# Лекция 9

# Оптимальные алгоритмы приема при полностью известных сигналах. Когерентный прием

Для решения задачи об оптимальном алгоритме приема дискретных сообщений сделаем следующие допущения:

1. Все искажения в канале детерминированы и случайным является только гауссовский аддитивный шум n(t), имеющий равномерное распределение со спектральной плотностью $N_0$.
2. Приходящий сигнал z(t) представляет собой аддитивную смесь

$$z(t) = s_i(t) + n(t) - - - - \text{при}\ 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}$$

$$\text{где все}\ \mathrm{s_i(t) = ku_i(t - \tau)}\ \ (\mathrm{i} = 0,1,2....\mathrm{m} - 1)\ \text{- известны}$$

Остаются неизвестными реализация помехи в канале n(t) и индекс **i** действительно переданного сигнала, который и следует определить.

3. Все передаваемые сигналы Si(t) являются финитными, длительность которых равна T.
4. Система передачи дискретных сообщений обеспечивает надежную тактовую синхронизацию, т.е. границы тактового интервала , на котором приходит сигнал Si(t) известен точно.
5. Момент посылки сигнала Si(t) примем за нуль.

Определим при этих условиях алгоритм работы оптимального демодулятора, основанного на правиле максимального правдоподобия, исследующего принятый сигнал на тактовом интервале [0,T].

Для решения этой задачи нам необходи-мо найти отношение функций правдоподобия для всех кодовых сигналов относительно нулевой гипотезы S(t)=0, а принятый сигнал оказывается равен сигналу помехи

Z(t)=n(t)

Если заменить белый шум на квазибелый с той же односторонней спектральной плотностью $N_0$, но заданной в некоторой полосе частот F, определяемой числом отсчетов n,

$$F = \frac{n}{2T} - - - - (n \triangleright\triangleright 1)$$

то на тактовом интервале [0,T] мы получим равноотстоящие отсчетные сечения, взятые через интервал дискретизации

$$\Delta t = \frac{T}{n} = \frac{1}{2F}$$

В этом случае дискретные отсчеты входного сигнала демодулятора $z_1, \ldots z_n$ оказываются независимыми и тогда плотность вероятностей для полученных дискретных отсчетов будет иметь следующий вид:

$$\omega(z_1, z_2 \ldots. z_n; t_1, t_2 \ldots. t_n) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} z^2(t_k)\right]$$

$\sigma^2 = N_0 F$ - дисперсия квазибелого шума

Если принять гипотезу, что передавался символ $b_i$, то в этом случае можно записать

$$n(t) = Z(t) - S_i(t)$$

Условная n-мерная плотность вероятностей сечений Z(t) , будет определяться такой же формулой, если Z(tk) заменить разностью $Z(t_k) - S_i(t_k)$ , представляющую при данной гипотезе шум

$$\omega(z_1, z_2 \ldots\ldots z_n; t_1, t_2 \ldots\ldots t_n / b_i) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma})^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \left[ z(t_k) - s_i(t_k) \right]^2 \right\}$$

Отношение функций правдоподобия для сигнала Si(t) при выбранных n сечениях будет равно

$$\Lambda_i^n = \frac{\omega(z_1, z_2 \ldots z_n; t_1, t_2 \ldots t_n / b_i)}{\omega(z_1, z_2 \ldots z_n; t_1, t_2 \ldots t_n / n(t))} =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \left[ z(t_k) - s_i(t_k) \right]^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} z^2(t_k) \right\}$$

Если учесть, что $\sigma^2 = N_0 F = \dfrac{N_0}{2\Delta t}$ , то получаем

$$\Lambda_i^n = \exp\left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{n} \left[ z(t_k) - s_i(t_k) \right]^2 \Delta t + \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{n} z^2(t_k) \Delta t \right\}$$

По правилу максимума правдоподобия в случае квазибелого шума решающая схема должна выбрать то значение **i**, обеспечивающее максимум $\Lambda_i^n$. Но вместо максимума $\Lambda_i^n$ можно отыскивать максимум его логарифма

$$\ln \Lambda_i^n = -\frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{n}\left[z(t_k)-s_i(t_k)\right]^2 \Delta t + \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{n} z^2(t_k)\Delta t$$

Правило решения о том, что передавался символ bi, можно выразить через систему неравенств

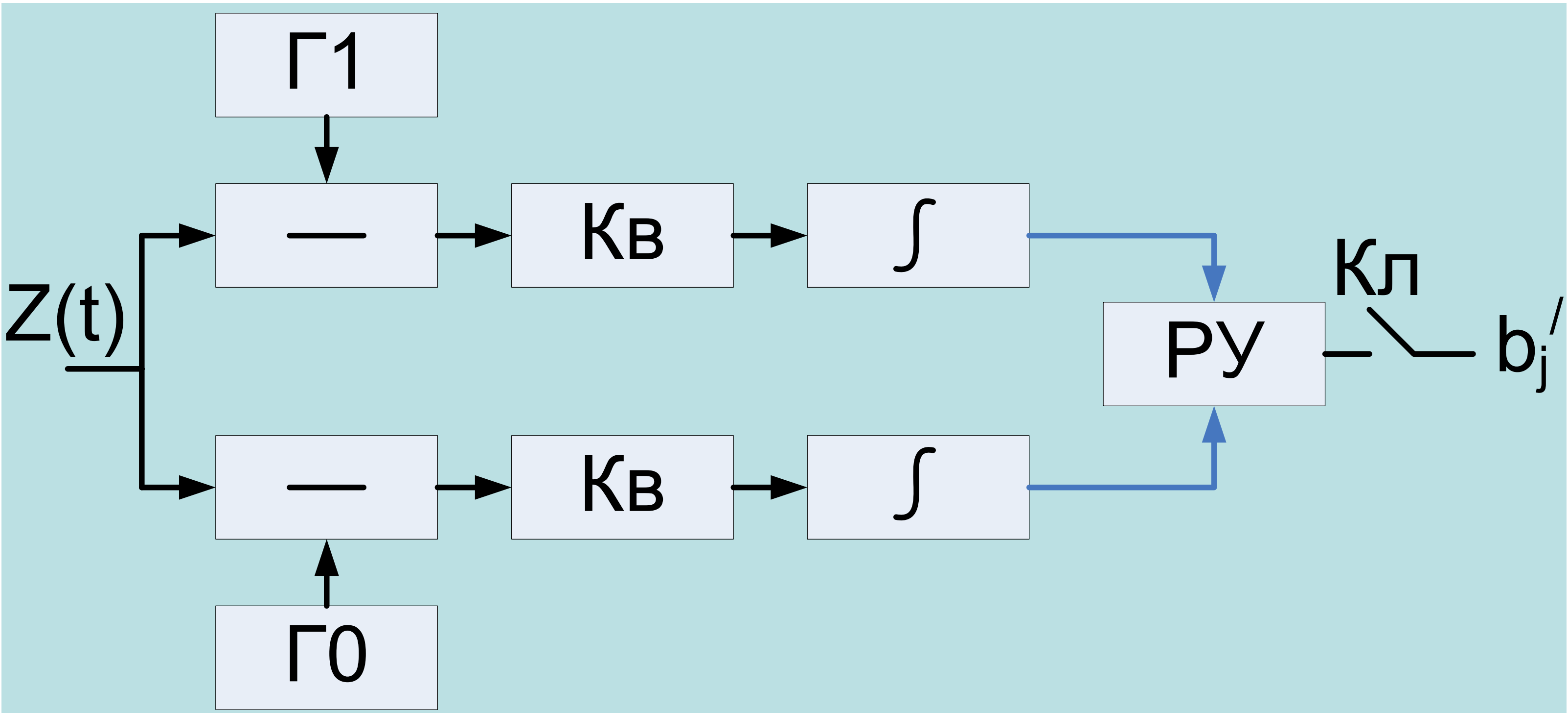
$$\sum_{k=1}^{n}\left[z(t_k)-s_i(t_k)\right]^2 \Delta t \triangleleft \sum_{k=1}^{n}\left[z(t_k)-s_j(t_k)\right]^2 \Delta t - - j \neq i$$

Для случая белого шума необходимо $\Delta t \to 0$

В этом случае правило решения принимает вид

$$\int_0^T \left[Z(t) - S_i(t)\right]^2 dt \lhd \int_0^T \left[Z(t) - S_j(t)\right]^2 dt - j \neq i$$

Для случая m=2 структурная схема демодулятора принимает следующий вид:



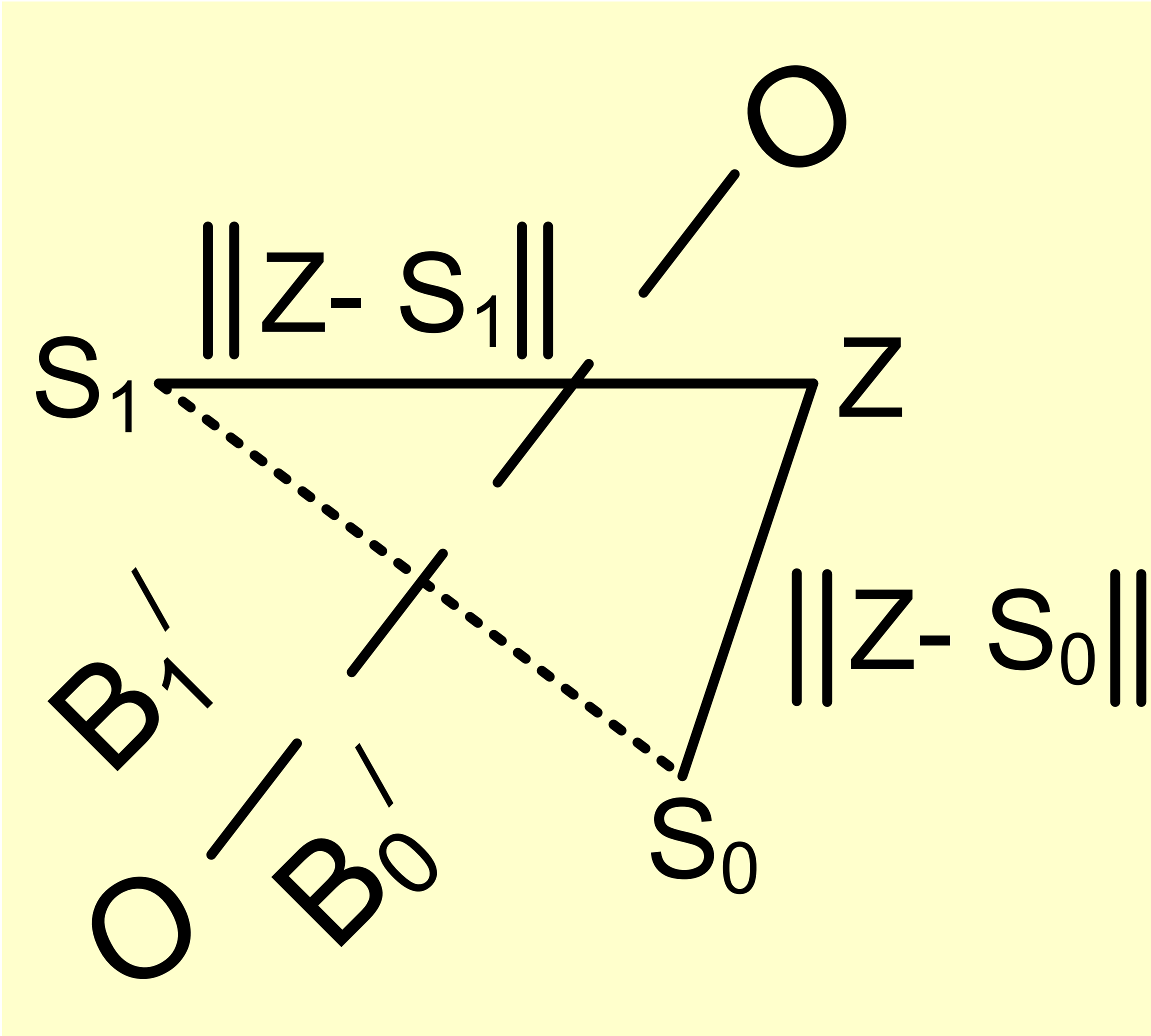
В гильбертовом пространстве $\sqrt{\int_0^T [Z(t) - S_i(t)]^2 dt}$

определяет метрику или расстояние между двумя сигналами. Поэтому алгоритм принятия решений можно представить в следующем виде

$$\left\| Z - S_i \right\| \triangleleft \left\| Z - S_j \right\| - - - j \neq i$$

В геометрической интерпретации оптимальный демодулятор должен регистрировать тот из сигналов Si(t), который окажется ближе расположенным к принятому колебанию Z(t).

# Геометрическая интерпретация оптимального решения при передаче двоичных сигналов $S_1(t)$ и $S_0(t)$



# Корреляционный приемник

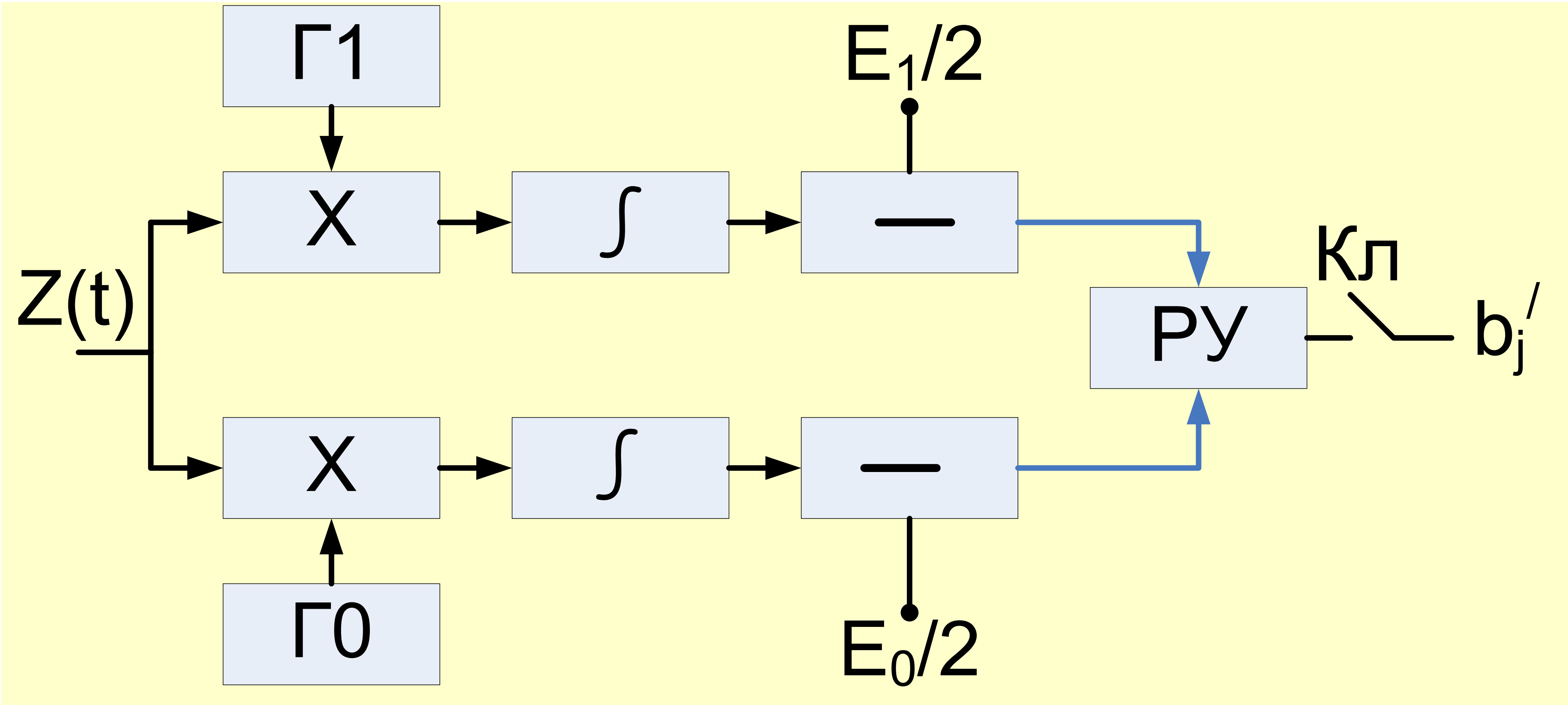
$$\int_0^T Z(t)S_i(t) - \frac{E_{ci}}{2} \triangleright \int_0^T Z(t)S_j(t)dt - \frac{E_{cj}}{2} - - j \neq i$$

При m=2 алгоритм оптимального приема имеет вид

$$\int_0^T Z(t)S_1(t) - 0{,}5E_1 \triangleright \int_0^T Z(t)S_0(t)dt - 0{,}5E_0$$

Устройство непосредственно вычисляющее скалярное произведение $(Z, S_i) = \int_0^T Z(t)S_i(t)dt$ называется активным фильтром или коррелятором, а демодуляторы реализующие такой алгоритм принято называть корреляционным приемником

# Структурная модель корреляционного приемника (демодулятора)

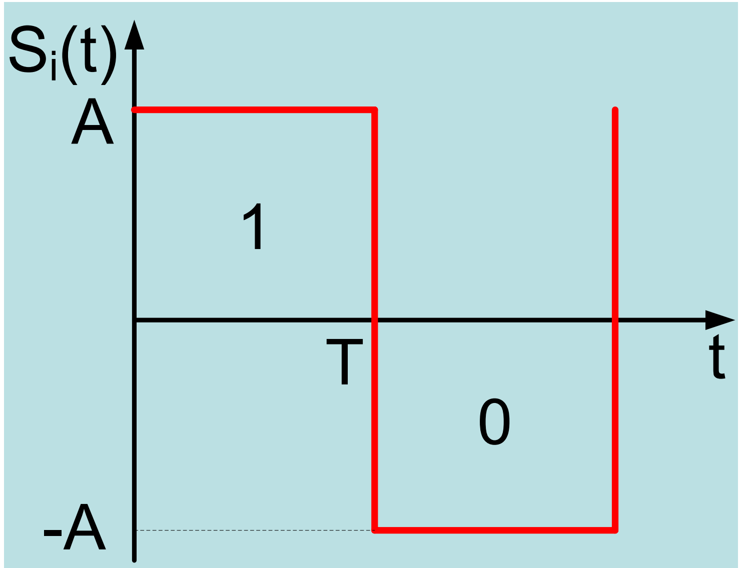


При m=2 правило приема можно представить в несколько иной форме

$$\int_0^T Z(t)\Delta S(t)dt \triangleright E_{пор}$$

$$\Delta S(t) = S_1(t) - S_0(t)$$

$$E_{пор} = \frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2}$$

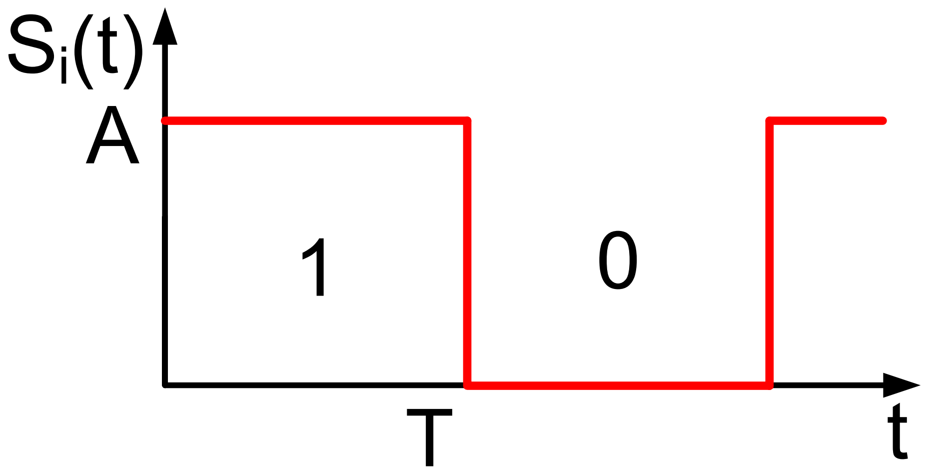



Для систем с активной паузой $E_{пор}$=0 и оптимальный

Алгоритм работы решающей схемы имеет вид:

$$\int_0^T Z(t)\Delta S(t)dt \triangleright 0$$

Для систем с пассивной паузой (однополярные сигналы) можно записать




$$S_1(t) = A$$

$$S_0(t) = 0$$

$$E_1 = A^2 T$$

$$E_0 = 0$$

$$E_{пор} = \frac{A^2 T}{2}$$

Алгоритм оптимального приема принимает вид:

$$\int_0^T Z(t)dt \triangleright \frac{AT}{2}$$

При передаче сообщений с использованием радиоканалов применяются системы с амплитудной, частотной и фазовой модуляцией. Алгоритм оптимального приема:

В случае амплитудной модуляции:

$$S_1(t) = ACos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$S_0(t) = 0$$

$$\int_0^T Z(t)Cos(\omega_0 t + \varphi_0)dt \triangleright \frac{AT}{4}$$

В случае двоичной фазовой модуляции

$$S_1(t) = ACos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$S_0(t) = ACos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = -S_1(t)$$

$$\int Z(t)Cos(\omega_0 t + \varphi)dt \triangleright 0$$