, что то же, **операторы,** сопоставляющие функции [illegible] соответствующие дифференциальные выражения.

Пример 4.1.1. Если $p_1 = p_0'$ в равенстве (4.2), то $\widetilde{L}y = \widetilde{L}^+ y$ (форма [illegible] **самосопряженная**).

Решение. Заметим, что

$\widetilde{L}^+ y = (p_0 y)'' - (p_1 y)' + p_2 y = p_0'' y + 2p_0' y' + p_0 y'' - p_1' y - p_1 y' + p_2 y$.

Если $p_1 = p_0'$, то $\widetilde{L}^+ y = p_0'' y + 2p_0' y' + p_0 y'' - p_0'' y - p_0' y' + p_2 y = p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = \widetilde{L}y$.□

Пример 4.1.2. Умножением на $\dfrac{1}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}$ уравнение (4.1) можно привести к специальному виду

$$Ly = -\left(py'\right)' + qy = l\rho y, \qquad (4.3)$$

где

$$p = e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}, \qquad \rho = \frac{p}{p_0}, \qquad q = -\frac{pp_2}{p_0},$$

а левая часть Ly уравнения – самосопряженная форма.

Решение. Действительно,

$$e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y'' + \frac{p_1}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y' + \frac{l + p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y = \left(e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y' \right)' + \frac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y + \frac{l}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} = 0$$

или

$$-\left(e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y' \right)' - \frac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y = \frac{l}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} y.$$

Отсюда

$$Ly = -\left(py'\right)' + qy = -py'' - p'y' + qy. \tag{4.4}$$

Имеем в обозначениях примера 4.1.1 равенство $p_1 = p_0'$. Следовательно, Ly – самосопряженная форма. □

Пример 4.1.3.Самосопряженные дифференциальные формы и вида (4.3) двух функций $u \in C^2[a,b]$ и $v \in C^2[a,b]$ удовлетворяют **тождеству Лагранжа**:

$$vLu - uLv = [pW(u,v)]', \tag{4.5}$$

где $W(u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - u'v$ - **определитель Вронского** функций и .

Решение. Из (4.4) имеем

$$vLu - uLv = -pvu'' - p'vu' + qvu + puv'' + p'uv' - quv = p(uv'' - vu'') + p'(uv' - vu').$$

Так как $[W(u,v)]' = (uv' - u'v)' = uv'' + u'v' - vu'' - u'v' = uv'' - vu''$, то

$$vLu - uLv = p(uv'' - vu'') + p'(uv' - vu') = p[W(u,v)]' + p'W(u,v) = [pW(u,v)]'. \square$$

Заметим, что, взяв интеграл от обеих частей (4.5), получим **формулу Грина:**

$$\int_{x_1}^{x_2} (vLu - uLv)dx = [pW(u,v)]\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Нас будут интересовать решения уравнения (4.3), удовлетворяющие **однородным граничным условиям**. Сформулируем задачу в виде системы соотношений:

$$Lu = -\left(pu'\right)' + qu = l\rho u, \quad x \in (a,b), \tag{4.6}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{4.7}$$

Обобщением задачи (4.6)- (4.7) является такая задача, в которой вместо (4.7) более общие граничные условия:

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0, \qquad \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0, \tag{4.8}$$

где α ,β .γ ,δ - вещественные числа $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $|b| < \infty$; $p > 0$, $\rho > 0$ и , , , $\rho \in C[a,b]$ при $a \le x \le b$.

Граничную задачу с такими условиями называют **задачей Штурма – Лиувилля.**

Задача (4.6), (4.8) всегда имеет не представляющее интереса решение $u \equiv 0$, называемое **тривиальным**.

Пример 4.1.4. Решить задачу Штурма – Лиувилля: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(b) = 0$.

<u>Решение</u>. Требуется найти все числа λ , для которых существует нетривиальное решение системы $-X''(x) = \lambda X(x)$, $X(0) = X(b) = 0$. Характеристическое уравнение обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоян-

ными коэффициентами $X''(x)+\lambda X(x)=0$ имеет вид: $k^2+\lambda=0$. Отсюда для общего решения возможны три варианта: $X(x)=\begin{cases} C+Dx, & \lambda=0, \\ Ce^{\sqrt{-\lambda}\,x}+De^{-\sqrt{-\lambda}\,x}, & \lambda<0, \\ C\sin\sqrt{\lambda}\,x+D\cos\sqrt{\lambda}\,x, & \lambda>0. \end{cases}$

Из граничных условий $X(0)=X(b)=0$ следует, что

$$X(x)=C\sin\sqrt{\lambda}\,x+D\cos\sqrt{\lambda}\,x.$$

Кроме того, $X(0)=D=0$, $X(b)=C\sin\sqrt{\lambda}\,b=0$. Отсюда $\sqrt{\lambda}\,b=\pi n$, $n=1,2,...$, $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2$. Получаем счетное число решений:

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2,\ X_n=C_n\sin\frac{\pi n}{b}x, \qquad n=1,2,... \ .\square$$

Заметим, что нетривиальных решений задачи (4.6), (4.8) при данном произвольном l, однако, может и не быть. Поэтому содержанием задачи (4.6), (4.8) является не только отыскание решений при данном l, но и определение совокупности значений l, при которых существуют нетривиальные решения. Если при некотором $l=\lambda$ задача (4.6), (4.8) имеет нетривиальное решение $u=u(x,\lambda)$, то λ называют **собственным числом (**или **значением)** этой задачи, а решение $u(x,\lambda)$ - **собственной функцией задачи, принадлежащей собственному числу** λ **.**

Итак, **задача Штурма – Лиувилля - это задача на собственные числа и собственные функции.** Другими словами, требуется найти все числа l (собственные значения), для которых существует нетривиальное дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x)$ уравнения (4.6) (собственная функция), удовлетворяющее граничным условиям (4.8).

Легко устанавливаются следующие **свойства собственных функций** задачи Штурма - Лиувилля.

Пример 4.1.5. Две собственные функции, принадлежащие одному и тому же собственному числу, линейно зависимы, т.е. отличаются лишь постоянным множителем.

Решение**.** Действительно, так как все собственные функции удовлетворяют одному и тому же граничному условию (4.8), то как показывает простое вычисление, определитель Вронского $W(u_1,u_2)=u_1u_2'-u_1'u_2$ **любых двух собственных функций** u_1, u_2 обращается в нуль в граничных точках. Действительно, $\alpha u_1(a)+\beta u_1'(a)=0$, $\alpha u_2(a)+\beta u_2'(a)=0$, $\gamma u_1(b)+\delta u_1'(b)=0$, $\gamma u_2(b)+\delta u_2'(b)=0$, где α, β .γ ,δ - вещественные числа $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$. Отсюда $0=[\alpha u_1(a)+\beta u_1'(a)]\beta u_2(a)-[\alpha u_2(a)+\beta u_2'(a)]\beta u_1(a)=\beta^2[u_1(a)u_2'(a)-u_1'(a)u_2(a)]$, т.е.

$$\beta^2 W(u_1,u_2)(a)=0.$$

С другой стороны,

$0=[\alpha u_1(a)+\beta u_1'(a)]\alpha u_2'(a)-[\alpha u_2(a)+\beta u_2'(a)]\alpha u_1'(a)=\alpha^2[u_1(a)u_2'(a)-u_1'(a)u_2(a)]$ и $\alpha^2 W(u_1,u_2)(a)=0$.

Поэтому $(\alpha^2+\beta^2)W(u_1,u_2)(a)=0$ и $W(u_1,u_2)(a)=0$, так как $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Аналогично можно показать, что $W(u_1,u_2)(b)=0$.

Если функции u_1 и u_2 принадлежат одному и тому же собственному числу, то они, тем самым, удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, а тогда из обращения их определителя Вронского в нуль при каком-либо одном значении независимой переменной, как известно, следует, что они линейно зависимы. □

Пример 4.1.6. Две собственные функции, принадлежащие различным собственным числам λ_1 и $\lambda_2\neq\lambda_1$, на интервале $[a,b]$ взаимно ортогональны с весом ρ, т.е.

$$\int_a^b u_1u_2\rho\,dx=0. \tag{4.9}$$

Решение. Применим формулу Грина, положив в ней $x_1=a$, $x_2=b$, $v=u_2$, $u=u_1$. Учитывая, что ввиду (4.6) $Lu_1=-(pu_1')'+qu_1=\lambda_1\rho u_1$, $Lu_2=-(pu_2')'+qu_2=\lambda_2\rho u_2$, получим

$$[pW(u_1,u_2)]\Big|_a^b=\int_a^b(u_2Lu_1-u_1Lu_2)dx=\int_a^b(u_2\lambda_1\rho u_1-u_1\lambda_2\rho u_2)dx=(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b u_1u_2\rho\,dx. \tag{4.10}$$

Определитель Вронского двух собственных функций, как было указано, в граничных точках равен нулю. Поэтому правая часть (4.10) равна нулю. Поскольку $\lambda_2\neq\lambda_1$, получим (4.9). □

5. Функции Бесселя

5.1. Уравнение Бесселя

При решении многих задач математической физики приходят к линейному дифференциальному уравнению

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0, \tag{5.1.1}$$

где ν - постоянная. Это уравнение встречается также во многих вопросах физики, механики, астрономии и т.п. Уравнение (5.1.1) называется уравнением Бесселя. Заметим, что уравнение (5.1.1) имеет особую точку $x=0$.

Пример 5.1.1. Найти общее решение уравнение (5.1.1).

Решение. Будем искать частное решение уравнение (5.1.1)в виде обобщенного степенного ряда:

$$y=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\ \left(a_0\neq 0\right). \tag{5.1.2}$$

Подставляя ряд (5.1.2) в уравнение (5.1.1),

$$\begin{array}{r|l}
x^2-\nu^2 & y=a_0x^\rho+a_1x^{\rho+1}+a_2x^{\rho+2}+a_3x^{\rho+3}+\ldots,\\
x & y'=\rho a_0x^{\rho-1}+(\rho+1)a_1x^\rho+(\rho+2)a_2x^{\rho+1}+(\rho+3)a_3x^{\rho+2}+\ldots,\\
x^2 & y''=\rho(\rho-1)a_0x^{\rho-2}+\rho(\rho+1)a_1x^{\rho-1}+(\rho+1)(\rho+2)a_2x^\rho+(\rho+3)(\rho+2)a_3x^{\rho+1}+\ldots,
\end{array}$$

получим

$$\left(\rho^2-\nu^2\right)a_0x^\rho+\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]a_1x^{\rho+1}+\left\{\left[(\rho+2)^2-\nu^2\right]a_2+a_0\right\}x^{\rho+2}+\left\{\left[(\rho+3)^2-\nu^2\right]a_3+a_1\right\}x^{\rho+3}+\ldots=0$$

или

$$\left(\rho^2-\nu^2\right)a_0x^\rho+\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]a_1x^{\rho+1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[(\rho+2)^k-\nu^2\right]a_k+a_{k-2}\right\}x^{\rho+k}=0. \qquad (5.1.3)$$

Приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x, будем иметь:

$$\rho^2-\nu^2=0, \qquad (5.1.4)$$

$$\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]a_1=0, \qquad (5.1.5)$$

$$\left[(\rho+2)^k-\nu^2\right]a_k+a_{k-2}=0. \qquad (5.1.6)$$

Из первого равенства находим два значения ρ: $\rho_1=\nu$ и $\rho_2=-\nu$. Если мы возьмем первый корень $\rho_1=\nu$, то из формул (5.1.5) и (5.1.6) получим

$$a_1=0 \quad \text{и} \quad a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)} \qquad (k=2,3,4,\ldots).$$

Отсюда следует, что $a_{2k+1}=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$,а коэффициенты с четными индексами определяются, очевидно, по формулам

$$a_2=-\frac{a_0}{2^2(\nu+1)1!}, \qquad a_4=\frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)2!} \qquad \text{и т.д.,}$$

из которых ясно, что общее выражение для коэффициентов a_{2k} имеет такой вид:

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)k!} \qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

Что касается коэффициента a_0, который был до сих пор совершенно произвольным, то выберем его таким образом:

$$a_0=\frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}, \qquad (5.1.7)$$

где $\Gamma(\nu)$ - гамма-функция, которая определяется для всех положительных значений ν (а также для всех комплексных значений с положительной вещественной частью) следующим образом:

$$\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\nu-1}dx. \qquad (5.1.8)$$

При таком выборе a_0 коэффициент a_{2k} может быть записан в виде

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{2^{2k+\nu}\,k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)}. \qquad (5.1.9)$$

Это выражение может быть упрощено, если воспользоваться одним из основных свойств гамма-функции. Для этого проинтегрируем правую часть равенства (5.1.8) по частям: тогда получим следующую основную формулу:

$$\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\nu-1}dx=\begin{vmatrix} u=e^{-x}, & du=-e^{-x}dx, \\ dv=x^{\nu-1}dx, & v=\dfrac{x^\nu}{\nu}\end{vmatrix}=\frac{x^\nu}{\nu}e^{-x}\Big|_0^\infty+\frac{1}{\nu}\int_0^\infty e^{-x}x^\nu\,dx=\frac{1}{\nu}\Gamma(\nu+1)$$

или

$$\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu). \qquad (5.1.10)$$

Отметим, что формула (5.1.10) дает возможность определить гамма-функцию для отрицательных значений ν, а также и для всех комплексных значений.

Пусть k - некоторое целое положительное число. Применяя несколько раз формулу (5.1.10), получим

$$\Gamma(\nu + k + 1) = (\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + k)\Gamma(\nu + 1). \qquad (5.1.11)$$

Полагая в этой формуле $\nu = 0$, найдем, в силу равенства

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$

другое важное свойство гамма-функции, выражаемое равенством

$$\Gamma(k + 1) = k!. \qquad (5.1.12)$$

С помощью формулы (5.1.11) выражение (5.1.9) для коэффициента a_{2k} примет следующий вид:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\, k!\Gamma(\nu + k + 1)}. \qquad (5.1.13)$$

Внося найденные значения коэффициентов a_{2k+1} и a_{2k} в ряд (5.1.2), получим частное решение уравнения (5.1.1). Это решение носит название **функции Бесселя 1-го рода ν - го порядка** и обозначается обычно через $J_\nu(x)$. Таким образом,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}. \qquad (5.1.14)$$

Ряд (5.1.14) сходится при любом значении x, в чем нетрудно убедиться, применяя признак Даламбера.

Используя второй корень $\rho_2 = -\nu$, можно построить второе частное решение уравнения (5.1.1). Оно может быть получено, очевидно, из решения (5.1.14) простой заменой ν на $-\nu$, так как уравнение (5.1.1) содержит только ν^2 и не меняется при замене ν на $-\nu$:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(-\nu + k + 1)}. \qquad (5.1.15)$$

Если ν не равно целому числу, то частные решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ уравнения Бесселя (5.1.1) будут линейно независимыми, так как разложения, стоящие в правых частях формул (5.1.14) и (5.1.15), начинаются с разных степеней x. Если же ν есть целое положительное число n, то в этом случае легко обнаружить линейную зависимость решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Действительно, при целом ν для $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ величина $-\nu + k + 1$ принимает целые отрицательные значения или нуль. Для этих значений $k: \Gamma(-\nu + k + 1) = \infty$, что следует из формулы $\Gamma(m) = \frac{\Gamma(m+1)}{m}$. Таким образом, первые n членов в разложении (5.1.15) обратятся в нуль и мы получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(-n + k + 1)}$$

или, положив $k = n + l$, получим

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}}{l!\Gamma(n+l+1)},$$

т.е.

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \ (n\text{-целое}). \qquad (5.1.16)$$

Отсюда следует, что при целом n функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы. Вторым линейно независимым решением при целом n будет **функция Бесселя 2-го рода ν -го порядка или функция Вебера**

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Общее решение уравнения (5.1.1) может быть представлено в виде

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x),$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. □

Имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x) \text{ или } x^\nu J_{\nu-1}(x)=\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)), \qquad (5.1.17)$$

$$J'_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x), \qquad (5.1.18)$$

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x), \qquad (5.1.19)$$

проверяемые непосредственно.

Например, докажем (5.1.17):

$$\left(x^\nu J_\nu(x)\right)'=\nu x^{\nu-1}J_\nu(x)+x^\nu J'_\nu(x)=\nu x^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}+x^\nu\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\right)'=$$

$$=\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}(2k+\nu)\frac{(-1)^k x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2\nu)\frac{(-1)^k x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Принимая во внимание, что $\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+k)\Gamma(\nu+k)$, получим

$$\nu x^{\nu-1}J_\nu(x)+x^\nu J'_\nu(x)=x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}k!\Gamma(\nu+k)}=x^\nu J_{\nu-1}(x). \ □$$

5.2. Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(0,1)$ по ортогональной системе функций Бесселя

Рассмотрим уравнение

$$x^2y''+xy'+\left(k^2x^2-\nu^2\right)y=0. \qquad (5.2.1)$$

Введем вместо x новую независимую переменную $t=kx$. Тогда уравнение (5.2.1) преобразуется: $t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\nu^2\right)y=0$, а это есть уравнение Бесселя. Следовательно, функция $y=J_\nu(kx)$ будет решением уравнения

$$x^2\frac{d^2J_\nu(kx)}{dx^2}+x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}+\left(k^2x^2-\nu^2\right)J_\nu(kx)=0.$$

Функции $J_\nu(\mu_1 x)$, $J_\nu(\mu_2 x)$,… где μ_n ($n=1,2,\ldots$) - нули функции J_ν, образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(0,1)$, со скалярным произведением

$$(u,v)=\int_0^1 u(x)v(x)xdx.$$

Пример 5.2.1. Разложить функцию $y=(1-x^2)x^\nu$ $(\nu>-1)$ в ряд Фурье на интервале $(0,1)$ по системе функций $J_\nu(\mu_n x)$, $n=1,2,\ldots$, где J_ν - функция Бесселя и μ_n - нуль функции J_ν.

Решение. Искомое разложение функции $y=(1-x^2)x^\nu$ в ряд Фурье на интервале $(0,1)$ по системе функций $J_\nu(\mu_1 x)$, $J_\nu(\mu_2 x)$,… имеет вид

$$(1-x^2)x^\nu=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_\nu(\mu_n x),\ x\in(0,1), \tag{5.2.2}$$

где коэффициенты a_1, a_2,… определяются по формулам Эйлера-Фурье

$$a_n=\frac{\left((1-x^2)x^\nu,J_\nu(\mu_n x)\right)}{\left(J_\nu(\mu_n),J_\nu(\mu_n)\right)}=\frac{\int_0^1\left(1-x^2\right)x^\nu J_\nu(\mu_n x)xdx}{\int_0^1 J_\nu^2(\mu_n x)xdx}. \tag{5.2.3}$$

Вычисляем, используя формулу (5.1.17),

$$\int_0^1\left(1-x^2\right)x^\nu J_\nu(\mu_n x)xdx=\frac{1}{\mu_n^{n+1}}\int_0^{\mu_n}\left[1-\left(\frac{z}{\mu_n}\right)^2\right]z^{\nu+1}J_\nu(z)dz=\left|z^{\nu+1}J_\nu(z)=\frac{d}{dz}(z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z))\right|=$$

$$=\frac{1}{\mu_n^{n+1}}\int_0^{\mu_n}\left[1-\left(\frac{z}{\mu_n}\right)^2\right]\frac{d}{dz}(z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z))dz=\frac{1}{\mu_n^{n+1}}\left[1-\left(\frac{z}{\mu_n}\right)^2\right]z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z)\ \Bigg|_0^{\mu_n}+$$

$$+\frac{1}{\mu_n^{n+3}}\int_0^{\mu_n}z^{\nu+2}J_{\nu+1}(z)dz=\left|z^{\nu+2}J_{\nu+1}(z)=\frac{d}{dz}(z^{\nu+2}J_{\nu+2}(z))\right|=\frac{2}{\mu_n^2}J_{\nu+2}(\mu_n).$$

Кроме того, в курсе лекций доказывается, что

$$\int_0^1 J_\nu^{\ 2}(\mu_n x)xdx=-\frac{1}{2}J_{\nu-1}(\mu_n)J_{\nu+1}(\mu_n).$$

В силу (5.1.16) при $\nu=0$ это равенство упрощается:

$$\int_0^1 J_0^2(\mu_n x)xdx=\left|J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)\right|=\frac{1}{2}J_1^2(\mu_n). \tag{5.2.4}$$

Подставляя вычисленные интегралы в (5.2.3), получаем

$$a_n = -\frac{4J_{\nu+2}(\mu_n)}{\mu_n^2 J_{\nu-1}(\mu_n)J_{\nu+1}(\mu_n)}\ ,\ n = 1,2,...\ .$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (5.2.2), получим ответ

$$(1-x^2)x^\nu = -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\nu+2}(\mu_n)}{\mu_n^2 J_{\nu-1}(\mu_n)J_{\nu+1}(\mu_n)}J_\nu(\mu_n x)\ .\square$$

6. Преобразование Фурье

6.1. Комплексное преобразование Фурье

Для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ на всей прямой обозначим $\hat{F}(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ **прямое преобразование Фурье**. Если положить $g(\lambda) = \hat{F}(f)$, то $\tilde{F}(g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$ - **обратное преобразование Фурье**.

Заметим, что в литературе существует различие в определениях прямого и обратного преобразований Фурье, однако соответствующей заменой переменной их все можно свести к одному.

Свертка Фурье двух абсолютно интегрируемых на всей прямой функций определяется следующим образом: $(f*h)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)h(x-\xi)d\xi$.

Прежде, чем найти преобразование Фурье функции e^{-ax^2}, вычислим интеграл Эйлера-Пуассона, тем самым убедимся в абсолютной интегрируемости этой функции на всей прямой.

Пример 6.1.1. Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a > 0)$.

Решение. Вычислим сначала $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$, а именно, используя искусственный прием, покажем, что $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Действительно,

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty \\ -\infty<x<\infty}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ .$$

Отсюда $I^2 = 2\pi\left(\frac{-1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \pi$. Заменой переменной получим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ для любого $a > 0$.$\square$

Пример 6.1.2. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$.

Решение. По определению преобразования Фурье $\hat{F}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx$. Под интегралом аналитическая функция, не имеющая особенность в конечной части плоскости и стремящаяся к нулю вдоль каждой прямой параллельной действительной оси. В силу теоремы Коши интеграл не изменит своего значения, если его взять не по действительной оси, а вдоль любой прямой $z=x+iy$ (y-константа), параллельной действительной оси.

$$g(\lambda)=\hat{F}(f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a(x+i\,y)^2}e^{-i\lambda\,(x+i\,y)}dx=e^{a\,y^2+\lambda y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-2a\,ixy-i\lambda x}dx.$$ Отсюда

$$g(\lambda)=e^{a\,y^2+\lambda y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2-ix(2ay+\lambda)}dx=\left|\begin{array}{c}y=-\dfrac{\lambda}{2a}\\ a\,y^2+\lambda y=-\dfrac{\lambda^2}{4a}\end{array}\right|=e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.\square$$

Пример 6.1.3. Найти преобразование Фурье по переменной x функции $f(t,x)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\,t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ ($a>0$), зависящей от положительного параметра t.

Решение. Из предыдущего примера следует, что $\hat{F}(e^{-bx^2})=\sqrt{\dfrac{\pi}{b}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4b}}$ для любого $b>0$. Отсюда, учитывая линейность преобразования Фурье, получим $\hat{F}\left(\sqrt{\dfrac{b}{\pi}}e^{-bx^2}\right)=e^{-\frac{\lambda^2}{4b}}$. Полагая в последнем равенстве $b=\dfrac{1}{4a^2t}$, получим $\hat{F}\left(\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi\,t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right)=e^{-\lambda^2a^2t}.\square$

Пример 6.1.4. Предполагая производную $f'(x)$ от абсолютно интегрируемой на всей прямой функции $f(x)$, также абсолютно интегрируемой на всей прямой, найти зависимость между их преобразованиями Фурье.

Решение. Имеем $f(x)=f(0)+\int\limits_0^x f'(t)dt$. Отсюда существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. В силу абсолютной интегрируемости $f(x)$ на всей прямой $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. По определению преобразования Фурье

$$\hat{F}(f')=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\lambda x}dx=\left|\begin{array}{c}u=e^{-i\lambda x},\ du=-i\lambda\,e^{-i\lambda x}dx\\ dv=f'(x)dx,\ v=f(x)\end{array}\right|=e^{-i\lambda x}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx=i\lambda\,\hat{F}(f).\square$$

Замечание. Методом математической индукции можно показать, что $\hat{F}(f^{(h)})=(i\lambda)^n\,\hat{F}(f)$.

Пример 6.1.5. Найти преобразование Фурье от свертки.

Решение. По определению преобразования

$$\hat{F}(f*h)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f*h)(x)e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)h(x-\xi)d\xi\right)e^{-i\lambda x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)h(x-\xi)e^{-i\lambda x}d\xi\,dx.$$

Меняем порядок интегрирования

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)h(x-\xi)e^{-i\lambda x}d\xi\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi)e^{-i\lambda x}dx\right)d\xi \ .$$

Делаем замену переменной $y = x-\xi$. Окончательно, получим

$$\hat{F}(f*h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi)e^{-i\lambda x}dx\right)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(y)e^{-i\lambda y}dy = \hat{F}(f)\hat{F}(h),$$

т.е., также как в случае преобразования Лапласа, преобразование Фурье от свертки равно произведению преобразований Фурье. □

6.2. Косинус- и синус-преобразование Фурье

Косинус- преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\hat{F}_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx \ .$$

Синус-преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\hat{F}_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx \ .$$

Пример 6.2.1. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$).

Решение. По определению косинус - преобразования Фурье $\hat{F}_c(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\lambda x\, dx$. Так как e^{-ax^2} - четная функция, то $\hat{F}_c(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\lambda x\, dx$, а $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\sin\lambda x\, dx = 0$. Поэтому

$$\hat{F}_c(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-i\lambda x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{F}(e^{-ax^2}) \ .$$

Используя результат примера 6.1.2, получим

$$\hat{F}_c(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} . \square$$

Пример 6.2.2. Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-ax^2}$ ($a > 0$).

Решение. По определению синус - преобразования Фурье

$$\hat{F}_s(xe^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-ax^2}\sin\lambda x\, dx \ .$$

Используя формулу интегрирования по частям, преобразуем интеграл:

$$\hat{F}_s(xe^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-ax^2}\sin\lambda x\, dx = \left|\begin{array}{ll} u = \sin\lambda x, & du = \lambda\cos\lambda x dx \\ dv = xe^{-ax^2}dx, & v = \dfrac{-1}{2a}e^{-ax^2} \end{array}\right| =$$

$$\hat{F}_s(xe^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-1}{2a}e^{-ax^2}\sin\lambda x\Big|_0^\infty + \frac{-\lambda}{2a}\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos\lambda x\,dx\right) = \frac{-\lambda}{2a}\hat{F}_c(e^{-ax^2}).$$

Из результата примера 6.1.6 получим

$$\hat{F}_s(xe^{-ax^2}) = \frac{-\lambda}{2a}\hat{F}_c(e^{-ax^2}) = \frac{-\lambda}{2a\sqrt{2a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.\square$$

7. Уравнения гиперболического типа

7.1. Задача Коши для волнового уравнения на прямой

Постановка задачи. Решить задачу Коши для волнового уравнения на прямой:

$$u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0,\quad t\in(0,\infty),\quad x\in(-\infty,\infty), \tag{7.1.1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x\in(-\infty,\infty), \tag{7.1.2}$$

$$u'_t(0,x) = \psi(x),\ x\in(-\infty,\infty) \tag{7.1.3}$$

при отсутствии граничных условий.

План решения. Общее решение уравнения (7.1.1) имеет вид

$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at), \tag{7.1.4}$$

где f и g - произвольные дважды дифференцируемые функции. Требуется найти конкретные функции f и g такие, что выполняются начальные условия (7.1.2) и (7.1.3).

1. Из (7.1.2) и (7.1.3) получаем

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{a}\psi(x). \end{cases} \tag{7.1.5}$$

2. Решаем систему (7.1.5) относительно f и g. Для этого дифференцируем первое уравнение. Получаем

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = \varphi'(x), \\ f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{a}\psi(x). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2}\varphi'(x) + \dfrac{1}{2a}\psi(x), \\ g'(x) = \dfrac{1}{2}\varphi'(x) - \dfrac{1}{2a}\psi(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти равенства, получаем

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(y)dy + c_1, \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(y)dy + c_2, \end{cases}$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные.

3. Используя (7.1.4), получаем

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)dy+c_1++\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(y)dy+c_2=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy+c_1+c_2.$$

4. Из условия (7.1.2) следует, что $\varphi(x)+c_1+c_2=\varphi(x)$. Поэтому $c_1+c_2=0$. Записываем ответ

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy. \qquad (7.1.6)$$

Равенство (7.1.6) называется **формулой Даламбера**.

Пример 7.1.1. Решить задачу Коши для волнового уравнения на прямой: $u''_{tt}-4u''_{xx}=0$, $t\in(0,\infty)$, $x\in(-\infty,\infty)$, с начальными условиями $u(0,x)=e^{-x^2}, x\in(-\infty,\infty)$, $u'_t(0,x)=1/(1+x^2), x\in(-\infty,\infty)$.

Решение. Используя формулу Даламбера (7.1.6) при $a=2$, $\varphi(x)=e^{-x^2}$ $\psi(x)=1/(1+x^2)$, получим ответ

$$u(t,x)=\frac{1}{2}e^{-(x+2t)^2}+\frac{1}{2}e^{-(x-2t)^2}+\frac{1}{4}arctg(x+2t)-\frac{1}{4}arctg(x-2t).\square$$

7.0.1. Решить задачу Коши для волнового уравнения на прямой:

а) $u''_{tt}-u''_{xx}=0, t\in(0,\infty), x\in(-\infty,\infty), u(0,x)=1/(1+x^2), u'_t(0,x)=0, x\in(-\infty,\infty)$;

б) $u''_{tt}-3u''_{xx}=0, t\in(0,\infty), x\in(-\infty,\infty), u(0,x)=e^{-x^2}, u'_t(0,x)=0, x\in(-\infty,\infty)$;

в) $u''_{tt}-2u''_{xx}=0, t\in(0,\infty), x\in(-\infty,\infty), u(0,x)=arctgx-arctg(x+1), u'_t(0,x)=0, x\in(-\infty,\infty)$;

г) $u''_{tt}-u''_{xx}=0, t\in(0,\infty), x\in(-\infty,\infty), u(0,x)=0, u'_t(0,x)=1/(1+x^2), x\in(-\infty,\infty)$;

д) $u''_{tt}-3u''_{xx}=0, t\in(0,\infty), x\in(-\infty,\infty), u(0,x)=0, u'_t(0,x)=1/chx, x\in(-\infty,\infty)$;

е) $u''_{tt}-2u''_{xx}=0, t\in(0,\infty), x\in(-\infty,\infty), u(0,x)=0, u'_t(0,x)=xe^{-x^2/2}, x\in(-\infty,\infty)$;

7.2. Однородное волновое уравнение на отрезке

Постановка задачи. Решить первую начально-краевую задачу для однородного волнового уравнения

$$u''_{tt}-a^2u''_{xx}=0,\ x\in(0,l),\ t\in(0,\infty), \qquad (7.2.1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), u'_t(0,x)=\psi(x), x\in(0,l) \qquad (7.2.2)$$

и граничными условиями

$$u(t,0)=u(t,l)=0,\ t\in(0,\infty). \qquad (7.2.3)$$

План решения.

1.По методу Фурье находим вспомогательные решения $v(t,x)$ уравнения (7.2.1) в виде $v(t,x)=X(x)T(t)$, причем $v(t,0)=v(t,l)=0$, т.е. $X(0)=X(l)=0$. Для этого подставляем $v(t,x)=X(x)T(t)$ в уравнение (7.2.1) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \lambda = const, \lambda < 0.$$

Поэтому функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(l) = 0$; б) $T'' - \lambda a^2 T = 0$.

2. Решаем задачу а). Это задача Штурма – Лиувилля (см. пример 4.1.4). Уравнение $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ имеет общее решение $X(x) = C\sin\sqrt{-\lambda}\,x + D\cos\sqrt{-\lambda}\,x$. Из граничных условий $X(0) = X(l) = 0$ следует, что

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n = C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n = 1,2,\dots .$$

3.Решаем задачу б). При $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ имеем $T_n'' + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 T_n = 0$. Общее решение этого уравнения есть $T_n(t) = \widetilde{A}_n \cos\frac{\pi n}{l}at + \widetilde{B}_n \sin\frac{\pi n}{l}at.$

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (7.2.1) имеет вид:

$$v_n(t,x) = X_n(x)T_n(t) = C_n\left(\widetilde{A}_n \cos\frac{\pi n}{l}at + \widetilde{B}_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $A_n = C_n\widetilde{A}_n, B_n = C_n\widetilde{B}_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи (7.2.1)-(7.2.3) ищем в виде

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi nat}{l} + B_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (7.2.4)$$

Эта функция является решением уравнения (7.2.1) и удовлетворяет граничным условиям (7.2.3) при любых A_n и B_n, при которых ряд (7.2.4) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6.Находим коэффициенты A_n и B_n, при которых $u(t,x)$ удовлетворяет начальным условиям (7.2.2). Полагая в (7.2.4) $t = 0,$ получаем $u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi nx}{l} = \varphi(x).$ Отсюда $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

Дифференцируя равенство (7.2.4), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi na}{l}A_n \sin\frac{\pi nat}{l} + \frac{\pi na}{l}B_n \cos\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Полагая здесь $t = 0$ и используя начальное условие (7.2.2), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}B_n \sin\frac{\pi nx}{l} = \psi(x).$$

Отсюда

$$B_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (7,2.4), получаем искомое решение и записываем ответ.

Итак, Решение начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения

$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0$, $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$ с начальными условиями $u(0,x) = \varphi(x)$, $u'_t(0,x) = \psi(x)$ и граничными условиями $u(t,0) = u(t,l) = 0$ находится методом Фурье и имеет вид:

$$u(t.x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\pi kat}{l} + B_k \sin\frac{\pi kat}{l} \right) \sin\frac{\pi kx}{l}, \qquad (7.2.5)$$

где $A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $B_k = \frac{2}{\pi ka}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$.

Пример 7.2.1. Найти решение начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0$, $x \in (0,1)$, $t \in (0,\infty)$ с начальными условиями $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = x(1-x)$ и граничными условиями $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

Решение. Так как $\varphi(x) = 0$, то $A_k = 0$ в равенстве (7.2.5). По условию $l = 1$, $a = 2$, $\psi(x) = x(1-x)$. Применяя интегрирование по частям, по формулам для коэффициентов в равенстве (7.2.5) вычисляем $B_k = \frac{1}{\pi k}\int_0^1 x(1-x)\sin k\pi x dx =$

$$\left| \begin{array}{c} u = x(1-x), du = (1-x-x)dx = (1-2x)dx, \\ dv = \sin k\pi x dx, v = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| = \frac{1}{\pi k}\left(-\frac{\cos k\pi x}{k\pi} x(1-x) \Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos k\pi x dx \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = 1-2x, du = -2dx, \\ dv = \cos k\pi x dx, v = \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| = (1-2x)\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}\Big|_0^1 + \frac{2}{k^3\pi^3}\int_0^1 \sin k\pi x dx = = -\frac{2\cos k\pi x}{(k\pi)^4}\Big|_0^1 = -\frac{2}{k^4\pi^4}\left((-1)^k - 1\right)$$

. Полагая $k = 2m+1$, получим ответ: $u(t.x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^4\pi^4}\sin 2\pi(2m+1)t \sin\pi(2m+1)x$. □

7.0.2. Найти решение начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на отрезке

а) $u''_{tt} - u''_{xx} = 0$, $x \in (0,2)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = x(2-x)$, $u(t,0) = u(t,2) = 0$;

б) $u''_{tt} - 2u''_{xx} = 0$, $x \in (0,1)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = x(1-x)$, $u(t,0) = u(t,1) = 0$;

в) $u''_{tt} - 3u''_{xx} = 0$, $x \in (0,3)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = x(3-x)$, $u(t,0) = u(t,3) = 0$;

г) $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0$, $x \in (0,2)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = x(2-x)$, $u(t,0) = u(t,2) = 0$;

д) $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0$, $x \in (0,1)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = x(1-x)$, $u(t,0) = u(t,1) = 0$;

е) $u''_{tt} - \frac{1}{4}u''_{xx} = 0$, $x \in (0,4)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 0$, $u'_t(0,x) = x(4-x)$, $u(t,0) = u(t,4) = 0$.

7.3. Неоднородное волновое уравнение на отрезке

Данную тему рассмотрим на примере.

Пример 7.3.1. Решить начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке

$$u''_{tt} - u''_{xx} = 4\sin^3 x, \quad t \in (0,\infty),\ x \in (0,\pi),$$

$$u(0,x) = 0,\ u'_t(0,x) = 0, \quad x \in (0,\pi),$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in (0,\infty).$$

Решение. 1. Разлагаем правую часть уравнения $4\sin^3 x$ в ряд Фурье по системе собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (см. пример 4.1.4):

$$\begin{cases} u_{xx} = \lambda v, x \in (0,\pi), \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases}$$

т.е. по системе функций $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, …. Имеем по формуле (3.2.1)

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x.$$

2. Решение задачи ищем в виде $u(t,x) = u_1(t)\sin x + u_3(t)\sin 3x.$

3.Подставляя это выражение в уравнение, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_1''(t) + u_1(t) = 3, \\ u_3''(t) + 9u_3(t) = -1. \end{cases}$$

4. Начальные условия эквивалентны следующим начальным условиям для системы: $u_1(0) = u_1'(0) = 0,\ u_3(0) = u_3'(0) = 0$.

5. Решая последовательно задачу Коши для каждого уравнения системы, получаем $u_1(t) = 3(1-\cos t),\ u_3(t) = -\frac{1}{9}(1-\cos 3t).$

6. Подставляя $u_1(t)$, $u_3(t)$, получаем искомое решение задачи: $u(t,x) = 3(1-\cos t)\sin x - \frac{1}{9}(1-\cos 3t)\sin 3x$. □

7.0.3. Решить начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке:

а) $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 4\sin^3 x + 16\sin^5 x$, $t \in (0,\infty),\ x \in (0,\pi),\ u(0,x) = 0,\ u'_t(0,x) = 0$, $x \in (0,\pi)$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \in (0,\infty)$;

б) $u''_{tt} - 9u''_{xx} = 8\sin^3\frac{\pi x}{2} - 16\sin^5\frac{\pi x}{2}$, $t \in (0,\infty),\ x \in (0,2),\ u(0,x) = 0,\ u'_t(0,x) = 0$, $x \in (0,2)$, $u(t,0) = u(t,2) = 0$, $t \in (0,\infty)$;

в) $u''_{tt} - u''_{xx} = \sin\frac{\pi x}{3} - 4\sin^3\frac{\pi x}{3} + 16\sin^5\frac{\pi x}{3}$, $t \in (0,\infty),\ x \in (0,3),\ u(0,x) = 0,\ u'_t(0,x) = 0$, $x \in (0,3),\ u(t,0) = u(t,3) = 0$, $t \in (0,\infty)$;

г) $u''_{tt} - 4u''_{xx} = -\sin\frac{\pi x}{4} + 4\sin^3\frac{\pi x}{4} - 16\sin^5\frac{\pi x}{4}$, $t \in (0,\infty),\ x \in (0,4),\ u(0,x) = 0,\ u'_t(0,x) = 0$, $x \in (0,4),\ u(t,0) = u(t,4) = 0$, $t \in (0,\infty)$;

д) $u''_{tt} - 16u''_{xx} = -2\sin\pi x - 8\sin^3\pi x + 16\sin^5\pi x$, $t \in (0,\infty),\ x \in (0,1),\ u(0,x) = 0,\ u'_t(0,x) = 0$, $x \in (0,1),\ u(t,0) = u(t,1) = 0$, $t \in (0,\infty)$;

е) $u''_{tt} - u''_{xx} = \sin\frac{\pi x}{3} + 4\sin^3\frac{\pi x}{3} + 32\sin^5\frac{\pi x}{3}$, $t \in (0,\infty),\ x \in (0,3),\ u(0,x) = 0,\ u'_t(0,x) = 0$, $x \in (0,3),\ u(t,0) = u(t,3) = 0$, $t \in (0,\infty)$.

8. Уравнения эллиптического типа

8.1.Уравнение Лапласа в круге

Постановка задачи. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta u = 0, \qquad 0 \le r < r_0, \tag{8.1.1}$$
$$u|_{r=r_0} = f(\varphi). \tag{8.1.2}$$

План решения. Уравнение Лапласа (8.1.1) в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{8.1.3}$$

1.Находим вспомогательные решения v уравнения (8.1.3) в виде

$$v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $\Phi(\varphi)$ - периодическая функция с периодом 2π.

Для этого подставляем функцию $v(r,\varphi)$ в уравнение (8.1.3) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = \lambda = const.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$;

б) $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad |R(0)| < \infty$.

2. Решаем задачу а). Общее решение уравнения $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \tilde{A}e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + \tilde{B}e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}.$$

Оно периодично при $\lambda \ge 0$ и имеет период 2π при $\lambda = n^2\ (n = 0,1,\ldots)$.

Получаем: $\Phi_0(\varphi) = \tilde{A}_0$ при $\lambda = \lambda_0 = 0$,

$\Phi_n(\varphi) = \tilde{A}_n\cos n\varphi + \tilde{B}_n\sin n\varphi$ при $\lambda = \lambda_n = n^2\ (n = 1,2,\ldots)$.

3. Решаем задачу б) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ и при $\lambda = \lambda_n = n^2\ (n = 1,2,\ldots)$.

При $\lambda = \lambda_0 = 0$ имеем $r^2R'' + rR' = 0$.Общее решение этого уравнения есть $R_0(r) = C_0 + D_0\ln r$.Поскольку $|R(0)| < \infty$, полагаем $D_0 = 0$. При $\lambda = \lambda_n = n^2\ (n = 1,2,\ldots)$ имеем $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$.

Общее решение этого уравнения есть $R_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}\ \ (n = 1,2,\ldots)$. Поскольку $|R(0)| < \infty$, полагаем $D_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (8.1.3) имеют вид

$$v_0(r,\varphi) = C_0\tilde{A}_0 = A_0, \qquad v_n(r,\varphi) = C_nr^n(\tilde{A}_n\cos n\varphi + \tilde{B}_n\sin n\varphi) = r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$$

где $A_n = C_n\tilde{A}_n$, $B_n = C_n\tilde{B}_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (8.1.1)-(8.1.2) ищем в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi). \tag{8.1.4}$$

Эта функция является решением уравнения (8.1.1) при любых A_n и B_n, при которых ряд (8.1.4) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

Из (8.1.4) и условия (8.1.2) находим

$$u(r_0,\varphi) = f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^{\,n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi\ , \quad A_n = \frac{1}{\pi r_0^{\ n}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi\ , \quad B_n = \frac{1}{\pi r_0^{\ n}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\ .$$

6. Подставим эти выражения для A_0, A_n и B_n в (8.1.4), изменим порядок суммирования и интегрирования, используем формулу Эйлера $\cos n(\psi - \varphi) = \dfrac{e^{in(\psi-\varphi)} + e^{-in(\psi-\varphi)}}{2}$, вычислим сумму ряда как сумму геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{1-q}, & |q| < 1; \\ \text{расходится}, & |q| \geq 1. \end{cases}$, получим

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(\frac{1}{\pi r_0^{\ n}}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi\ \cos n\varphi\, d\psi + \frac{1}{\pi r_0^{\ n}}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi\ \sin n\varphi\, d\psi\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{r_0^{\ n}}\cos n(\psi - \varphi)\right)d\psi = \left|\cos n(\psi - \varphi) = \frac{e^{in(\psi-\varphi)} + e^{-in(\psi-\varphi)}}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{re^{i(\psi-\varphi)}}{r_0}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{r_0}\right)^n\right)d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left(1 + \frac{\dfrac{re^{i(\psi-\varphi)}}{r_0}}{1 - \dfrac{re^{i(\psi-\varphi)}}{r_0}} + \frac{\dfrac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{r_0}}{1 - \dfrac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{r_0}}\right)d\psi\ .$$

Поскольку для внутренности круга $\left|\dfrac{re^{i(\psi-\varphi)}}{r_0}\right| < 1$ и, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{re^{i(\psi-\varphi)}}{r_0}\right)^n = \dfrac{\dfrac{re^{i(\psi-\varphi)}}{r_0}}{1 - \dfrac{re^{i(\psi-\varphi)}}{r_0}}$. Аналогично, $\left|\dfrac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{r_0}\right| < 1$ и, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{r_0}\right)^n = \dfrac{\dfrac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{r_0}}{1 - \dfrac{re^{-i(\psi-\varphi)}}{r_0}}$.

Таким образом,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{r_0^{\ 2} - r^2}{r_0^{\ 2} - 2r_0 r\cos(\psi - \varphi) + r^2}d\psi$$ (**интеграл Пуассона**).

8.0.1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

а) $\Delta u = 0, 0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi$;

б) $\Delta u = 0, 0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 4\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + \cos\varphi + 2$;

в) $\Delta u = 0, 0 \le r < 1$, $u\big|_{r=1} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi$;

г) $\Delta u = 0, 0 \le r < 2$, $u\big|_{r=2} = -4\cos^3\varphi + \sin\varphi + 7$;

д) $\Delta u = 0, 0 \le r < 3$, $u\big|_{r=3} = 12\sin^3\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi$;

е) $\Delta u = 0, 0 \le r < 1$, $u\big|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi - 2\cos\varphi + 4\sin\varphi$.

8.2. Уравнение Пуассона в кольце

Постановка задачи. Решить третью краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце:

$$\Delta u = f(r,\varphi), \quad r_1 < r < r_2, \tag{8.2.1}$$

$$u\big|_{r=r_1} = g_1(\varphi), \tag{8.2.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2} = g_2(\varphi). \tag{8.2.3}$$

План решения. 1.Уравнение Пуассона (8.2.1) в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r,\varphi). \tag{8.2.4}$$

Решение краевой задачи (8.2.1)-(8.2.3) ищем в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$u(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi, \tag{8.2.5}$$

где $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ - функции, которые предстоит найти.

2. Подставляем функцию $u(r,\varphi)$ в уравнение (8.1.4). Получаем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0(r)}{dr}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}a_n(r)\right]\cos n\varphi +\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}b_n(r)\right]\sin n\varphi\right\} = f(r,\varphi). \tag{8.2.6}$$

3. Записываем разложение $f(r,\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(r,\varphi) = \tilde{a}_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n(r)\cos n\varphi + \tilde{b}_n(r)\sin n\varphi. \tag{8.2.7}$$

4. Из (8.2.6) и (8.2.7) получаем систему уравнений:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0(r)}{dr}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)d\varphi = \tilde{a}_0(r), \tag{8.2.8}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2 a_n(r)}{r^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = \tilde{a}_n(r), \tag{8.2.9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2 b_n(r)}{r^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi = \tilde{b}_n(r). \tag{8.2.10}$$

5. Решая дифференциальные уравнения (8.2.8)-(8.2.10), находим коэффициенты $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ с точностью до произвольных постоянных.

А) Уравнение (8.2.8) допускает понижение порядка. Общее решение этого уравнения есть

$$a_0(r) = A_0(r) + E_0 + F_0 \ln r \,. \tag{8.2.11}$$

где $A_0(r)$ - известная функция, E_0 и F_0 - пока произвольные постоянные.

Б) Уравнение (8.2.9) $r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = r^2 \tilde{a}_n(r)$ решается методом вариации произвольных постоянных. Общее решение однородного уравнения $r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = 0$ есть $a_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$. Поэтому решение неоднородного уравнения ищем в виде $a_n(r) = C_n(r) r^n + D_n(r) r^{-n}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Функции $C_n(r), D_n(r)$ определяются системой дифференциальных уравнений с точностью до произвольных постоянных E_n и F_n

$$\begin{cases} r^{2n} C_n'(r) + D_n'(r) = 0, \\ r^{2n} C_n'(r) - D_n'(r) = r^{n+3} \tilde{a}_n(r) / n. \end{cases}$$

Аналогично находится $b_n(r)$ с точностью до постоянных G_n, H_n.

6. Используем граничные условия для нахождения всех постоянных.

7. Найденные функции $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ подставляем в (8.2.5) записываем ответ.

Пример 8.2.1. Решить третью краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце:

$$\Delta u = r^3 \cos\varphi \,, \quad 1 < r < 2 \,, \tag{8.2.12}$$

$$u\big|_{r=1} = \cos 2\varphi \,, \tag{8.2.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = \sin 3\varphi \,. \tag{8.2.14}$$

Решение. 1.Уравнение Пуассона (8.2.12) в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^3 \cos\varphi \,. \tag{8.2.15}$$

Решение краевой задачи (8.2.12)-(8.2.14) ищем в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$u(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi \,, \tag{8.2.16}$$

где $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ - функции, которые предстоит найти.

2. Подставляем функцию $u(r,\varphi)$ в уравнение (8.2.15). Получаем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{da_0(r)}{dr} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{da_n(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) \right] \cos n\varphi \,+ \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{db_n(r)}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} b_n(r) \right] \sin n\varphi \right\} = r^3 \cos\varphi \,. \tag{8.2.17}$$

3. Необходимость в разложении $r^3 \cos\varphi$ в ряд Фурье отпадает, поскольку правая часть уже соответствует виду

$$f(r,\varphi) = \tilde{a}_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(r)\cos n\varphi + \tilde{b}_n(r)\sin n\varphi \ , \qquad (8.2.18)$$

откуда $\tilde{a}_0(r) = 0$, $\tilde{a}_1(r) = r^3$, $\tilde{a}_n(r) = 0$ при $n = 1,2...,$ $\tilde{b}_n(r) = 0$ при $n = 0,1,2...$.

4. Из (8.2.17) и (8.2.18) получаем систему уравнений:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0(r)}{dr}\right) = 0, \qquad (8.2.19)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_1(r)}{dr}\right) - \frac{a_1(r)}{r^2} = r^3, \qquad (8.2.20)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2 a_n(r)}{r^2} = 0, \ n = 2,3,..., \qquad (8.2.21)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2 b_n(r)}{r^2} = 0, \qquad n = 1,2... . \qquad (8.2.22)$$

5. Решая дифференциальные уравнения (8.2.19)-(8.2.22), находим коэффициенты $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ с точностью до произвольных постоянных.

А) Уравнение (8.2.19) допускает понижение порядка. Общее решение этого уравнения есть $a_0(r) = E_0 + F_0 \ln r$, где E_0 и F_0 - пока произвольные постоянные.

Б) Уравнение (8.2.20) решается методом вариации произвольных постоянных. Общее решение однородного уравнения $r^2 a_1''(r) + r a_1'(r) - a_1(r) = 0$ есть $a_1(r) = C_1 r + D_1 r^{-1}$. Поэтому решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$a_1(r) = C_1(r) r + D_1(r) r^{-1}.$$

Функции $C_1(r)$, $D_1(r)$ определяются системой дифференциальных уравнений с точностью до произвольных постоянных E_1 и F_1

$$\begin{cases} r^2 C_1'(r) + D_1'(r) = 0, \\ r^2 C_1'(r) - D_1'(r) = r^7. \end{cases}$$

Следовательно, $a_1(r) = \dfrac{r^7}{48} + E_1 r + F_1 r^{-1}$, где E_1 и F_1 - пока произвольные постоянные.

В) Общее решение однородного уравнения (8.2.21) $r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = 0$ есть $a_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$, $n = 2,3,...,$.

Г) Общее решение однородного уравнения (8.2.22) $r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) = 0$ есть $b_n(r) = G_n r^n + H_n r^{-n}$, $n = 1,2...,$, где G_n, H_n пока неизвестные постоянные.

Таким образом, решение (8.2.16) имеет вид

$$u(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi = E_0 + F_0 \ln r + \left(\frac{r^7}{48} + E_1 r + F_1 r^{-1}\right)\cos\varphi +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (E_n r^n + F_n r^{-n})\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n r^n + H_n r^{-n})\sin n\varphi \ . \qquad (8.2.23)$$

6. Используем граничные условия для нахождения всех постоянных в (8.2.23):

$$u(1,\varphi) = E_0 + \left(\frac{1}{48} + E_1 + F_1\right)\cos\varphi + + \sum_{n=2}^{\infty} (E_n + F_n)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n + H_n)\sin n\varphi = \cos 2\varphi \ .$$

Отсюда

$$E_0=0,\ E_1+F_1=-\frac{1}{48},\ E_2+F_2=1,E_n+F_n=0,\ n=3,4,\dots,G_n+H_n=0,\ n=1,2,\dots. \qquad (8.2.24)$$

$$u'_r(2,\varphi)=\frac{F_0}{2}+\frac{28}{3}\cos\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(nE_n2^{n-1}-nF_n2^{-n-1}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(nG_n2^{n-1}-nH_n2^{-n-1}\right)\sin n\varphi=\sin 3\varphi .$$

Отсюда

$$F_0=0,\ \frac{28}{3}+E_1-\frac{F_1}{4}=0,\ \ nE_n2^{n-1}-nF_n2^{-n-1}=0,n=2,3,\dots,\ \ nG_n2^{n-1}-nH_n2^{-n-1}=0,\ \ n\neq 3,$$

$3G_32^2-3H_32^{-4}=1$.

7. Найденные постоянные подставляем в (8.2.23), записываем ответ

$$u(r,\varphi)=\left(\frac{r^5}{24}-\frac{1793}{240}r+\frac{447}{60}r^{-1}\right)\cos\varphi+\left(\frac{1}{17}r+\frac{16}{17}r^{-1}\right)\cos 2\varphi+\left(\frac{16}{195}r-\frac{16}{195}r^{-1}\right)\sin 3\varphi .\square$$

8.0.2. Решить третью краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце:

а) $\Delta u=8r\sin\varphi$, $1<r<2$, $u|_{r=1}=\sin\varphi$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=12\sin\varphi$;

б) $\Delta u=8r\cos\varphi$, $1<r<2$, $u|_{r=1}=\cos\varphi$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=12\cos\varphi$;

в) $\Delta u=24r^3\sin\varphi$, $2<r<3$, $u|_{r=2}=32\sin\varphi$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=135\sin\varphi$;

г) $\Delta u=(6\sin\varphi\cos^2\varphi-2\sin^3\varphi)/r$, $1<r<2$, $u|_{r=1}=\sin^3\varphi$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=\sin^3\varphi$;

д) $\Delta u=(6\sin^2\varphi\cos\varphi-2\cos^3\varphi)/r$, $2<r<3$, $u|_{r=2}=2\cos^3\varphi$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3}=\cos^3\varphi$;

е) $\Delta u=(\sin\varphi)/r^2$, $2<r<5$, $u|_{r=2}=2\cos\varphi-\sin\varphi$, $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=5}=\cos\varphi$.

8.3. Уравнение Лапласа в цилиндре

Постановка задачи. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре:

$$\Delta u=0,\ \ 0\le r<r_0,\qquad 0<z<z_0, \qquad (8.3.1)$$

$$u|_{z=0}=r_0^2-r^2,0\le r<r_0, \qquad (8.3.2)$$

$$u|_{z=z_0}=0,0\le r<r_0, \qquad (8.3.3)$$

$$u|_{r=r_0}=0,0<z<z_0. \qquad (8.3.4)$$

План решения. 1.Уравнение Лапласа (8.3.1) в цилиндрических координатах (r,φ,z) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (8.3.5)$$

Так как граничные значения $u|_{z=0}=r_0^2-r^2$, $u|_{z=z_0}=0$, $u|_{r=r_0}=0$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (8.3.5) не зависят от φ , решение задачи

Дирихле (8.3.1)-(8.3.4) также не зависят от φ и его можно искать в виде $u(r,\varphi,z) = u(r,z)$, где функция $u(r,z)$ удовлетворяет уравнению (8.3.5) с $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \equiv 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (8.3.6)$$

1. Находим вспомогательные решения $v(r,z)$ уравнения (8.3.6) в виде

$$v(r,z) = R(r)Z(z),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $R(r_0) = 0$ и $Z(z_0) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(r,z) = R(r)Z(z)$ в уравнение (8.3.6) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = -\lambda = const.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $Z(z)$ являются решениями связанных задач:

а) $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, 0 \le r < r_0, |R(0)| < \infty$, $R(r_0) = 0$.

б) $Z'' - \lambda Z = 0$, $Z(z_0) = 0$.

2. Решаем задачу а). Общее решение уравнения $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$ имеет вид

$$R(r) = \tilde{A}J_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right) + \tilde{B}Y_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right)$$

(см. пример 5.1.1 для уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + \left(k^2x^2 - \nu^2\right)y = 0$, $y = J_\nu(kx)$ с $\nu = 0$), где J_0 и Y_0 - функции Бесселя и Вебера. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \to \infty$ при $r \to 0$, полагаем $\tilde{B} = 0$.

Используя граничное условие $R(r_0) = 0$, получаем

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \qquad R_n = \tilde{A}_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right), \qquad n = 1,2,\ldots,$$

где μ_n - нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0$, $n = 1,2,\ldots$.

3. Решаем задачу б). При $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2$ имеем

$$Z'' - \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 Z = 0.$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $Z(z_0) = 0$, есть

$$Z_n(z) = B_n sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}(z_0 - z)\right).$$

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (8.3.6) имеют вид

$$v_n(r,z) = \tilde{A}_n B_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}(z_0 - z)\right) = A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}(z_0 - z)\right),$$

где $A_n = \tilde{A}_n B_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение $u(r,z)$ задачи Дирихле (8.3.1)-(8.3.4) ищем в виде

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}(z_0 - z)\right). \qquad (8.3.7)$$

Эта функция является решением уравнения (8.3.1) и удовлетворяет граничным условиям (8.3.3), (8.3.4) при любых A_n, при которых ряд (8.3.7) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n, при которых $u(r,z)$ удовлетворяет граничному условию (8.3.2):

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}z_0\right)=r_0^2-r^2.$$

Воспользуемся результатом примера 5.2.1, так как

$$\frac{2}{\mu_n^2}J_{\nu+2}(\mu_n)=\int_0^1\left(1-x^2\right)x^{\nu}J_{\nu}(\mu_n x)xdx=\left|x=\frac{r}{r_0}\right|=\frac{1}{r_0^{\nu+4}}\int_0^{r_0}\left(r_0^2-r^2\right)J_{\nu}\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr, \tag{8.3.8}$$

$$-\frac{1}{2}J_{\nu-1}(\mu_n)J_{\nu+1}(\mu_n)=\int_0^1J_{\nu}^2(\mu_n x)xdx=\left|x=\frac{r}{r_0}\right|=\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0}J_{\nu}^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr. \tag{8.3.9}$$

Следовательно, в силу (8.3.8), (8.3.9) и равенства (5.2.4) при $\nu=0$

$$A_nsh\left(\frac{\mu_n}{r_0}z_0\right)=\frac{\int_0^{r_0}\left(r_0^2-r^2\right)J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr}{\int_0^1J_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr}=\frac{r_0^4\int_0^1\left(1-x^2\right)J_0(\mu_n x)xdx}{r_0^2\int_0^1J_0^2(\mu_n x)xdx}=\frac{\frac{4}{\mu_n^2}r_0^4J_{\nu+2}(\mu_n)}{r_0^2J_1^2(\mu_n)}=\frac{4r_0^2J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}$$

и

$$A_n=\frac{4r_0^2J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}z_0\right)},\qquad n=1,2,\ldots\ .$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (8.3.7), получим

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4r_0^2J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}z_0\right)}J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)sh\left(\frac{\mu_n}{r_0}(z_0-z)\right).\ \square$$

Пример 8.3.1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре:

$$\Delta u=0,\quad 0\le r<1,\qquad 0<z<1, \tag{8.3.10}$$

$$u|_{z=0}=1-r^2,\ 0\le r<1, \tag{8.3.11}$$

$$u|_{z=1}=0,\ 0\le r<1, \tag{8.3.12}$$

$$u|_{r=1}=0,\ 0<z<1. \tag{8.3.13}$$

Решение. 1.Уравнение Лапласа (8.3.10) в цилиндрических координатах (r,φ,z) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0. \tag{8.3.14}$$

Так как граничные значения $u|_{z=0} = 1 - r^2$, $u|_{z=1} = 0$, $u|_{r=1} = 0$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (8.3.14) не зависят от φ, решение задачи Дирихле (8.3.10)-(8.3.13) также не зависят от φ и его можно искать в виде

$$u(r,\varphi,z) = u(r,z),$$

где функция $u(r,z)$ удовлетворяет уравнению (8.3.14) с $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \equiv 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (8.3.15)$$

2. Находим вспомогательные решения $v(r,z)$ уравнения (8.3.15) в виде

$$v(r,z) = R(r)Z(z),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $R(1) = 0$ и $Z(1) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(r,z) = R(r)Z(z)$ в уравнение (8.3.15) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = -\lambda = const.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $Z(z)$ являются решениями связанных задач:

а) $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$, $0 \le r < 1$, $|R(0)| < \infty$, $R(1) = 0$.

б) $Z'' - \lambda Z = 0$, $Z(1) = 0$.

2. Решаем задачу а). Общее решение уравнения $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$ имеет вид

$$R(r) = \tilde{A}J_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right) + \tilde{B}Y_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right)$$

(уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + \left(k^2x^2 - \nu^2\right)y = 0$, $y = J_\nu(kx)$ с $\nu = 0$), где J_0 и Y_0 - функции Бесселя и Вебера. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \to \infty$ при $r \to 0$, полагаем $\tilde{B} = 0$.

Используя граничное условие $R(1) = 0$, получаем

$$\lambda_n = \mu_n^2, \qquad R_n = \tilde{A}_n J_0(\mu_n r), \qquad n = 1,2,\ldots,$$

где μ_n - нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0$, $n = 1,2,\ldots$.

3.Решаем задачу б). При $\lambda_n = \mu_n^2$ имеем $Z'' - \mu_n^2 Z = 0$. Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $Z(1) = 0$, есть $Z_n(z) = B_n sh(\mu_n(z_0 - z))$.

4.Итак, вспомогательные решения уравнения (8.3.15) имеют вид

$$v_n(r,z) = \tilde{A}_n B_n J_0(\mu_n r) sh(\mu_n(z_0 - z)) = A_n J_0(\mu_n r) sh(\mu_n(z_0 - z)),$$

где $A_n = \tilde{A}_n B_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

5.Решение $u(r,z)$ задачи Дирихле (8.3.10)-(8.3.13) ищем в виде

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) sh(\mu_n(z_0 - z)) . \qquad (8.3.16)$$

Эта функция является решением уравнения (8.3.10) и удовлетворяет граничным условиям (8.3.12), (8.3.13) при любых A_n, при которых ряд (8.3.16) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n, при которых $u(r,z)$ удовлетворяет граничному условию (8.3.11):

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\mu_nr)sh(\mu_n)=1-r^2.$$

Следовательно,

$$A_nsh(\mu_n)=\frac{2\int_0^{r_0}\left(1-r^2\right)J_0(\mu_nr)rdr}{J_1^2(\mu_n)}=\frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)},\quad A_n=\frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)sh(\mu_n)}\ n=1,2,...\ .$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (8.3.16), получим

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)sh(\mu_n)}J_0(\mu_nr)sh(\mu_n(1-z)).\square$$

8.0.3. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре:

а) $\Delta u=0$, $0\le r<2$, $0<z<1$, $u|_{z=0}=4-r^2$, $0\le r<2$, $u|_{z=1}=0$, $0\le r<2_0$, $u|_{r=2}=0$, $0<z<1$;

б) $\Delta u=0$, $0\le r<5$, $0<z<2$, $u|_{z=0}=25-r^2$, $0\le r<5$, $u|_{z=2}=0$, $0\le r<5$, $u|_{r=5}=0$, $0<z<2$;

в) $\Delta u=0$, $0\le r<5$, $0<z<5$, $u|_{z=0}=25-r^2$, $0\le r<5$, $u|_{z=5}=0$, $0\le r<5$, $u|_{r=5}=0$, $0<z<5$;

г) $\Delta u=0$, $0\le r<4$, $0<z<3$, $u|_{z=0}=16-r^2$, $0\le r<4$, $u|_{z=3}=0$, $0\le r<4$, $u|_{r=4}=0$, $0<z<3$;

д) $\Delta u=0$, $0\le r<3$, $0<z<4$, $u|_{z=0}=9-r^2$, $0\le r<3$, $u|_{z=4}=0$, $0\le r<3$, $u|_{r=3_0}=0$, $0<z<4$;

е) $\Delta u=0$, $0\le r<1$, $0<z<3$, $u|_{z=0}=1-r^2$, $0\le r<1$, $u|_{z=3}=0$, $0\le r<1$, $u|_{r=1}=0$, $0<z<3$.

8.4. Уравнение Гельмгольца в круге

8.4.1. Постановка задачи. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\Delta u+k^2u=0,\boxed{0\le r<r_0},J_n(kr_0)\ne 0,\ n=0,1,..., \tag{8.4.1}$$

$$u|_{r=r_0}=f(\varphi). \tag{8.4.2}$$

План решения. 1. Задача решается аналогично задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге (см. пример 8.1.1).

Уравнения Гельмгольца в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{8.4.3}$$

1.Находим вспомогательные решения v уравнения (8.4.3) в виде $v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, причем $|R(0)|<\infty$ и $\Phi(\varphi)$ периодична с периодом 2π .

Для этого подставляем функцию $v(r,\varphi)$ в уравнение (8.4.3) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+k^2r^2R}{R}=-\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi 2}}{\Phi}=\lambda=const.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Phi''+\lambda\Phi=0,\quad \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$;

б) $r^2R''+rR'+(k^2r^2-\lambda)R=0,\qquad |R(0)|<\infty$.

2. Решаем задачу а). Общее решение уравнения $\Phi''+\lambda\Phi=0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi)=\widetilde{A}e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+\widetilde{B}e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}.$$

Оно периодично при $\lambda\geq 0$ и имеет период 2π при $\lambda=n^2\ (n=0,1,...)$. Получаем:

$\Phi_0(\varphi)=\widetilde{A}_0$ при $\lambda=\lambda_0=0$, $\Phi_n(\varphi)=\widetilde{A}_n\cos n\varphi+\widetilde{B}_n\sin n\varphi$ при $\lambda=\lambda_n=n^2\ (n=1,2,...)$.

3. Решаем задачу б) при $\lambda=\lambda_n=n^2\ (n=0,1,2,...)$.

Имеем $r^2R''+rR'+(k^2r^2-n^2)R=0.$ Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r)=C_nJ_n(kr)+D_nY_n(kr)\ (n=0,1,2,...),$$

(уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+\left(k^2x^2-\nu^2\right)y=0$, $y=J_\nu(kx)$ с $\nu=n$), где J_n и Y_n - функции Бесселя и Вебера. Поскольку $|R(0)|<\infty$, а $Y_n(r)\to\infty$ при $r\to 0$, полагаем $D_n=0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (8.4.3) имеют вид $v_n(r,\varphi)=C_nJ_n(kr)(\widetilde{A}_n\cos n\varphi+\widetilde{B}_n\sin n\varphi)=J_n(kr)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$,

где $A_n=C_n\widetilde{A}_n$, $B_n=C_n\widetilde{B}_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (8.4.1)-(8.4.2) ищем в виде

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}J_n(kr)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi).\qquad(8.4.4)$$

Эта функция является решением уравнения (8.4.1) при любых A_n, B_n, при которых ряд (8.4.4) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим **формулы Эйлера-Фурье** для коэффициентов A_n и B_n, при которых $u(r,\varphi)$ удовлетворяет граничному условию (8.4.2):

$$A_0=\frac{1}{2\pi J_0(kr_0)}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,\quad A_n=\frac{1}{\pi J_n(kr_0)}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\quad B_n=\frac{1}{\pi J_n(kr_0)}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Пример 8.4.1. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\Delta u+4u=0,\ 0\leq r<1,\qquad(8.4.5)$$

$$u|_{r=r_0}=\sin^3\varphi.\qquad(8.4.6)$$

Решение. Уравнения Гельмгольца в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+4u=0,\ k^2=4.\qquad(8.4.7)$$

1.Находим вспомогательные решения v уравнения (8.4.5) в виде $v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$,причем $|R(0)|<\infty$ и $\Phi(\varphi)$ периодична с периодом 2π.

Для этого подставляем функцию $v(r,\varphi)$ в уравнение (8.4.7) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+4r^2R}{R}=-\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi\,2}}{\Phi}=\lambda=const.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Phi''+\lambda\Phi=0, \quad \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi);$

б) $r^2R''+rR'+(4r^2-\lambda)R=0, \qquad |R(0)|<\infty$.

2. Решаем задачу а). Общее решение уравнения $\Phi''+\lambda\Phi=0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi)=\tilde{A}e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+\tilde{B}e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}.$$

Оно периодично при $\lambda\geq 0$ и имеет период 2π при $\lambda=n^2\ (n=0,1,...)$.

Получаем:

$\Phi_0(\varphi)=\tilde{A}_0$ при $\lambda=\lambda_0=0$, $\Phi_n(\varphi)=\tilde{A}_n\cos n\varphi+\tilde{B}_n\sin n\varphi$ при $\lambda=\lambda_n=n^2\ (n=1,2,...)$.

3. Решаем задачу б) при $\lambda=\lambda_n=n^2\ (n=0,1,2,...)$. Имеем

$r^2R''+rR'+(4r^2-n^2)R=0.$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r)=C_nJ_n(2r)+D_nY_n(2r)\ (n=0,1,2,...),$$

где J_n и Y_n - функции Бесселя и Вебера. Поскольку $|R(0)|<\infty$, а $Y_n(r)\to\infty$ при $r\to 0$, полагаем $D_n=0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (8.4.5) имеют вид

$$v_n(r,\varphi)=C_nJ_n(2r)(\tilde{A}_n\cos n\varphi+\tilde{B}_n\sin n\varphi)=J_n(2r)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$

где $A_n=C_n\tilde{A}_n$, $B_n=C_n\tilde{B}_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (8.4.5)-(8.4.6) ищем в виде

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}J_n(2r)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi). \tag{8.4.8}$$

Эта функция является решением уравнения (8.4.5) при любых A_n, B_n, при которых ряд (8.4.8) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n и B_n, при которых $u(r,\varphi)$ удовлетворяет граничному условию (8.4.6).Здесь либо непосредственно используем **формулы Эйлера-Фурье** для A_n, B_n, либо записываем условие (8.4.6) в виде

$$u(1,\varphi)=\sin^3\varphi=\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Имеем

$$u(1,\varphi)=A_0J_0(2)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(2)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=\frac{3}{4}\sin\varphi-\frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Следовательно, $A_0=0$ $A_n=0\ (n=1,2,...)$, $B_1=\dfrac{3}{4J_1(2)}$, $B_2=0$, $B_3=-\dfrac{1}{4J_3(2)}$, $B_n=0$ при $n\geq 4$. Подставляя эти коэффициенты в формулу (8.4.8), получаем $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{4}\dfrac{J_1(2r)}{J_1(2)}\sin\varphi-\dfrac{1}{4}\dfrac{J_3(2r)}{J_3(2)}\sin 3\varphi$.□

8.0.4. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:

а) $\Delta u + u = 0, 0 \le r < 2$, $u|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi$;

б) $\Delta u + 2u = 0, 0 \le r < 2$, $u|_{r=2} = 4\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + \cos\varphi + 2$;

в) $\Delta u + 3u = 0, 0 \le r < 1$, $u|_{r=1} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi$;

г) $\Delta u + 4u = 0, 0 \le r < 2$, $u|_{r=2} = -4\cos^3\varphi + \sin\varphi + 7$;

д) $\Delta u + 5u = 0, 0 \le r < 3$, $u|_{r=3} = 12\sin^3\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi$;

е) $\Delta u + 6u = 0, 0 \le r < 1$, $u|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi - 2\cos\varphi + 4\sin\varphi$.

9. Уравнения параболического типа

9.1. Начально-краевая задача для однородного уравнения теплопроводности

Решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности $u_t' - a^2 u_{xx}'' = 0$, $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$ с начальными условиями $u(0,x) = \varphi(x)$ и граничными условиями $u(t,0) = u(t,l) = 0$ находится методом Фурье и имеет вид:

$$u(t.x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\frac{a^2\pi^2 k^2 t}{l^2}} \sin\frac{\pi kx}{l}, \tag{9.1.1}$$

где $c_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$.

Пример 9.1.1. Найти решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности $u_t' - u_{xx}'' = 0$, $x \in (0,2)$, $t \in (0,\infty)$ с начальным условием $u(0,x) = x(2-x)$ и граничными условиями $u(t,0) = u(t,2) = 0$.

Решение. По условию $l = 2$, $a = 1$, $\varphi(x) = x(2-x)$. По формуле для коэффициента в равенстве (9.1.1) интегрированием по частям находим $c_k = \int_0^2 x(2-x)\sin\frac{k\pi x}{2}dx =$

$$\left|\begin{array}{c} u = x(2-x),\ du = (2-x-x)dx = 2(1-x)dx, \\ dv = \sin\frac{k\pi x}{2}dx,\ v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2} \end{array}\right| = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}x(2-x)\Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi}\int_0^2 (1-x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$\left|\begin{array}{c} u = 1-x,\ du = -dx, \\ dv = \cos\frac{k\pi x}{2}dx,\ v = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2} \end{array}\right| = \frac{8}{k^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{8}{k^2\pi^2}\int_0^2 \sin\frac{k\pi x}{2}dx =$$

$$-\frac{16}{(k\pi)^3}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{16}{k^3\pi^3}\left((-1)^k - 1\right).$$

Полагая $k = 2m+1$, получим ответ: $u(t.x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{32}{(2m+1)^3\pi^3}e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 t}{4}}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2}$. □

9.0.1. Найти решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке:

а) $u_t' - 4u_{xx}'' = 0$, $x \in (0,2)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = \sin^3 2\pi x - \sin 4\pi x$, $u(t,0) = u(t,2) = 0$;

б) $u_t' - 9u_{xx}'' = 0$, $x \in (0,3)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 4\sin^3 3\pi x + 2\sin 6\pi x$, $u(t,0) = u(t,3) = 0$;
в) $u_t' - 4u_{xx}'' = 0$, $x \in (0,1)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 16\sin^3 \pi x - 3\sin 2\pi x$, $u(t,0) = u(t,1) = 0$;
г) $u_t' - u_{xx}'' = 0$, $x \in (0,2)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 8\sin^3 4\pi x - 2\sin 6\pi x$, $u(t,0) = u(t,2) = 0$;
д) $u_t' - \frac{1}{4}u_{xx}'' = 0$, $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = \sin^3 \pi x + 4\sin 2\pi x$, $u(t,0) = u\left(t,\frac{1}{2}\right) = 0$;
е) $u_t' - \frac{1}{9}u_{xx}'' = 0$, $x \in (0,3)$, $t \in (0,\infty)$, $u(0,x) = 8\sin^3 3\pi x - 4\sin 12\pi x$, $u(t,0) = u(t,3) = 0$.

9.2. Неоднородное уравнение теплопроводности на отрезке

Данную тему рассмотрим на примере.

Пример 9.2.1. Решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке

$$u_t' - u_{xx}'' = 4\sin^3 x, \quad t \in (0,\infty),\ x \in (0,\pi),$$
$$u(0,x) = 0, \quad x \in (0,\pi),$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in (0,\infty).$$

Решение. 1. Разлагаем правую часть уравнения $4\sin^3 x$ в ряд Фурье по системе собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (см. пример 4.1.4):

$$\begin{cases} u_{xx} = \lambda v,\ x \in (0,\pi), \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases}$$

т.е. по системе функций $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, …. Имеем

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x.$$

2. Решение задачи ищем в виде $u(t,x) = u_1(t)\sin x + u_3(t)\sin 3x.$

3.Подставляя это выражение в уравнение, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_1'(t) + u_1(t) = 3, \\ u_3'(t) + 9u_3(t) = -1. \end{cases}$$

4. Начальное условие эквивалентно следующим начальным условиям для системы: $u_1(0) = 0,\ u_3(0) = 0$.

5. Решая последовательно задачу Коши для каждого уравнения системы, получаем $u_1(t) = 3(1 - e^{-t}),\ u_3(t) = -\frac{1}{9}(1 - e^{-9t}).$

6. Подставляя $u_1(t)$, $u_3(t)$, получаем искомое решение задачи: $u(t,x) = 3(1 - e^{-t})\sin x - \frac{1}{9}(1 - e^{-9t})\sin 3x$. □

9.0.2. Решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке:

а) $u_t' - 4u_{xx}'' = 4\sin^3 x + 16\sin^5 x$, $t \in (0,\infty)$, $x \in (0,\pi)$, $u(0,x) = 0$, $x \in (0,\pi)$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \in (0,\infty)$;

б) $u_t' - 9u_{xx}'' = 8\sin^3 \frac{\pi x}{2} - 16\sin^5 \frac{\pi x}{2}$, $t \in (0,\infty)$, $x \in (0,2)$, $u(0,x) = 0$, $x \in (0,2)$, $u(t,0) = u(t,2) = 0$, $t \in (0,\infty)$;

в) $u'_t - u''_{xx} = \sin\frac{\pi x}{3} - 4\sin^3\frac{\pi x}{3} + 16\sin^5\frac{\pi x}{3}, t\in(0,\infty),\ x\in(0,3),\ u(0,x)=0,\ x\in(0,3),$
$u(t,0)=u(t,3)=0, t\in(0,\infty)$;

г) $u'_t - 4u''_{xx} = -\sin\frac{\pi x}{4} + 4\sin^3\frac{\pi x}{4} - 16\sin^5\frac{\pi x}{4}, t\in(0,\infty),\ x\in(0,4),\ u(0,x)=0,\ x\in(0,4),$
$u(t,0)=u(t,4)=0, t\in(0,\infty)$;

д) $u'_t - 16u''_{xx} = -2\sin\pi x - 8\sin^3\pi x + 16\sin^5\pi x, t\in(0,\infty),\ x\in(0,1),\ u(0,x)=0,\ x\in(0,1),$
$u(t,0)=u(t,1)=0, t\in(0,\infty)$;

е) $u'_t - u''_{xx} = \sin\frac{\pi x}{3} + 4\sin^3\frac{\pi x}{3} + 32\sin^5\frac{\pi x}{3}, t\in(0,\infty),\ x\in(0,3),\ u(0,x)=0,\ x\in(0,3),$
$u(t,0)=u(t,3)=0, t\in(0,\infty)$.

9.3. Уравнение теплопроводности в круге

Постановка задачи. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в круге:

$$u'_t - a^2\Delta u = 0,\quad 0\le r<r_0,\qquad t>0, \tag{9.3.1}$$

$$u\big|_{t=0} = r_0^2 - r^2, 0\le r<r_0, \tag{9.3.2}$$

$$u\big|_{r=r_0} = 0,\quad t>0. \tag{9.3.3}$$

План решения. 1. Записываем оператор Лапласа Δ в полярных координатах (r,φ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right). \tag{9.3.4}$$

Так как граничное и начальное условия не зависят от φ и коэффициенты уравнения (9.3.4) не зависят от φ, решение начально-краевой задачи (9.3.1)-(9.3.3) также не зависят от φ и его можно искать в виде $u(t,r,\varphi)=u(t,r)$, где функция $u(t,r)$ удовлетворяет уравнению (9.3.4) с $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\equiv 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{9.3.5}$$

2. Находим вспомогательные решения $u(t,r)$ уравнения (9.3.5) в виде $v(t,r)=T(t)R(r)$, причем $|R(0)|<\infty$, $R(r_0)=0$. Для этого подставляем функцию $v(t,r)=T(t)R(r)$ в уравнение (9.3.5) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R} = \frac{\frac{dT}{dt}}{a^2T} = -\lambda = const.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, 0\le r<r_0, |R(0)|<\infty$, $R(r_0)=0$.

б) $T' + a^2\lambda T = 0$.

3. Решаем задачу а). Общее решение уравнения $R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0$ имеет вид

$$R(r)=\tilde{A}J_0\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)+\tilde{B}Y_0\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)$$

(см. пример 5.1.1 для уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+\left(k^2x^2-\nu^2\right)y=0$, $y=J_\nu(kx)$ с $\nu=0$), где J_0 и Y_0 - функции Бесселя и Вебера. Поскольку $|R(0)|<\infty$, а $Y_0(r)\to\infty$ при $r\to 0$, полагаем $\tilde{B}=0$.

Используя граничное условие $R(r_0)=0$, получаем

$$\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \qquad R_n=\tilde{A}_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right), \qquad n=1,2,\ldots,$$

где μ_n - нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n)=0$, $n=1,2,\ldots$.

4. Решаем задачу б). При $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2$ имеем

$$T'+\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2a^2T=0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_n(t)=B_ne^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2t}.$$

5. Итак, вспомогательные решения уравнения (9.3.5) имеют вид

$$v_n(t,r)=\tilde{A}_nB_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2t}=A_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2t},$$

где $A_n=\tilde{A}_nB_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

6. Решение $u(t,r)$ ищем в виде

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2t}. \qquad (9.3.6)$$

Эта функция является решением уравнения (9.3.1) и удовлетворяет граничному условию (9.3.3) при любых A_n, при которых ряд (9.3.6) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

7. Находим коэффициенты A_n, при которых $u(t,r)$ удовлетворяет начальному условию (9.3.2). Полагая в (9.3.6) $t=0$, получаем

$$u(0,r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)=r_0^2-r^2.$$

Воспользуемся результатом примера 5.2.1, так как

$$\frac{2}{\mu_n^2}J_{\nu+2}(\mu_n)=\int_0^1\left(1-x^2\right)x^\nu J_\nu(\mu_nx)xdx=\left|x=\frac{r}{r_0}\right|=\frac{1}{r_0^{\nu+4}}\int_0^{r_0}\left(r_0^2-r^2\right)J_\nu\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr, \qquad (9.3.7)$$

$$-\frac{1}{2}J_{\nu-1}(\mu_n)J_{\nu+1}(\mu_n)=\int_0^1 J_\nu^2(\mu_n x)xdx=\left|x=\frac{r}{r_0}\right|=\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0} J_\nu^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr. \qquad (9.3.8)$$

Следовательно, при $\nu=0$ в силу (9.3.7), (9.3.8) и равенства (5.2.4)

$$A_n=\frac{\int_0^{r_0}\left(r_0^2-r^2\right)J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr}{\int_0^1 J_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)rdr}=\frac{r_0^4\int_0^1\left(1-x^2\right)J_0(\mu_n x)xdx}{r_0^2\int_0^1 J_0^2(\mu_n x)xdx}=\frac{\frac{4}{\mu_n^2}r_0^4J_{\nu+2}(\mu_n)}{r_0^2J_1^2(\mu_n)}=\frac{4r_0^2J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)},$$

$n=1,2,\ldots$. Подставляя эти коэффициенты в формулу (9.3.6), получим

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4r_0^2J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right).\square$$

Пример 9.3.1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в круге:

$$\Delta u=0,\quad 0\le r<1,\qquad t>0\ , \qquad (9.3.9)$$

$$u|_{t=0}=1-r^2,\ 0\le r<1, \qquad (9.3.10)$$

$$u|_{r=1}=0,\ t>0. \qquad (9.3.11)$$

Решение. 1. Записываем оператор Лапласа Δ в полярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \qquad (9.3.12)$$

Так как граничное и начальное условия не зависят от φ и коэффициенты уравнения (9.3.12) не зависят от φ, решение начально-краевой задачи (9.3.9)-(9.3.11) также не зависят от φ и его можно искать в виде

$$u(t,r,\varphi)=u(t,r),$$

где функция $u(t,r)$ удовлетворяет уравнению (9.3.12) с $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\equiv 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}. \qquad (9.3.13)$$

3. Находим вспомогательные решения $v(t,r)$ уравнения (9.3.13) в виде

$$v(t,r)=T(t)R(r),$$

причем $|R(0)|<\infty$, $R(1)=0$. Для этого подставляем функцию $v(t,r)=T(t)R(r)$ в уравнение (9.3.13) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R}=\frac{\frac{dT}{dt}}{T}=-\lambda=const.$$

Поэтому функции $R(r)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0,\ 0\le r<1,\ |R(0)|<\infty,\ R(1)=0$.

б) $T'+\lambda T=0$.

4. Решаем задачу а). Общее решение уравнения $R''+\frac{1}{r}R'+\lambda R=0$ имеет вид

$$R(r)=\widetilde{A}J_0\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)+\widetilde{B}Y_0\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)$$

(уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+\left(k^2x^2-\nu^2\right)y=0$, $y=J_\nu(kx)$ с $\nu=0$), где J_0 и Y_0 - функции Бесселя и Вебера. Поскольку $|R(0)|<\infty$, а $Y_0(r)\to\infty$ при $r\to 0$, полагаем $\widetilde{B}=0$.

Используя граничное условие $R(1)=0$, получаем

$$\lambda_n=\mu_n^2, \qquad R_n=\widetilde{A}_nJ_0(\mu_n r), \qquad n=1,2,\ldots,$$

где μ_n - нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n)=0$, $n=1,2,\ldots$.

5.Решаем задачу б). При $\lambda_n=\mu_n^2$ имеем $T'-\mu_n^2T=0$. Общее решение этого уравнения есть $T_n(t)=B_ne^{-\mu_n^2t}$.

6.Итак, вспомогательные решения уравнения (9.3.13) имеют вид

$$v_n(r,z)=\widetilde{A}_nB_nJ_0(\mu_n r)e^{-\mu_n^2t}=A_nJ_0(\mu_n r)e^{-\mu_n^2t},$$

где $A_n=\widetilde{A}_nB_n$ - постоянные, которые предстоит найти.

7.Решение $u(t,r)$ ищем в виде

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\mu_n r)e^{-\mu_n^2t} \,. \tag{9.3.14}$$

Эта функция является решением уравнения (9.3.9) и удовлетворяет граничному условию (9.3.11) при любых A_n, при которых ряд (9.3.14) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

8.Находим коэффициенты A_n, при которых $u(t,r)$ удовлетворяет начальному условию (9.3.10).

Полагая в (9.3.14) $t=0$, получим

$$u(0,r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\mu_n r)=1-r^2.$$

Следовательно, при $\nu=0$ в силу (9.3.7), (9.3.8) и равенства (5.2.4)

$$A_n=\frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}\,,\quad n=1,2,\ldots\,.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (9.3.14), получим

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)sh(\mu_n)}e^{-\mu_n^2t}J_0(\mu_n r)\,.\square$$

9.0.3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в круге:

а) $u_t'-2\Delta u=0$, $0\le r<3$, $t\in(0,\infty)$, $\quad u|_{t=0}=9-r^2$, $\quad u|_{r=3}=0$;

б) $u_t'-3\Delta u=0$, $0\le r<4$, $t\in(0,\infty)$, $\quad u|_{t=0}=16-r^2$, $\quad u|_{r=4}=0$;

в) $u_t'-4\Delta u=0$, $0\le r<2$, $t\in(0,\infty)$, $\quad u|_{t=0}=4-r^2$, $\quad u|_{r=2}=0$;

г) $u_t'-5\Delta u=0$, $0\le r<1$, $t\in(0,\infty)$, $\quad u|_{t=0}=1-r^2$, $\quad u|_{r=1}=0$;

д) $u_t'-16\Delta u=0$, $0\le r<5$, $t\in(0,\infty)$, $\quad u|_{t=0}=25-r^2$, $\quad u|_{r=5}=0$;

е) $u_t'-9\Delta u=0$, $0\le r<6$, $t\in(0,\infty)$, $\quad u|_{t=0}=36-r^2$, $\quad u|_{r=6}=0$.

9.4. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Физический смысл – нахождение температуры бесконечного теплопроводящего стержня в любой момент времени $t>0$, если в начальный момент $t=0$ его температура в каждой точке есть $u_0(x)$.

Пример 9.4.1. Найти решение задачи Коши $\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(0,x) = u_0(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$

Решение. Предполагаем, что для $u_0(x)$, $u_0'(x)$, $u_0''(x)$, $u(t,x)$, $u_x'(t,x)$, $u_{xx}''(t,x)$, $u_t'(t,x)$ определено преобразование Фурье. Из уравнения теплопроводности имеем

$$\hat{F}(u_t'(t,x)) = a^2 \hat{F}(u_{xx}''(t,x)). \tag{9.4.1}$$

Введем обозначение $\hat{F}(u(t,x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t,x) e^{-i\lambda x} dx = v(t,\lambda)$. В таком случае $\hat{F}(u_t'(t,x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t'(t,x) e^{-i\lambda x} dx = v_t'(t,\lambda)$. Заметим, что $\hat{F}(u_0(x)) = \hat{F}(u(0,x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(0,x) e^{-i\lambda x} dx = v(0,\lambda)$.

По свойству преобразования Фурье от производной $\hat{F}(u_{xx}''(t,x)) = (i\lambda)^2 v(t,\lambda) = -\lambda^2 v(t,\lambda)$. Подставляя найденные выражения в (9.4.1), получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными относительно t и v: $\begin{cases} v_t'(t,\lambda) = -\lambda^2 a^2 v(t,\lambda); \\ v(0,\lambda) = \hat{F}(u_0(x)) \end{cases}$.

Находим решение $v(t,\lambda) = v(0,\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t}$. Следовательно, преобразование Фурье для решения задачи Коши уравнения теплопроводности удовлетворяет равенству: $\hat{F}(u(t,x)) = v(t,\lambda) = v(0,\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t} = \hat{F}(u_0(x)) e^{-\lambda^2 a^2 t}$. Используя результат примера 6.1.3, получим $\hat{F}(u(t,x)) = \hat{F}(u_0(x)) \hat{F}\left(\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right) \risingdotseq u_0(x) * \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

Таким образом, получим представление для решения в виде **формулы Пуассона**

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \ . \square$$

Пример 9.4.2. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности $\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 4 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(0,x) = e^{-4x^2 - 3x}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$

Решение. По условию $a=2$. По формуле, полученной в предыдущем примере, имеем

$$u(t,x)=\frac{1}{4\sqrt{\pi\ t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4\xi^2-3\xi}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}d\xi\ .$$

Делаем замену переменной в интеграле:

$$\frac{\xi-x}{4\sqrt{t}}=y\,,\ \frac{d\xi}{4\sqrt{t}}=dy\,,\ \xi=4\sqrt{t}\,y+x\,.$$

Получим

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4(4\sqrt{t}y+x)^2-3(4\sqrt{t}y+x)}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4(16ty^2+8\sqrt{t}yx+x^2)-12\sqrt{t}y-3x}e^{-y^2}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2-3x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-64ty^2-32\sqrt{t}yx-12\sqrt{t}y-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2-3x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2(64t+1)-y(32\sqrt{t}x+12\sqrt{t})}dy\,.$$

Выделяем полный квадрат в выражении

$$-y^2(64t+1)-y(32\sqrt{t}x+12\sqrt{t})=-(64t+1)\left(y^2+2y\frac{16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}}{64t+1}\right)=$$

$$=-(64t+1)\left(y+\frac{16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}}{64t+1}\right)^2+\frac{\left(16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}\right)^2}{64t+1}\,.$$

Получим

$$u(t,x)=\frac{e^{-4x^2-3x+\frac{(16x+6)^2t}{64t+1}}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(64t+1)\left(y+\frac{16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}}{64t+1}\right)^2}dy\,.$$

Используя результат из примера 6.1.1, получим

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{64t+1}}e^{-4x^2-3x+\frac{4t(8x+3)^2t}{64t+1}}\,.\square$$

9.0.4. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности:

а) $u'_t=2u''_{xx},\ -\infty<x<\infty\,,0<t<\infty\,,\ u(0,x)=e^{-x^2-2x}$;

б) $u'_t=3u''_{xx},\ -\infty<x<\infty\,,0<t<\infty\,,\ u(0,x)=e^{-2x^2+x}$;

в) $u'_t=4u''_{xx},\ -\infty<x<\infty\,,0<t<\infty\,,\ u(0,x)=e^{-4x^2-3x}$;

г) $u'_t=u''_{xx},\ -\infty<x<\infty\,,0<t<\infty\,,\ u(0,x)=e^{-2x^2+5x}$;

д) $u'_t=3u''_{xx},\ -\infty<x<\infty\,,0<t<\infty\,,\ u(0,x)=e^{-x^2+3x}$;

е) $u'_t=5u''_{xx},\ -\infty<x<\infty\,,0<t<\infty\,,\ u(0,x)=e^{-3x^2-x}$.