ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**

Кафедра прикладной математики
В.Л. Кузнецов

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ПОСОБИЕ
по выполнению курсовой работы

«Стохастические процессы в системах со случайной структурой»

для студентов III курса
специальности 230401
дневного обучения

Москва – 2009

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. М.С. Аль-Натор

Кузнецов В.Л.

Теория случайных процессов
Пособие по выполнению курсовой работы «Стохастические процессы в системах со случайной структурой»
М.: МГТУГА, 2009.-24с.

В пособии приведены задания для выполнения курсовой работы «Стохастические процессы в системах со случайной структурой» по дисциплине «Теория случайных процессов», даются указания и рекомендации по выполнению работы.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория случайных процессов» по учебному плану специальности 230401 для студентов III курса дневного обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 17.10.09г. и методического совета 17.10.09г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение курсовой работы связано с практическим применением знаний и умений, полученных студентами при изучении дисциплины «Теория случайных процессов». В качестве объекта исследования выбрана модель системы, которую можно классифицировать как систему со случайно изменяющимися параметрами. Изменение такого параметра описывается либо обобщенным пуассоновским процессом, либо марковским процессом с дискретным пространством состояний. В такой постановке задача о преобразовании стационарных процессов в учебной литературе не описывается, поэтому при выполнении курсовой работы следует провести декомпозицию задачи, выделить стандартные блоки и последовательно сформулировать всю совокупность подзадач, включаемых в работу.

Перед началом выполнения задания рекомендуется просмотреть теоретический материал. В качестве учебной литературы для этой цели рекомендуется книга И.К. Волкова, С.М. Зуева и Г.М. Цветковой «Случайные процессы» из серии Математика в техническом университете, выпущенная издательством МГТУ им. Н.Э. Баумана. В первую очередь следует обратить внимание на содержание 2,4 и 5-ой глав. Полезную информацию и подходы к решению некоторых задач, включаемых в работу, можно найти в книге Б.М. Миллера и А.Р. Панкова «Случайные процессы в примерах и задачах» издательства МАИ. Ряд указаний и подсказок к решению наиболее сложных вопросов работы можно найти во второй части предлагаемого методического пособия.

1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

1.1 ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сигнал, моделируемый стационарным центрированным гауссовым случайным процессом $\boldsymbol{X(t)}$ с корреляционной функцией $\boldsymbol{R(\tau)}$, подается на вход некоторой системы, один из параметров которой - $\boldsymbol{K(t)}$ может меняться случайным образом. Случайные функции $\boldsymbol{X(t)}$ и $\boldsymbol{K(t)}$ - независимы. Выходной сигнал - $\boldsymbol{Y(t)}$ связан с входным - $\boldsymbol{X(t)}$ некоторым уравнением

$$L\left[y(t)\right]=F\left[X(t),\ K(t),\ n(t)\right], \qquad \text{(A)}$$

где $\boldsymbol{n(t)}$ - случайная функция, описывающая шум, возникающий в системе.

Необходимо определить спектральную плотность, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $\boldsymbol{Y(t)}$.

1.2 ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ, РЕАЛИЗУЕМЫХ В РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

a) **Корреляционные функции входных сигналов**

$X_1(t)$	$R_1(\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha\cdot\|\tau\|\}\ \cos\ (\beta\cdot\tau)\ ,\ \alpha>0$
$X_2(t)$	$R\ (\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha\cdot\|\tau\|\}\cdot(1+\alpha\cdot\|\tau\|)\ ,\quad \alpha>0$
$X_3(t)$	$R\ (\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha\cdot\|\tau\|\}\ \left(1+\alpha\cdot\|\tau\|+\frac{(\alpha\cdot\tau)^2}{3}\right),\ \alpha>0$
$X_4(t)$	$R\ (\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha\cdot\|\tau\|\}\ \left(cos(\beta\cdot\tau)\ -\frac{\alpha}{\beta}\ \sin(\beta\cdot\|\tau\|)\right),\quad \alpha>0$
$X_5(t)$	$R\ (\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha\cdot\|\tau\|\}\ \left(ch\ (\beta\cdot\tau)\ +\frac{\alpha}{\beta}\ sh\ (\beta\cdot\|\tau\|)\right),\quad \alpha>0$

b) **Описание процесса изменения структуры системы (функция $K(t)$)**

- $K_1(t)$ - марковский случайный процесс с двумя состояниями k_{11} и k_{12}. Плотность вероятности перехода из состояния 1 в состояние 2 – λ, плотность вероятности обратного перехода - μ.

- $K_2(t)$ - т.н. обобщенный пуассоновский процесс с двумя возможными состояниями k_{11} и k_{12}, математическим ожиданием m и дисперсией D. Интенсивность пуассоновского потока, порождающего обобщенный пуассоновский процесс, положить равной λ_0.

c) Шум в системе

- $n_1(t)$ - белый шум с интенсивностью - c,
- $n_1(t)$ - полосовой белый шум со спектральной плотностью $S_n(\nu)$

$$S_n(\nu)=\begin{cases} c & при\ |\ \nu\ |<N \\ 0 & при\ |\ \nu\ |>N \end{cases}$$

d) Вид оператора L

$L_1 = \left(\dfrac{d}{dt} + b^2 \right)$	$L_2 = \left(\dfrac{d^2}{dt^2} + b^2 \right)$
$L_3 = \left(\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{d}{dt} \right)$	$L_4\left[Y(t)\right] = Y\left(t + T\right)$
$L_5\left[Y(t)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\ \ Y(s)\ \ ds$, где $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\exp\{-t/T\}\ \ if\ \ t \geq 0 \\ 0\ \ if\ \ t < 0 \end{cases}$	

f) Вид зависимости $F\left[X(t),\ K(t),\ n(t)\right]$

$F_1 = X^2(t) + K(t) \cdot n\ (t)$	$F_2 = K(t) \cdot X(t+T) + n(t)$
$F_3 = K(t) \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s) \cdot X(s)\ \ ds + n(t)$	$F_4 = K(t) \cdot X^2(t) + n(t)$
$F_5 = K(t) \cdot \left[X(t) + n(t)\right]$	$F_6 = K(t) \cdot X(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s) \cdot n(s)\ \ ds$

Примечание. Функция $h(t)$ имеет вид $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\exp\{-t/T\}\ \ if\ \ t \geq 0 \\ 0\ \ if\ \ t < 0 \end{cases}$ для всех вариантов

1.3 ТАБЛИЦА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ПО ВАРИАНТАМ

№ ВАР.	L	F	$X\ (t)$	$K\ (t)$	$n(t)$
1	L_1	F_1	$X_1(t)$	$K_1(t)$	$n_1(t)$

2	L_2	F_2	$X_2(t)$	$K_2(t)$	$n_2(t)$
3	L_3	F_3	$X_3(t)$	$K_2(t)$	$n_1(t)$
4	L_4	F_4	$X_4(t)$	$K_1(t)$	$n_2(t)$
5	L_5	F_5	$X_5(t)$	$K_2(t)$	$n_1(t)$
6	L_1	F_6	$X_3(t)$	$K_2(t)$	$n_2(t)$
7	L_2	F_1	$X_1(t)$	$K_1(t)$	$n_1(t)$
8	L_3	F_2	$X_2(t)$	$K_1(t)$	$n_2(t)$
9	L_4	F_3	$X_3(t)$	$K_2(t)$	$n_1(t)$
10	L_5	F_4	$X_4(t)$	$K_1(t)$	$n_2(t)$
11	L_1	F_5	$X_5(t)$	$K_1(t)$	$n_1(t)$
12	L_2	F_6	$X_2(t)$	$K_1(t)$	$n_2(t)$
13	L_3	F_1	$X_3(t)$	$K_2(t)$	$n_1(t)$
14	L_4	F_2	$X_1(t)$	$K_2(t)$	$n_2(t)$
15	L_5	F_3	$X_2(t)$	$K_1(t)$	$n_1(t)$
16	L_1	F_4	$X_3(t)$	$K_2(t)$	$n_2(t)$
17	L_2	F_5	$X_4(t)$	$K_1(t)$	$n_1(t)$
18	L_3	F_6	$X_5(t)$	$K_1(t)$	$n_2(t)$
19	L_4	F_1	$X_4(t)$	$K_2(t)$	$n_1(t)$
20	L_5	F_2	$X_3(t)$	$K_2(t)$	$n_2(t)$
21	L_1	F_3	$X_2(t)$	$K_2(t)$	$n_1(t)$
22	L_2	F_4	$X_1(t)$	$K_1(t)$	$n_2(t)$
23	L_3	F_5	$X_2(t)$	$K_1(t)$	$n_1(t)$
24	L_4	F_6	$X_4(t)$	$K_2(t)$	$n_2(t)$
25	L_5	F_1	$X_1(t)$	$K_1(t)$	$n_2(t)$

1.4. СОДЕРЖАНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

Структура пояснительной записки к курсовой работе и последовательность изложения результатов выполнения должны быть следующими.

1. Титульный лист.

2.Оглавление

3. Введение.

4. Задание и исходные данные в соответствии с номером варианта.

5. Вычисление корреляционной функции для случайного параметра системы – $K(t)$.

6. Расчет корреляционной функции для случайного процесса $F\left[X(t),\ K(t),\ n(t)\right]$.

7. Вычисление спектральной плотности процесса $F\left[X(t),\ K(t),\ n(t)\right]$.

8. Вывод аналитических формул для спектральной плотности исследуемого случайного процесса $\boldsymbol{Y(t)}$.

9. Вычисление корреляционной функции и дисперсии процесса $\boldsymbol{Y(t)}$.

10. Качественный анализ характеристик процесса $\boldsymbol{Y(t)}$ от параметров процессов, воздействующих на систему.

11. Заключение

12. Список использованной литературы

1.5 ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

1. В пояснительной записке все пункты выполнения курсовой работы должны располагаться в той последовательности, которая приведена выше, иметь ту же нумерацию и те же заголовки. В зависимости от сложности выполняемого задания разрешается вводить подпункты, структурирующие изложение материала. В начале каждого пункта кратко излагаются необходимые элементы теории.

2. Основные полученные аналитические формулы должны иллюстрироваться рисунками, дающими представление о качественном характере поведения исследуемых величин и процессов. Рисунки должны быть пронумерованы и иметь подписи.

3. В пояснительной записке должны быть введение и заключение. Во введении формулируются цели курсовой работы с учётом её содержания. В заключении даётся краткий анализ результатов с отражением их особенностей.

4. Оглавление курсовой работы располагается после титульного листа, именуется как "Содержание" и состоит из номеров и названий разделов с указанием номеров страниц.

5. Курсовая работа оформляется на стандартных листах формата А4. Шрифт для основного текста Times New Roman Cyr, размер 14 пунктов. Текстовая часть проекта выполняется по ГОСТ 2.105-95 "'Общие

требования к текстовым документам". Листы должны быть надежно скреплены, страницы пронумерованы.

6. Список использованной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.32-91 и приводится на последней странице работы.

7. Текст курсовой работы должен быть расположен на одной стороне листа. Обратной (чистой) стороне листа используется для пояснений и исправлений в соответствии с замечаниями преподавателя, если после рецензирования исправления и комментарии потребуются.

8. После внесения замечаний преподавателя замена листов не допускается. Можно лишь вклеивать дополнительные листы с исправлениями.

2. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

2.1. Преобразование Фурье случайных процессов

При исследовании детерминированных процессов важную роль играет гармонический анализ – анализ фурье-преобразований рассматриваемых функций. Естественно использовать этот аппарат и при анализе случайных процессов. Канонический подход к этим вопросам [2,3] опирается на утверждение о существовании ортогональной стохастической меры $Z_\xi\left(d\lambda\right)$, определенной на борелевской $\sigma-$алгебре, так, что имеет место представление

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Z_\xi\left(d\lambda\right), \quad t\in T \ . \tag{1}$$

Однако, для лучшего понимания связи подходов классического гармонического анализа и спектральных представлений случайных процессов полезно воспользоваться другим интегральным представлением для $\xi\left(\omega,t\right)$ [1]

$$\xi(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\omega,\lambda\right) e^{i\lambda t} d\lambda, \quad t\in T\,, \tag{2}$$

полностью идентичным по внешнему виду образу Фурье непериодической детерминированной функции. Здесь $\psi\left(\omega,\nu\right)-$изображение интегрального преобразования Фурье для анализируемого случайного процесса. Сопоставление представлений (1) и (2) дает:

$$M\left\{Z(d\lambda)\right\}=0 \qquad\qquad M\left\{\psi\left(\omega,\lambda\right)\right\}=0 \tag{3}$$

$$M\left\{\left|Z(d\lambda)\right|^2\right\}=S_\xi(\lambda)d\lambda \tag{4a}$$

$$M\left\{\psi\left(\omega,\lambda\right)\cdot\psi^{*}\left(\omega,\lambda_1\right)\right\}=S_{\xi}(\lambda)\cdot\delta\left(\lambda-\lambda_1\right) \tag{4b}$$

Здесь $S_{\xi}\left(\lambda\right)$ - спектральная плотность процесса на частоте λ, а $\delta(\cdot)-$ $\delta-$функция Дирака. Ортогональность стохастической меры $Z_{\xi}\left(d\lambda\right)$ соответствует $\delta-$коррелированности $\psi\left(\omega,\nu\right)$ (появление $\delta-$функции Дирака в (4b)),

а кажущееся внешнее различие в (4a) и (4b) легко снимается, если вспомнить, что обобщенная функция определена как линейный функционал. Т.е. для (4b) можно записать

$$\int\limits_{\lambda-\Delta/2}^{\lambda+\Delta/2} d\lambda' \int\limits_{\lambda'-\Delta/2}^{\lambda'+\Delta/2} d\lambda_1\cdot S_{\xi}(\lambda')\cdot\delta\left(\lambda'-\lambda_1\right)=S_{\xi}(\lambda)\cdot\Delta\ , \tag{5}$$

что в точности соответствует (4a).

Из сказанного следует, что $Z_{\xi}\left(d\lambda\right)=\psi\left(\omega,\lambda\right)\cdot d\lambda$, т.е. стохастическую меру $Z_{\xi}\left(d\lambda\right)$ (с точностью до множителя $d\lambda$) можно интерпретировать как случайную комплексную амплитуду спектральной компоненты $e^{i\lambda t}$ (гармоники) случайного процесса $\xi(\omega,t)$.

Отметим, что если стационарный случайный процесс не центрирован, т.е. его математическое ожидание $m_{\xi}\left(t\right)$ не равно нулю, то представление (2) следует расширить:

$$\xi(\omega,t)=m_{\xi}\left(t\right)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\omega,\lambda\right)e^{i\lambda t}d\lambda,\quad t\in T \tag{6}$$

2.2. Основные характеристики стационарных случайных процессов

Здесь и далее под стационарностью мы будем понимать лишь стационарность в широком смысле.

Напомним, что корреляционной функцией стационарного случайного процесса $\xi(\omega,t)$ называют регулярную (неслучайную) функцию $R(\tau)$, определяемую соотношением

$$R(\tau)=M\left[\left(\xi(\omega,t+\tau)-m(t+\tau)\right)\cdot\left(\xi(\omega,t)-m(t)\right)^{*}\right] \tag{7}$$

Дисперсия D_{ξ} стационарного случайного процесса постоянна и равна

$$D_{\xi}=K_{\xi}(0)=M\left[\left|\xi\left(\omega,t\right)\right|^{2}\right] \tag{8}$$

Теорема Винера – Хинчина (Бохнера – Хинчина).

Пусть $\xi(\omega,t)$ стационарный случайный процесс с непрерывной корреляционной функцией $R(\tau)$. Тогда найдется однозначно определенная вещественная ограниченная монотонно неубывающая функция $F_{\xi}\left(\lambda\right),\quad \lambda\in R^{1}$, непрерывная справа на R^{1} и $F_{\xi}\left(-\infty\right)=0$, такая, что

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF_{\xi}(\lambda) \qquad (9)$$

Функция $F_{\xi}(\lambda)$ называется спектральной функцией стационарного случайного процесса $\xi(\omega,t)$. Если $F_{\xi}(\lambda)$ при каждом $\lambda \in R^1$ представима в виде

$$F_{\xi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} S(\nu)d\nu, \qquad (10)$$

то вещественная функция $S(\nu)$ называется спектральной плотностью стационарного случайного процесса $\xi(\omega,t)$. Учитывая (10), представление (9) можно переписать в виде

$$\begin{cases} R_{\xi}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} S(\nu)d\nu \\ S(\nu)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu\tau} R_{\xi}(\tau)d\tau \end{cases}, \qquad (11)$$

т.е. представить связь между корреляционной функцией стационарного случайного процесса и его спектральной плотностью как преобразование Фурье.

Если случайный процесс вещественный, то $R_{\xi}(\tau)=R_{\xi}(-\tau)$ и

$$S(\nu)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(\nu\tau)R_{\xi}(\tau)d\tau\,. \qquad (12)$$

$$R(\tau)=2\int_{0}^{\infty}\cos(\nu\tau)\cdot S(\nu)d\nu \qquad (13)$$

П р и м е р. Стационарный белый шум имеет дельтаобразную корреляционную функцию

$$R_{\xi}(\tau)=\sigma^2\cdot\delta(\tau) \qquad (14)$$

Вычислить спектральную плотность этого случайного процесса.

Р е ш е н и е.

Применяя преобразование Фурье (11) к дельта – функции, получаем

$$S(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu\tau}\sigma^2\delta(\tau)\,d\tau=\frac{\sigma^2}{2\pi}e^{-i\nu\tau}\bigg|_{\tau=0}=\frac{\sigma^2}{2\pi}, \qquad \nu\in R^1 \qquad (15)$$

Из приведенного примера видно, что белый шум может быть определен как центрированный стационарный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью.

2.3. Линейные преобразования стационарных случайных процессов

Рассмотрим некоторую систему **S** , осуществляющую преобразование сигналов, т.е. функций, зависящих от времени. Функция, которая должна быть преобразована, называется входным сигналом (или входом), а функция, которая получается в результате преобразования, называется выходным сигналом (или выходом) системы **S.**

Система задается классом ***L*** допустимых функций на входе и оператором $L(X)=Y$, где X - входной, а Y - выходной сигнал системы.

Система называется линейной, если

1) класс ***L*** есть линейное пространство;

2) оператор L является линейным, т.е. удовлетворяет принципу суперпозиции:

$$L\left(\alpha X_1+\beta X_2\right)=\alpha L\left(X_1\right)+\beta L\left(X_2\right) \qquad \forall\alpha,\beta\in R^1,\quad X_1,X_2\in \boldsymbol{L}$$

Оператор L называют линейным преобразованием.

Частным случаем линейного преобразования является операция дифференцирования (оператор производной). Здесь можно сформулировать несколько теорем, полезных для выполнения задания курсовой работы.

Теорема 2.3.1. Пусть $T=\left[0,\infty\right)$, а $\xi(\omega,t),\quad t\in T$, и $\eta(\omega,t),\quad t\in T$, – стационарные скалярные случайные процессы со спектральными плотностями $S_\xi\left(\nu\right)$ и $S_\eta\left(\nu\right)$ соответственно. Пусть также случайный процесс $\xi(\omega,t),\quad t\in T$ является n раз дифференцируемым на множестве T. При этом, если выполняется

$$\eta(\omega,t)=d^n\xi(\omega,t)\big/dt^n,\quad t\in T,$$

то имеет место равенство

$$S_\eta\left(\nu\right)=\nu^{2n}\cdot S_\xi\left(\nu\right) \tag{16}$$

Теорема 2.3.2. Пусть $T=\left[0,\infty\right)$, а $\xi(\omega,t),\quad t\in T$ – стационарный скалярный случайный n раз дифференцируемым на множестве T процесс со спектральной плотностью $S_\xi\left(\nu\right)$ и

$$\eta(\omega,t)=\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot d^{n-k}\,\xi(\omega,t)\big/dt^{n-k},\quad t\in T,$$

где $b_k,\quad k=\overline{1,n}$ – известные постоянные, то $\eta(\omega,t),\quad t\in T$ – стационарный скалярный случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_\eta\left(\nu\right)=\left|\sum_{k=0}^{n}b_k\cdot\left(i\nu\right)^{n-k}\right|^2\cdot S_\xi\left(\nu\right) \tag{17}$$

П р и м е р. Рассмотрим задачу о прохождении белого шума $\xi(\omega,t), \quad t \in T$
через линейную динамическую систему первого порядка, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\eta}(\omega,t) + \alpha \cdot \eta(\omega,t) = \xi(\omega,t) \quad , \tag{18}$$

где $\alpha \in R^1$ – известный параметр, а случайный процесс $\xi(\omega,t), \quad t \in T$, как белый шум, имеет постоянную спектральную плотность $S_{\xi}(\nu)$

Р е ш е н и е. Согласно соотношению (17) спектральная плотность случайного процесса $\chi(\omega,t)$, определяемого левой частью уравнения (18)

$$\chi(\omega,t) = \dot{\eta}(\omega,t) + \alpha \cdot \eta(\omega,t),$$

имеет вид

$$S_{\chi}(\nu) = \left| i\nu + \alpha \right|^2 \cdot S_{\eta}(\nu)$$

Если положить спектральную плотность белого шума $\xi(\omega,t)$ равной C, то после прохождения динамической системы она будет описываться формулой

$$S_{\eta}(\nu) = \frac{C}{\left| i\nu + \alpha \right|^2} = \frac{C}{\nu^2 + \alpha^2}$$

Это соотношение было получено на основании простого утверждения: если случайные процессы равны (соотношение (18)), то равны и их спектральные плотности, т.е.

$$\left| i\nu + \alpha \right|^2 \cdot S_{\eta}(\nu) = C$$

Замечание относительно других видов линейных операторов, используемых в курсовой работе.

Линейными являются также операторы свертки случайного процесса с детерминированной функцией вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-s) \;\; X(s) \;\; ds$ и операторы сдвига во времени – $L\left[X(t)\right] = X(t+T)$, T – постоянная величина сдвига. Спектральные плотности процессов $\chi(\omega,t)$, порождаемых такими операторами, можно найти, используя следующий алгоритм $[1,3]$.

Сначала, используя преобразование Фурье, находим образ результирующего процесса – $\chi(\omega,t) = L\left[Y(\omega,t)\right]$. Затем, воспользовавшись линейностью оператора L, представлением $\chi(\omega,t)$ в виде

$$\chi(\omega,\lambda) = \Phi(\lambda) \cdot Y(\omega,\lambda)$$

С учетом полученного уравнение (А) можно переписать для образов Фурье функций, фигурирующих а нем, в виде

$$\Phi(\lambda)\cdot Y(\omega,\lambda)=F(\omega,\lambda) \qquad (19)$$

Здесь $F(\omega,\lambda)$ - образ Фурье правой части уравнения (A). Домножив (19) на комплексно-сопряженное уравнение и усреднив полученное по ансамблю реализаций, надо воспользоваться свойством (4b). Тогда спектральная плотность $S_y(\lambda)$ может быть вычислена по простой формуле

$$S_y(\lambda)=\frac{1}{\left|\Phi(\lambda)\right|^2}\cdot S_F(\lambda) \qquad (20)$$

2.4. Обобщенный пуассоновский процесс

Существенным элементом определения обобщенного пуассоновского процесса является понятие пуассоновского потока.

Потоком событий называется последовательность одинаковых событий, происходящих одно за другим через промежутки времени одинаковой длины.

Поток событий называется однородным (стационарным), если закон распределения величины $n(t,t+\Delta)$, $\Delta>0$, равной случайному числу событий из потока, происходящих на промежутке $\left[t,t+\Delta\right]$, не зависит от t. Интенсивность однородного потока постоянна :

$$\lambda(t)=\lim_{h\to 0}\frac{P(t,t+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P(0,h)}{h}=\lambda(0) \qquad (21)$$

Поток событий называется ординарным, если для всех $t\geq 0$, $h>0$ справедливо

$$\begin{cases} P\left\{n(t,t+h)=1\right\}=\lambda(t)\cdot h+o(h) \\ P\left\{n(t,t+h)>1\right\}=o(h) \end{cases}$$

Здесь $\lambda(t)$ - ограниченная функция, $\dfrac{o(h)}{h}\to 0$ при $h\to 0$

Поток событий называется потоком без последствий, если случайные величины $\left\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m\right\}$ (здесь $\xi_k=n\left(t_k,t_{k+1}\right)$ - количество событий на временном полуинтервале $\left[t_k,t_{k+1}\right)$) – независимы в совокупности.

Ординарный поток без последствий называют пуассоновским потоком событий.

Некоторые полезные свойства однородного пуассоновского потока

1. Вероятность появления на полуинтервале $\left[t_k,t_{k+1}\right)$ m событий определяется формулой

$$P\left\{n\left(t_1,t_2\right)=m\right\}=\exp\left\{-\lambda\left(t_2-t_1\right)\right\}\frac{\left(\lambda\cdot\left(t_2-t_1\right)\right)^m}{m!} \qquad (22)$$

2. Интенсивность однородного пуассоновского потока равна среднему числу событий, происходящих на интервале времени единичной длины.

3. Случайная длина интервала времени τ между двумя последовательными событиями имеет экспоненциальное распределение

$$P\left\{\tau<t\right\}=1-e^{-\lambda t} \qquad (23)$$

4. Распределение времени от произвольного текущего момента до появления очередного события не зависит от того, сколько прошло времени от момента появления последнего события до текущего момента и определяется соотношением, аналогичным (23).

Обобщенным пуассоновским процессом будем называть случайный процесс, реализации которого представляют собой кусочно-постоянные функции времени, последовательность точек разрывов которых образует пуассоновский поток, а V_k - значение функции на каждом «плато» ($t\in\left[t_k,t_{k+1}\right)$) - случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией D. Значения V_k и V_{k+1} $k\in N$ не коррелированны.

Замечание по поводу вычисления корреляционной функции обобщенного пуассоновского процесса.

Один из подходов к вычислению корреляционной функции обобщенного пуассоновского процесса описан в [3] в разделе, посвященном стационарным случайным функциям. Однако, более простой, на наш взгляд, подход к решению этой задачи базируется на прямом использовании определения корреляционной функции как математического ожидания произведения отклонений процесса от его среднего значения в моменты времени t и $t+\tau$. Очевидно, что если величина τ $\left(\tau\geq 0\right)$ меньше временного интервала $\left(t_{k+1}-t\right)$ между моментом $t\geq t_k$ и $t_{k+1}-$ моментом наступления очередного события из пуассоновского потока, то отклонения случайного процесса от среднего значения в моменты времени t и $t+\tau$ будут одинаковыми. В противном случае – это разные, некоррелированные межу собой величины.

Для корректного описания предлагаемого подхода необходимо сконструировать выражение для вероятности появления определенной совокупности событий. Перечислим эти события:

– A_k – событие, заключающееся в том, что выбранный момент времени $t\in\Delta_k=\left[t_k,t_{k+1}\right)$, $k\in Z$;

– A_{k+n} – событие, заключающееся в том, что момент времени $t+\tau\in\Delta_{k+n}$, $n-$неотрицательное целое число;

– B_t – событие, заключающееся в том, что случайный процесс в момент времени t принимает значение V';

– $B_{t+\tau}$ – событие, заключающееся в том, что случайный процесс в момент времени $t+\tau$ принимает значение V'' .

Рассмотрим следующую условную вероятность появления перечисленных событий $P\left(A_{k+n}, B_t, B_{t+\tau} \middle| A_k\right)$. Согласно теореме о полной вероятности имеем:

$$P\left(A_{k+n}, B_t, B_{t+\tau} \middle| A_k\right) = P\left(B_t, B_{t+\tau} \middle| A_k, A_{k+n}\right) \cdot P\left(A_{k+n}\right) \quad . \tag{24}$$

Отметим, что для условной вероятности $P\left(B_t, B_{t+\tau} \middle| A_k, A_{k+n}\right)$ справедливо следующее утверждение, которое следует обосновать при выполнении курсовой работы:

$$P\left(B_t, B_{t+\tau} \middle| A_k, A_{k+n}\right) = \begin{cases} P\left(B_t\right) \cdot P\left(B_{t+\tau}\right) & при \quad n > 0 \\ P\left(B_t\right) & при \quad n = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Теперь можно перейти к построению корреляционной функции $R(\tau)$ для обобщенного пуассоновского процесса:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= M\left[\left(\xi(t+\tau)-m\right)\left(\xi(t)-m\right)\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{V',V''} \left(\xi(t+\tau)-m\right)\left(\xi(t)-m\right) \cdot P\left(A_{k+n}, B_t, B_{t+\tau} \middle| A_k\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Результат легко получается при подстановке в (26) выражений (24),(25) и учете четвертого свойства однородного пуассоновского потока, отмеченным выше, при вычислении $P\left(A_{k+n}\right)$ при $n = 0$.

2.5 Замечания относительно вычисления корреляционной функции марковского процесса $K_1(t)$.

Процесс $K_1(t)$ относится к классу процессов рождения – гибели. Для построения уравнений Колмогорова, описывающих эволюцию вероятностей обнаружения системы в j –ом состоянии, полезно построить размеченный граф.

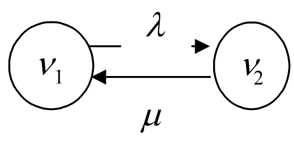

Рисунок 1.

Вспомним основные допущения, лежащие в основе вывода уравнений для процессов процесс рождения – гибели. Они могут быть сформулированы в виде следующих положений:

– если система в момент времени t находилась в состоянии j, то вероятность перехода из состояния j в состояние (j+1) в малом интервале времени Δt равна $\lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$;

– если система в момент времени t находилась в состоянии j, то вероятность перехода из j в (j-1) в малом интервале времени Δt равна $\mu_j \Delta t + o(\Delta t)$;

– вероятность перехода в состояние, отличное от двух соседних, на малом интервале Δt равна $o(\Delta t)$;

– вероятность сохранения прежнего j-го состояния за малый интервал времени Δt пропорциональна $1-(\lambda_j+\mu_j)\Delta t + o(\Delta t)$.

В этих приближениях уравнения Колмогорова для вероятности обнаружения системы в $j-$ом состоянии имеют вид:

$$\frac{dP_j}{dt} = -P_j(\lambda_{j,j+1} + \mu_{j,j-1}) + P_{j-1}\lambda_{j-1,j} + P_{j+1}\mu_{j+1,j} \quad . \qquad (27)$$

Используя общий вид уравнений (27), следует записать конкретный вид системы, описывающий граф на рис.-1.

Здесь следует отметить одно *важное обстоятельство*. Решение системы (27), как системы дифференциальных уравнений первого порядка, зависит от начальных условий, т.е. вектора $\vec{P}_0 = \left(P_1(0), P_2(0), ..., P_N(0)\right)$, задающего вероятности нахождения системы в каждом из N состояний (в нашем случае $N=2$). Поэтому $\vec{P}(t)$– решение системы (27) при векторе $\vec{P}_0$, имеющим, например, вид $\vec{P}_0 = (1,0,0,...,0)$, будет иметь смысл условной вероятности – вероятности того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии k при условии того, что в начальный момент времени она находилась в первом состоянии.

Для определения корреляционной функции рассматриваемого процесса необходимо вычислить следующие четыре вероятности:

$$P\left(\xi(t)=k_{11}, \xi(t+\tau)=k_{11}\right) \qquad P\left(\xi(t)=k_{11}, \xi(t+\tau)=k_{12}\right)$$
$$P\left(\xi(t)=k_{12}, \xi(t+\tau)=k_{11}\right) \qquad P\left(\xi(t)=k_{12}, \xi(t+\tau)=k_{12}\right)$$

Обсудим процедуру вычисления какой-либо одной из них. Представим $\mathrm{P}\left(\xi(t)=k_{11}, \xi(t+\tau)=k_{11}\right)$ в виде:

$$\mathrm{P}\left(\xi(t)=k_{11}, \xi(t+\tau)=k_{11}\right) = \mathrm{P}\left(\xi(t+\tau)=k_{11} \middle| \xi(t)=k_{11}\right) \times \mathrm{P}\left(\xi(t)=k_{11}\right) \qquad (28)$$

Очевидно, что первый сомножитель в правой части (28) представляет собой решение соответствующего уравнения Колмогорова на «начальном» временном интервале $[0,\tau]$ при условии $P\left(\xi(0)=k_{11}\right)=1$. «Начальный» момент в этом решении соответствует такому моменту t , при котором вероятностное распределение процесса по состояниям k_{11} и k_{12} становится стационарным. Другими словами $P\left(\xi\left(t\right)=k_{11}\right)$ в (28) соответствует асимптотическим значениям решения соответствующего уравнения Колмогорова, т.е. представляет собой финальную вероятность.

2.6 Замечания относительно вычисления корреляционной функции квадрата случайного гауссового процесса

В некоторых вариантах придется вычислять корреляционную функцию $R_{\xi^2}(\tau)$ по заданной корреляционной функции $R_{\xi}(\tau)$. При этом следует обратить внимание на то, что случайный процесс $\xi\left(\omega,t\right)$– гауссов, и обладает рядом полезных свойств. Напомним некоторые их них.

Обычно нормальное (гауссово) распределение n–мерной случайной величины $x=\left\{x_1,x_2,...,x_n\right\}$ записывается в канонической форме, т.е. через так называемую *корреляционную матрицу* $B=\left\|b_{ik}\right\|$, где b_{ik} - моменты второго порядка:

$$w\left(x\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left|B\right|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,k}b_{ik}^{-1}x_i x_k\right\} \tag{29}$$

Здесь $\left|B\right|=\det B$, а b_{ik}^{-1}– элементы матрицы B^{-1}, обратной матрице B.

Моменты порядка m вычисляются по общему правилу:

$$M\left[x_{i1}x_{i2}...x_{im}\right]=\frac{\partial\varphi\left[u\right]}{i^m\partial u_{i1}\partial u_{i2}...\partial u_{im}}\Big|_{u=0} \tag{30}$$

Здесь $\varphi\left(u\right)$– характеристическая функция, определяемая для гауссового процесса по формуле $\varphi\left(u\right)=M\left[e^{iux}\right]=e^{-S(u)}$, где $S\left(u\right)=\frac{1}{2}\sum_{ik}b_{ik}u_i u_k$.

Нетрудно видеть, что моменты нечетного порядка равны нулю, а моменты четного порядка находятся из выражения $\left[4\right]$:

$$M\left[x_{i1}x_{i2}...x_{i2n}\right]=\sum_{p.n.}b_{i1,i2}b_{i3,i4}...b_{i(2n-1),i2n} \tag{31}$$

Здесь под символом $\sum_{\eth.\ddot{i}.}$ понимается сумма перестановкам, дающим разные слагаемые. Например,

$$M\left[x_1x_2x_3x_4\right]=b_{1,2}b_{3,4}+b_{1,3}b_{2,4}+b_{1,4}b_{2,3} \tag{32}$$

Соотношение (32) является центральной подсказкой к задаче о вычислении корреляционной функции $R_{\xi^2}(\tau)$, равной

$$R_{\xi^2}(\tau)=M\left[\xi^2\left(\omega,t+\tau\right)\xi^2\left(\omega,t\right)\right]-R_{\xi}^2(0) \tag{33}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков И.К. Зуев С.М. Цветкова Г.М. Случайные процессы – М.: МГТУ им. Баумана, 2000

2. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика - М.: Наука,1989

3. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ,2002

4. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля – М.: Наука, 1978