Лекция 5

Дискретный канал с шумами.

Пропускная способность канала

Дискретный канал с шумами характеризуется:

- алфавитом кодовых символов b_i $(i=1,2\ldots m)$;
- скоростью передачи кодовых символов в сек. υ;
- вероятностью переходов $p(b_j^{/}/b_i)$

Количество взаимной информации содержащейся в среднем в одном символе последовательности $b_j^{/}$ относительно последовательности входных символов b_i

$$\overline{I(b_j^{/},b_i)} = H(b_i) - H(b_i/b_j^{/})$$

Скорость передачи информации по дискретному каналу с шумами

$$I^{/}(b_j^{/},b_i) = \upsilon\left[H(b_i) - H(b_i/b_j^{/})\right] = H^{/}(b_i) - H^{/}(b_i/b_j^{/})$$

Скорость передачи информации зависит как от свойств источника, так и от способа кодирования. При взаимооднозначном кодировании энтропия источника определяет первый член. Второй член зависит как от свойств источника и канала, так и способа кодирования. Выбирая различные источники и способы кодирования можно изменять скорость передачи информации. Максимально возможная скорость передачи информации называется пропускной способностью дискретного канала с шумами

$$C = \max\left[I'(b,b')\right] = \max_{p(b)}\left[H'(b) - H'(b/b')\right] =$$

$$= \max_{p(b)}\left[H'(b') - H'(b'/b)\right]$$

Для канала без помех:

$$H^{/}(b/b^{/}) = 0$$

$$H^{/}(b) = \upsilon H(b)$$

$$\text{где } \mathrm{H(b)} = \log_2 m$$

Для канала с помехами:

$$H^{/}(b/b^{/}) \neq 0$$

$$C \lhd \max\left[H^{/}(b)\right] = \upsilon \log_2 m$$

Это означает, что количество передаваемых кодовых символов в канале с шумами должно быть больше, чем в канале без шумов с той же пропускной способностью. Такая избыточность кодовых символов позволяет повысить достоверность приема.

Корреляционные коды пригодны для источников сообщений с производительностью:

$$C_{\text{и}} = H^{/}(A) \lhd C$$

Пропускная способность однородного симметричного канала с шумами

Пропускная способность такого канала однозначно определяется:

- основанием кода m;
- скоростью передачи кодовых символов υ;
- вероятностью ошибочного приема передаваемого символа *p*:

$$p = \sum_{j \neq i} p(b_j^{/} / b_i) = (m-1)\, p(b_j^{/} / b_i)$$

$$\text{при } j \neq i$$

$$C = \max\left[H^{/}(b^{/}) - H^{/}(b^{/}/b)\right] =$$

$$= \upsilon \max\left[-\sum_{j} p(b_j^{/}) \log p(b_j^{/}) + \sum_{i}\sum_{j} p(b_i) p(b_j^{/}/b_i)\right] =$$

$$= \upsilon \max\left[H(b^{/}) + (1-p)\log(1-p) + p\log\frac{p}{m-1}\right]$$

$H(b^{/})$ -зависит от распределения априорных вероятностей p(b/). Для определения пропускной способности дискретного канала с шумами необходимо найти такое распределение этих вероят-ностей, при которых должно обеспечиваться мах. значения энтропии на выходе.

$$H(b^{/})_{\text{мах}} = \log_2 m$$

Это возможно в том случае, если вероятности принятых символов $p(b_j^{/})$ одинаковы и не зависят от других принятых символов.

Предположим, что на вход дискретного анала с шумами подаются символы от разных источников, которые характеризуются различными распределениями вероятностей, но при одних значениях υ и m.

Максимальное количество информации, взятое по всевозможным источникам входного сигнала, принято называть пропускной способностью канала в расчете на один символ.

$$C_{\text{символ}} = \max_{p(b)}\left[\overline{I^{/}(b,b^{/})}\right], \frac{\text{бит}}{\text{символ}}$$

Пропускная способность канала в единицу времени

$$C = \upsilon \max_{p(b)}\left[\overline{I^{/}(b,b^{/})}\right] = \upsilon C_{\text{символ}}, \frac{\text{бит}}{\text{сек.}}$$

Пропускная способность симметричного однородного канала без памяти с заданными вероятностями переходов $p(b_j^/)$

$$C_{\text{символ}} = \max_{p(b)} \left[H(b^/) - H(b^/ / b) \right]$$

$$H(b^/ / b) = M\left[\log \frac{1}{p(b_j^{\ /} / b_i)} \right]$$

$$H(b^/ / b) = M\left[\log \frac{1}{p(b_l^/ / b_i)} \right] = p \log \frac{m-1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{1-p}$$

$$p(b_j^/ / b_i) = \begin{cases} \dfrac{p}{m-1} \text{ при } j \neq i \\ (1\text{-}p) \text{ при } j = i \end{cases}$$

Условная энтропия $H(b^{/}/b)$ не зависит от распределения вероятностей появления входных символов, $p(b_i)$ а определяется только переходными вероятностями дискретного канала $\mathrm{p}(\mathrm{b}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}/b_i)$.

В свою очередь $H(b^{/})$ зависит от $H(b)$

$$H(b^{/})_{\max} = \log_2 m$$

Пропускная способность дискретного симметричного однородного канала, приходящаяся на один символ источника

$$C_{символ} = \log m + p\log\frac{p}{m-1} + (1-p)\log(1-p)$$

Пропускная способность дискретного канала в единицу времени

$$C = \upsilon\left[\log m + p\log\frac{p}{m-1} + (1-p)\log(1-p)\right]$$

При m=2 пропускная способность дискретного канала с шумами

$$C = \upsilon\left[1 + p\log p + (1-p)\log(1-p)\right]$$

Если передавать сообщение источника с помощью кодирования n-разрядным равномерным кодом, то вероятность правильного декодирования переданного элемента источника $q_э$

$$q_э = (1-p)^n$$

где n - число символов в кодовой последовательности

Теорема об оптимальном кодировании

Если производительность источника $H^{/}(A) \triangleright C$,

то существуют такие способы кодирования и декодирования, при которых вероятность ошибки можно сделать сколь угодно малой.

Средняя вероятность ошибки при оптимальном кодировании

$$p_{\text{ош}} \cong 2^{-T\left[C-H^{/}(A)\right]}$$

где T - длительность кодовой последовательности;

$\left[\mathrm{C} - \mathrm{H}^{/}(A)\right]$ – запас пропускной способности канала