ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Среда для выполнения работ – PHASER

(PHASER - специальная среда для исследования динамических систем, при желании студента, он может выполнить лаб. работы в выбранной им среде)

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПМ4

ЛЕКТОР АЛЬ-НАТОР М.С.

МОСКВА 2010 г.

Лабораторная работа 1

Исследование одномерных вещественных автономных систем с дискретным временем

$M = < X, f >$, где $X \subseteq R$ $f: X \to X$

1. Пусть дана система f(x)=f(a,b,x), где a,b- параметры. Для заданных значений параметров и начального состояния:

    а) построить график движения (с заданным числом шагов),

    по графику охарактеризовать тип движения.

    б) вывести числовые значения последних m точек.

2. Для заданной системы построить диаграмму Ламерея. Охарактеризовать по ней движение системы и найти графически неподвижные точки.

3. Для каждой системы найти параметрическое выражение для её неподвижных точек (т.е. должны быть получены явные выражения).

4. Найти явное условие характеристики точки (устойчивости, неустойчивости, безразличности) .

5. Нахождение циклов и определение их характеристик.

6. Найти явное параметрическое выражение для второй итерации функции и построить её график.
7. Используя диаграмму Ламерея найти все циклы длины 2, при этом нужно уметь отделять неподвижные точки.

8. Если это возможно, найти явные выражения для корней уравнения $f^{(2)}(x)=x$.

9. Для полученных выражений циклических точек найти условия характеризующие цикл и проиллюстрировать графически полученные результаты.
10, Подставляя заданные числовые значения параметров системы, получим числовые значения для циклических точек. (Запустив систему в одной из циклических точек нужно убедиться, что она проходит все остальные).

Замечание. Тем, кто отважится на исследование циклов более высокого порядка – баллы возрастают по экспоненте.

Системы.

1. $f(x)=ax+b$ (линейная система)

a	b	x_0	n	m
0	-2	0; 1	100	10
1	-0,5	0; 1 ;-1	100	10
1/2	5	-2	100	10
-1/3	-2	1	100	10
3	-2	0	100	10
-1	0,5	0,25	100	10

2. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (дробно-линейная система)

a, b, c, d	Начальное состояние	Число шагов
2 1 2 1	x_0 =0; 1; -1, 2; 2;-2	10
1 0,5 0,5 -1	0; 1; -1, 2; 2;-2	20
4 1 3 4	0; 1; -1, 2; 2;-2	100
1 1 2 1	0; 1; -1, 2; 1;-2	30
-1 1 2 2	0; 1; -1, 2; 3;-3	200
0 2 -4 0	0; 1; -1, 2; 3;-3	50

3. $f(x)=ax(1-x)$ (логистическпя система)

Параметры	Начальное состояние	Число шагов
a=0,5, a=1,5	X0=0,5	N=100
a=2 a=2,8	X=0,2	N=50
a=3,2 a= 4	X=0,8	N=200

4. $f(x)=a^x$ (показательная система)

Параметры	Начальное состояние	Число шагов
a=1	X_0=0, 1, -1, 2, -2, 0,5	N=10
a=2		20
a=1,4		100
a=$\sqrt{3}$		300
a=0,01		50

5. $f(x)=|ax-b|$

a, b	Начальное состояние	Число шагов
4, -1	X_0= 0, -3, 2, 1, -2	N=100
2, 3		50
0,5, 2		70

6. $f(x) =\{ax\}$, a =2, 3, x0 =$\frac{2}{5}$; $\frac{5}{7}$

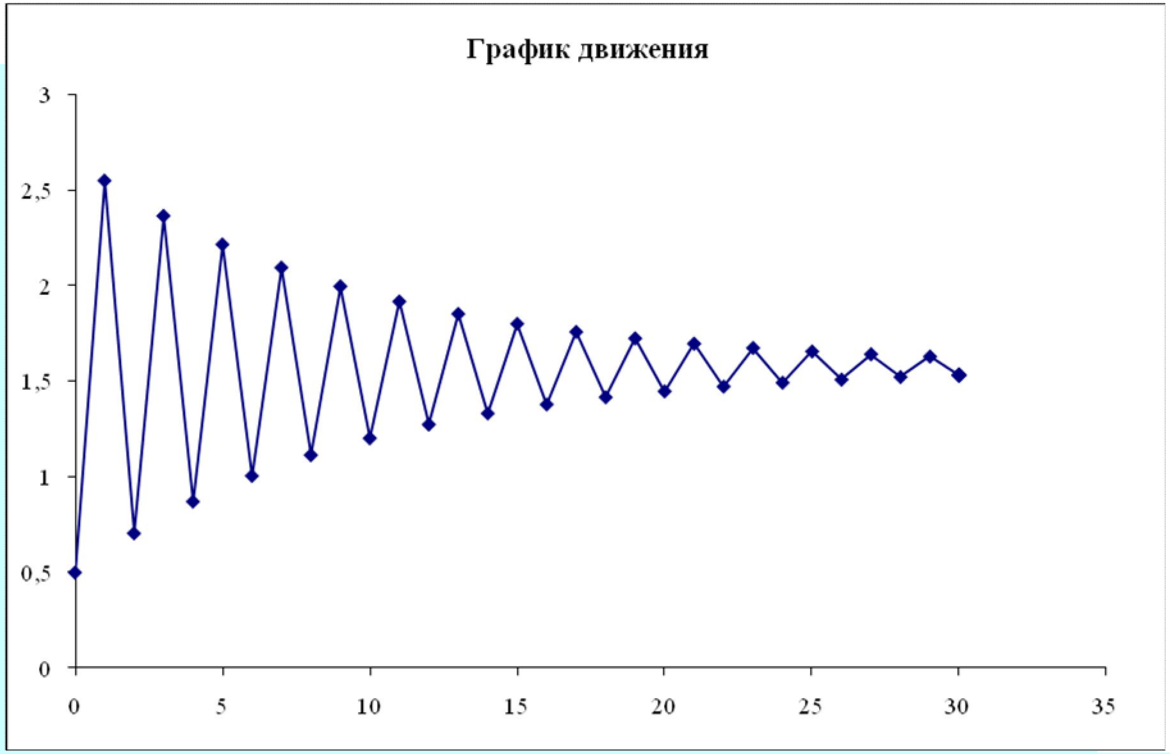
где {z}- дробная часть числа z.

образец выполнения лабораторной работы для линейных систем

График движения

Линейное уравнение

	f(x)=	ax+b
	a =	-0,900
	b =	3,000
	x_0 =	0,500
	n =	30
n=	15	2
n=	16	1
n=	17	2
n=	18	1
n=	19	2
n=	20	1
n=	21	2
n=	22	1
n=	23	2
n=	24	1
n=	25	2
n=	26	2
n=	27	2
n=	28	2
n=	29	2
n=	30	2



Неподвижная точка

p = 1,5789 **устойчивая (аттрактор)** **Циклы** **нет**

Вариация графика движения

Линейное уравнение

f(x)= ax+b

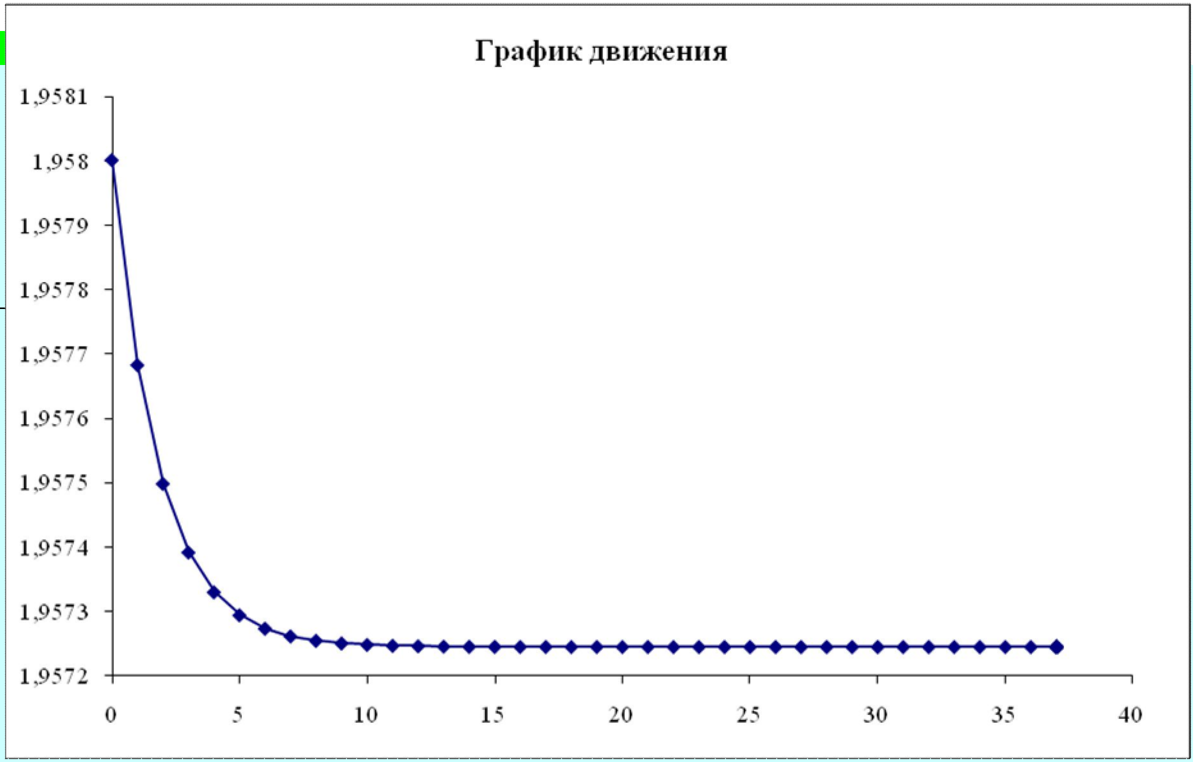
a = 0,579

b = 0,824

x_0 = 1,958

n = 37

n =	22	1,957
n=	23	1,957
n=	24	1,957
n=	25	1,957
n=	26	1,957
n=	27	1,957
n=	28	1,957
n=	29	1,957
n=	30	1,957
n=	31	1,957
n=	32	1,957
n=	33	1,957
n=	34	1,957
n=	35	1,957
n=	36	1,957
n=	37	1,957

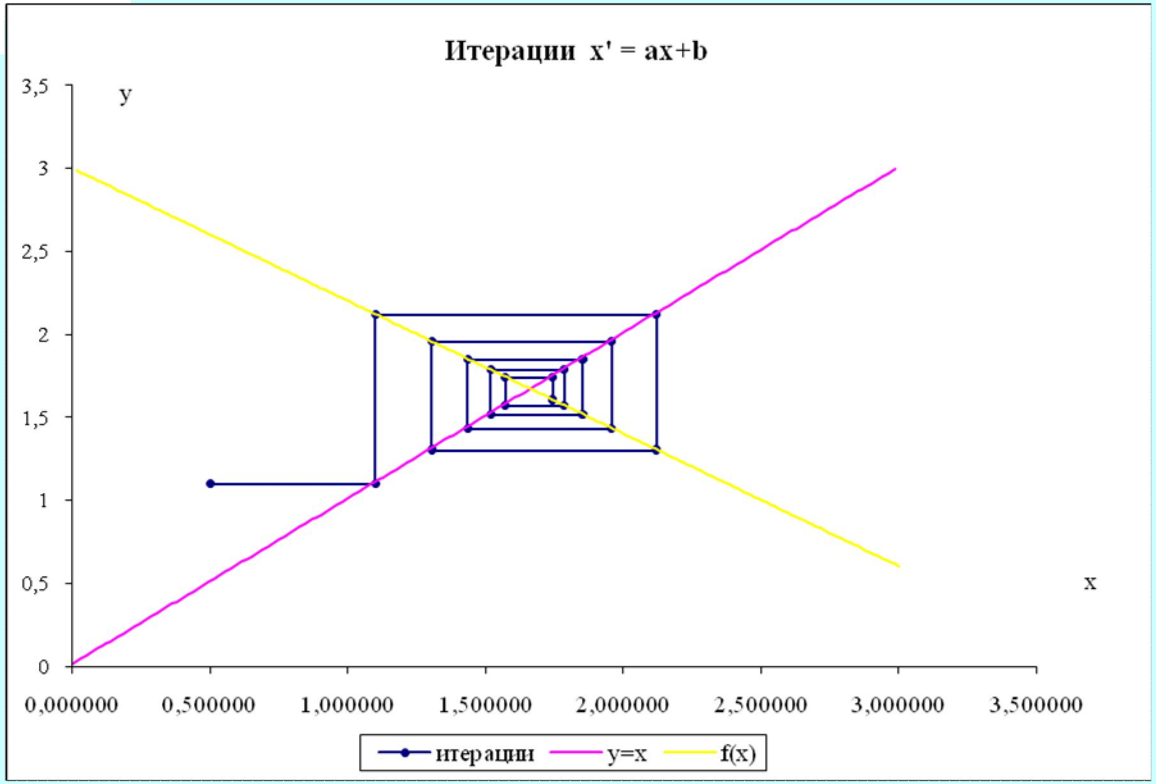


Неподвижная точка

p = 1,9572 **устойчивая (аттрактор)** **Циклы** **нет**

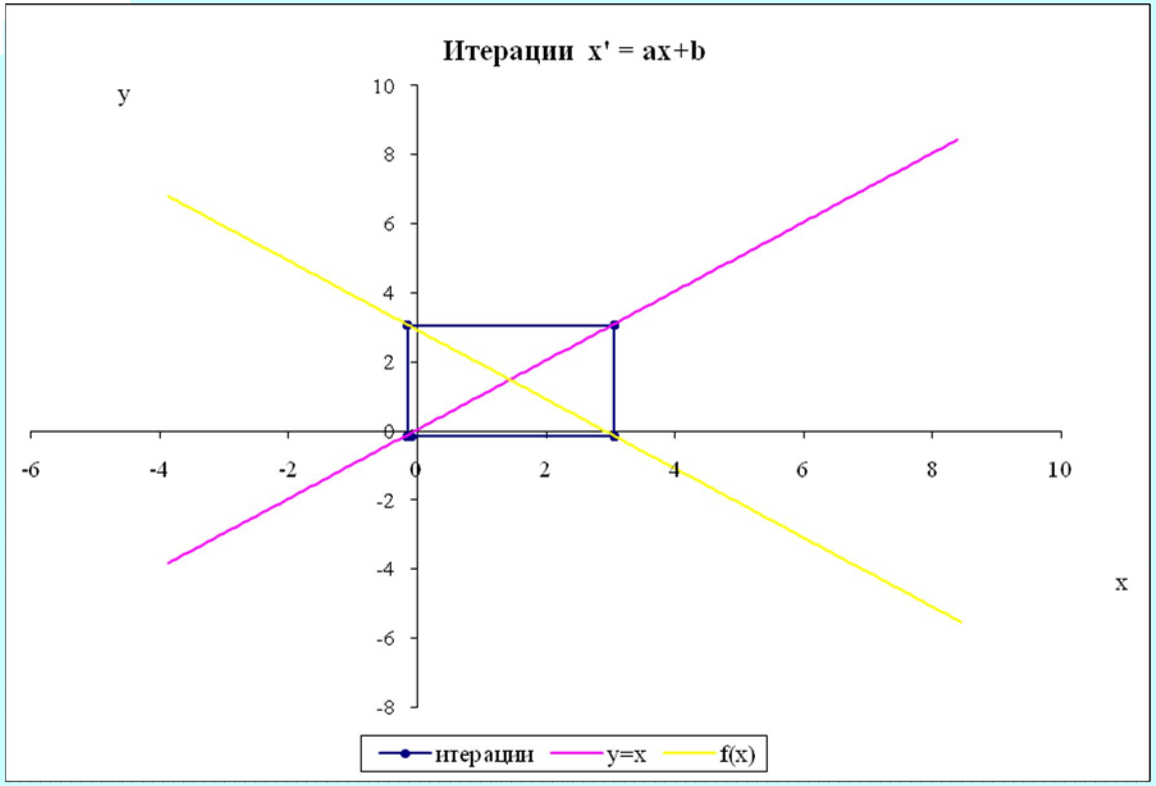
Лестница Ламерея

	a =	-0,80
	b =	3,00
	c =	0,00
	x_0 =	0,50
	xmin =	0,00
	xmax =	3,00
	n =	20
n=	5	2,59739
n=	6	2,39502
n=	7	2,59616
n=	8	2,39644
n=	9	2,59498
n=	10	2,39780
n=	11	2,59384
n=	12	2,39911
n=	13	2,59274
n=	14	2,40037
n=	15	2,59169
n=	16	2,40159
n=	17	2,59066
n=	18	2,40276
n=	19	2,58967
n=	20	2,40389



Вариация диаграммы

		0,001
	a =	-1,000
	b =	2,916
	x_0 =	-0,077
	xmin =	-3,870
	xmax =	8,440
	n =	72
n=	57	2,30979
n=	58	2,30979
n=	59	2,30979
n=	60	2,30979
n=	61	2,30979
n=	62	2,30979
n=	63	2,30979
n=	64	2,30979
n=	65	2,30979
n=	66	2,30979
n=	67	2,30979
n=	68	2,30979
n=	69	2,30979
n=	70	2,30979
n=	71	2,30979



Лабораторная № 2. Линейные автономные системы с дикретным временем

Задание 1. Построить фазовые портреты системы x'= Ax+b с начальным состоянием x_0 для следующих данных
Охарактеризовать полученное движение. Для каждой матрицы найти все неподвижные точки и охарактеризовать их тип.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

	A				**b**		$\mathbf{x}_0$	
Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	x_1^0	x_2^0
1	0,5	1	0	1	0	2	0	0
2	-7	-4	12	7	0	0	5	7
3	0,2	0	3,5	-0,5	1	0	0	2
4	0,7071	-0,7071	0,7071	0,7071	2	-1	3	1
5	32	-74	13	-30	0	0	1	1
6	-0,5	2,5	-0,5	1,5	1	2	4	5
7	32	-74	13	-30	0	0	4	0
8	3	-3	1	-1	3	2	4	0
9	0,4	0,6	0	0,2	0	0	4	0
10	0	-1	1	0	0	0	4	0

Задание 2. Для матриц из задания 1 найти собственные значения и собственные вектора, каноническую форму и матрицу перехода. Используя каноническую форму найти степень A^n и экспоненту exp(tA) матриц.

Задание 3. **Для матриц из задания 1 найти циклы длины 2.**

Образец выполнения лабораторной работы для двумерных дискретных линейных систем

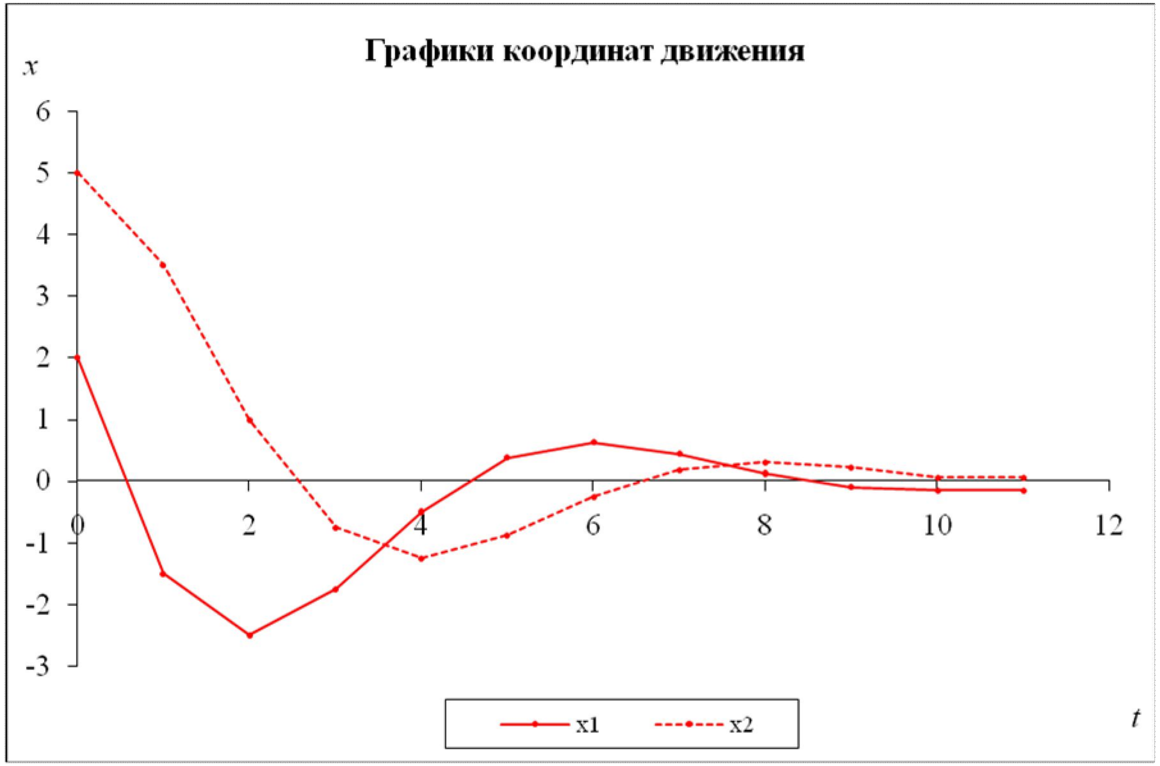
Уравнение системы
$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

Матрица перехода	
0,5	-0,5
0,5	0,5

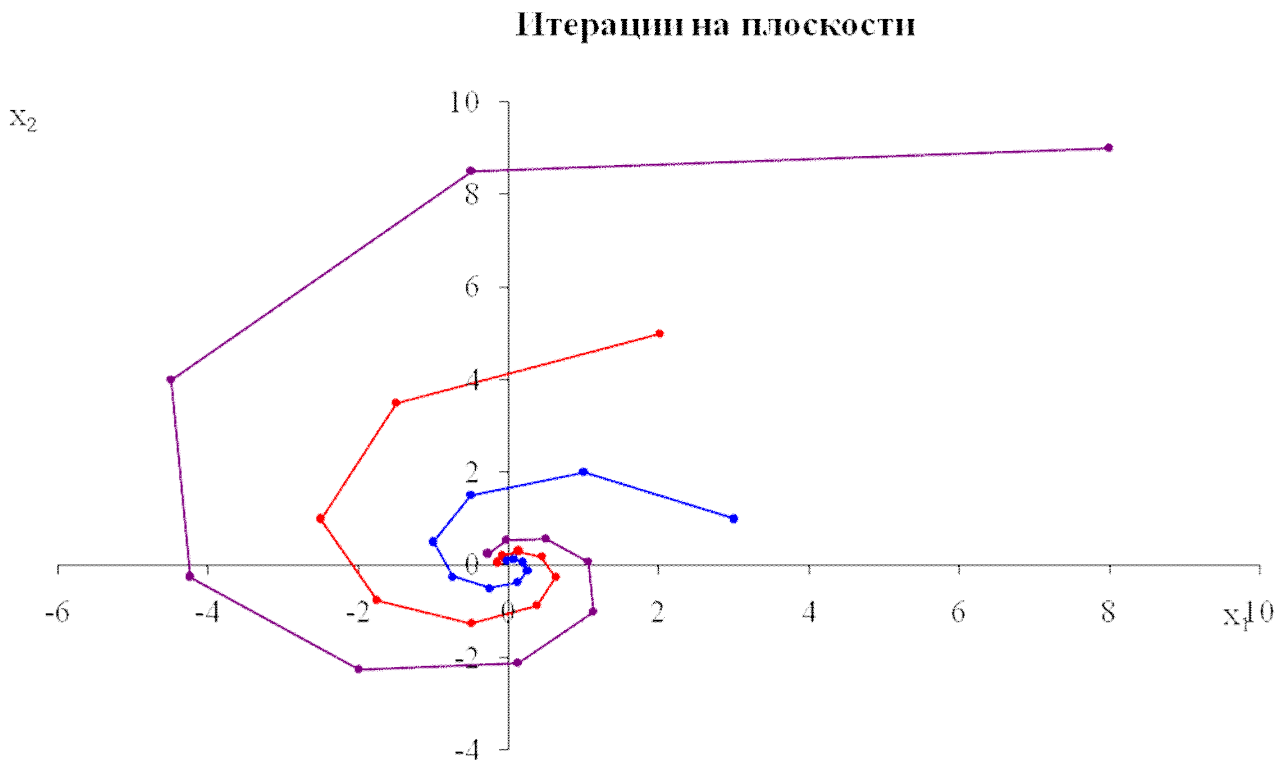
начальное состояние	
x_1^0	x_2^0
2	5
3	1
8	9

n	10

конечное состояние	
x10	x20
-0,15625	0,0625
-0,03125	0,09375
0,09375	-0,28125



Фазовый портрет



Вариация графика координат движения

-5 0,01

94 59

11 74

-10 0,01

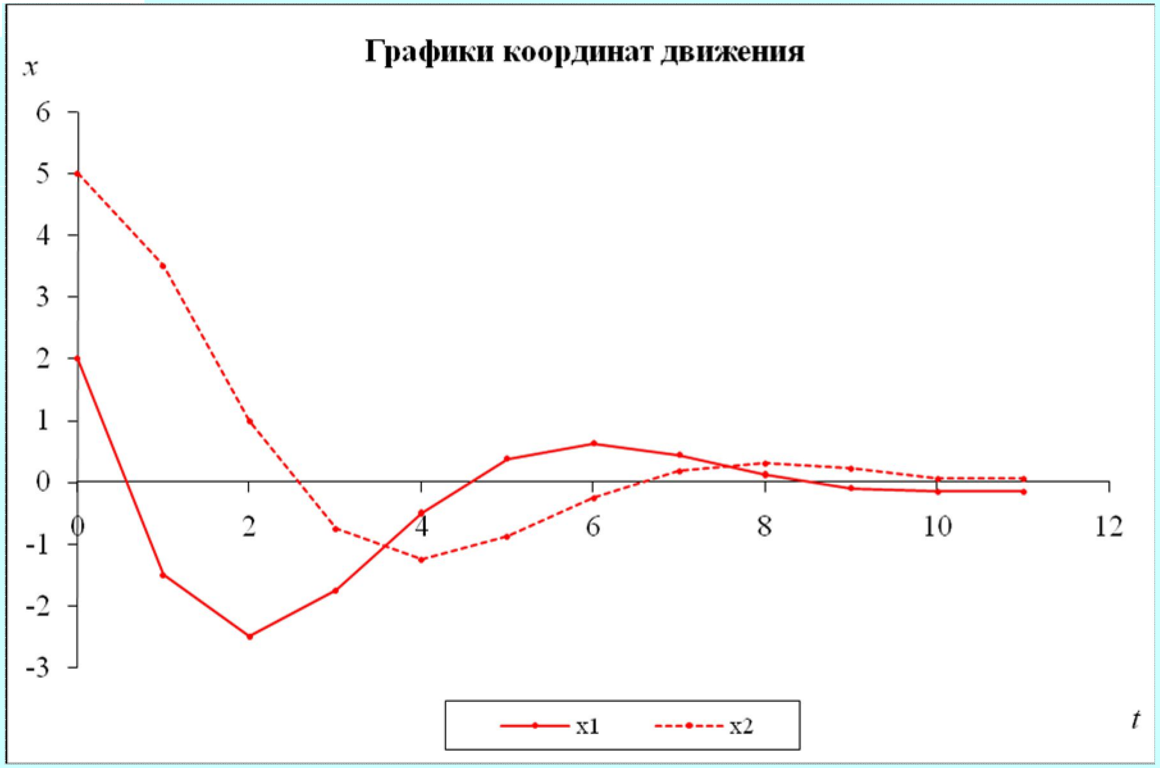
Уравнение системы
$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

Матрица перехода	
-4,06	-4,41
-4,89	-4,26

начальное состояние	
x_1^0	x_2^0
50	73
50	49
53	50

n	59

конечное состояние	
x10	x20
-1,1E-07	-2,1E-08
-9,2E-08	9,31E-10
9,31E-10	-9,6E-08



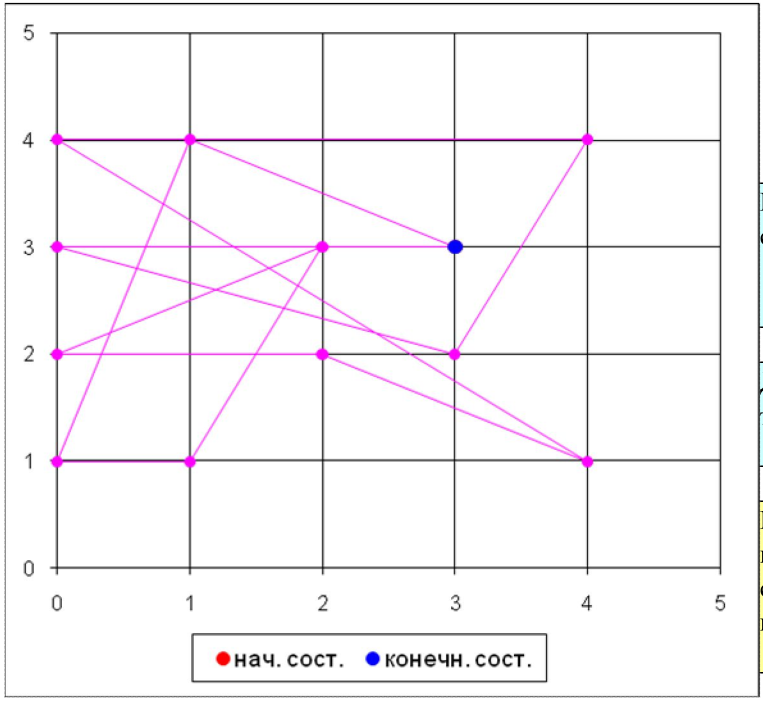
Двумерные системы над F

Линейные системы над кольцом вычетов

модуль = **5**

Матрица системы

4	1
2	4



	x_1	x_2
0	3	3
1	0	3
2	3	2
3	4	4
4	0	4
5	4	1
6	2	2
7	0	2
8	2	3
9	1	1
10	0	1
11	1	4
12	3	3

Начальное состояние	Конечное состояние
3	0
3	4

Длина траектории
12

Возврат в начальн. состояние на шаге
12

Канонический вид-2

Матрица оператора A	
5	-2
1	3

Характеристический многочлен

$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

a_2	a_1	a_0
1	-8	17

Дискриминант системы равен

$D = a_1^2 - 4a_0 =$ -4

Так как D<0 то система имеет два сопряженных комплексных собственных значения

$\lambda_1 =$	4	+	1	i
$\lambda_2 =$	4	-	1	i

Характеристические матрицы

для λ_1		для λ_2	
1	-2	-1	0
1	-1	0	-1

Собственные векторы

для λ_1	$h_1 =$	2	для λ_2	$h_1 =$	0
	$h_2 =$	1		$h_2 =$	-1

Матрица преобразования координат H

2	0
1	-1

Каноническая матрица C

4	1
-1	4

$\rho =$ 4,12311

$\phi =$ 0,07798 π

Обратная матрица H^{-1}

0,5	0
0,5	-1

Канонический вид-3

Матрица оператора A

2	0	0
0	2	0
0	-1	-1

Характеристический многочлен

$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

a_3	a_2	a_1	a_0
1	-3	0	4

Целые корни

$\lambda_1 =$ 2

Частное от деления хар. многочлена на λ-λ_1

b_2	b_1	b_0
1	-1	-2

Дискриминант системы равен $b_1^2 - 4b_0$ = 9

Так как D>0 то система имеет два различные вещественные собственные значения

$\lambda 1$ = 2

$\lambda 2$ = -1

Характеристические матрицы

для λ_1			для λ_2			для λ_3		
0	0	0	0	0	0	3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	3	0
0	-1	-3	0	-1	-3	0	-1	0

Лабораторная № 3 Линейные автономные системы с непрерывным временем

Задание 1. Построить фазовые портреты системы x'= Ax с начальным состоянием x_0 для следущих следующих данных
Охарактеризовать полученное движение. Для каждой матрицы найти все неподвижные точки и охарактеризовать их тип.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

	A				$\mathbf{x}_0$	
Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	x_1^0	x_2^0
1	0,5	1	0	1	0	-1
2	-7	-4	12	7	5	7
3	0,2	0	3,5	-0,5	0	2
4	0,7071	-0,7071	0,7071	0,7071	3	1
5	32	-74	13	-30	1	1
6	-0,5	2,5	-0,5	1,5	4	5
7	32	-74	13	-30	4	0
8	3	-3	1	-1	4	1
9	0,4	0,6	0	0,2	4	0
10	0	-1	1	0	4	-1

Задание 2. Для матриц из задания 1 найти собственные значения и собственные вектора, каноническую форму и матрицу перехода. Используя полученные данные охарактеризовать тип неподвижной точки (0,0).

Образец выполнения лабораторной работы для двумерных непрерывных линейных систем

Уравнение системы	
$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$	
$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$	
Матрица системы	
0	-0,5
0,5	0

Матрица перехода	
1	-0,05
0,05	1
h	n
0,1	500
начальное состояние	
x_1^0	x_2^0
0,1	0
0,2	0
0,3	0
конечное состояние	
x_1	x_2
0,184483	-0,02855
0,368965	-0,0571
0,553448	-0,08565

Фазовый портрет