Лекция 3

Геометрические методы в теории сигналов

Геометрические методы, применяемые в теории сигналов, позволяют ответить на следующие два важнейших вопроса:

1. На сколько один сигнал оказывается больше или меньше другого.
2. Можно ли объективно оценивать насколько два неодинаковых сигнала оказываются «похожи» друг на друга.

При решении таких задач положена концепция сигнала, как вектора, в определенном образом сконструированном векторном пространстве.

Линейное пространство сигналов

Пусть - $M = \left\{ S_1(t), S_2(t)\dots \quad \right\}$, множество сигналов

$S(t)=A_m Cos(\omega_n t+\varphi_n)$

Такое множество сигналов наделено определенной структурой. Это позволяет в множестве сигналов ввести структуру **линейного пространства.**

Аксиомы линейного вещественного пространства

1. Любой сигнал $S(t) \in M$ при любых t принимает только вещественные значения.
2. Для любых $s(t) \in M$ и $u(t) \in M$ существует их сумма $y=s+u$, которая также содержится в этом множестве M.

Операция суммирования обладает свойствами коммунитативности

$$s+u=u+s$$

и ассоциативности

$$s+(u+v)=(s+u)+v$$

Аксиомы линейного вещественного пространства

3. Для любого сигнала $s \in M$ и любого вещественного числа A определен сигнал $u = As \in M$.

4. Множество M содержит особый нулевой элемент $\varnothing$, при котором

$$s + \varnothing = s \quad \text{для всех} \quad s \in M.$$

Если математические модели сигналов принимают комплексные значения, то в этом случае мы рассматриваем комплексное линейное пространство.

Понятие координатного базиса

Совокупность векторов

$$\left\{ e_1, e_2, e_3 \dots \right\} \in M$$

является линейно независимой, если равенство

$$\sum_i A_i e_i = 0$$

возможно лишь при условии одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов A_i .
Такая совокупность линейно независимых векторов образует ***координатный базис*** *в линейном пространстве.*

Нормированное линейное пространство сигналов.

Линейное пространство сигналов L является нормированным, если каждому вектору сигнала $S(t) \in L$ однозначно сопоставлено число $\|s\|$, которое принято называть его мерой.

Для нормированного линейного пространства справедливы следующие аксиомы:

1. Норма всегда положительна, т.е. IIsII>0.

Норма IIsII=∅ тогда и только тогда, если IIsII=∅ - нулевой вектор.

Аксиомы нормированного пространства.

2. Для любого числа A справедливо равенство:

$\|As\| = |A| \times \|s\|$.

3. Если s(t) и p(t) – два вектора из L, то выполняется неравенство треугольника

$\|s+p\| \le \|s\| + \|p\|$.

Норма для аналоговых вещественных сигналов

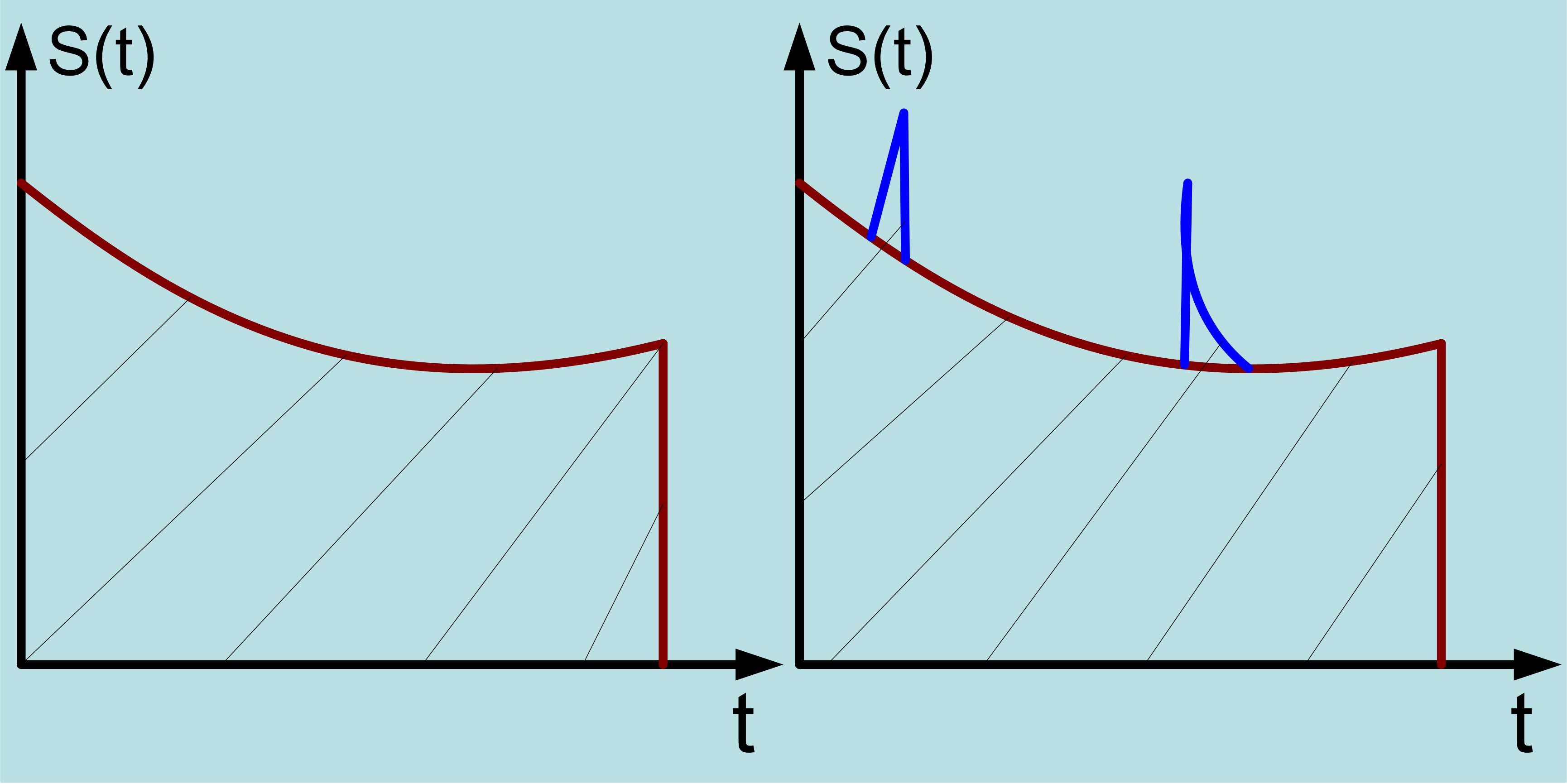
$$\|S\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt}$$

комплексных сигналов -

$$\|S\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \times s^*(t)\,dt}$$

Энергия сигнала и ее связь с нормой

$$\|S\|^2 = E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt$$



Метрическое пространство сигналов

Линейное пространство L становится метрическим пространством, если каждой паре векторов сигналов

$$s,u \in L$$

сопоставлено неотрицательное число

$$\rho(s,u),$$

которое принято называть **метрикой** или расстоянием между этими векторами.

Аксиомы метрического пространства

1. Свойство рефлексивности

$$\rho(s,u) = \rho(u,s).$$

2. Метрика одного вектора сигнала всегда равна нулю: $\rho(s,s) = \varnothing$ для любых $s \in L$.

3. Каким бы ни был элемент $v \in L$, всегда выполняется следующее неравенство

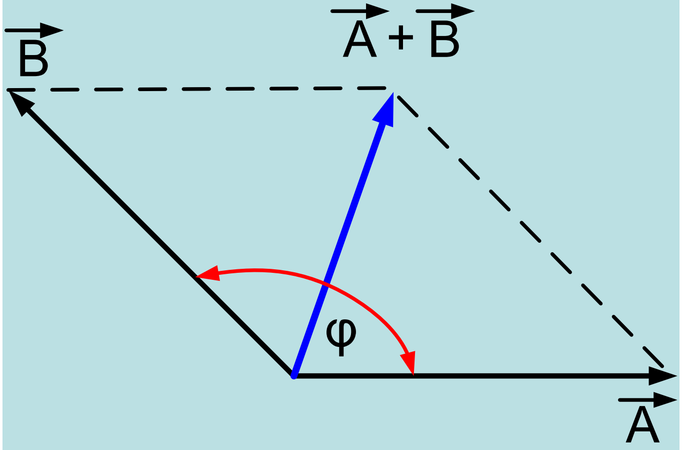
$$\rho(s,u) \le \rho(s,v) + \rho(v,u).$$

$$\rho(s,u) = \|s-u\|$$

$$\|s\| = \rho(s,\varnothing)$$

Теория ортогональных сигналов

1. Скалярное произведение сигналов



$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2(\vec{A},\vec{B})$$

$$\text{где } (\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}}) = \left|\vec{\mathrm{A}}\right| \times \left|\vec{B}\right| \times Cos\,\varphi$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{S}_1(t) + \mathrm{S}_2(t)\ ]^2 dt = E_{S_1} + E_{S_2} + 2\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \times S_2(t) dt$$

$$E_{S_1,S_2} = 2\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t) dt$$

$$(S_1, S_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t) dt$$

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t) dt}{\left\|S_1\right\| \bullet \left\|S_2\right\|}$$

Свойства скалярного произведения

1. $(S_1, S_2) \geq 0$
2. $(S_1, S_2) = (S_2, S_1)$ – рефлексивность
3. $(aS_1, S_2) = a\,(S_1, S_2)$,

   где a – вещественное число.
4. $((S_1 + S_2), S_3) = (S_1, S_3) + (S_2, S_3)$
5. Для скалярного произведения справедли-во неравенство Коши-Буняковского

$$(S_1, S_2) \leq \|S_1\| \bullet \|S_2\|$$

$$(S_1, S_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2^*(t)\,dt \qquad (S_1, S_2) = (S_1, S_2)^*$$

Ортогональные сигналы

$$(S_1, S_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t) dt = 0$$