МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра прикладной математики
В.Л. Кузнецов, Т.В. Лоссиевская

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пособие
для выполнения курсовой работы
по курсу математического анализа

для студентов II курса
специальности 073000
дневного обучения

Москва - 2003

ББК 518
К 25
Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.В. Самохин
Кузнецов В.Л., Лоссиевская Т.В.
К 25 Кратные интегралы: Пособие для выполнения курсовой работы по курсу математического анализа. – М.: МГТУ ГА, 2003. – 56 с.

Пособие издается в соответствии с учебной программой по курсу математического анализа для студентов II курса специальности 073000 дневного обучения.

Данное пособие содержит справочный материал, разобранные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории, и задания для выполнения курсовой работы.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 18.10.02г. и методического совета 08.10.02.г.

Редактор И.В. Вилкова

	Подписано в печать 23.12.02г.	
Печать офсетная	Формат 60x84/16	3,5 уч.-изд. л.
3,25 усл.печ.л.	Заказ № 886/ 1092	Тираж 150 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

I. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Двойные интегралы

1.1. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования

Определение 1. Область $G = \{(x,y) : \varphi(x) \le y \le \psi(x), a \le x \le b\}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, называется элементарной относительно оси Oy (рис. 1).

Аналогично определяется область, элементарная относительно оси Ox (рис. 2).

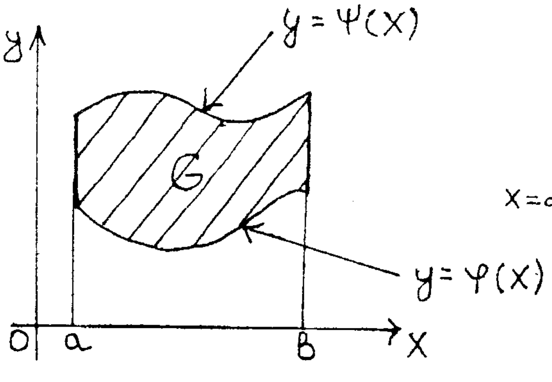

Рис. 1

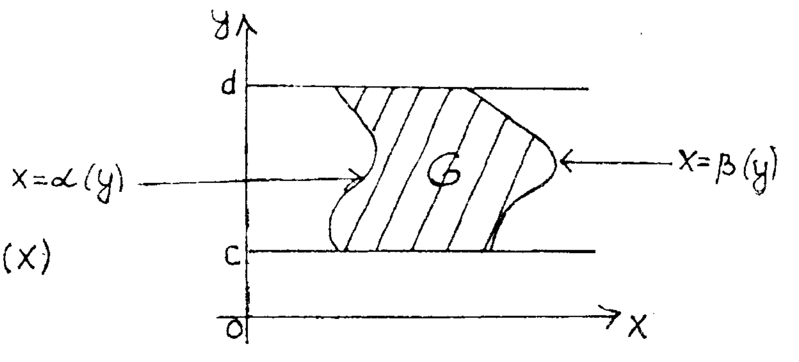

Рис. 2

Теорема 1. Пусть:

1°. G-область, элементарная относительно оси Oy.

2°. Функция $f(x,y)$ интегрируема на G.

3°. $\forall x \in [a,b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$.

Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

Аналогично при соответствующих условиях для области, элементарной относительно оси Ox, имеет место формула:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

Область интегрирования часто удается разбить на конечное число областей, элементарных относительно оси Oy или относительно оси Ox, к каждой из которых применяется формула (1) или формула (2).

1.2. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \ (u,v) \in G' \end{cases}$ (3)

-отображение области G' плоскости (u,v) на область G плоскости (x,y) (рис.3) удовлетворяет следующим условиям:

1°. Отображение (3) взаимно однозначно.

2°. Функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ непрерывно дифференцируемы в области G'.

3°. Всюду в области G' якобиан отображения (3) отличен от нуля:

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0$$

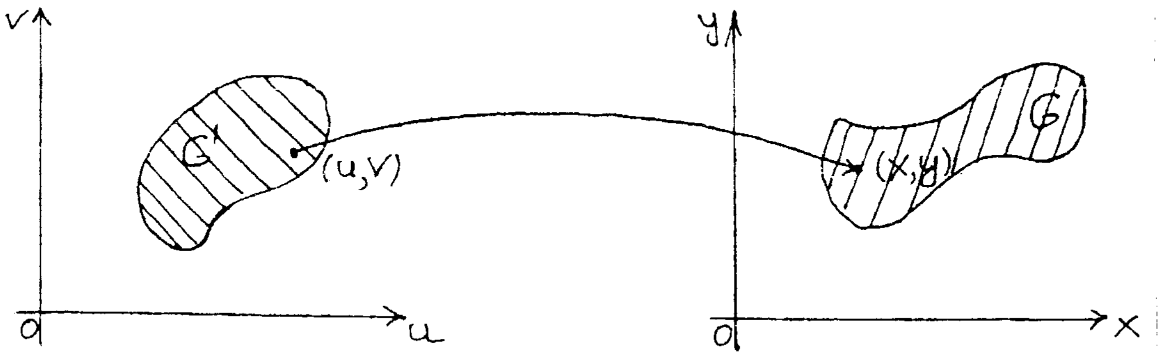

Рис. 3

Теорема 2. Пусть G' и G - замкнутые квадрируемые области, функция $f(x,y)$ непрерывна в области G, отображение (3) удовлетворяет условиям $1^\circ - 3^\circ$. Тогда имеет место формула:

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv. \qquad (4)$$

Формула (4) называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

Замечание. Если условие 1° или условие 3° нарушаются в отдельных точках или на отдельных кривых области G', то формула (4) также имеет место.

При переходе к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ формула (4) принимает вид:

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \qquad (5)$$

якобиан преобразования $J = \rho$.

Обобщенные полярные координаты ρ и φ вводятся по формулам

$$x = a\rho\cos^\alpha\varphi,\ y = b\rho\sin^\alpha\varphi. \qquad (6)$$

При этом якобиан $J = \alpha ab\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$, и формула (4) принимает вид:

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \alpha ab\iint_{G'} f(a\rho\cos^\alpha\varphi, b\rho\sin^\alpha\varphi)\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi d\rho d\varphi \qquad (7)$$

2. Тройные интегралы

2.1. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования

Теорема 3. Пусть:

1°. Функция $f(x,y,z)$ определена в области $W = \{(x,y,z) : (x,y) \in G, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$, $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ – непрерывные функции в квадрируемой области G (рис. 4).

2°. существует тройной интеграл $\iiint_W f(x,y,z)dxdydz$.

3°. $\forall (x,y) \in G$ существует определенный интеграл $F(x,y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Тогда существует двойной интеграл $\iint\limits_G F(x,y)dxdy = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz$

и имеет место формула

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz . \qquad (8)$$

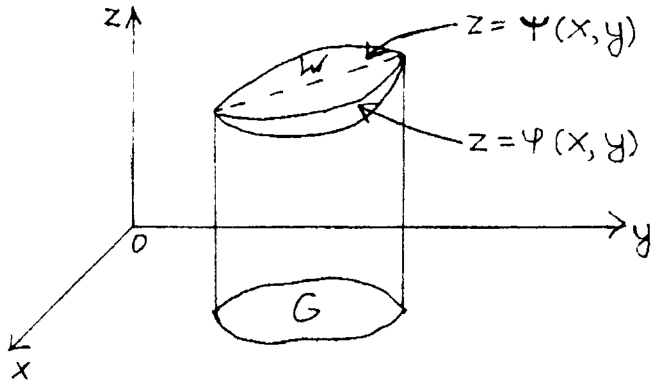

Рис. 4

Отметим, что плоская область G является проекцией пространственной области W на координатную плоскость XOY.

2.2. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v,w), \\ y = \psi(u,v,w), \\ z = \chi(u,v,w), \quad (u,v,w) \in W' \end{cases}$ (9)

- отображение области W' пространства (u,v,w) на область W пространства (x,y,z) удовлетворяет следующим условиям:

1°. Отображение (9) взаимно однозначно.

2°. Функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ непрерывно дифференцируемы в области W'.

3°. Всюду в области W' якобиан отображения (9) отличен от нуля: $J(u,v,w)=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\neq 0.$

Теорема 4. Пусть W' и W - замкнутые кубируемые области, $f(x,y,z)$ непрерывна в W, отображение (9) удовлетворяет условиям 1° - 3°. Тогда имеет место формула

$$\iiint\limits_{W} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{W'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw. \qquad (10)$$

Замечание. Формула (10) имеет место и тогда, когда условия 1° или 3° нарушаются в некоторых точках или на некоторых поверхностях области W'.

2.3. Криволинейные координаты

Формулы (9) являются формулами перехода от декартовых прямоугольных координат (x,y,z) к криволинейным координатам (u,v,w).

Определение 2. Координатной поверхностью называется поверхность в пространстве (x,y,z), на которой одна из переменных u,v или w принимает постоянное значение.

Например, при преобразовании (9) одна из координатных поверхностей имеет вид $\begin{cases} x=\varphi(u_0,v,w), \\ y=\psi(u_0,v,w) \\ z=\chi(u_0,v,w), \end{cases}$ $(u_0,v,w)\in W'$, $u_0=const$

Наиболее употребительные криволинейные координаты - цилиндрические, сферические, обобщенные сферические.

1°. Цилиндрические координаты.

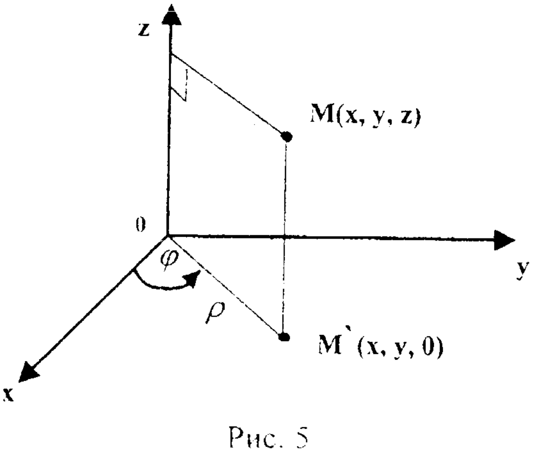

Рис. 5

Спроектируем точку $M(x,y,z)$ на плоскость $z=0$; $M'(x,y,0)$ – проекция точки $M(x,y,z)$ на плоскость $z=0$ (рис.5). $M'(x,y,0)$ однозначно определяется ее полярными координатами ρ,φ. Тогда точка $M(x,y,z)$ однозначно определяется тройкой чисел (ρ,φ,z).

Определение 3. Тройка чисел (ρ,φ,z) называется цилиндрическими координатами точки M.

Связь между декартовыми прямоугольными координатами (x,y,z) и цилиндрическими (ρ,φ,z) выражается формулами

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ z=z, \tag{11}$$

$0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\infty<z<+\infty$ (иногда $-\pi<\varphi\le\pi$).

Координатные поверхности:

$\rho=const$ - круговые цилиндрические поверхности с осями на оси Oz;

$\varphi=const$ – полуплоскости с краями на оси Oz;

$z=const$ – плоскости, перпендикулярные оси Oz.

Якобиан отображения (11) $J=\rho$.

2°. Сферические координаты

$M'(x,y,0)$ – проекция точки $M(x,y,z)$ на плоскость $z=0,\varphi$ – полярный угол точки $M'(x,y,0)$ на плоскости (x,y), r – расстояние точки $M(x,y,z)$ до начала координат $(0,0,0)$, θ – угол между лучами OZ и OM (рис.6).

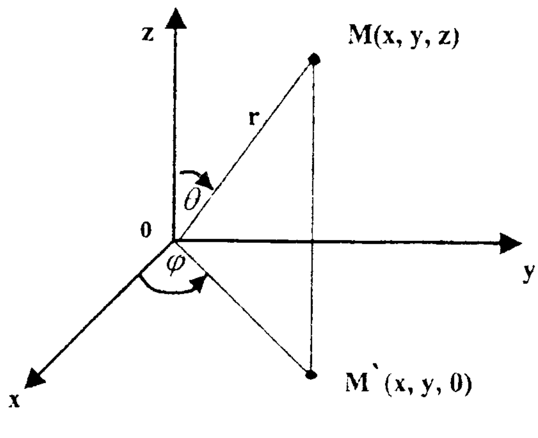

Рис. 6

Положение точки $M(x,y,z)$ однозначно определяется тройкой чисел (r,θ,φ).

Определение 4. Тройка чисел (r, θ, φ) называется сферическими координатами точки M.

Связь между декартовыми прямоугольными координатами (x, y, z) и сферическими (r, θ, φ) выражается формулами:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta, \qquad (12)$$

$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.

(Иногда, θ - угол между лучами OM' и OM; в этом случае $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, и в формулах (12) $\sin\theta$ и $\cos\theta$ меняются местами).

Координатные поверхности:

$r = const$ – сферы с центрами в начале координат;

$\theta = const \ne 0, \ne \frac{\pi}{2}, \ne \pi$ – "половины" конусов ($z > 0$, если $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, или $z < 0$, если $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$) с вершинами в начале координат; если $\theta = 0$ – луч OZ, $z > 0$; если $\theta = \pi$ - луч OZ $z < 0$; если $\theta = \frac{\pi}{2}$ – плоскость $z = 0$;

$\varphi = const$ – полуплоскости с краями на оси Oz.

Якобиан отображения (12) $J = r^2\sin\theta$ (в случае второго способа выбора угла θ $J = r^2\cos\theta$).

3°. **Обобщенные сферические координаты**

$$x = ar^n\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi,\ y = br^n\sin^\alpha\theta\sin^\beta\varphi,\ z = cr^n\cos^\alpha\theta, \qquad (13)$$

$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобиан отображения (13):

$$J = abcn\alpha\beta r^{3n-1}\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi$$

3. Некоторые приложения двойных и тройных интегралов

3.1. Площадь S плоской квадрируемой фигуры G:

$$S = \iint\limits_G dxdy.$$

3.2. а) объем V тела $W = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, 0 \le z \le f(x, y)\}$, G - квадрируемая замкнутая область, $f(x, y) \ge 0$ непрерывна в G (рис.7):

$$V = \iint\limits_G f(x, y)dxdy.$$

б) объем V кубируемого тела W:

$$\iiint\limits_W dxdydz.$$

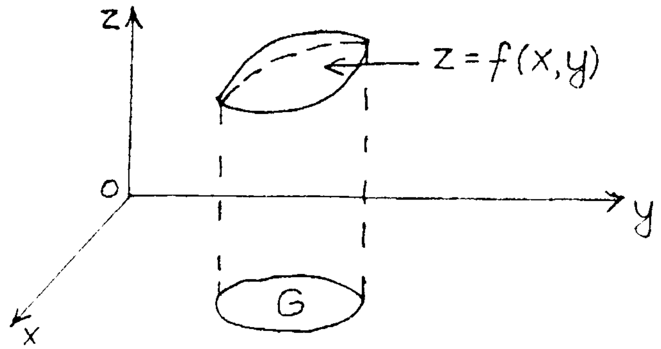

Рис. 7

3.3. а) масса M плоской пластины G, $\gamma(x,y)$ - поверхностная плотность:

$$M = \iint\limits_G \gamma(x,y)dxdy;$$

б) масса M тела W, $\gamma(x,y,z)$ - плотность:

$$M = \iiint\limits_W \gamma(x,y,z)dxdydz.$$

3.4. Координаты центра масс:

а) плоская пластина G, $\gamma(x,y)$ – поверхностная плотность:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_G x\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_G \gamma(x,y)dxdy}, \quad y_0 = \frac{\iint\limits_G y\gamma(x,y)dxdy}{\iint\limits_G \gamma(x,y)dxdy}.$$

б) тело W, $\gamma(x,y,z)$ – плотность:

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_W x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_W \gamma(x,y,z)dxdydz}, \quad y_0 = \frac{\iiint\limits_W y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_W \gamma(x,y,z)dxdydz},$$

$$z_0 = \frac{\iiint\limits_W z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_W \gamma(x,y,z)dxdydz}.$$

3.5. Момент инерции I_z тела W относительно оси Oz, $\gamma(x,y,z)$ – плотность:

$$I_z = \iiint\limits_W (x^2+y^2)\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

II. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

$$I=\int\limits_{-\frac{12}{5}}^{0}dx\int\limits_{-\frac{3}{4}x}^{\sqrt{9-x^2}}fdy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{8x}}^{\sqrt{9-x^2}}fdy.$$

Решение. Обозначим

$$I_1=\int\limits_{-\frac{12}{5}}^{0}dx\int\limits_{-\frac{3}{4}x}^{\sqrt{9-x^2}}fdy,\quad I_2=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{8x}}^{\sqrt{9-x^2}}fdy.$$

Тогда $I_1=\iint\limits_{G_1}fdxdy$, $I_2=\iint\limits_{G_2}fdxdy$,

где $G_1=\left\{(x,y):-\dfrac{12}{5}\le x\le 0,-\dfrac{3}{4}x\le y\le\sqrt{9-x^2}\right\}$,

$G_2=\left\{(x,y):0\le x\le 1,\sqrt{8x}\le y\le\sqrt{9-x^2}\right\}$.

Изобразим области G_1 и G_2 на координатной плоскости (рис. 8).

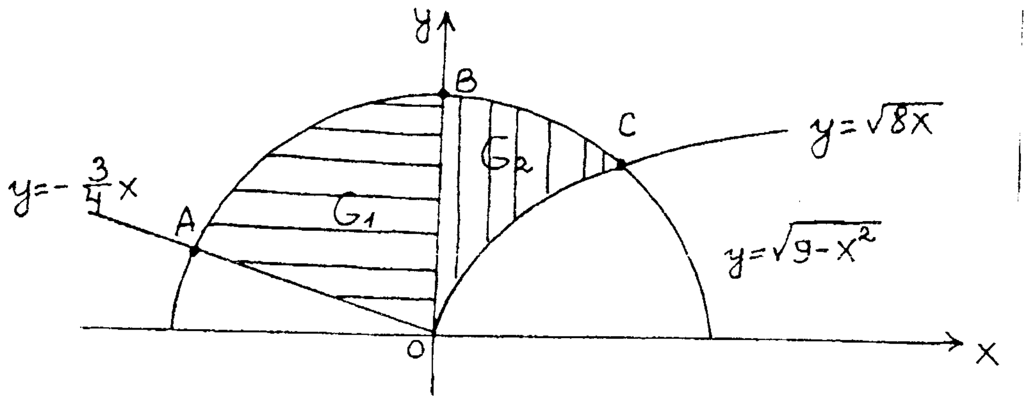

Рис. 8

Отметим, что $A(-\frac{12}{5},\frac{9}{5})$, $B(0,3)$, $C(1,2\sqrt{2})$. Из рис.8 видно, что область $G=G_1\cup G_2$ ограничена кривыми $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=\sqrt{8x}$, $y=-\dfrac{3}{4}x$.

Для того чтобы изменить порядок интегрирования, область G представим в виде $G = G_3 \cup G_4 \cup G_5$ (рис. 9), где $G_3 = \left\{(x,y): 0 \le y \le \frac{9}{5}, -\frac{4}{3}y \le x \le \frac{y^2}{8}\right\}$,

$G_4 = \left\{(x,y): \frac{9}{5} \le y \le 2\sqrt{2}, -\sqrt{9-y^2} \le x \le \frac{y^2}{8}\right\}$,

$G_5 = \left\{(x,y): 2\sqrt{2} \le y \le 3, -\sqrt{9-y^2} \le x \le \sqrt{9-y^2}\right\}$.

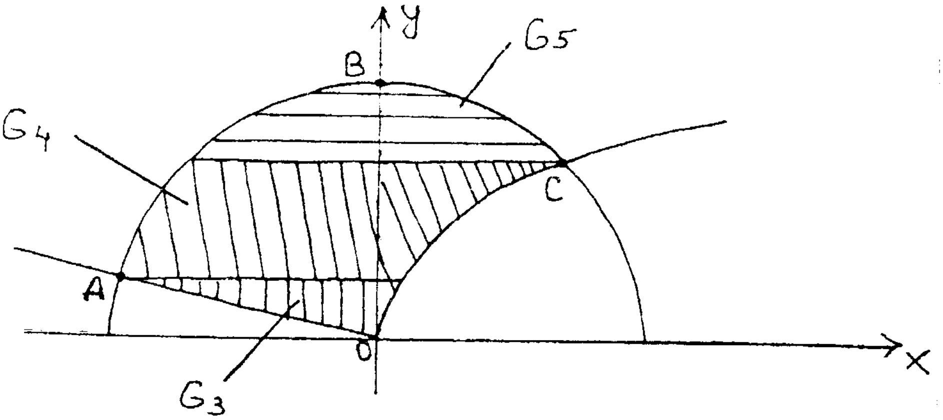

Рис. 9

Учитывая это, имеем:

$$I = \int\limits_0^{\frac{9}{5}} dy \int\limits_{-\frac{4}{3}y}^{\frac{y^2}{8}} f dx + \int\limits_{\frac{9}{5}}^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\frac{y^2}{8}} f dx + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{3} dy \int\limits_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f dx.$$

Ответ:

$$\int\limits_{-\frac{12}{5}}^{0} dx \int\limits_{-\frac{3}{4}x}^{\sqrt{9-x^2}} f dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{8x}}^{\sqrt{9-x^2}} f dy = \int\limits_0^{\frac{9}{5}} dy \int\limits_{-\frac{4}{3}y}^{\frac{y^2}{8}} f dx + \int\limits_{\frac{9}{5}}^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\frac{y^2}{8}} f dx + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f dx.$$

Задача 2. В двойном интеграле $I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования двумя способами, если область интегрирования задается следующим образом: $x^2 + y^2 \geq 2$, $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$.

Решение. Изобразим область интегрирования G.

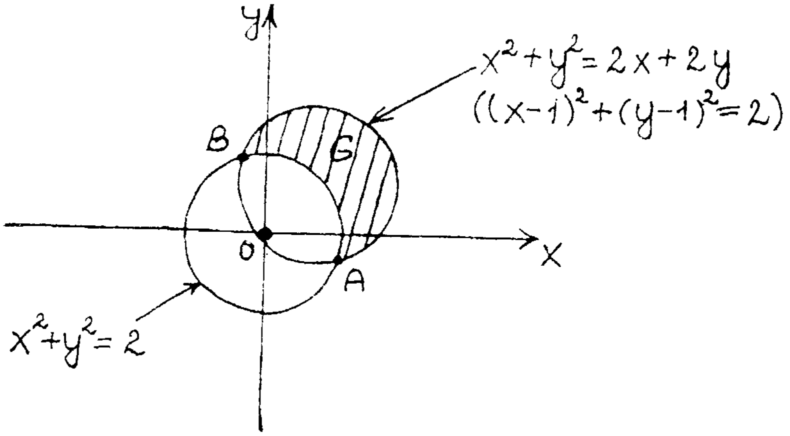

Рис. 10

Обозначим $\partial G_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2\}$, $\partial G_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2x + 2y\}$. Учитывая, что связь между декартовыми и полярными координатами выражается формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим уравнения кривых ∂G_1 и ∂G_2 в полярной системе координат: $\rho = \sqrt{2}(\partial G_1)$, $\rho = 2(\cos\varphi + \sin\varphi)$ (∂G_2). При этом точки пересечения кривых ∂G_1 и ∂G_2 имеют следующие полярные координаты: $A(\rho,\varphi) = A(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{12})$, $B(\rho,\varphi) = B(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12})$. Таким образом, область интегрирования G в полярной системе координат можно записать в виде $G = \left\{(\rho,\varphi) : -\frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{12}, \sqrt{2} \leq \rho \leq 2(\cos\varphi + \sin\varphi)\right\}$. Отсюда получаем

$$I=\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}}d\varphi\int\limits_{\sqrt{2}}^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Здесь мы учли, что якобиан преобразования декартовых координат в полярные равен ρ.

Чтобы выразить двойной интеграл I через другой повторный интеграл, необходимо воспользоваться представлением области G в виде: $G=\left\{(\rho,\varphi):\sqrt{2}\le\rho\le 2\sqrt{2},\arcsin\frac{\rho}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right\}$. Отсюда

$$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\rho d\rho\int\limits_{\arcsin\frac{\rho}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{\rho}{2\sqrt{2}}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\varphi.$$

Ответ:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{7\pi}{12}}d\varphi\int\limits_{\sqrt{2}}^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\rho d\rho\int\limits_{\arcsin\frac{\rho}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{\rho}{2\sqrt{2}}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)d\varphi.$$

Задача 3. Производя надлежащую замену переменных, найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а) $x^2=5y,\ x^2=4y,\ x^3=3y^2,\ x^3=2y^2$.

Решение. Обозначим через G фигуру, площадь которой необходимо вычислить. Тогда $S=\iint\limits_G dxdy$ (14)

Схематически изобразим на плоскости (x,y) фигуру G (рис. 11).

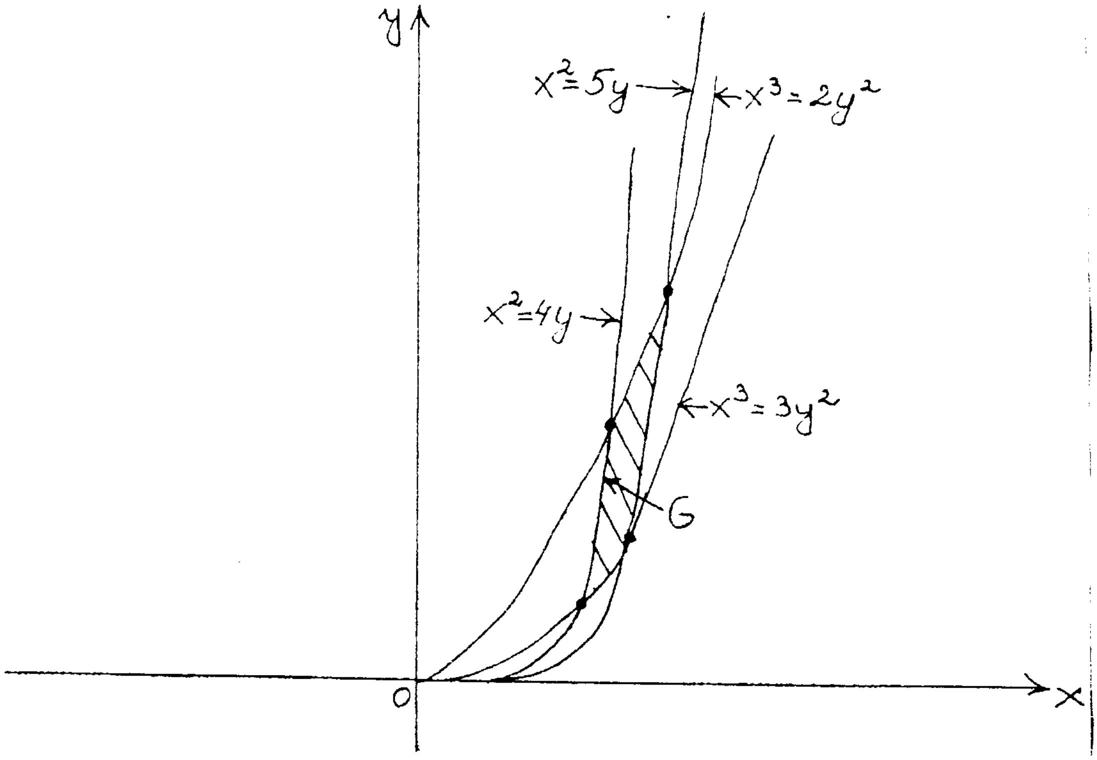

Рис. 11

Из рисунка видно, что для того, чтобы двойной интеграл (14) свести к повторному, необходимо область G разбить на три части.

Поэтому введем новые переменные по формулам

$$\frac{x^2}{y}=u,\quad \frac{x^3}{y^2}=v. \tag{15}$$

При этом область G в плоскости (x,y) перейдет в область $G^{'}=\{(u,v):4\le u\le 5;\ 2\le v\le 3\}$ в плоскости (u,v) и

$$S=\iint\limits_{G} dxdy=\iint\limits_{G'} |J| dudv=\int\limits_{4}^{5} du \int\limits_{2}^{3} |J| dv, \tag{16}$$

где J - якобиан преобразования переменных.

Чтобы найти J, разрешим равенства (15) относительно x и $y: x=u^2v^{-1}$, $y=u^3v^{-2}$. Отсюда:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2uv^{-1} & -u^2v^{-2} \\ 3u^2v^{-2} & -2u^3v^{-3} \end{vmatrix}=-u^4v^{-4}.$$

Учитывая (16), получим

$$S=\int\limits_{4}^{5} u^4 du \int\limits_{2}^{3} v^{-4} dv=\frac{1}{5}u^5\Big|_4^5 \left(-\frac{1}{3v^3}\right)\Big|_2^3=\frac{39919}{3240}.$$

Ответ: $S=\dfrac{39919}{3240}$.

б) $\sqrt{\dfrac{x}{7}}+\sqrt{\dfrac{y}{9}}=1$, $\sqrt{\dfrac{x}{7}}+\sqrt{\dfrac{y}{9}}=2$, $\dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{9}$, $\dfrac{x}{7}=y$.

Решение. Имеем

$$S=\iint\limits_{G} dxdy, \tag{14}$$

где G - фигура, площадь которой необходимо вычислить, S – ее площадь. Схематически на плоскости (x,y) эта фигура выглядит следующим образом (рис.12).

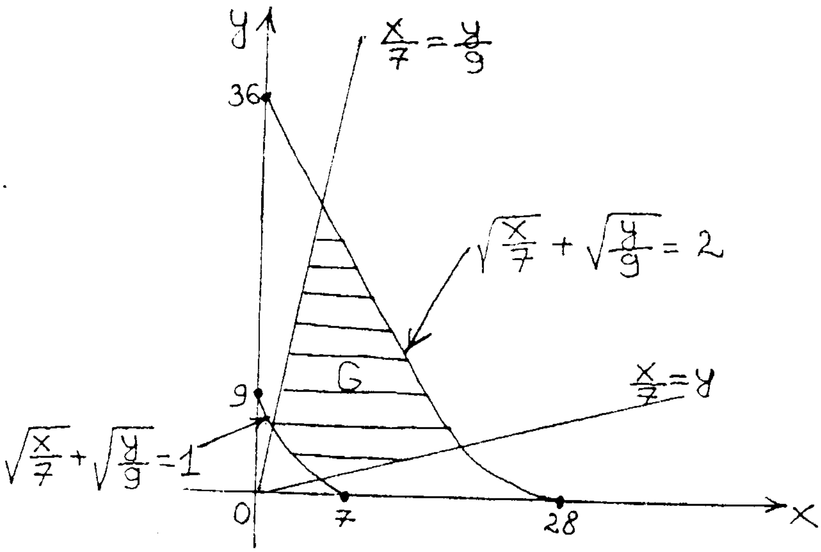

Рис. 12

Для вычисления площади фигуры G, изображенной на рис.12, перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x = 7\rho\cos^4\varphi,\ y = 9\rho\sin^4\varphi, \tag{17}$$

причем якобиан преобразования (17) равен $J = 252\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi$. Область G в плоскости (x,y) перейдет в область $G' = \left\{(\rho,\varphi): 1 \le \rho \le 4,\quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right\}$. Таким образом, искомая площадь S равна:

$$S = 252\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi d\varphi\int_1^4\rho d\rho = 252\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\varphi d\varphi = -\frac{945}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 2\varphi)d\cos 2\varphi =$$

$$= -\frac{945}{8}\left(\cos 2\varphi - \frac{1}{3}\cos^3 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3465}{64}.$$

Ответ: $S = \frac{3465}{64}$.

Задача 4. Найти массу плоской пластины G, заданной ограничивающими ее кривыми, γ - поверхностная плотность.

$$G: \frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{64} = 1, \; x = 0 \quad (x \geq 0); \quad \gamma = \frac{25}{11} x y^2.$$

Решение. Известно, что масса плоской пластины M равна $M = \iint\limits_G \gamma(x,y) dxdy$.

В нашем случае $M = \iint\limits_G \frac{25}{11} x y^2 dxdy$, (18)

область G изображена на рис. 13.

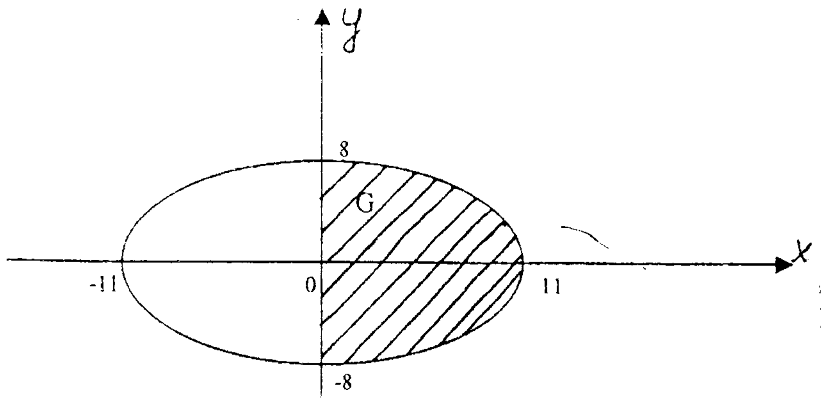

Рис. 13

Для вычисления интеграла (18) введем обобщенные полярные координаты по формулам $x = 11\rho\cos\varphi$, $y = 8\rho\sin\varphi$; при этом якобиан $J = 88\rho$. Учитывая это, из (18) получим

$$M = 88 \cdot \frac{25}{11} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 \cos\varphi \sin^2 \varphi d\varphi = 200 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{80}{3}.$$

Ответ: $M = \dfrac{80}{3}$.

Задача 5. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь, ограниченную следующими кривыми:

а) $x^3 + y^3 = 5xy$ – площадь петли. (19)

Решение. Переходя к полярной системе координат по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим уравнение кривой (19):

$$\rho(\varphi) = \frac{5\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \tag{20}$$

Учитывая, что $\rho(\varphi) \ge 0$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{5\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \ge 0, \\ -\pi < \varphi \le \pi. \end{cases} \tag{21}$$

Решив эту систему, находим, что в (20) $\rho(\varphi) \ge 0$ при $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Заметив, что $0 = \rho\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \rho(0) = \rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \rho(\pi)$, $\lim\limits_{\rho \to -\frac{\pi}{4}-0} \rho(\varphi) = \lim\limits_{\rho \to \frac{3\pi}{4}+0} \rho(\varphi) = +\infty$, и используя симметричность кривой (19) относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов, получим схематическое изображение кривой (19) (рис. 14).

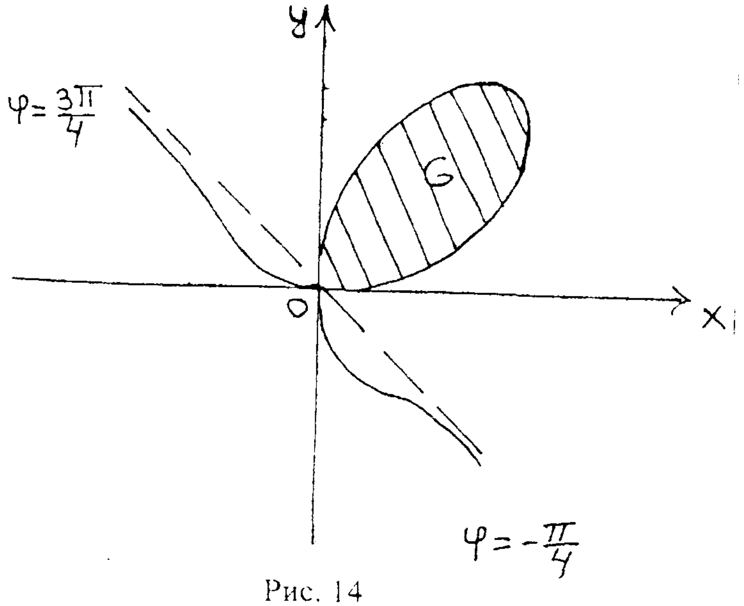

Рис. 14

Таким образом, область G, площадь S которой нужно вычислить, ограничена кривой (20), $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда, учитывая, что якобиан $J = \rho$, получим:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{5\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}} \rho d\rho = \frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi}{\cos^6\varphi(1 + tg^3\varphi)^2} = \frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\varphi dtg\varphi}{(1 + tg^3\varphi)^2} =$$

$$= \frac{25}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^3 + 1)^2} = \frac{25}{6}\int_0^{+\infty} \frac{d(t^3 + 1)}{(t^3 + 1)^2} = -\frac{25}{6} \cdot \frac{1}{t^3 + 1}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{25}{6}.$$

Ответ: $S = \frac{25}{6}$.

б) $(x^2 + y^2 - 6x)^2 = 36(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = 6y\sqrt{3}$.

Решение. Перейдем к полярной системе координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Для кривой

$$(x^2+y^2-6x)^2=36(x^2+y^2) \qquad (22)$$

имеем $(\rho^2-6\rho\cos\varphi)^2=36\rho^2$, или $(\rho-6\cos\varphi)^2=36$. Отсюда $\rho-6\cos\varphi=\pm6$. Учитывая, что $\rho\geq0$, получим уравнение кривой (22) в полярной системе координат:

$$\rho=6(1+\cos\varphi). \qquad (23)$$

Поступая аналогично, получим уравнение окружности

$$x^2+y^2=6y\sqrt{3} \qquad (24)$$

в полярной системе координат:

$$\rho=6\sqrt{3}\sin\varphi. \qquad (25)$$

Схематически область G, площадь S которой нужно найти, имеет следующий вид (рис.15).

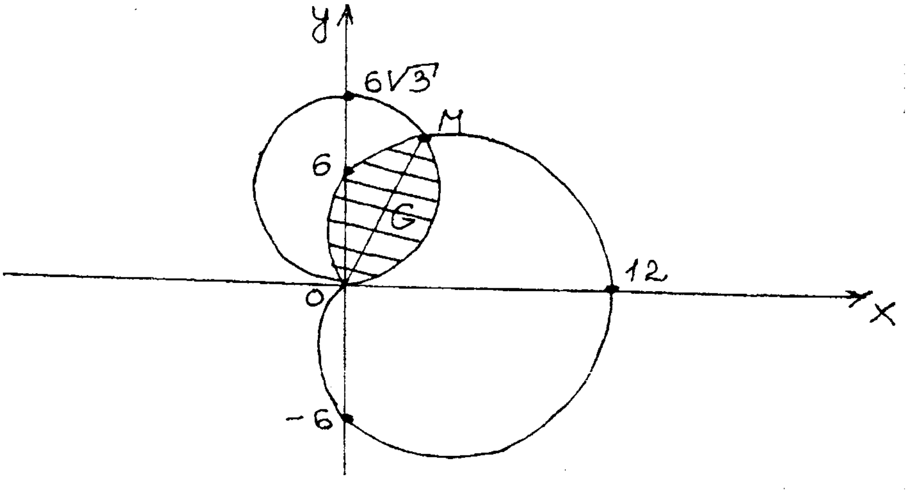

Рис. 15

Полярные координаты точки $M=M\left(9,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Таким образом,

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^{6\sqrt{3}\sin\varphi}\rho d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{6(1+\cos\varphi)}\rho d\rho=54\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi d\varphi+18\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=27\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos2\varphi)d\varphi+18\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi))d\varphi=$$

$$=27\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+18\left(\pi-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=27(\pi-\sqrt{3}).$$

Ответ: $S=27(\pi-\sqrt{3})$.

Задача 6. Переходя к обобщенным полярным координатам, вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

а) $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^4=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}$, $x\ge0$, $y\ge0$.

Решение. Переходим к обобщенным полярным координатам по формулам $x=4\rho\cos^2\varphi$, $y=3\rho\sin^2\varphi$; якобиан $J=24\rho\sin\varphi\cos\varphi$.

Тогда $G=\left\{(\rho,\varphi):0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le\sqrt{4\cos^4\varphi+\frac{9}{25}\sin^4\varphi}\equiv\rho(\varphi)\right\}$ и

$$S=24\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}\rho d\rho=12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\quad\rho^2(\varphi)d\varphi=$$

$$=12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^4\varphi+\frac{9}{25}\sin^4\varphi)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{12\cdot109}{25}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{218}{25}.$$

Ответ: $S=\frac{218}{25}$.

б) $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^4=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}$, $x\ge0$, $y\ge0$. (26)

Решение. Для вычисления площади S фигуры G, ограниченной кривой (26), используем те же обобщенные полярные координаты, что и в предыдущей задаче: $x = 4\rho\cos^2\varphi$, $y = 3\rho\sin^2\varphi$; якобиан $J = 24\rho\sin\varphi\cos\varphi$. При этом уравнение границы области G принимает вид:

$$\rho^2 = 4\cos^4\varphi - \frac{9}{25}\sin^4\varphi \ge 0.$$

Отсюда $G = \left\{(\rho,\varphi): 0 \le \varphi \le arctg\sqrt{\frac{10}{3}}; 0 \le \rho \le \sqrt{4\cos^4\varphi - \frac{9}{25}\sin^4\varphi} \equiv \rho(\varphi)\right\}$ и

$$S = 24\int\limits_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = 12\int\limits_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} \sin\varphi\cos\varphi\cdot\left(4\cos^4\varphi - \frac{9}{25}\sin^4\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 48\int\limits_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} \cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi - \frac{108}{25}\int\limits_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} \sin^5\varphi\cos\varphi d\varphi = -8\cos^6\varphi\Big|_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} -$$

$$-\frac{18}{25}\sin^6\varphi\Big|_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} = -\frac{8}{(1+tg^2\varphi)^3}\Bigg|_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} - \frac{18tg^6\varphi}{25(1+tg^2\varphi)^3}\Bigg|_0^{arctg\sqrt{\frac{10}{3}}} =$$

$$= 8 - \frac{8\cdot 27}{13^3} - \frac{18\cdot 10^3}{25\cdot 13^3} = \frac{1280}{169}.$$

Ответ: $S = \dfrac{1280}{169}$.

в) $\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{y^3}{27} = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{81}$, $x = 0$, $y = 0$.

Решение. Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам $x = 4\rho\cos\varphi$, $y = 9\rho\sin\varphi$; при этом якобиан $J = 36\rho$, а уравнение кривой $\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{y^3}{27} = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{81}$ в уравнение

$$\rho = \frac{1}{8\cos^3\varphi + 27\sin^3\varphi}, \quad \rho > 0. \qquad (27)$$

Из (27) следует, что $\rho(\varphi)>0$ при $\varphi\in\left(-arctg\frac{2}{3},\pi-arctg\frac{2}{3}\right)$. Отсюда ясно, что отрицательные части координатных осей

$\{(x,y):x=0,y<0\}$ и $\{(x,y):y=0,x<0\}$ не могут содержаться в границе области G (G – область, площадь S которой нужно найти). Следовательно, область G, граница которой содержит части координатных осей, находится в 1-й четверти. Тогда из (27) очевидно, что $G=\left\{(\rho,\varphi):0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le\frac{1}{8\cos^3\varphi+27\sin^3\varphi}\right\}$.

Итак,

$$S=36\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{8\cos^3\varphi+27\sin^3\varphi}}\rho d\rho=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(8\cos^3\varphi+27\sin^3\varphi)^2}=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^6\varphi(8+27tg^3\varphi)^2}=$$

$$=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+tg^2\varphi)^2\,dtg\varphi}{(8+27tg^3\varphi)^2}\Big|t=tg\varphi\Big|=18\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)^2\,dt}{(8+27t^3)^2}\Big|t=\frac{2}{3}\tau\Big|=\frac{1}{432}\int_0^{+\infty}\frac{(4\tau^2+9)^2\,d\tau}{(\tau^3+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{\tau^2d\tau}{(\tau^3+1)^2}+\frac{1}{432}\int_0^{+\infty}\frac{16\tau^4+81}{(\tau^3+1)^2}d\tau\equiv\frac{1}{6}I_1+\frac{1}{432}I_2 \tag{28}$$

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\tau^2d\tau}{(\tau^3+1)^2}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{d\tau^3}{(\tau^3+1)^2}=-\frac{1}{3(\tau^3+1)}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}. \tag{29}$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{16\tau^4+81}{(\tau^3+1)^2}d\tau=16\int_0^{+\infty}\frac{\tau^4d\tau}{(\tau^3+1)^2}-81\int_0^{+\infty}\frac{\tau^3d\tau}{(\tau^3+1)^2}+81\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^3+1}\equiv$$

$$\equiv16I_3-81I_4+81I_5. \tag{30}$$

$$I_3=\int_0^{+\infty}\frac{\tau^4d\tau}{(\tau^3+1)^2}\Bigg|\text{интегрируем по частям: }\begin{matrix}u=\tau^2 & du=2\tau d\tau\\ dv=\frac{\tau^2d\tau}{(\tau^3+1)^2} & v=\frac{-1}{3(\tau^3+1)}\end{matrix}\Bigg|=$$

$$=-\frac{\tau^2}{3(\tau^3+1)}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\tau d\tau}{\tau^3+1}=\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\tau d\tau}{\tau^3+1}\equiv\frac{2}{3}I_6 \tag{31}$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^3 d\tau}{(\tau^3+1)^2} \left| \textit{интегрируем по частям}: \begin{array}{ll} u = \tau & du = d\tau \\ dv = \dfrac{\tau^2 d\tau}{(\tau^3+1)^2} & v = -\dfrac{1}{3(\tau^3+1)} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\tau}{3(\tau^3+1)}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^3+1} = \frac{1}{3} I_5 \qquad (32)$$

Объединяя (30)-(32), получим

$$I_2 = \frac{32}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\tau d\tau}{\tau^3+1} - 27 I_5 + 81 I_5 = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{(16\tau+81)}{\tau^3+1} d\tau =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{65}{\tau+1} - \frac{65\tau-178}{\tau^2-\tau+1}\right)d\tau = \frac{2}{9}\left[\frac{65}{2}\ln\frac{(\tau+1)^2}{\tau^2-\tau+1}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{291}{\sqrt{3}} arctg\frac{2\tau}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{+\infty}\right] =$$

$$= \frac{291}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{2}{9} = \frac{4\cdot 97\pi}{9\sqrt{3}}. \qquad (33)$$

Подставляя (29) и (33) в (28), получим

$$S = \frac{1}{18} + \frac{1}{432}\cdot\frac{4\cdot 97\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{18}\left(1 + \frac{97\pi}{54\sqrt{3}}\right).$$

Ответ: $S = \dfrac{1}{18}\left(1 + \dfrac{97\pi}{54\sqrt{3}}\right)$.

Замечание. Эту задачу можно решить, перейдя к другим обобщенным полярным координатам: $x = 2\rho\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$, $y = 3\rho\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$; якобиан $J = \dfrac{4\rho}{(\sin\varphi\cos\varphi)^{1/3}}$.

Тогда уравнение криволинейной части границы области G имеет вид: $\rho = \frac{1}{4}(\cos\varphi)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{9}(\sin\varphi)^{\frac{4}{3}}$.

Отсюда

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\sin\varphi\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}} \int_0^{\frac{1}{4}(\cos\varphi)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{9}(\sin\varphi)^{\frac{4}{3}}} \rho d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{1}{4}(\cos\varphi)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{9}(\sin\varphi)^{\frac{4}{3}}\right)^2}{(\sin\varphi\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}} d\varphi =$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{16}(\cos\varphi)^{\frac{7}{3}}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{81}(\sin\varphi)^{\frac{7}{3}}(\cos\varphi)^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{18}\cos\varphi\sin\varphi\right]d\varphi=$$

$$=\frac{97}{648}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{\frac{7}{3}}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{3}}d\varphi+\frac{1}{18}. \qquad (34)$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{\frac{7}{3}}(\sin\varphi)^{-\frac{1}{3}}d\varphi\,\left|t=\sin^2\varphi\right|=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \qquad (35)$$

Здесь $B(p,q)$ и $\Gamma(p)$ - соответственно бета- и гамма- функции. Подставляя (35) в (34), получим $S=\frac{1}{18}\left(\frac{97\pi}{54\sqrt{3}}+1\right)$.

Задача 7. Двойным интегрированием найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

а) $x^2+y^2=2z^2$, $x^2+y^2=4x$, $z=0$ $(z\ge 0)$.

Решение. Требуется вычислить объем цилиндрического тела $W=\left\{(x,y,z):\ 0\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\ x^2+y^2\le 4x\right\}$. Обозначим $G=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 4x\}=\{(x,y):(x-2)^2+y^2\le 4\}$. Это круг с центром в точке $A(2,0)$, $R=2$ (рис.16). Таким образом, объем тела W равен $V=\iint\limits_G\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$.

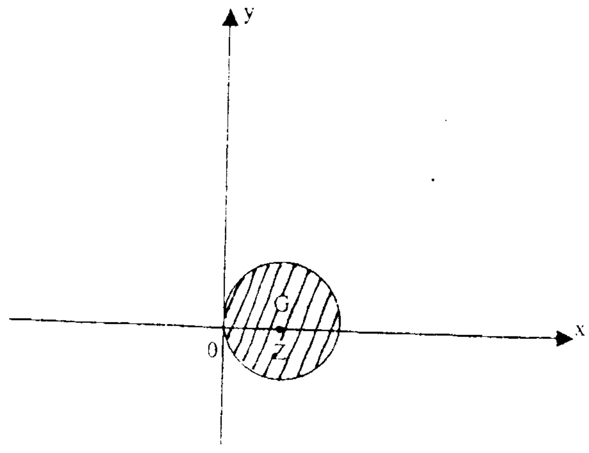

Рис. 16

Переходя к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получаем $G=\left\{(\rho,\varphi):\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le 4\cos\varphi\right\}$. Тогда

$$V=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{4\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\frac{32}{3}\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{32}{3}\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{32}{3}\sqrt{2}\left(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{128}{9}\sqrt{2}.$$

Ответ: $V=\frac{128}{9}\sqrt{2}$.

б) $x^2+y^2=25,\quad x^2+z^2=25.$

Решение. $W = \{(x,y,z): -\sqrt{25-x^2} \le z \le \sqrt{25-x^2}, x^2+y^2 \le 25\}$ - цилиндрическое тело, объем V которого необходимо найти. Пусть $G = \{(x,y): x^2+y^2 \le 25\}$. Тогда $V = 2\iint\limits_G \sqrt{25-x^2}\,dxdy$.

Учитывая, что $G = \{(x,y): -5 \le x \le 5, -\sqrt{25-x^2} \le y \le \sqrt{25-x^2}\}$, отсюда получим:

$$V = 2\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dy = 4\int\limits_{-5}^{5}(25-x^2)dx = 8(125-\frac{125}{3}) = \frac{2000}{3}.$$

Ответ: $V = \frac{2000}{3}$.

в) $x+y+z=2, \quad 3x+y=2, \quad 3x+2y=4, \quad y=0, \quad z=0.$ (36)

Решение. $W = \{(x,y,z), 0 \le z \le 2-x-y, \quad (x,y) \in G\}$ - тело, ограниченное плоскостями (36). Область G изображена на рис. 17.

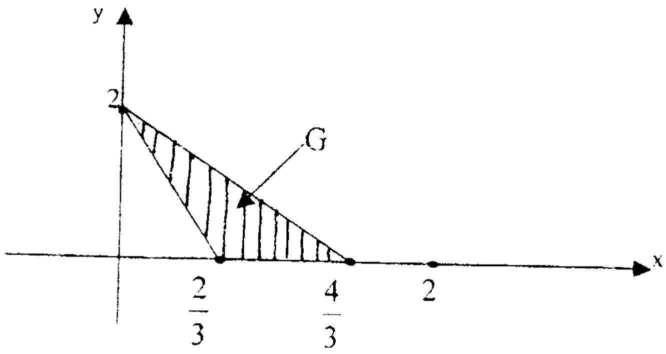

Рис. 17

Очевидно, что $G = \left\{(x,y), \quad 0 \le y \le 2, \quad \frac{1}{3}(2-y) \le x \le \frac{2}{3}(2-y)\right\}$.

Тогда

$$V=\iint\limits_G (2-x-y)dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)}(2-x-y)dx= -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 (2-x-y)^2\Big|_{\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)}dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left[\frac{1}{9}(2-y)^2-\frac{4}{9}(2-y)^2\right]dy=\frac{1}{6}\int\limits_0^2(2-y)^2dy=\frac{1}{18}(y-2)^3\Big|_0^2=\frac{4}{9}.$$

Ответ: $V=\frac{4}{9}$.

г) $z=9(x^2+y^2)$, $\quad z=6(x+y)$.

Решение. Поверхность $z=9(x^2+y^2)$ – параболоид вращения с вершиной в начале координат, расположенный в верхней полуплоскости $z\geq 0$. Плоскость $z=6(x+y)$ также проходит через начало координат и не совпадает с касательной плоскостью в вершине параболоида. Следовательно, плоская часть границы тела W (его объем требуется найти) располагается не ниже его параболической части. Тогда $W=\{(x,y,z):9(x^2+y^2)\leq z\leq 6(x+y),\quad (x,y)\in G\}$, плоская область G-проекция тела W на плоскость $z=0$. Отсюда получаем:

$$V=\iint\limits_G[6(x+y)-9(x^2+y^2)]dxdy. \tag{37}$$

Граница ∂G области G записывается в виде

$$\partial G=\{(x,y):9(x^2+y^2)=6(x+y)\}=\left\{(x,y):\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}\right\}.$$

Значит, $G=\left\{(x,y):\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leq\frac{2}{9}\right\}$. Область G изображена на рис. 18.

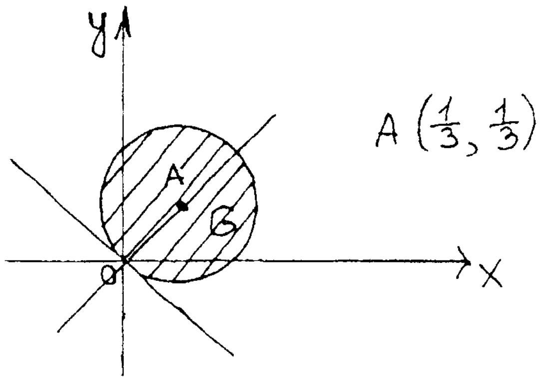

Рис. 18

Перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда $oG = \left\{(\rho,\varphi): -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \le \rho \le \frac{2}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right\}$. Учитывая это, из (37) получаем

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)} \left[6\rho(\cos\varphi + \sin\varphi) - 9\rho^2\right]\rho d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[2\rho^3(\cos\varphi + \sin\varphi) - \frac{9}{4}\rho^4\right]\Bigg|_0^{\frac{2}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)} d\varphi = \frac{4}{27}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\varphi + \sin\varphi)^4 d\varphi =$$

$$= \frac{16}{27}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi \left|\varphi + \frac{\pi}{4} = t\right| = \frac{16}{27}\int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{4}{27}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{4}{27}\int_0^{\pi}\left[1 - 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)\right]dt = \frac{4}{27}\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{2}{9}\pi.$$

Ответ: $V = \frac{2}{9}\pi$.

Задача 8. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

а) $(x^2+y^2+z^2)^3=4z^4$. (38)

Решение. Так как переменные x, y и z входят в уравнение только в четных степенях, то тело W, ограниченное поверхностью (38), симметрично относительно координатных плоскостей. Поэтому достаточно вычислить объем части тела W, расположенной в 1-м октанте (это $\frac{1}{8}V$).

Для вычисления объема V тела W перейдем к сферической системе координат по формулам:

$x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, при этом якобиан $J=r^2\sin\theta$ и уравнение поверхности (38) примет вид $r=2\cos^2\theta$.

Отсюда $V=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\cos^2\theta}r^2dr=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin\theta d\theta=\frac{32}{21}\pi.$

Ответ: $V=\frac{32}{21}\pi.$

б) $\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\right)^3=xyz.$ (39)

Решение. Из уравнения (39) видно, что тело W располагается только в тех октантах, где произведение $xyz\geq 0$. Таких октантов четыре, причем объемы частей тела W, расположенных в каждом из таких октантов равны друг другу. Поэтому достаточно вычислить объем части тела W, расположенной в 1-м октанте (*это* $\frac{1}{4}V$).

Перейдем к обобщенной сферической системе координат по формулам $x=4r\cos\varphi\sin\theta$, $y=3r\sin\varphi\sin\theta$, $z=2r\cos\theta$, якобиан $J=24r^2\sin\theta$. В этой системе координат уравнение поверхности (39) имеет вид

$r = \sqrt[3]{12\sin 2\varphi \sin^2\theta\cos\theta} \equiv r(\theta,\varphi)$. Тогда

$$V = 4\cdot 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{r(\theta,\varphi)} r^2 dr = 4\cdot 24\cdot\frac{1}{3}\cdot 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta = 96.$$

Ответ: $V = 96$.

в) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\right)^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}$. (40)

Решение. Используем обобщенную сферическую систему координат $x = 2r\cos\varphi\sin\theta$, $y = 3r\sin\varphi\sin\theta$, $z = 4r\cos\theta$, якобиан $J = 24r^2\sin\theta$. Уравнение поверхности (40) переходит в уравнение $r^2 = -\cos 2\theta$. Учитывая, что $r^2 \geq 0$, отсюда получим

$W = \left\{(r,\theta,\varphi):\quad 0\leq\varphi<2\pi,\quad \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4},\quad 0\leq r\leq\sqrt{-\cos 2\theta}\right\}$, W – тело, объем V которого необходимо найти. Тогда

$$V = 24\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt{-\cos 2\theta}} r^2 dr = 32\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\theta)^{\frac{2}{3}}\sin\theta d\theta =$$

$$= -32\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\cos\theta\Big|\cos\theta = t\Big| = 32\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2t^2)dt\Big|t\sqrt{2}=\tau\Big| =$$

$$= 16\pi\sqrt{2}\int_0^1(1-\tau^2)^{\frac{3}{2}}d\tau\Big|\tau = \sin\alpha\Big| = 16\pi\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\alpha d\alpha = 4\pi\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\alpha)^2 d\alpha =$$

$$= 4\pi\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+2\cos 2\alpha+\frac{1}{2}(1+\cos 4\alpha)\right]d\alpha = 4\pi\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi^2\sqrt{2}.$$

Ответ: $V = 3\pi^2\sqrt{2}$.

г) $(x^2+y^2)^2+z^4 = 27(x-y)$ (41)

Решение. В сферической системе координат $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, уравнение поверхности (41) имеет вид $r = 3\sqrt[3]{\dfrac{(\cos\varphi - \sin\varphi)\sin\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}} = r(\theta,\varphi)$, якобиан $J = r^2\sin\theta$. Учитывая, что $r(\theta,\varphi) \ge 0$, получим $W = \left\{(r,\theta,\varphi): \dfrac{5\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{9\pi}{4}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le r \le r(\theta,\varphi)\right\}$ - тело, ограниченное поверхностью (41). Таким образом, объем V тела W равен

$$V = \iiint\limits_W dxdydz = \int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{r(\theta,\varphi)} r^2 dr = 9\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta} =$$

$$= 18(\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\cos^2\theta \cdot \cos^2\theta(tg^4\theta + 1)} = 36\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} = 36\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 9\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = 18\pi.$$

Заметим, что несобственный интеграл можно вычислить, используя формулу Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов, однако, такой способ вычисления этого интеграла достаточно трудоемкий.

Ответ: $V = 18\pi$.

Задача 9. Найти массу тела W, заданного ограничивающими его поверхностями, γ – плотность.

а) W: $49(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, $z = 0$ $(y \le 0, \quad z \ge 0)$; $\gamma = 5(x^2 + y^2)$.

Решение. Имеем

$$M = \iiint\limits_W \gamma(x,y,z)dxdydz = 5\iiint\limits_W (x^2 + y^2)dxdydz. \tag{42}$$

Область интегрирования W изображена на рис. 19.

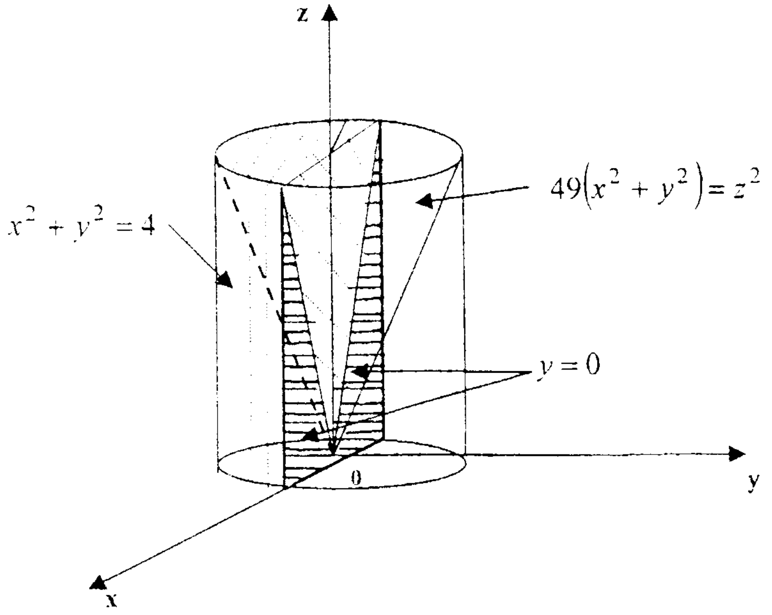

Рис. 19

Чтобы вычислить интеграл (42) введем цилиндрическую систему координат по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$; якобиан $J=\rho$. При этом уравнение верхней ($z\geq 0$) части конуса $49(x^2+y^2)=z^2$ принимает вид $z=7\rho$. Тогда, учитывая, что $y\leq 0$, получаем:

$$M=5\int\limits_{\pi}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{2}\rho^3d\rho\int\limits_{0}^{7\rho}dz=35\cdot\pi\int\limits_{0}^{2}\rho^4d\rho=7\pi\cdot 2^5=224\pi.$$

Ответ: $M=224\pi$.

б) $W:\quad x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=16z^2,\quad x=0,\quad y=0$ (43)

$(x\leq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0)$; $\gamma=17z$.

Решение. Масса тела, ограниченного поверхностями (43), равна:

$$M=\iiint\limits_{W}\gamma(x,y,z)dxdydz=17\iiint\limits_{W}zdxdydz. \qquad (44)$$

Для вычисления интеграла (44) перейдем к сферической системе координат: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, якобиан $J = r^2\sin\theta$. В этом случае: $W = \left\{(r,\theta,\varphi):\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi,\ \ 0 \le \theta \le arctg4,\ \ 0 \le r \le 2\right\}$. Тогда

$$M = 17\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{arctg4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^2 r\cos\theta \cdot r^2 dr = 17 \cdot \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{arctg4} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^2 r^3 dr =$$

$$= 17 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{arctg4} \cdot 4 = 17\pi \cdot \frac{tg^2\theta}{1 + tg^2\theta}\Big|_0^{arctg4} = 17\pi \cdot \frac{16}{17} = 16\pi.$$

Ответ: $M = 16\pi$.

Задача 10. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\text{а)}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0). \qquad (45)$$

Решение. Имеем для однородного тела:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_W x dx dy dz}{\iiint\limits_W dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint\limits_W y dx dy dz}{\iiint\limits_W dx dy dz}, \quad z_c = \frac{\iiint\limits_W z dx dy dz}{\iiint\limits_W dx dy dz}, \qquad (46)$$

W – тело, ограниченное поверхностями (45), x_c, y_c, z_c - координаты его центра масс.

Для вычисления интегралов, входящих в формулы, введем обобщенные сферические координаты: $x = 3r\cos^3\varphi\sin^3\theta$, $y = 5r\sin^3\varphi\sin^3\theta$, $z = 7r\cos^3\theta$, якобиан $J = 945r^2\sin^5\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi$. Таким образом, $W = \left\{(r,\theta,\varphi):\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le r \le 1\right\}$. Используя это, найдем интегралы, входящие в формулы (46).

1. $$\iiint\limits_W dxdydz = 945\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta\int\limits_0^1 r^2dr =$$

$$= 945\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4\varphi)d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)(1-\cos^2\theta)^2\cos^2\theta d\cos\theta =$$

$$= -315\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-2\cos^4\theta+\cos^6\theta)d\cos\theta = 315\cdot\frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right) =$$

$$= 315\cdot\frac{\pi}{16}\cdot\frac{8}{105} = \frac{3\pi}{2}.$$

2. $$\iiint\limits_W zdxdydz = 945\cdot 7\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^5\theta d\theta\int\limits_0^1 r^3dr =$$

$$= 945\cdot 7\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 2\theta d\theta =$$

$$= -945\cdot 7\cdot\frac{\pi}{2^{12}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2 2\theta+\cos^4 2\theta)d(\cos2\theta) =$$

$$= -945\cdot 7\cdot\frac{\pi}{2^{12}}\cdot\left.\left(\cos2\theta-\frac{2}{3}\cos^3 2\theta+\frac{1}{5}\cos^5 2\theta\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 945\cdot 7\cdot\frac{\pi}{2^{12}}\cdot 2\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = 945\cdot 7\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{2\pi}{2^{12}} = 63\cdot 7\cdot\frac{\pi}{2^8}.$$

Отсюда $z_c = \dfrac{63\cdot 7\pi}{2^8} : \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{21\cdot 7}{128} = \dfrac{147}{128}$.

В силу симметрии границы области W относительно переменных $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{5}$, $\frac{z}{7}$ получаем:

$x_c = \dfrac{21\cdot 3}{128} = \dfrac{63}{128}$, $y_c = \dfrac{21\cdot 5}{128} = \dfrac{105}{128}$.

Ответ: $x_c = \frac{63}{128}$, $y_c = \frac{105}{128}$, $z_c = \frac{147}{128}$.

б) $x^2 + y^2 = 8, \quad x + y + z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$ (47)

Решение. Для вычисления координат центра масс тела W, ограниченного поверхностями (47), используем формулы (46). Введем цилиндрическую систему координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, якобиан $J = \rho$. Тогда уравнение цилиндра $x^2 + y^2 = 8$ переходит в $\rho = 2\sqrt{2}$, уравнение плоскости $x + y + z = 4$ – в $z = 4 - \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)$, а уравнения плоскостей $y = 0$ и $x = 0$ в $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ соответственно. Значит,

$$W = \left\{(\rho, \varphi, z): \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 2\sqrt{2}, \quad 0 \le z \le 4 - \rho(\cos\varphi + \sin\varphi) \equiv \rho(\varphi)\right\}.$$

Вычисляем интегралы, входящие в формулы (46).

1. $$\iiint\limits_W dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\rho(\varphi)} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho[4 - \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)]d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[16 - \frac{16}{3}\sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right] d\varphi = 8\pi - \frac{32}{3}\sqrt{2} = \frac{24\pi - 32\sqrt{2}}{3}. \qquad (48)$$

2. $$\iiint\limits_W xdxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2 \cos\varphi d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2[4 - \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)]d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{64}{3}\sqrt{2} \ \cos\varphi - 16(\cos^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\right] d\varphi = \frac{64}{3}\sqrt{2} - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2\varphi)d\varphi - 8 =$$

$$= \frac{64\sqrt{2} - 24}{3} - 4\pi = \frac{64\sqrt{2} - 24 - 12\pi}{3}.$$

Отсюда и из (46) и (48) получим:

$$x_c = \frac{64\sqrt{2} - 24 - 12\pi}{3} : \frac{24\pi - 32\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2} - 6 - 3\pi}{6\pi - 8\sqrt{2}}.$$

Из соображений симметрии $y_c = x_c$, т.е.

$$y_c = \frac{16\sqrt{2} - 6 - 3\pi}{6\pi - 8\sqrt{2}}.$$

3. $$\iiint\limits_W z\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho d\rho \int\limits_0^{\rho(\varphi)} z dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho[4 - \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)]^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho\left[16 - 8\rho(\cos\varphi + \sin\varphi) + \rho^2(1 + \sin 2\varphi)\right] d\rho = 16\pi - \frac{128}{3}\sqrt{2} + 4\pi + 8 =$$

$$= \frac{60\pi + 24 - 128\sqrt{2}}{3}.$$

Отсюда и из (46) и (48) имеем

$$z_c = \frac{60\pi + 24 - 128\sqrt{2}}{3} : \frac{24\pi - 32\sqrt{2}}{3} = \frac{15\pi + 6 - 32\sqrt{2}}{6\pi - 8\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x_c = y_c = \dfrac{16\sqrt{2} - 6 - 3\pi}{6\pi - 8\sqrt{2}}$, $z_c = \dfrac{15\pi + 6 - 32\sqrt{2}}{6\pi - 8\sqrt{2}}$.

Задача 11. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела (плотность $\gamma \equiv 1$), ограниченного следующими поверхностями:

а) $z^2 = 6x$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 3x$.

Решение. Момент инерции тела W относительно оси Oz вычисляется по формуле:

$$I_z = \iiint\limits_W (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Учитывая, что в нашем случае плотность $\gamma(x, y, z) \equiv 1$, отсюда получим:

$$I_z = \iiint\limits_W (x^2 + y^2)dxdydz. \qquad (49)$$

Переходим к цилиндрической системе координат:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$; якобиан $J = \rho$. Тогда

$$W = \left\{(\rho, \varphi, z) : -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \rho \le 3\cos\varphi,\quad 0 \le z \le \sqrt{6\rho\cos\varphi}\right\}$$ и

$$I_z=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho^3d\rho\int\limits_0^{\sqrt{6\rho\cos\varphi}}dz=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho^3\sqrt{6\rho\cos\varphi}\quad d\rho=\sqrt{6}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi}\quad d\varphi\int\limits_0^{3\cos\varphi}\rho^{\frac{7}{2}}d\rho=$$

$$=\sqrt{6}\cdot\frac{2}{9}\cdot3^{\frac{9}{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\varphi=54\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)^2d\sin\varphi=$$

$$=108\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi)d\sin\varphi=108\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=$$

$$=108\sqrt{2}\cdot\frac{8}{15}=\frac{288}{5}\sqrt{2}.$$

Ответ: $I_z=\frac{288}{5}\sqrt{2}.$

б) $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{243}{32}z.$ (50)

Решение. Момент инерции I_z однородного тела $(\gamma\equiv1)$ относительно оси Oz вычисляем по формуле (49). Для этого вводим сферическую систему координат по формулам: $x=r\cos\varphi\sin\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\theta$, якобиан $J=r^2\sin\theta$. Тогда уравнение поверхности (50) принимает вид $r=\frac{3}{2}\sqrt[5]{\cos\theta}\geq0.$

Отсюда $W=\left\{(r,\theta,\varphi):\quad 0\leq\varphi<2\pi,\quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\quad 0\leq r\leq\frac{3}{2}\sqrt[5]{\cos\theta}\right\}$ и

$$I_z=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\frac{3}{2}\sqrt[5]{\cos\theta}}r^2\sin^2\theta\cdot r^2dr=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\int\limits_0^{\frac{3}{2}\sqrt[5]{\cos\theta}}r^4dr=$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{243}{32}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{243}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{243}{320}\pi.$$

Ответ: $I_z=\frac{243}{320}\pi.$

III. ЗАДАНИЯ

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

1.1. $\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{0}dy\int\limits_{-\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{16-y^2}}fdx+\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}}dy\int\limits_{\frac{y^2}{6}}^{\sqrt{16-y^2}}fdx$.

1.2. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-x}^{\frac{x}{e^2}}fdy+\int\limits_{1}^{e^2}dx\int\limits_{\ln\frac{x}{e}}^{\frac{x}{e^2}}fdy$.

1.3. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}dx\int\limits_{\cos x}^{\sin x}fdy$.

1.4. $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{e^x}^{x\cdot sh1+ch1}fdy+\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\ln ch1}dx\int\limits_{e^x}^{ch1\cdot e^{-x}}fdy$.

1.5. $\int\limits_{4\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}dx\int\limits_{\frac{1}{8}x^2}^{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+16}}fdy+\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{0}dx\int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+16}}fdy$.

1.6 $\int\limits_{2}^{2\sqrt{2}}dx\int\limits_{\frac{8}{x}}^{2x}fdy+\int\limits_{2\sqrt{2}}^{3}dx\int\limits_{x}^{2x}fdy+\int\limits_{3}^{3\sqrt{2}}dx\int\limits_{x}^{\frac{18}{x}}fdy$

1.7. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-2\sqrt{2y}}^{2\sqrt{2y}}fdx+\int\limits_{1}^{3}dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}fdx$.

1.8. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\frac{y}{e^2}}^{e^{y+1}}fdx+\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y}^{e^{y+1}}fdx$.

1.9. $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}}dx\int\limits_{\cos 2x}^{\sin 2x}fdy$.

1.10. $\int\limits_{1}^{ch1}dy\int\limits_{0}^{\ln y}fdx+\int\limits_{ch1}^{e}dy\int\limits_{\frac{y}{sh1}-cth1}^{\ln y}fdx$.

1.11. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}dy\int\limits_{\sqrt{\frac{9}{16}-y^2}}^{\sqrt{2y}}fdx+\int\limits_{\frac{3}{4}}^{3}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2y}}fdx+\int\limits_{3}^{6}dy\int\limits_{\frac{2}{3}\sqrt{y^2-9}}^{\sqrt{2y}}fdx$.

1.12.

$\int\limits_{-6\sqrt{2}}^{-6}dy\int\limits_{\frac{18}{y}}^{\frac{y}{4}}fdx+\int\limits_{-6}^{-4\sqrt{2}}dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{4}}fdx+\int\limits_{-4\sqrt{2}}^{-4}dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{8}{y}}fdx$.

1.13. $\int\limits_{-4\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}x}^{\sqrt{64-x^2}}fdy+\int\limits_{0}^{4\sqrt{3}}dx\int\limits_{\frac{x^2}{12}}^{\sqrt{64-x^2}}fdy$.

1.14. $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}}dy\int\limits_{-y}^{e^{y+1}}fdx+\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}dy\int\limits_{-y}^{-2\sqrt{e}\cdot y}fdx$.

1.15. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}dx\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x}^{\sin x}fdy$.

1.16. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}dy\int\limits_{\frac{y}{sh1}-cth1}^{\ln y}fdx+\int\limits_{1}^{ch1}dy\int\limits_{\frac{y}{sh1}-cth1}^{0}fdx$.

1.17. $\int\limits_{-4\sqrt{5}}^{-4} dy \int\limits_{-\sqrt{144-y^2}}^{-\sqrt{y^2-16}} f dx + \int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-4\sqrt{-2y}}^{0} f dx$.

1.18.

$$\int\limits_{-3}^{-\frac{3}{\sqrt{2}}} dx \int\limits_{-3x}^{-\frac{27}{x}} f dy + \int\limits_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{-2} dx \int\limits_{-3x}^{-6x} f dy + \int\limits_{-2}^{-\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\frac{12}{x}}^{-6x} f dy .$$

1.19. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{4\sqrt{x}} f dy + \int\limits_{2}^{6} dx \int\limits_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} f dy$.

1.20. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{e}}} dx \int\limits_{\sqrt{ex}}^{-\frac{x}{2}} f dy + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{1} dx \int\limits_{\ln x-\frac{1}{2}}^{-\frac{x}{2}} f dy$.

1.21. $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{7\pi}{18}} dx \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x}^{\sin 3x} f dy$.

1.22. $\int\limits_{1}^{\sqrt{ch1}} dy \int\limits_{0}^{\ln y} f dx + \int\limits_{\sqrt{ch1}}^{ch1} dy \int\limits_{0}^{\ln ch1-\ln y} f dx$

1.23. $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}} dx \int\limits_{\sqrt{\frac{9}{64}-x^2}}^{\sqrt{x}} f dy + \int\limits_{\frac{3}{8}}^{\frac{9}{8}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-\frac{9}{64}}}^{\sqrt{x}} f dy$.

1.24.

$$\int\limits_{-9\sqrt{2}}^{-9} dy \int\limits_{-\frac{y}{6}}^{-\frac{27}{y}} f dx + \int\limits_{-9}^{-6\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\frac{y}{6}}^{-\frac{y}{3}} f dx + \int\limits_{-6\sqrt{2}}^{-6} dy \int\limits_{-\frac{12}{y}}^{-\frac{y}{3}} f dx$$

1.25. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dy \int\limits_{\frac{y^2}{3}}^{\sqrt{4-y^2}} f dx + \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} f dx$.

1.26. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{3}\cos x}^{\sin x} f dy$.

1.27. $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} dy \int\limits_{-\frac{y}{e}}^{e^y} f dx + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} dy \int\limits_{-\frac{y}{e}}^{-\frac{2y}{\sqrt{e}}} f dx$.

1.28. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\ln ch1} dx \int\limits_{ch1\cdot e^{x}}^{xsh1+ch1} f dy + \int\limits_{\frac{1}{2}\ln ch1}^{1} dx \int\limits_{e^{x}}^{xsh1+ch1} f dy$.

1.29. $\int\limits_{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}^{-\frac{2}{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\frac{3}{8}y^2} f dx + \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{1}{9}+y^2}}^{-\frac{3}{8}y^2} f dx$.

1.30.

$$\int\limits_{-3\sqrt{2}}^{-3} dx \int\limits_{\frac{18}{x}}^{x} f dy + \int\limits_{-3}^{-2\sqrt{2}} dx \int\limits_{2x}^{x} f dy + \int\limits_{-2\sqrt{2}}^{-2} dx \int\limits_{2x}^{\frac{8}{x}} f dy .$$

Задача 2. В двойном интеграле $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования двумя способами, если область интегрирования G определяется следующим образом:

2.1. $x^2 + y^2 \le 4x,\ y \le x$.

2.2. $x^2 + y^2 \le 4,\ x + y \ge 2$.

2.3. $x \ge y,\ x + y \le 6,\ y \ge 0$.

2.4. $y^2 \le 2x + 1,\ y \ge x$.

2.5. $x^2 + y^2 \ge 8,\ x^2 + y^2 \le 4x$.

2.6. $x^2 + y^2 \le 6y,\ y \le x$.

2.7. $x \ge y,\ x + y \le 18,\ y \ge 0$.

2.8. $x^2 + y^2 \ge 18,\ x^2 + y^2 \le 6x$.

2.9. $y^2 \le 4x + 4,\ y \ge x$.

2.10. $x^2 + y^2 \le 9,\ x + y \ge 3$.

2.11. $x^2 + y^2 \le 8x,\ y \ge x$.

2.12. $y^2 \le 6x + 9,\ y \ge x$.

2.13. $x^2 + y^2 \le 16,\ x + y \ge 4$.

2.14. $x^2 + y^2 \ge 32,\ x^2 + y^2 \le 8x$.

2.15. $x \ge y,\ x + y \le 12,\ y \ge 0$.

2.16. $x^2 + y^2 \le 10y,\ y \ge x$.

2.17. $x^2 + y^2 \ge 50,\ x^2 + y^2 \le 10x$.

2.18. $y^2 \le 8x + 16,\ y \ge x$.

2.19. $x \ge y,\ x + y \le 14,\ y \ge 0$.

2.20. $x^2 + y^2 \le 25,\ x + y \ge 5$.

2.21. $x^2 + y^2 \le 12x,\ y \ge x$.

2.22. $x^2 + y^2 \le 36,\ x + y \ge 6$.

2.23. $x \ge y,\ x + y \le 16,\ y \ge 0$.

2.24. $y^2 \le 10x + 25,\ y \ge x$.

2.25. $x^2 + y^2 \ge 72,\ x^2 + y^2 \le 12x$.

2.26. $x^2 + y^2 \le 14y,\ y \ge x$.

2.27. $x \ge y, x + y \le 18, y \ge 0.$

2.28. $x^2 + y^2 \ge 98, x^2 + y^2 \le 14x.$

2.29. $x^2 + y^2 \le 49, x + y \ge 7.$ 2.30. $y^2 \le 12x + 36, y \ge x.$

Задача 3. Произведя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

3.1. $x + y = 1, x + y = 2, y = 2x, y = 3x.$

3.2. $x^2 = 4y, x^2 = 8y, y = 3, y = 5.$

3.3. $xy = 9, xy = 18, y = x, y = 2x.$

3.4. $y^2 = 6x, y^2 = 12x, x^2 = 2y, x^2 = 8y.$

3.5. $x^2 = 3y, x^2 = 4y, x^3 = 5y^2, x^3 = 6y^2.$

3.6. $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} = 1, \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} = 2, y = \frac{3}{2}x, y = 6x.$

3.7. $xy = 16, xy = 25, y = 2, y = 3.$

3.8. $y^2 = 3x, y^2 = 5x, x = 4y, x = 7y.$

3.9. $xy = 4, xy = 16, y^2 = 3x, y^2 = 4x.$

3.10. $x + y = 4, x + y = 9, y = 3x, y = 5x.$

3.11. $xy = 4, xy = 8, y = 3x, y = 7x.$

3.12. $x^2 = 6y, x^2 = 9y, x^3 = 3y^2, x^3 = 5y^2.$

3.13. $xy = 25, xy = 49, y = 4, y = 6.$

3.14. $xy = 9, xy = 25, y^2 = 7x, y^2 = 10x.$

3.15. $y^2 = 4x, y^2 = 8x, x = 3y, x = 5y.$

3.16. $\sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{y}{6}} = 1, \sqrt{\frac{x}{4}} + \sqrt{\frac{y}{6}} = 2, y = \frac{3}{2}x, y = 6x.$

3.17. $y^2 = 3x, y^2 = 5x, x^2 = 4y, x^2 = 7y.$

3.18. $x^2 = 6y, x^2 = 11y, y = 2, y = 6.$

3.19. $x + y = 3, x + y = 5, y = 4x, y = 7x.$

3.20. $y^2 = 2x, y^2 = 3x, x^2 = y, x^2 = 5y.$

3.21. $xy = 4, xy = 9, y = 3, y = 7.$

3.22. $x^2 = 3y, x^2 = 5y, y = 1, y = 7.$

3.23. $x^2 = 2y, x^2 = 3y, x^3 = 4y^2, x^3 = 9y^2.$

3.24. $y^2 = x, y^2 = 3x, x = 2y, x = 4y.$

3.25. $xy = 16, xy = 32, y = 2x, y = 9x.$

3.26. $\sqrt{\frac{x}{3}}+\sqrt{\frac{y}{5}}=1, \sqrt{\frac{x}{3}}+\sqrt{\frac{y}{5}}=2, y=\frac{5}{3}x, y=\frac{20}{3}x.$

3.27. $xy=49, xy=81, y^2=3x, y^2=6x.$

3.28. $y^2=5x, y^2=7x, x^2=3y, x^2=6y.$

3.29. $xy=25, xy=36, y=3, y=4.$

3.30. $x+y=6, x+y=8, y=3x, y=8x.$

Задача 4. Найти массу плоской пластины G, заданной ограничивающими ее кривыми, γ-поверхностная плотность.

4.1. $G: x=2, y=0, y^2=7x (y\ge 0); \gamma=2x^2+3y.$

4.2. $G: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=3, y=0, y=\frac{4}{3}x\ (y\le 0); \gamma=\frac{5y^2}{x}.$

4.3. $G: x^2+y^2=9, x^2+y^2=25, x=0, y=0\ (x\ge 0, y\ge 0);\ \gamma=\frac{x+y}{x^2+y^2}.$

4.4. $G: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1, y=0\ (y\ge 0); \gamma=\frac{5}{18}x^2y.$

4.5. $G: x=3, y=0, y^2=6x\ (y\le 0); \gamma=\frac{3x^2}{4}-5y.$

4.6. $G: x^2+\frac{y^2}{4}=1, x^2+\frac{y^2}{4}=9, y=0, y=2x\ (y\ge 0); \gamma=\frac{2y}{x^3}.$

4.7. $G: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, x=0, y=0\ (x\ge 0, y\le 0); \gamma=\frac{3x-7y}{x^2+y^2}.$

4.8. $G: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1; \gamma=3y^4.$

4.9. $G: x=-3, y=0, y^2=-5x\ (y\le 0); \gamma=\frac{2x^2}{3}-4y.$

4.10. $G: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1, \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=4, x=0\ (x\ge 0), y=\frac{x}{4}; \gamma=\frac{3y}{x}.$

4.11. $G: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ y=0\ (x\le 0,\ y\ge 0);\ \gamma=\dfrac{5y-6x}{x^2+y^2}$.

4.12. $G: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=5,\ y=5x,\ y=0\ (y\ge 0);\ \gamma=15x^4y^3$.

4.13. $G: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0);\ \gamma=\dfrac{4x+5y}{x^2+y^2}$.

4.14. $G: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=12,\ x=0,\ y=3x\ (x\ge 0);\ \gamma=\dfrac{2y}{x}$.

4.15. $G: x=6,\ y=0,\ y^2=12x\ (y\le 0);\ \gamma=3x+8y^2$.

4.16. $G: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=4,\ y=0,\ y=\dfrac{7}{3}x\ (y\ge 0);\ \gamma=35\dfrac{y}{x^5}$.

4.17. $G: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0);\ \gamma=\dfrac{3x-2y}{x^2+y^2}$.

4.18. $G: \dfrac{x^2}{9}+y^2=1,\ x=0\ (x\le 0);\ \gamma=-12xy^8$.

4.19. $G: x=4,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{4}\ (y\le 0);\ \gamma=4x+5y^2$.

4.20. $G: \dfrac{x^2}{16}+y^2=1,\ \dfrac{x^2}{16}+y^2=5,\ x=0,\ y=\dfrac{x}{8}\ (x\ge 0);\ \gamma=\dfrac{y^5}{6x}$.

4.21. $G: x=5,\ y=0,\ y^2=6x\ (y\ge 0);\ \gamma=5x+7y^2$.

4.22. $G: x^2+\dfrac{y^2}{25}=1,\ x^2+\dfrac{y^2}{25}=16,\ y=0,\ y=4x\ (y\ge 0);\ \gamma=\dfrac{y}{x^3}$.

4.23. $G: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=36,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0);\ \gamma=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

4.24. $G: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 5, x = 0, y = \frac{3}{4}x\ (x \le 0, y \le 0); \gamma = 3\frac{x}{y}$.

4.25. $G: x = -\frac{5}{4}, y = 0, y^2 = -16x\ (y \le 0); \gamma = -16x + 7\frac{y^2}{2}$.

4.26. $G: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1; \gamma = x^4$.

4.27. $G: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0\ (x \le 0, y \ge 0); \gamma = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$.

4.28. $G: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 9, x = 0, y = -2x\ (x \le 0); \gamma = x^2 y^2$.

4.29. $G: x = 1, y = 0, y^2 = 8x\ (y \le 0); \gamma = 7x^2 - 2y$.

4.30. $G: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x = 0\ (x \ge 0); \gamma = 11xy^8$.

Задача 5. Переходя к полярным координатам, вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

5.1. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2), x^2 + y^2 = 2x$.

5.2. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2y\sqrt{3}$.

5.3. $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$.

5.4. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + 4y^2$

5.5. $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

5.6. $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 - y^2$.

5.7. $x^3 + y^3 = 3xy$ - площадь петли.

5.8. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^3 + y^3)$.

5.9. $x^4 + y^4 = 50xy$.

5.10. $(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2), x^2 + y^2 = 4\ (x^2 + y^2 \ge 4)$.

5.11. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, x \ge 0, y \ge 0$.

5.12. $(x^2 + y^2)^2 = 3(x^3 - 3xy^2)$.

5.13. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\ ((x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1)$.

5.14. $(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 9(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 3y\sqrt{3}$.

5.15. $(x^2 + y^2)^2 = 9x^2 - 4y^2$.

5.16. $(x^2+y^2)^2=32(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=8x$.

5.17. $(x^2+y^2)^2=72xy$.

5.18. $(x^2+y^2)^2=9x^2+25y^2$.

5.19. $(x^2+y^2)^3=4(x^4+y^4)$.

5.20. $x^3+y^3=2xy$ - площадь петли.

5.21. $(x^2+y^2)^2=7(x^3+y^3)$.

5.22. $x^4+y^4=32xy$.

5.23. $(x^2+y^2)^2=18(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=9$ $(x^2+y^2\geq 9)$.

5.24. $(x^2+y^2)^2=5(x^3-3xy^2)$.

5.25. $(x^2+y^2)^2=32xy$, $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ $((x-2)^2+(y-2)^2\leq 4)$.

5.26. $(x^2+y^2)^2=18(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=6x$.

5.27. $(x^2+y^2-4x)^2=16(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=4y\sqrt{3}$.

5.28. $(x^2+y^2)^2=50xy$.

5.29. $(x^2+y^2)^2=16x^2+49y^2$.

5.30. $(x^2+y^2)^3=9(x^4+y^4)$.

Задача 6. Переходя к обобщенным полярным координатам, вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми.

6.1. $\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{y^4}{81}=\dfrac{x^2}{4}+y^2$.

6.2. $(x+\dfrac{y}{2})^2=x-\dfrac{y}{2}$, $y\geq 0$.

6.3. $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\right)^3=\dfrac{x^2}{9}$, $y\geq 0$.

6.4. $\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}\right)^3=\dfrac{xy}{49}$ - площадь петли.

6.5. $\left[\left(\dfrac{x}{5}\right)^{2/3}+\left(\dfrac{y}{3}\right)^{2/3}\right]^6=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}$.

6.6. $\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}+\sqrt{\dfrac{y}{5}}\right)^8=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{49}$.

6.7. $\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}+\sqrt{\dfrac{y}{3}}\right)^{12}=\dfrac{xy}{25}$ - площадь петли.

6.8. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}$.

6.9. $\frac{x^3}{64}+\frac{y^3}{27}=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$, $x=0$, $y=0$.

6.10. $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{7}\right)^4=\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

6.11. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^5=\frac{x^2y^2}{16}$.

6.12. $\sqrt[4]{\frac{x}{7}}+\sqrt[4]{\frac{y}{2}}=1$, $x=0$, $y=0$.

6.13. $\frac{x^4}{81}+y^4=x^2+\frac{y^2}{4}$.

6.14. $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\right)^2=\frac{x}{4}-\frac{y}{5}$, $y\ge 0$.

6.15. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{7}\right)^3=\frac{x^2}{16}$, $y\ge 0$.

6.16. $\left(\frac{x}{7}+\frac{y}{5}\right)^3=\frac{xy}{4}$ - площадь петли.

6.17. $\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-6}=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}$.

6.18. $\left(\sqrt{\frac{x}{4}}+\sqrt{\frac{y}{7}}\right)^8=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

6.19. $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\sqrt{\frac{y}{5}}\right)^{12}=\frac{xy}{64}$ - площадь петли.

6.20. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=\frac{x}{3}+\frac{y}{5}$.

6.21. $\frac{x^3}{8}+\frac{y^3}{125}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}$, $x=0$, $y=0$.

6.22. $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\right)^4=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

6.23. $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\right)^4=\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

6.24. $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^5=\frac{x^2y^2}{81}$.

6.25. $\sqrt[4]{\frac{x}{3}}+\sqrt[4]{\frac{y}{5}}=1$, $x=0$, $y=0$.

6.26. $\frac{x^4}{256}+\frac{y^4}{16}=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}$.

6.27. $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right)^3=\frac{x^2}{25}$, $y\ge 0$.

6.28. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^3=\frac{xy}{9}$ - площадь петли.

6.29. $\left(\frac{x}{5}+y\right)^2=\frac{x}{5}-y$, $y\ge 0$.

6.30. $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{7}\right)^4=\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Задача 7. Двойным интегрированием найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

7.1. $x + y + z = 3,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

7.2. $x - y + z = 6,\ x + y = 2,\ x = y,\ y = 0,\ z = 0$.

7.3. $x + y + z = 6,\ 3x + 2y = 12,\ 3x + y = 6,\ y = 0,\ z = 0$.

7.4. $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0$.

7.5. $z = x + 2,\ z = -x - 2,\ x^2 + y^2 = 4$.

7.6. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

7.7. $z = \cos x \cos y,\ z = 0,\ |x + y| \le \dfrac{\pi}{2},\ |x - y| \le \dfrac{\pi}{2}$.

7.8. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1,\ y = 2x,\ y = 0,\ z = 0;\ x > 0$.

7.9. $z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ y = 1,\ y = 2x,\ y = 6 - x$.

7.10. $x^2 z^2 + 4y^2 = 9x^2;\ 0 < x < 2$.

7.11. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ z = 0,\ x + z = 6$.

7.12. $y^2 + z^2 = x,\ x = y;\ z > 0$.

7.13. $y^2 = 2z,\ 2x + 3y - 12 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

7.14. $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ z = 0;\ 0 < y < 1$.

7.15. $z = 9 - y^2,\ 3x + 4y = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;\ y > 0$.

7.16. $z = \sin(x^2 + y^2),\ z = 0;\ 0 < x^2 + y^2 < \pi$.

7.17. $z = 4 - x^2,\ 2x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;\ x > 0$.

7.18. $x^2 + y^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = 4x,\ z = 0$.

7.19. $2y^2 = x,\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} = 1,\ z = 0$.

7.20. $x^2 + y^2 = 2x,\ z = x,\ z = 3x$.

7.21. $x^2 + z^2 = 4, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

7.22. $x^2 + y^2 = 3z^2, x^2 + y^2 = 6x; z > 0$.

7.23. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, z = 12 - 3x - 4y, z = 1$.

7.24. $x^2 + y^2 = 2z, x + z = 4$.

7.25. $x^2 + y^2 = 9, x^2 + z^2 = 9$.

7.26. $3z = xy, x^2 + y^2 = 4x, z = 0; y > 0$.

7.27. $x^2 + y^2 = 4, z = \frac{x^3}{9}, z = 0; x > 0$.

7.28. $z = x^2 + y^2, z = x + y$.

7.29. $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, z = 0$.

7.30. $z = x^2 - y^2, z = 0, x = 3$.

Задача 8. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

8.1. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8x$.

8.2. $x^2 + y^2 + z^2 = 6z, x^2 + y^2 \le z^2$.

8.3. $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}\right)^2 = \frac{x}{3}$.

8.4. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3xyz$.

8.5. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2 - z^2)$.

8.6. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 9z^4$.

8.7. $\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36}\right)^3 = \frac{xyz}{8}$.

8.8. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z^2 = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 0; x > 0, y > 0, z > 0$

8.9. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

8.10. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2z(x^2 + y^2)$.

8.11. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{64z^2}{x^2+y^2}$.

8.12. $(x^2+y^2+z^2)^2=4(x^2+y^2)$.

8.13. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^3+\frac{z^6}{64}=\frac{xyz}{8}$.

8.14. $(x^2+y^2+z^2)^3=9(x^2+y^2)^2$.

8.15. $(x^2+y^2+z^2)^3=16y^2z^2$.

8.16. $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}\right)^2+\frac{z^4}{81}=\frac{z}{2}$.

8.17. $(x^2+y^2)^2+z^4=27z$.

8.18. $(x^2+y^2+z^2)^3=27xyz$.

8.19. $\left(\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{36}\right)^3=\frac{z^4}{256}$.

8.20. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^4}{16}=1$.

8.21. $(x^2+y^2+z^2)^3=27(x^3+y^3+z^3);\ x>0,\ y>0,\ z>0$.

8.22. $\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}\right)^2=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}$.

8.23. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^5=\left(8x^2+27y^2+64z^2\right)^2$.

8.24. $\left(\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{25}\right)^2=\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{25}$.

8.25. $\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=8(x-y)$.

8.26. $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{4}+y^2=\frac{z}{3}$.

8.27. $\left(x^2+y^2\right)^3+z^6=64xyz$.

8.28. $\left(x^2+\frac{y^2}{9}\right)^2+\frac{z^4}{16}=1$.

8.29. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=\frac{64}{x^2+y^2}$.

8.30. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = 8ze^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$.

Задача 9. Найти массу тела V, заданного ограничивающими его поверхностями, γ - плотность.

9.1. $V: 9\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ y=0,\ z=0\ (y\le 0,\ z\ge 0);\ \gamma=12\left(x^2+y^2\right)$.

9.2. $V: x^2+y^2+z^2=36,\ x^2+y^2=9\ \left(x^2+y^2\le 9\right),\ x=0\ (x\ge 0);\ \gamma=5|z|$.

9.3. $V: x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0);\ \gamma=8z$.

9.4. $V: x^2+y^2=16,\ x^2+y^2=18z,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\le 0,\ y\ge 0);\ \gamma=3y$.

9.5. $V: x^2+y^2=\frac{9}{16}z^2,\ x^2+y^2=\frac{3}{4}z,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0);\ \gamma=32xz$.

9.6. $V: x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=6z^2,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);\ \gamma=18z$.

9.7. $V: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=z,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\le 0,\ y\ge 0);\ \gamma=6y$.

9.8. $V: x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4\ (x^2+y^2\le 4),\ z=0\ (z\ge 0);\ \gamma=3z$.

9.9. $V: x^2+y^2=\frac{9}{64}z^2,\ x^2+y^2=\frac{3}{8}z,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0);\ \gamma=14xz$.

9.10. $V: x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=9z^2,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0);\ \gamma=24z$.

9.11. $V: 25(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ x=0,$
$y=0\ (x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);\ \gamma=7(x^2+y^2)$.

9.12. $V: x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4\ (x^2+y^2\le 4);\ \gamma=3|z|$.

9.13. $V: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=4z,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\le 0,\ y\ge 0);\ \gamma=60y$.

9.14. $V: x^2+y^2+z^2=25,\ x^2+y^2=4\ (x^2+y^2\le 4);\ \gamma=3|z|$.

9.15. $V: x^2+y^2=49,\ x^2+y^2=18z,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\le 0);\ \gamma=6x$.

9.16. $V: x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);\ \gamma=3z$.

9.17. $V: 36(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=9,\ y=0,\ z=0\ (y\ge 0,\ z\le 0);\ \gamma=\frac{7}{3}(x^2+y^2)$.

9.18. $V: x^2+y^2=49,\ x^2+y^2=4z,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\le 0,\ y\ge 0);\ \gamma=-15x$.

9.19. $V: x^2+y^2=\dfrac{64}{81}z^2,\ x^2+y^2=\dfrac{8}{9}z,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0.\ y\le 0);\ \gamma=-50yz$.

9.20. $V: x^2+y^2=25z^2,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x\le 0,\ y\ge 0,\ z\le 0);$
$\gamma=\dfrac{7}{4}(x^2+y^2)$

9.21. $V: 81(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ z\ge 0);\ \gamma=\dfrac{7}{9}(x^2+y^2)$.

9.22. $V: x^2+y^2=25z^2,\ x^2+y^2=2z,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0);\ \gamma=42yz$.

9.23. $V: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=8z,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\le 0,\ y\ge 0);\ \gamma-6x$.

9.24. $V: x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=1\ (x^2+y^2\le 1);\ \gamma=|z|$.

9.25. $V: x^2+y^2+z^2=25,\ x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);\ \gamma=3z$.

9.26. $V: x^2+y^2=\dfrac{z^2}{36},\ x^2+y^2=\dfrac{z}{6},\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0);\ \gamma=12xz$.

9.27. $V: 16(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0,$
$z=0\ (x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0);\ \gamma=3(x^2+y^2)$.

9.28. $V: x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=9z^2,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0);\ \gamma=7z$.

9.29. $V: x^2+y^2+z^2=49,\ x^2+y^2=16\ (x^2+y^2\le 16),\ y=0\ (y\le 0);\ \gamma=3|z|$.

9.30. $V: 16(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\le 0,\ y\ge 0,\ z\le 0);$
$\gamma=\dfrac{7}{2}(x^2+y^2)$

Задача 10. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного следующими поверхностями:

10.1. $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{z}{5}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

10.2. $z = x^2 + y^2,\ z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),\ x + y = \pm 1,\ x - y = \pm 1$.

10.3. $z = \frac{y^2}{2},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + 3y - 12 = 0$.

10.4. $\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{25}\right)^2 = \frac{xyz}{105},\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

10.5. $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{y} + \sqrt{\frac{z}{3}} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

10.6. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ z = 0,\ x + z = 6$.

10.7. $6z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 27\ (z \ge 0)$.

10.8. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z}{4},\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \pm 1,\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \pm 1,\ z = 0$.

10.9. $x^2 + y^2 = 2z,\ x + y = z$.

10.10. $x^2 + y^2 + z^2 = 49,\ 3z^2 = x^2 + y^2\ (z \ge 0)$.

10.11. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1,\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = \frac{z^2}{9}\ (z \ge 0)$.

10.12. $x^2 + z^2 = 25,\ y^2 + z^2 = 25\ (z \ge 0)$.

10.13. $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 27z$.

10.14. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

10.15. $12z = 5(3 - x)(4 - y),\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

10.16. $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 3xyz\ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

10.17. $x^2 = 4z,\ y^2 = 4x,\ x = 1,\ z = 0$.

10.18. $x^2 + y^2 = 18,\ x + y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

10.19. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 5,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

10.20. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 3(3 - 2z)$.

10.21. $x^2 + y^2 = z,\ x + y + z = 0$.

10.22. $\dfrac{x^3}{27} + \dfrac{y^3}{8} + \dfrac{z^3}{64} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

10.23. $x^2 + y^2 + z^2 = 49,\ x^2 + y^2 = 7x$.

10.24. $\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16}\right)^2 = \dfrac{xyz}{24}\ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

10.25. $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z = 3\ (z \ge 3)$.

10.26. $x^2 + z^2 = 49,\ y^2 + z^2 = 49\ (z \ge 0)$.

10.27. $\sqrt{\dfrac{x}{7}} + \sqrt{\dfrac{y}{3}} + \sqrt{\dfrac{z}{5}} = 1\ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

10.28. $x^2 = 10z,\ y^2 = 10z,\ x = \dfrac{5}{2},\ z = 0$.

10.29. $x^2 + y^2 = 72,\ x + y + z = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

10.30. $x^2 + y^2 + z^2 = 49,\ x^2 + y^2 = 7(7 - 2z)$.

Задача 11. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела (плотность $\gamma \equiv 1$), ограниченного следующими поверхностями:

11.1. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 27z$.

11.2. $z = x^2 + y^2,\ x + y = \pm 1,\ x - y = \pm 1,\ z = 0$

11.3. $x + y + z = 2\sqrt{2},\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$.

11.4. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

11.5. $4(x^2 + y^2) = 9z^2,\ 0 \le z \le 2$.

11.6. $x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2\ (z \ge 0)$.

11.7. $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

11.8. $z^2 = 4x,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 2x$.

11.9. $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{z}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

11.10. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 32z$.

11.11. $\frac{x}{7}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1, x=0, y=0, z=0$

11.12. $9\left(x^2+y^2\right)=25z^2, 0\le z\le 3$.

11.13. $(x^2+y^2+z^2)^2=64z$.

11.14. $x+y+z=5\sqrt{2}, x^2+y^2=25, z=0$.

11.15. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{9}=1$.

11.16. $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{7}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

11.17. $z^2=8x, z=0, x^2+y^2=4x$.

11.18. $(x^2+y^2+z^2)^3=243z$.

11.19. $16(x^2+y^2)=49z^2, 0\le z\le 4$.

11.20. $x+y+z=8\sqrt{2}, x^2+y^2=64, z=0$.

11.21. $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{7}=1, x=0, y=0, z=0$.

11.22. $(x^2+y^2+z^2)^2=125z$.

11.23. $z^2=12x, z=0, x^2+y^2=6x$.

11.24. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}+\frac{z^2}{25}=1$.

11.25. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{32}{243}z$.

11.26. $\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{7}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

11.27. $x+y+z=3\sqrt{2}, x^2+y^2=9, z=0$.

11.28. $49(x^2+y^2)=36z^2, 0\le z\le 7$.

11.29. $(x^2+y^2+z^2)^2=216z$.

11.30. $z^2=18x, z=0, x^2+y^2=9x$.