Лекция 4

Геометрические методы в теории сигналов

Ортонормированный базис и обобщенные ряды Фурье

Задано гильбертово пространство сигналов H с конечным значением энергии. Эти сигналы определены на конечном $[t_1, t_2]$ или бесконечном интервале времени. На этом интервале задана бесконечная система функций $\{u_1, u_2, u_3 \ldots\}$ ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1 npu i = j \\ 0 npu i \neq j \end{cases}$$

$S(t) \in H$

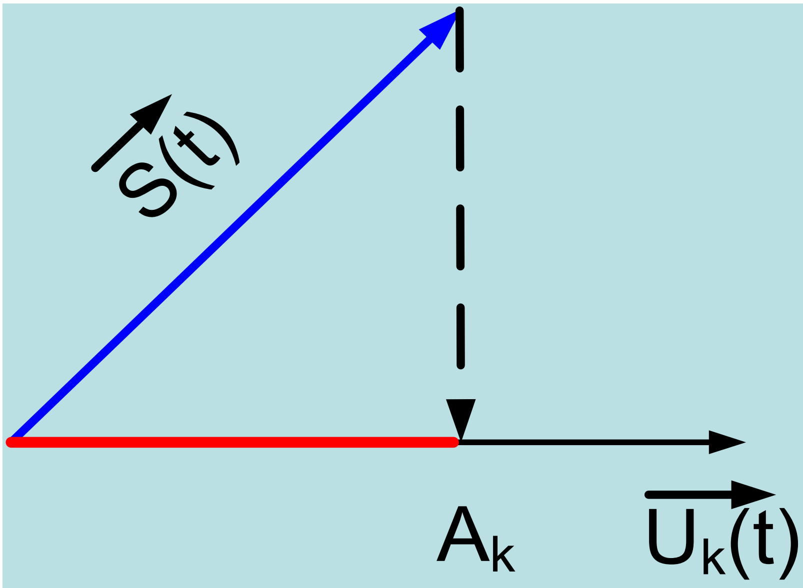
$$S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i U_i(t)$$

A_i- коэффициенты обобщенного ряда Фурье

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)u_k(t)dt = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \int_{t_1}^{t_2} u_i(t)u_k(t)dt$$

При i=k→

$$A_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t)u_k(t)dt$$



Система тригонометрических функций как ортонормированный базис на отрезке [0,T]

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} Sin \frac{2\pi t}{T}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} Cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$u_{2m-1} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{T}}} Sin \frac{2\pi m t}{T}$$

$$u_{2m} = \sqrt{\frac{2}{T}} Cos \frac{2\pi m t}{T}$$

Энергия сигнала, представленного в виде обобщенного ряда Фурье

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k u_k(t)$$

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_i A_j u_i(t) u_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_i A_j \int_{t_1}^{t_2} u_i(t) u_j(t) dt$$

$$E_s = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^2$$

Энергия сигнала есть сумма энергий всех компонент, из которых складывается обобщенный ряд Фурье.

Оптимальность разложения сигнала по ортонормированному базису

$$\dot{S} = \sum_{k=0}^{N} A_k u_k(t)$$

$$\mu = \left\| S - \dot{S} \right\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} (S - \sum_{k=0}^{N} A_k u_k)^2 dt = \min$$

$$\frac{d\mu}{dA_k} = 0 npuk = 0,1,2\ldots N$$

$$\mu = \int_{t_1}^{t_2} [s^2 - 2s\sum_{k=0}^{N} A_k u_k + \sum_{i=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} A_i A_j u_i u_j]dt$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dA_k}} \int_{t_1}^{t_2} (A_k^2 u_k^2 - 2sA_k u_k)dt = 0$$

$$\mathrm{A_k} = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt$$