МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра радиотехнических устройств
Д.Н. Яманов

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

И

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Тексты лекций

Москва – 2002

ББК 621.38
Я54
Рецензенты: д-р техн.наук, проф. А.И.Логвин;
канд.техн. наук, доц. Г.В.Куликов.

Яманов Д.Н.

Я54 Основы электродинамики и распространение радиоволн: Тексты лекций. Часть I. «Основы электродинамики». - М.: МГТУ ГА» 2002. –82с; Ил. 24, табл, 6, список лит.: 4 назв.

1SBN5-86311-036-8.

Данные тексты лекций издаются в соответствии с учебным планом для студентов II и III курсов специальности 201300 всех форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседаниях кафедры 19.02.02г. и редакционно-издательского совета 19.02.02г.

ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика - наука об электромагнитных полях и волнах. В ней исследуются основные закономерности, которым подчиняются электромагнитные процессы, независимо от формы и области их проявления. Знание основных законов электродинамики позволяет изучать на профессиональном уровне вопросы, связанные с особенностью распространения радиоволн в свободном пространстве и в направляющих системах, их излучением и приемом, устройством и функционированием сверхвысокочастотных (СВЧ) - элементов и узлов.

Дисциплина является основной для изучения специальных дисциплин радиотехнического профиля и обеспечивает необходимый уровень инженерной подготовки в этой области.

Задачей дисциплины является изучение:

взаимосвязей электрических и магнитных явлений;

особенностей, которые характеризуют распространение волн в различных средах;

взаимосвязей между электромагнитными явлениями в различных точках пространства в любой момент времени;

устройства и принципов функционирования элементов СВЧ - тракта, теории цепей СВЧ;

правил техники безопасности и защиты окружающей среды при работе с СВЧ-устройствами.

В первой части текстов лекций рассматриваются основные положения классической теории электромагнитного поля.

Классическая теория электромагнитного поля является той фундаментальной основой, которая позволяет перейти к изучению вышеперечисленных вопросов.

1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

1.1. Исходные понятия

Взаимодействие тел (или частиц) в природе может проявляться, или при непосредственном воздействии одного тела (частицы) на другое, или посредством физических полей, в том числе электромагнитного поля. Изменение воздействия одного тела на другое передается не мгновенно, а с конечной скоростью, которая не превышает скорости света.

Посредством электромагнитного поля осуществляется взаимодействие между заряженными электрически телами (частицами). Электромагнитные поля, как и их источники, - материальны. Электромагнитное поле может проявляться в виде переменных полей, а также в виде постоянных во времени (стационарных) электростатического и магнитного полей, порожденных неподвижными заряженными частицами или потоком заряженных частиц соответственно. В электромагнитном поле электрическое и магнитное поля взаимосвязаны и обуславливают единый физический процесс, порождаемый изменяющимися во времени токами и зарядами. При определенных условиях электромагнитное поле можно представлять в виде потока электромагнитных частиц -фотонов - с массой покоя, равной нулю. В микромире свойства электромагнитного поля, как и элементарных частиц, описываются законами квантовой механики.

В классической (макроскопической) теории электромагнитного поля, рассматриваются процессы и поля в объемах, размеры которых несоизмеримо больше размеров атомов и молекул. В этом случае рассматриваются поля не каждой частицы в отдельности, а средние значения полей и параметров среды.

Такой подход позволяет решить большинство задач современной радиотехники.

В радиотехнике используются системы, в которых скорость движения зарядов мала по сравнению со скоростью света. Поэтому вопросы, связанные с теорией относительности, рассматриваться не будут.

Таким образом, пределы применения макроскопической теории поля ограничены скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и размерами систем, большими по сравнению с размерами атомов и молекул.

Классическая теория электромагнитного поля, излагаемая ниже, базируется на уравнениях Максвелла. Она охватывает широкий круг явлений, включающий современную радиоэлектронику, электротехнику, вопросы излучения, распространения и приема электромагнитных волн различных диапазонов.

В основании этой теории лежит положение, что электромагнитное возмущение распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн, которые обладают пространственно-временной периодичностью.

Как материальный объект электромагнитное поле может быть охарактеризовано векторными функциями:

напряженностью электрического поля $\overline{E}$,

напряженностью магнитного поля $\overline{H}$.

Изменение состояния среды под действием электромагнитного поля с точки зрения классической электродинамики может быть описано с помощью вектора магнитной индукции $\overline{B} = f\left(\overline{H}\right)$, являющегося функцией напряженности $\overline{H}$, и вектора электрической индукции $\overline{D} = f\left(\overline{E}\right)$ являющегося функцией напряженности $\overline{E}$.

В таблице 1.1 приведены единицы измерения физических величин, которые встретятся при изучении предмета, в используемой нами системе СИ.

Единицы измерения электромагнитных величин в СИ Таблица 1.1.

Величина	Единица		Выражение через другие единицы СИ
	Наименование	Обозначение	
1	2	3	4
I. Сила тока	Ампер [А]	J	-
2. Частота	Герц [Гц]	f	-
3. Сила	Ньютон [Н]	F	-
4. Энергия, работа	Джоуль [Дж]	W,A	Н·м
5. Мощность, поток энергии	Ватт[Вт]	P	Дж·с
6. Количество электричества, электрический заряд	Кулон [Кл]	Q	А·с
7. Электрическое напряжение, потенциал	Вольт [В]	U	Вт/А
8. Электрическая емкость	Фарада [Ф]	C	Кл/В
9. Электрическое сопротивление	Ом	R	В/А
10.Электрическая проводимость	Сименс [См]	Y,G	А /В
11. Поток магнитной индукции	Вебер [Вб]	Ф	В·с
12. Магнитная индукция	Тесла [Т]	B	Вб/м^2
13. Индуктивность	Генри [Г]	L	Вб/А
14. Напряженность электрического поля	-	E	В/м
15. Напряженность магнитного поля	-	H	А/м
16. Электрическая индукция	-	D	Кл/ м^2
17. Электрическая постоянная	-	ε_0	Ф/м
18. Магнитная постоянная	-	μ_0	Г/м

Для изучения теории электромагнитного поля наиболее подходящим и удобным математическим аппаратом является векторное исчисление, основные определения и теоремы которого излагаются ниже.

1.2. Векторы и действия над ними

Понятие вектора как величины, характеризуемой в отличие от скаляра не только числом, но и направлением в пространстве, соответствует многим физическим явлениям.

Например, в физике в качестве векторов рассматриваются сила и скорость и т.д. Применение векторов позволяет отображать физические закономерности в удобной форме, которая при необходимости преобразуется для разных систем координат.

Векторное сложение и вычитание производится по правилам параллелограмма и треугольника (рис.1.1).

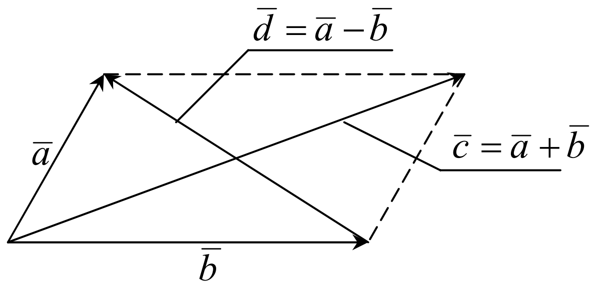


Рис.1.1 Сложение и вычитание векторов

Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ -это скалярная величина, равная в декартовой системе координат

$$\overline{a} \cdot \overline{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z = |\overline{a}||\overline{в}| cos\left(\widehat{\overline{a}\overline{в}}\right) . \tag{1.1}$$

Скалярное произведение максимально у параллельных векторов и равно нулю у взаимно - перпендикулярных векторов.

Векторное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ - это вектор, направленный перпендикулярно плоскости расположения перемножаемых векторов в сторону поступательного перемещения правого винта, если его вращать от первого сомножителя ко второму по кратчайшему пути (рис.1.2).

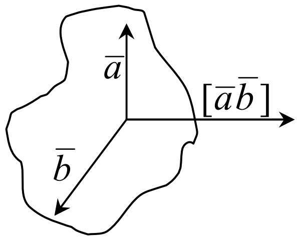


Рис.1.2. Векторное перемножение

Векторное произведение может быть представлено через проекции векторов в виде:

$$\left[\overline{a}\overline{в}\right]=\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{pmatrix}= \tag{1.2}$$

$$=i(a_y в_z - a_z в_y)(-1)^2 + j(a_x в_z - a_z в_x)(-1)^3 + k(a_x в_y - a_y в_x)(-1)^4 = -[\overline{в}\overline{a}].$$

Модуль векторного произведения может быть найден через модули векторов и угол между ними

$$\left|\overline{a}\overline{в}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{в}\right|\sin\left(\widehat{\overline{a}\overline{в}}\right). \tag{1.3}$$

Векторное произведение максимально у взаимно перпендикулярных векторов и равно нулю у параллельных векторов.

Примеры величин, являющихся скалярными и векторными произведениями.

Поток Ф вектора магнитной индукции $\overline{B}$

$$\varPhi = \int_S \overline{B} d\overline{S},$$

ток, поток вектора объемной плотности тока $\overline{\delta}$

$$J = \int_S \overline{\delta} d\overline{S},$$

где $d\overline{S} = dS \cdot \overline{n_0}$ – вектор элементарной площадки $d\overline{S}$, направленной перпендикулярно поверхности площадки dS (рис.1.3),

$\overline{n_0}$ – единичный вектор нормального направления (нормаль).

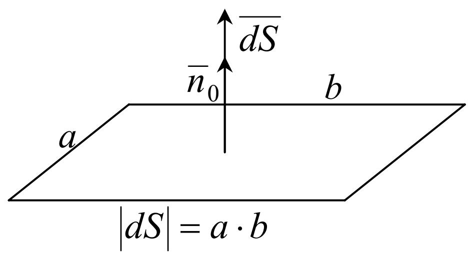


Рис. 1.3. Вектор ориентированной площадки

Отсюда следует, что поток максимален, когда силовые линии векторов $\overline{B}$ или $\overline{\delta}$ перпендикулярны поверхности *dS* или параллельны вектору $d\overline{S}$.

Скалярным произведением является такая работа А вектора силы $\overline{F}$ на пути *l* или э.д.с. - работа силового вектора напряженности электрического поля $\overline{E}$

$$A = \int_l \overline{F} d\overline{l}, \quad э.д.с. = \int_l \overline{E} d\overline{l}.$$

Работа векторного поля по замкнутому пути *l* называется <u>циркуляцией</u> векторного поля. Например, ток J , согласно закону полного тока, равен циркуляции вектора напряженности магнитного поля $\overline{H}$

$$J = \int_S \overline{\delta} d\overline{S} = \oint_l \overline{H} d\overline{l},$$

где *l* - является контуром площадки S .

Примером векторного произведения является вектор Умова-Пойнтинга $\overline{p}$, направление которого указывает направление перемещения удельной мощности электромагнитного поля

$$\overline{p} = \left[\overline{E}\overline{H}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}, \quad \text{Вт/м}^2.$$

1.3. Поля и операции векторного анализа

Термин «поле» употребляется, когда надо сопоставить каждой точке пространства некоторую физическую характеристику.

Формально поля определяются заданием в каждой точке рассматриваемой области пространства некоторой скалярной или векторной величины: скалярные и векторные поля.

Скалярной величиной называется величина, значение которой характеризуется одним действительным числом, без учета направления или другой какой-либо оценки, например, сопротивление, заряд, температура и др.

Векторная величина или вектор зависит от двух элементов разной природы: числа, характеризующего длину вектора (модуль), и направления вектора. Примерами векторов могут служить напряженность и индукция электрического (магнитного) поля.

Скалярное поле графически изображается на плоскости рисунка линиями равного уровня, которые являются геометрическим местом точек равного значения скалярной функции φ = const. В пространстве геометрическое место точек равных значений скалярной функции в общем случае являются поверхностями. Изображают поверхности или линии равного уровня так, чтобы разность значений скалярной функции точки любых двух соседних поверхностей равного уровня была одинаковой величины.

Например, для скалярного поля электростатического потенциала φ (рис.1.4) эти поверхности называются эквипотенциальными (равнопотенциальными) и изображаются так, чтобы

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = ... = \varphi_{i-1} - \varphi_i = \Delta\varphi = const\ .$$

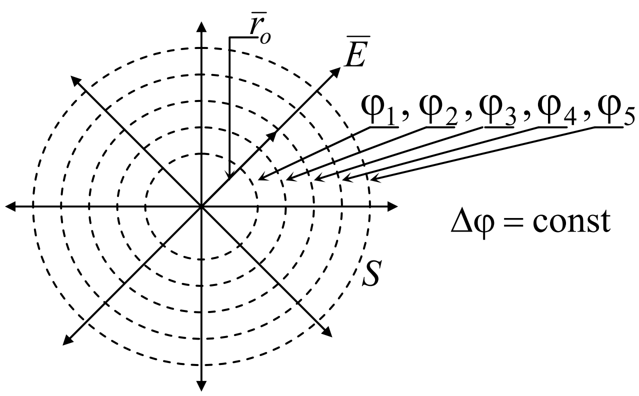


Рис. 1.4. Построение эквипотенциалей точечного заряда

Значение $\Delta\varphi$ может в известной мере выбираться произвольно. Тогда в той области пространства, где эквипотенциали ближе располагаются друг к другу, скорость изменения скалярной функции по направлению нормали к эквипотенциали наибольшая. Эквипотенциальные и силовые линии в любой точке поля пересекаются под прямым углом (рис.1.4).

Другими примерами линий равного уровня являются изотермы-геометрическое место точек равных температур, изобары - геометрическое место точек равных давлений, изоклины - геометрическое место точек равных значений высоты местности и др.

Для характеристики величины и направления скорости изменения скалярного поля в пространстве введем понятие градиента скалярного поля.

Градиентом скалярной функции называют скорость изменения скалярной функции, взятую в направлении ее наибольшего возрастания.

В определении градиента существенны два положения:

1) направление, в котором берутся две близлежащие точки, должно быть таким, чтобы скорость изменения потенциала была максимальна;

2) направление таково, что скалярная функция в этом направлении возрастает (не убывает). Очевидно, что

$$grad\,\varphi = \overline{n_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\ , \tag{1.4}$$

где ∂n – расстояние по перпендикуляру (по нормали) между эквипотенциальными поверхностями;

n_o – нормаль к эквипотенциали, направленная в сторону роста скалярной функции;

$d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – приращение потенциала при переходе от точки 1 к точке 2.

Смысл формулы (1.4) легко понять, рассматривая участок двух близких эквипотенциалей (рис.1.5).

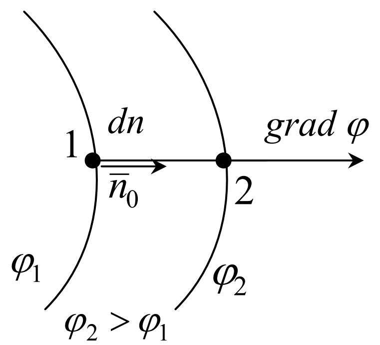


Рис. 1.5. К определению понятия градиента скалярной функции

В декартовой системе координат градиент скалярной функции равен

$$grad\,\varphi = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi \quad , \tag{1.5}$$

где ∇ -оператор «набла», равный

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \quad . \tag{1.6}$$

Мы видим, что скалярное поле φ порождает векторное поле $\overline{F} = grad\ \varphi$. Такое векторное поле называется потенциальным, а скалярная функция φ – потенциалом.

Для наглядного отображения векторных полей обычно строят картины силовых линий. Это линии, касательные к которым в каждой точке указывают направление вектора. Густота силовых линий может соответствовать интенсивности поля.

Введем понятие потока вектора $\overline{a}$ через поверхность S (не обязательно замкнутую). Это интеграл

$$\Phi = \int\limits_S \overline{a}d\overline{S}\,. \tag{1.7}$$

Условились в случае замкнутой поверхности за положительное направление вектора принимать направление, совпадающее с направлением внешней нормали к поверхности. Тогда поток вектора через замкнутую поверхность положителен, если вектор выходит из объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S, и отрицателен, если входит внутрь (рис.1.6).

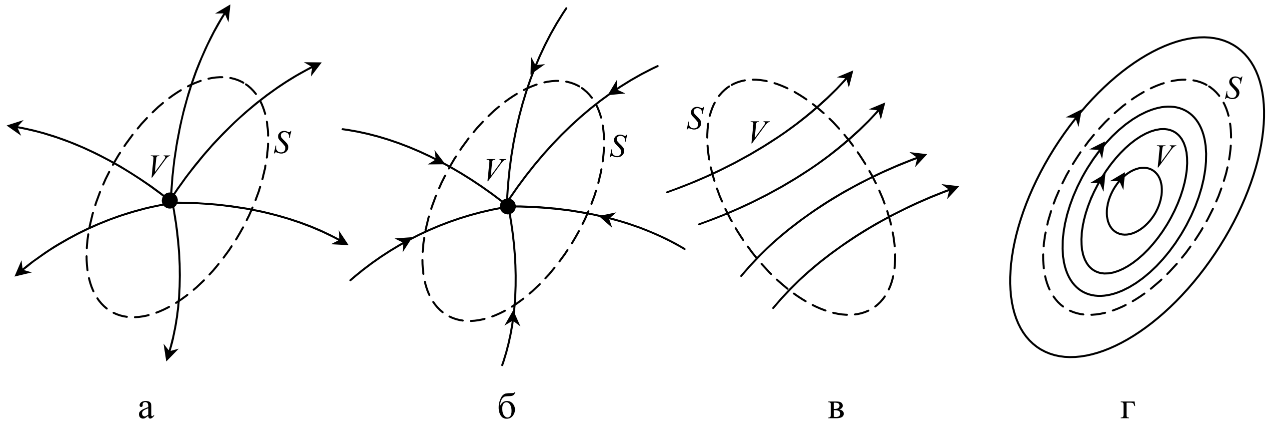


Рис.1.6. К определению понятия потока вектора

Область V может содержать точку, из которой расходятся (исток) (рис.1.6,а) или в которую сходятся (сток) (рис.1.6,б) все силовые линии. Последние могут также проходить область насквозь (рис.1.6,в) или совсем не пересекать ее поверхность S (рис.1.6,г). Поток вектора через замкнутую поверхность может являться критерием наличия внутри объема, ограниченного этой поверхностью, источников или стоков векторного поля, если эта поверхность замкнута вокруг источника или вокруг стока векторного поля.

Обращаясь в качестве примера к рис. 1.6, видим, что там
Ф>0 (а), Ф<0 (б), Ф=0 (в) и Ф=0 (г).

В третьем из этих примеров число силовых линий, выходящих из замкнутой поверхности S, равно числу входящих внутрь.

Если разделить, поток вектора через замкнутую поверхность на ограниченный ею объем, то можно получить среднюю плотность источника (или стока) векторного поля в данном объеме

$$\frac{1}{V}\oint_S \bar{a}\,d\bar{S}\,.$$

При этом нельзя судить об интенсивности источников. С целью оценки интенсивности источников надо поток вектора $\bar{a}$ брать через достаточно малую замкнутую поверхность при стягивании ее в точку. Такой предел называют <u>дивергенцией</u> (<u>а также расхождением, расходимостью) вектора</u>

$$div\,\bar{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \bar{a}\,d\bar{S}}{\Delta V}\,. \tag{1.8}$$

<u>Величина дивергенции характеризует</u> отнесенную к единице объема производительность (интенсивность) источников поля в бесконечно малом объеме, окружающем данную точку. Если дивергенция отличается от нуля, то физически это значит, что в рассматриваемой точке имеются источники ($div\,\bar{a} > 0$) или стоки ($div\,\bar{a} < 0$). Если дивергенция равна нулю, то точка М и ее окрестность свободны от источников и стоков (нет ни истоков, ни стоков линий вектора $\bar{a}$, т.е. линии не начинаются и не кончаются в рассматриваемой точке).

Дивергенция – величина скалярная, являющаяся скалярной функцией векторной функции точки.

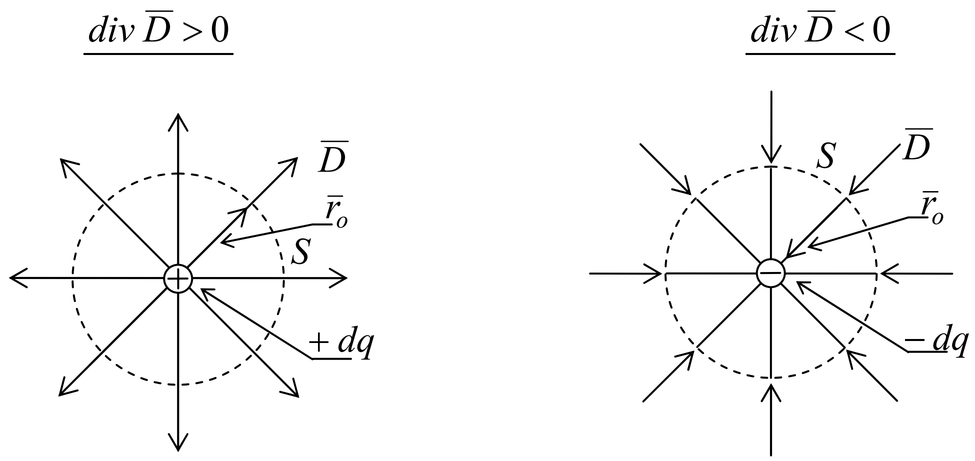
Если заданы проекции вектора в декартовой системе координат a_x, a_y, a_z, то

$$div\,\bar{a} = \nabla\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\,. \tag{1.9}$$

Векторные поля, для которых дивергенция тождественно равна нулю, называются соленоидальными (трубчатыми) полями, т.е. полями без источников.

Примером векторного поля, имеющего конечное значение дивергенции, является поле заряда, обладающего конечной объемной плотностью ρ. В области расположения этого заряда дивергенция будет отлична от нуля, так как поток вектора электрической индукции $\overline{D}$ отличен от нуля через любую достаточно малую замкнутую поверхность, расположенную вокруг этого объемного заряда.

Если заряд положителен $div\,\overline{D} > 0$ (рис. 1.7,а), а если отрицателен, то $div\,\overline{D} < 0$ (рис.1.7,б).



а – исток б – сток

Рис.1.7. Картины полей положительного и отрицательного зарядов

Ротор (вихрь) вектора. Под ротором вектора $\overline{a}$ понимается вектор, проекция которого на направление S равна пределу отношения циркуляции вектора по контуру $\overline{l}$ к величине площади плоской фигуры, ограниченной этим контуром, стягиваемой в точку

$$rot\,\overline{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l \overline{a}\,d\overline{l}}{\Delta S}. \tag{1.10}$$

Ротор (вихрь) вектора $\overline{a}$ является мерой «завихренности» векторного поля в рассматриваемой точке, т.е. он характеризует поле в отношении способности к образованию вихрей.

Ротор вектора в данной точке является векторной суммой его трех ортогональных проекций

$$rot\,\overline{a} = \left[\nabla \overline{a}\right] = i\,rot_x \overline{a} + j\,rot_y \overline{a} + k\,rot_z \overline{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \nabla x & \nabla y & \nabla z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \tag{1.11}$$

$$= i\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Векторное поле $\overline{a}$ называется безвихревым в области V , если в каждой точке этой области

$$rot\,\overline{a} = 0\,.$$

Отметим, что векторное поле $\overline{a}$ принято характеризовать скалярным полем – дивергенцией $div\,\overline{a}$ и векторным полем - ротором $rot\,\overline{a}$.

Вихревыми принято называть поля, в которых ротор векторной величины, описывающей поле, отличен от нуля.

Теорема Стокса. Поток ротора векторной функции $\overline{a}$ через поверхность S равен циркуляции этого вектора по контуру l

$$\int\limits_S rot\,\overline{a} d\overline{S} = \oint\limits_l \overline{a} d\overline{l}\,. \tag{1.12}$$

Теорема связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру *l*, с интегралом по поверхности S, ограниченной этим контуром.

Теорема Остроградского – Гаусса говорит о том, что поток вектора $\overline{a}$ через замкнутую поверхность S равен тройному интегралу от $div\overline{a}$, взятому по области V , ограниченной поверхностью S , т.е.

$$\oint\limits_S \overline{a} d\overline{S} = \int\limits_V div\,\overline{a} dV\,. \tag{1.13}$$

Теорема позволяет преобразовать интегралы, взятые по некоторому объему V, в интегралы по поверхности S, ограничивающей этот объем.

Теоремы Стокса и Остроградского-Гаусса позволяют понизить кратность интегралов.

Приведем еще несколько тождеств векторного анализа, которые используются в математическом аппарате теории электромагнитного поля:

$$div\,rot\overline{a} = 0, \tag{1.14}$$

$$rot\,rot\overline{a} = grad\,div\overline{a} - \nabla^2 \overline{a}, \tag{1.15}$$

$$rot\,grad\varphi = 0. \tag{1.16}$$

1.4. Вопросы для самопроверки

Первый уровень обученности

1. Чему равны скалярные и векторные произведения двух параллельных и двух взаимно перпендикулярных векторов?
2. Сформулируйте правило векторного произведения.
3. Приведите примеры величин, являющихся скалярными и векторными произведениями.
4. Что называется циркуляцией векторного поля?
5. Какое поле называется скалярным и какое векторным?
6. Что называется поверхностями или линиями равного уровня? Каковы правила графического построения скалярного поля?
8. В каком случае поверхности равного уровня называются эквипотенциальными?
9. Что называется градиентом скалярной функции?
10. Что понимают под силовой линией векторного поля?
11. Каким образом отображается при построении картин силовых линий интенсивность поля?
12. Под каким углом пересекаются эквипотенциальные и силовые линии?
13. Что понимается под потоком векторной величины?
14. В каких случаях поток вектора через замкнутую поверхность положителен, отрицателен, равен нулю?
15. Что понимается под дивергенцией вектора и что она оценивает в векторном поле? Как она находится через проекции вектора?
16. Если $div\,\overline{a} > 0$, $div\,\overline{a} < 0$ и $div\,\overline{a} = 0$, то что это физически значит для каждого отдельного случая?
17. Что понимается под ротором вектора? Как он находится через проекции вектора?
18. Приведите примеры полей, в которых $div\,\overline{a}$ и $rot\,\overline{a}$ конечны, равны нулю.
19. Сформулируйте теорему Стокса.
20. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса.

Второй уровень обученности

21. Какие поля называются потенциальными?
22. При каких условиях по наличию потока вектора через замкнутую поверхность можно судить о существовании источников поля внутри объема, ограниченного этой поверхностью?
23. Поясните смысл утверждения, что скалярное поле φ порождает векторное поле $\overline{F} = grad\,\varphi$.

24. Если число силовых линий, выходящих из замкнутой поверхности, не равно числу входящих внутрь, то чему равен поток вектора?

25. Что понимается под расходимостью вектора?

26. Дивергенция – величина скалярная или векторная?

27. Какие поля называются соленоидальними?

28. Приведите картины полей положительного и отрицательного зарядов.

29. Какие теоремы позволяют понизить кратность интегралов?

30. Поясните физический смысл тождества $div\ rot\ \bar{a} = 0$.

31. Вызывает ли перемещение вдоль эквипотенциальной линии изменение потенциала?

32. Дайте физическое толкование понятию ротора.

2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Электромагнитное поле можно рассматривать как особую форму материи, представляющую собой взаимосвязанные электрическое и магнитное поля. Электромагнитное поле осуществляет взаимодействие между зарядами и образует с ними единую систему. В разных случаях электромагнитное поле проявляет себя по разному. Если оно воздействует на неподвижные электрические заряды, то проявляется одна его сторона - электрическое поле. Если электромагнитное поле воздействует на движущиеся заряды, то проявляются обе его стороны- и электрическое, и магнитное поля. Если электромагнитное поле создано движущимися зарядами, то неподвижный наблюдатель обнаружит и электрическое, и магнитное поля, а наблюдатель, движущийся с зарядами, обнаружит только электрическое поле.

Электромагнитное поле представляет собой сложный физический объект. Электрические заряды и токи создают вокруг себя связанное с ними электромагнитное поле, поэтому в целом электромагнитное поле вместе с зарядами образует единую материальную систему, характеризующуюся следующими физическими величинами:

1. Электрические заряды Q.
2. Электрические токи J.
3. Векторы поля:

   вектор напряженности электрического поля $\overline{E}$;

   вектор напряженности магнитного поля $\overline{H}$;

   вектор электрической индукции $\overline{D}$;

   вектор магнитной индукции $\overline{B}$.

Все эти шесть величин распределены в общем случае в пространстве и зависят от времени и, таким образом, являются функциями трех координат и времени $f(x, y, z, t)$. Они связаны между собой определенными соотношениями, которые описывают законы электромагнитного поля.

2.1. Характеристики электромагнитного поля

2.1.1. Электрические заряды

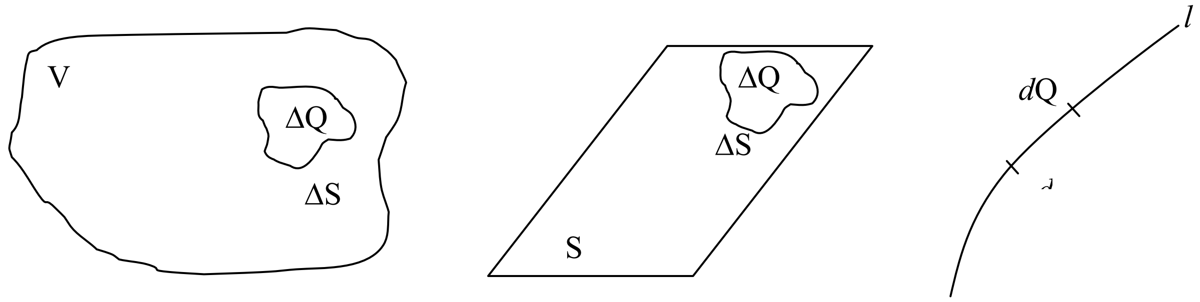
Наименьшим элементарным электрическим зарядом является электрон. Его заряд отрицателен и имеет величину q = $-1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Кроме электрона существуют положительно заряженные частицы, такие, как протоны и позитроны. В макроскопической теории электромагнитного поля не рассматриваются отдельные электроны, а изучается их совокупность как непрерывное распределение заряженных частиц. При таком подходе будем считать, что даже в элементарно малом объеме dV имеется достаточно много элементарных частиц и что поэтому справедлив макроскопический подход.

Электрически заряженным телом или объемом V называется тело или объем, обладающий избытком отрицательных или положительных частиц.

Реальные электрические заряды ΔQ всегда занимают некоторый объем ΔV, поэтому, строго говоря, заряды имеют объемное распределение. Однако практически мы часто встречаемся с распределением зарядов в очень тонком слое, например, на поверхности проводника ΔS; или с зарядами, распределенными вдоль тонкой нити или линии Δl; или с зарядами, сосредоточенными в очень малом объеме.

В этих случаях распределение зарядов идеализируется и возникают понятия поверхностного, линейного и точечного распределения зарядов.

При <u>объемном распределении зарядов</u> считают, что заряды распределены в некотором объеме V (рис. 2.1,а). Примером объемного распределения зарядов может служить пучок электронов в электроннолучевой трубке, пространственный заряд в вакуумной лампе, ионосфера.



а б в

Рис. 2.1. Виды распределения зарядов:
а – объемное; б - поверхностное; в – линейное

В случае <u>поверхностного распределения зарядов</u> идеализированно считают, что заряды сосредоточены в бесконечно тонком слое на поверхности S (рис.2.1,б). Примером такого распределения может служить распределение зарядов на поверхности проводника.

При линейном распределении зарядов считают, что заряды распределены вдоль бесконечно тонкой нити. Примером такого распределения является тонкая заряженная нить (рис. 2.1,в).

Распределения зарядов по объему ΔV или по поверхности ΔS характеризуются соответственно объемной ρ или поверхностной σ плотностью зарядов (табл.2.1). Линейное распределение зарядов характеризуется линейной плотностью зарядов τ.

Виды распределения зарядов

Таблица 2.1

Виды распределения зарядов	Плотность зарядов	Размерность	Полный заряд
Объемное распределение зарядов	$\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$ (2.1)	$\frac{Кл}{м^3}$	Сосредоточенный в объеме V $Q = \int\limits_V \rho dV$
Поверхностное распределение зарядов	$\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}$ (2.2)	$\frac{Кл}{м^2}$	Сосредоточенный на поверхности S $Q = \int\limits_S \sigma dS$
Линейное распределение зарядов	$\tau = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$ (2.3)	$\frac{Кл}{м}$	Полный заряд нити $Q = \int\limits_l \tau dl$

При точечном распределении зарядов считают, что заряды конечной величины сосредоточены в математических точках нулевого объема, нулевой поверхности и нулевой длины.

Полный заряд системы точечных зарядов равен их сумме:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i ,$$

где N - число точечных зарядов.

2.1.2. Электрические токи

Электрическим током называются любые движущиеся заряды. В теории электрических цепей в качестве количественной характеристики электрического тока обычно используется понятие силы тока.

Сила тока – это количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за единицу времени:

$$J = \frac{Q}{t}, A.$$

Если ток меняется во времени, то в этом случае сила тока - это предел отношения количества электричества ΔQ, протекшего через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt , к этому промежутку при стремлении его к нулю:

$$J = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}, A . \qquad (2.4)$$

В общем случае, когда токи текут не по тонким проводам, приведенное определение силы тока становится недостаточным и используют понятия элемента электрического тока и плотности тока. Произведение величины элемента заряда dQ , на скорость его движения $\overline{v}$ называется элементом тока (или электрическим импульсом) :

$$\overline{d_j} = dQ \cdot \overline{v}, \ A \cdot м. \qquad (2.5)$$

Векторы элементов тока позволяют охарактеризовать поле токов и по величине, и по направлению в каждой отдельной точке. В общем случае токи протекают по некоторому объему. Однако, идеализируя, так же, как и в случае зарядов, можно выделить кроме объемного поверхностное и линейное распределения токов.

При объемном распределении дается более общее определение силы тока: это количество электричества, протекающее за единицу времени через некоторую поверхность S.

В случае поверхностного распределения токов считают, что, если ток течёт в очень тонком поверхностном слое проводника, как это бывает на СВЧ, то идеализированно можно считать толщину этого слоя бесконечно малой.

Линейный ток практически имеет место в очень тонких проводниках, когда идеализировано можно считать, что ток течет по бесконечно тонкой нити.

Для характеристики распределения тока по объему и поверхности вводятся понятия объемной $\bar{\delta}$ и поверхностной $\bar{\delta}_S$ плотности тока (табл.2.2). Линейный ток характеризуется линейной плотностью тока $\bar{i}$.

Виды распределения токов Таблица 2.2

Виды распределения тока	Плотность тока	Размерность
Объемная плотность тока	$\bar{\delta} = \dfrac{\overline{d}_j}{dV} = \rho\bar{v}$ (2.6)	$\dfrac{A}{м^2}$
Поверхностная плотность тока	$\bar{\delta}_S = \dfrac{\overline{d_j}}{dS} = \sigma\bar{v}$ (2.7)	$\dfrac{A}{м}$
Линейная плотность тока	$\bar{i} = \dfrac{\overline{d_j}}{dl} = \tau\bar{v}$ (2.8)	А

2.1.3. Собственные векторы электрического поля и электромагнитные параметры среды

Электрическое поле представляет собой особый вид материи, отличный от вещества и проявляющийся в виде механической силы, с которой поле действует на внесенный в него неподвижный электрический заряд. Количественная характеристика электрического поля определяется законом Кулона. Этот закон устанавливает силу взаимодействия между точечными зарядами, находящимися в однородной среде:

$$d\overline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a r^2} dq_1 \overline{r_0} dq_2, H,$$

где $d\overline{F}$ – сила, действующая со стороны заряда dq_1 на заряд dq_2;

dq_1 и dq_2 – элементарные точечные заряды;

$\overline{r_o}$ – единичный вектор (радиус-вектор), направленный от первого заряда ко второму;

r – расстояние между зарядами;

ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Величину ε_a можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon \ ,$$

здесь ε_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума, а ε – относительная, диэлектрическая проницаемость среды.

В системе СИ

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{120\pi c} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}, \quad \frac{\Phi}{м} \ ,$$

где c – скорость света в вакууме.

Относительная диэлектрическая проницаемость среды

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}.$$

Это безразмерный коэффициент, зависящий от среды и показывающий, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами в данной среде меньше, чем в вакууме. Выделим из закона Кулона множитель, зависящий от величины первого заряда, расстояния до него и среды:

$$d\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a r^2} dq_1 \overline{r_0}.$$

Вектор $\overline{E}$ называется вектором напряженности электрического поля. В нашем случае мы пишем $\overline{D}$, так как поле создано элементарным зарядом. Это поле действует на второй заряд с силой

$$d\overline{F} = d\overline{E} dq_2,$$

откуда следует, что

$$d\overline{E} = \frac{d\overline{F}}{dq_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a r^2} dq\overline{r_0}, \quad \frac{B}{м} \ .$$

Таким образом, <u>напряженность электрического поля</u> равна силе, с которой действует это поле на единичный положительный точечный заряд.

Из последней формулы для напряженности поля элементарного заряда видно, что в каждой точке пространства вектор $\overline{E}$ поля элементарного заряда направлен вдоль радиуса, проведенного в данную точку от заряда, а по величине он обратно пропорционален квадрату расстояния.

Для графического изображения поля используют силовые линии, касательные в каждой точке к вектору $\overline{E}$ (рис.2.2). Густота силовых линий пропорциональна величине напряженности поля. Силовые линии электрического поля начинаются на заряде, который является источником силовых линий. Эти линии претерпевают разрыв в тех точках, где есть заряды. Линии расходятся от положительного заряда (исток) и сходятся к отрицательному (сток).

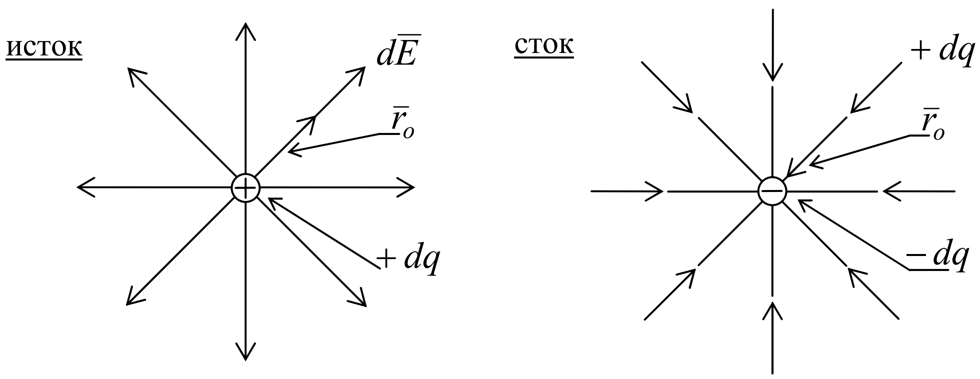


Рис. 2.2. Поля элементарных зарядов

Магнитное поле - представляет собой особый вид материи, отличный от вещества и проявляющийся в виде механической силы, с которой поле действует на внесённый в него электрический ток или постоянный магнит. Оно является векторным. Сходство в воздействии магнитного поля на электрический ток и постоянный магнит вызвано тем, что постоянный магнит представляет собой систему молекулярных токов, текущих в намагниченной среде.

Количественная характеристика магнитного поля описывается законом Ампера. Этот закон определяет силу взаимодействия между элементами тока, находящимися в однородной среде,

$$d\overline{F} = -\frac{\mu_a}{4\pi r^2}\left[\left[\overline{d}_{j1}\cdot\overline{r_0}\right]\overline{d}_{j2}\right],\ H,$$

где $d\overline{F}$ - сила, действующая со стороны элемента тока $\overline{d}_{j1}$ на элемент тока $\overline{d}_{j2}$;

$\mu_a = \mu_0\mu$ - абсолютная магнитная проницаемость среды;

μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

В системе СИ

$$\mu_0 = \frac{120\pi}{c} = 4\pi\cdot 10^{-7} \quad \frac{Г}{м}.$$

Относительная магнитная проницаемость среды определяется выражением

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0} \ .$$

Это безразмерный коэффициент, зависящий от среды. Он показывает, во сколько раз сила взаимодействия между токами в данной среде больше, чем в вакууме.

Выделим из закона Ампера множитель, определяющий поле, создаваемое первым элементом тока, и зависящий от величины элемента тока, расстояния и среды:

$$d\overline{B} = \frac{\mu_a}{4\pi r^2}\left[\overline{d}_{j1} \cdot \overline{r_0}\right]. \qquad (2.10)$$

Полученное выражение носит название формулы Био-Савара. Вектор $\overline{B}$ называется вектором магнитной индукции. В нашем случае мы пишем $d\overline{B}$, так как поле создано элементом тока. Это поле действует на второй элемент тока с силой

$$d\overline{F} = -\left[d\overline{B} \cdot \overline{d}_{j2}\right],$$

отсюда

$$d\overline{B} = \frac{d\overline{F}}{\overline{d}_{j2}} = \frac{\mu_a}{4\pi r^2}\left[\overline{d}_j \cdot \overline{r_0}\right] \ , \quad \frac{Вб}{м^2} \ . \qquad (2.11)$$

Из последнего выражения видно, что вектор $\overline{B}$ перпендикулярен всюду плоскости, проведенной через направление тока $\overline{d}_j$ и радиус-вектор $\overline{r}_o$, т.е., что вектор $\overline{B}$ направлен по касательной к окружностям, осью которых является линия, проведенная через направление элемента тока. Направление вектора $\overline{B}$ определяется правилом винта (рис.2.3). Силовые линии магнитного поля замкнутые. Истоков, в отличие от электрического поля, нет.

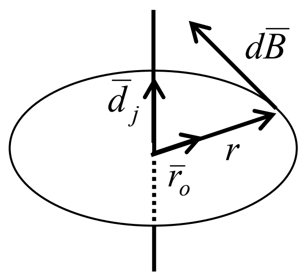


Рис. 2.3. Поле элемента тока

Для определения полей, созданных системой произвольно распределенных зарядов или токов, используется принцип наложения (суперпозиции). Согласно этому принципу поле системы элементарных зарядов или токов равно векторной сумме элементарных полей каждого заряда или тока:

$$\overline{E} = \int d\overline{E} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dq}{\varepsilon_a r^2}\overline{r_0} \quad ;$$

$$\overline{B} = \int d\overline{B} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mu_a\left[\overline{d}_j \cdot \overline{r_0}\right]}{r^2} \ .$$

В этих формулах dq и $\overline{d}_j$ – заряды или элементы тока, заключенные в элементарно малом объеме, поверхности или длине. Ввиду малости объема эти заряды можно считать точечными. Величины r и $\overline{r_o}$ в процессе интегрирования являются переменными, а интегрирование выполняется по всему пространству, где есть заряды или токи, создающие поле. Принцип наложения применим только к векторам поля и непригоден для непосредственного определения энергии суммарного поля.

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля зависят от параметров среды ε_a и μ_a. Это объясняется тем, что в среде под действием внешнего поля возникают заряды или токи, соответствующие определенной ориентации частиц. Эти заряды или токи называются связанными, потому что они не могут быть отделены от среды. Под связанными понимаются электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживающиеся в определенных положениях внутримолекулярными силами. Такие заряды «связаны» с веществом, неотделимы от него. Эти заряды или токи создают собственное поле, которое складывается с внешним полем. Поэтому суммарное поле в среде отличается от поля в вакууме.

Для анализа и расчетов удобно ввести такие векторы поля, которые бы не зависели от параметров среды ε_a и μ_a . С этой целью вводятся :

1) вектор индукции электрического поля

$$\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E}\,; \qquad (2.12)$$

2) вектор напряженности магнитного поля

$$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu_a} \ . \qquad (2.13)$$

Из формулы (2.9) получим выражение для индукции поля элементарного заряда

$$d\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E} = \cancel{\varepsilon_a}\,\frac{1}{4\pi r^2 \cancel{\varepsilon_a}}\,dq\overline{r_0}, \quad \frac{Кл}{м^2}\,.$$

Из формулы (2.11) следует выражение для напряженности магнитного поля

$$d\overline{H} = \frac{1}{\cancel{\mu_a}} \cdot \frac{\cancel{\mu_a}}{4\pi r^2}\left[\overline{d_j} \cdot \overline{r_0}\right] \ , \quad \frac{A}{м} \ .$$

Из приведенных выражений следует, что векторы $\overline{D}$ и $\overline{H}$ не зависят от свойств среды и определяются только свободными зарядами и токами. Свободными называют заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Векторы $\overline{E}$ и $\overline{B}$ определяются и свободными, и связанными зарядами и токами, поэтому совокупность всех четырех векторов поля ($\overline{D}, \overline{H}, \overline{E}, \overline{B}$) позволяет учитывать собственное поле среды.

Обычно вещество само по себе не создает наблюдаемого поля (одно из хорошо известных исключений – постоянные магниты). Это объясняется уравновешенностью внутренних процессов в веществе на макроскопическом уровне. В частности, нейтрализованы положительные и отрицательные заряды. Однако под действием внешнего (постороннего) поля на эти заряды взаимная компенсация их полей в той или иной степени нарушается. Можно утверждать, что во внешнем электрическом поле происходит некоторая деформация, а также переориентация атомов и молекул, заряды которых продолжают оставаться связанными в прежней структуре вещества. В результате отклонений зарядов, однако, появляется нескомпенсированное внутреннее поле, которое, налагаясь на внешнее, заметно изменяет его. Это называется поляризацией среды. Аналогичный процесс, связанный с магнитным полем, называется намагничиванием.

Пусть некоторое электромагнитное поле в вакууме характеризуется напряженностями $\overline{H}, \overline{E}$. При этом

$$\overline{D}_{вак} = \varepsilon_0 \overline{E} \ ,$$

$$\overline{B}_{вак} = \mu_0 \overline{H} \ .$$

Здесь добавлены нижние индексы, чтобы подчеркнуть, что имеются в виду индукции в вакууме.

Если то же поле $\overline{H}, \overline{E}$ существует в некоторой среде, то индукции будут иными:

$$\overline{D} = \overline{D}_{вак} + \overline{P} \ ,$$

$$\overline{B} = \overline{B}_{вак} + \overline{M} \ .$$

Приращения $\overline{P}$ и $\overline{M}$ будем называть поляризованностью (электрической поляризацией) и, соответственно, намагниченностью (магнитной поляризацией). Процессы поляризации и намагничивания среды выступают как независимые, т.е. первый связан только с электрическим полем, а второй с магнитным:

$$\overline{P} = \overline{P}\left(\overline{E}\right);$$
$$\overline{M} = \overline{M}\left(\overline{H}\right).$$

Этим соотношениям можно придать простую форму:

$$\overline{P} = \varepsilon_0 k_э \overline{E};$$
$$\overline{M} = \mu_0 k_м \overline{H},$$

где безразмерные коэффициенты $k_э$ и $k_м$ – это так называемые электрическая и магнитная восприимчивости среды. Они выражают «меру отклика» среды на прилагаемое внешнее поле. Восприимчивости связаны простыми соотношениями с относительными проницаемостями:

$$\varepsilon = 1 + k_э;$$
$$\mu = 1 + k_м.$$

Из последних соотношений следует, что относительная магнитная (диэлектрическая) проницаемость вещества равна сумме относительной магнитной (диэлектрической) проницаемости вакуума и магнитной (электрической) восприимчивости вещества.

В зависимости от величины $k_м$ среды различают следующим образом:

1. Вакуум. Намагниченность отсутствует, $\overline{M} = 0$ и, следовательно, $k_м = 0$ и $\mu = 1$.

2. Диамагнитные вещества, $k_м < 0$, $\mu < 1$. Эти вещества под воздействием внешнего магнитного поля намагничиваются в направлении, обратном этому полю. Его молекулы приобретают магнитные свойства только под влиянием внешнего магнитного поля. К таким веществам относятся: водород, ртуть, висмут, вода, медь, серебро, углерод. Диамагнитный эффект мал, наиболее сильно он выражен у висмута, для которого $\mu = 0{,}99983$.

3. Парамагнитные вещества, $k_м > 0$ и $\mu > 1$. Эти вещества под воздействием внешнего магнитного поля намагничиваются в направлении поля. Молекулы парамагнитного вещества обладают магнитными моментами и под влиянием внешнего поля ориентируются определением образом. К парамагнитным веществам относятся: алюминий, платина, кислород.

4. Ферромагнитные вещества. Эти вещества входят в группу парамагнитных, но характерны большой магнитной проницаемостью и

нелинейной зависимостью $\overline{B}$ от $\overline{H}$. Свойства ферромагнитных веществ объясняются наличием между соседними атомами кроме магнитных сил взаимодействия еще и немагнитных (обменных) сил, которые значительно больше, чем магнитные. Обменные силы зависят от направления магнитных моментов атомов. К ферромагнитным веществам относятся: железо, кобальт, никель и их сплавы.

Кроме электрической и магнитной проницаемости, вещество характеризуется проводимостью. Проводимость среды определяет электрический ток в среде. Как было показано ранее, объемная плотность тока определяется объемной плотностью заряда и скоростью его движения

$$\overline{\delta} = \rho \overline{\upsilon}.$$

Причины, определяющие скорость движения зарядов, могут иметь различную физическую природу, могут быть электрическими (например, поле) и неэлектрическими (например, в случае механического перемещения заряда).

Наиболее общим является понятие тока переноса $\overline{\delta} = \rho \overline{\upsilon}$, т.е. тока движения зарядов, независимо от причины, вызвавшей это движение.

Наиболее важным является частный случай тока переноса - ток проводимости. Это ток, возникающий под действием электрического поля в проводниках, где всегда имеются свободные заряды, находящиеся в хаотическом тепловом движении. Под действием электрического поля возникает упорядоченное движение свободных зарядов, образующее ток проводимости. Скорость движения этих зарядов пропорциональна силе, действующей на заряды, а этой силой является напряженность электрического поля: $\overline{\upsilon} \sim \overline{E}$ и, следовательно, объемная плотность тока проводимости $\overline{\delta_\gamma}$ также пропорциональна напряженности электрического поля

$$\overline{\delta_\gamma} = \gamma \overline{E}, \quad \frac{1}{Ом \cdot м},$$

где коэффициент пропорциональности γ называется удельной объемной проводимостью вещества.

Полученное соотношение между током проводимости и напряженностью поля называется законом Ома в дифференциальной форме. Следствием из него является известный закон Ома в интегральной форме

$$J = U / R,$$

где U – напряжение;

R – сопротивление цепи.

Ток проводимости в металлах следует закону Ома, однако, этот закон справедлив не для всех сред.

Протекание тока по проводнику происходит под действием электрического поля, которое затрачивает на это движение энергию. Поэтому ток, вызванный кулоновскими силами, должен затухать аналогично току в цепи конденсатора, нагрузкой которого является сопротивление. Отсюда следует, что для поддержания тока необходимо существование сил неэлектростатического происхождения, действующих на электрические заряды.

Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды, называются сторонними силами. Эти силы могут быть самого разнообразного происхождения:

механического (перенос заряда рукой);
химического (в аккумуляторах и гальванических элементах);
теплового (в термопарах);
за счет ядерных сил (при радиоактивном распаде);
электромагнитного;
внешние электрические поля, не созданные данной системой зарядов.

Электрическое поле сторонних сил называют сторонним электрическим полем. Напряженность поля сторонних сил определяется следующим соотношением, аналогичным соотношению (2.9)

$$\overline{E}_{cm} = \frac{d\overline{F}_{cm}}{dq},$$

где $\overline{F}_{cm}$ – сторонняя сила;
dq – элементарный заряд.

В тех точках среды, где имеются сторонние поля, напряженность суммарного поля определяется суммой поля распределенных зарядов и стороннего поля. В этом случае плотность тока определяется соотношением

$$\overline{\delta} = \gamma\left(\overline{E} + \overline{E}_{cm}\right) = \gamma\overline{E} + \gamma\overline{E}_{cm} = \overline{\delta}_{\gamma} + \overline{\delta}_{cm}, \tag{2.14}$$

представляющим собой дифференциальную форму обобщенного закона Ома. В это выражение введено понятие объемной плотности стороннего тока, $\overline{\delta}_{cm} = \gamma\overline{E}_{cm}$, вызванного сторонними силами.

Полученные три уравнения, учитывающие параметры среды:

$$\left.\begin{aligned} \overline{B} &= \mu_a\overline{H}\ ; \\ \overline{D} &= \varepsilon_a\overline{E}\ ; \\ \overline{\delta} &= \gamma\left(\overline{E} + \overline{E_{cm}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

называются материальными уравнениями.

В зависимости от свойств параметров ε_a, μ_a, γ различают виды сред, которые приведены в табл.2.3.

Виды сред

Таблица 2.3

Вид среды	Характеристика среды	Примечание
1. Линейная	Среда, параметры которой $\varepsilon_a, \mu_a, \gamma$ не зависят от векторов поля. В этой среде уравнения (2.15) являются линейными.	Линейная зависимость практически имеет место в случае слабых полей.
2. Нелинейная	Среда, параметры которой зависят от величины напряженности поля, т.е. $\varepsilon_a = \varepsilon_a(\overline{E}), \mu_a = \mu_a(\overline{H}), \gamma = \gamma(\overline{E})$.	Чаще всего нелинейность сред проявляется при сильных полях.
3. Однородная	Среда, параметры которой не зависят от координат.	
4. Неоднородная	Среда, параметры которой меняются от точки к точке и могут быть представлены как функции пространственных координат.	$\varepsilon_a = \varepsilon_a(x, y, z)$, $\mu_a = \mu_a(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$
5. Кусочно– –однородная	Среда, состоящая из нескольких однородных областей, параметры которых отличаются друг от друга и на границе раздела меняются скачками.	
6. Изотропная	Среда, свойства которой одинаковы для полей с любым направлением векторов поля.	Связаны между собой только одноименные проекции учас-твующих векторов. Например, если $\overline{B} = \mu_a \overline{H}$,то $B_x = \mu_a H_x; B_y = \mu_a H_y;$ $B_z = \mu_a H_z.$
7. Анизотропная	Среда, проявляющая разные свойства в зависимости от направления векторов поля.	Каждая проекция одного вектора зависит от всех трех проекций другого вектора. *)

*)
Например, в анизотропной намагниченной среде:

$$\left.\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z, \\ B_y &= \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z, \\ B_z &= \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z. \end{aligned}\right\}$$

Часть коэффициентов μ_{ik} может быть равна нулю. Совокупность действий, производимых над проекциями вектора $\overline{H}$ для получения вектора $\overline{B}$, условно обозначается оператором

$$\overline{\overline{\mu}} = \begin{Vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{Vmatrix},$$

который называется тензором магнитной проницаемости, а коэффициенты μ_{ik} при проекциях векторов полей называются его компонентами. Это тензор второго ранга. Аналогично описываются анизотроптные свойства диэлектриков и проводников. После введения тензоров $\overline{\overline{\mu}}, \overline{\overline{\varepsilon}}$ и $\overline{\overline{\gamma}}$ уравнения (2.15) можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{B} = \overline{\overline{\mu}}\,\overline{H}; \\ &\overline{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\overline{E}; \\ &\overline{\delta} = \overline{\overline{\gamma}}(\overline{E} + \overline{E}_{cm}). \end{aligned}\right\}$$

2.2. Система уравнений электродинамики (уравнений Максвелла)

Система уравнений электродинамики описывает наиболее общие законы электромагнитного поля. Эти законы связывают между собой электрические и магнитные поля, а также поля с зарядами и токами. Система уравнений электродинамики полностью исчерпывает свойства электромагнитного поля в пределах классической макроскопической теории. Она является исходной при решения задач радиотехники, связанных с электромагнитными полями и волнами, и при решении статистических задач.

2.2.1. Система уравнений электродинамики в общем виде

Рассмотрим законы электродинамики в наиболее общем виде, справедливом для полей, зависящих от времени по любому закону.

1. Первое уравнение электродинамики: закон полного тока.

Закон полного тока в дифференциальной форме:

$$rot\,\overline{H} = \overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt}. \tag{2.16}$$

Согласно этому закону вихрь вектора напряженности магнитного поля в каждой точке равен объемной плотности полного тока в этой точке. Объемная плотность полного тока равна сумме объемной плотности тока переноса $\overline{\delta}$ и тока смещения $\overline{\delta}_c$:

$$\overline{\delta}_П = \overline{\delta} + \overline{\delta}_c,$$

где $\overline{\delta}_c = \dfrac{d\overline{D}}{dt}.$

Закон показывает, что причиной возникновения магнитного поля является в равной степени и ток переноса, и ток смещения, в также устанавливает количественную связь между током и магнитным полем. Ток смещения называется током, потому что его действие такое же, как тока переноса. Физически ток смещения обнаруживается потому, что переменное электрическое поле вызывает появление магнитного поля.

Для получения закона полного тока в интегральной форме проинтегрируем уравнение (2.16) по произвольной поверхности S :

$$\int_S rot\,\overline{H}d\overline{S} = \int_S (\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt})\,d\overline{S}.$$

Используя теорему Стокса (1.12) о связи между интегралами по контуру и по поверхности

$$\int\limits_S rot\,\overline{H}d\overline{S} = \oint\limits_l \overline{H}d\overline{l},$$

получим, что интеграл по поверхности в левой части можно заменить через интеграл по замкнутому контуру

$$\int\limits_l \overline{H}d\overline{l} = \int\limits_S (\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt})\,d\overline{S}. \qquad (2.17)$$

Мы получили закон полного тока (первое уравнение электродинамики) в интегральной форме. Согласно этому закону циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру $\overline{l}$ равна полному току, протекающему сквозь поверхность, натянутую на этот контур.

Полный ток через поверхность S представляет собой сумму тока переноса через эту поверхность и тока смещения

$$J_{П} = J + J_c,$$

где $J = \int\limits_S \overline{\delta}d\overline{S}$;

$$J_c = \int\limits_S \frac{d\overline{D}}{dt}d\overline{S} = \int\limits_S \overline{\delta}_c d\overline{S}.$$

Остановимся еще раз на физическом смысле первого уравнения электродинамики, который заключается в том, что не только токи переноса, но и токи смещения (на рис. 2.4 вертикальный вектор $J_п$) вызывают магнитное действие, порождают вихревое магнитное поле, устанавливают зависимость между изменением во времени вектора напряженности электрического поля и изменением в пространстве вектора магнитного поля (рис.2.4).

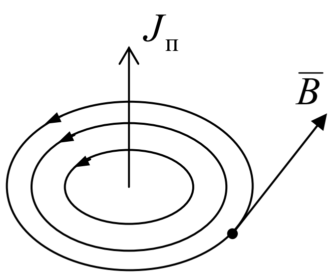


Рис.2.4. К первому уравнению электродинамики

Ток смещения сквозь поверхность

$$J_c = \int_S \frac{d\overline{D}}{dt} d\overline{S} = \frac{d\Psi}{dt} \quad –$$

– это скорость увеличения потока электрической индукции Ψ через эту поверхность. Таков физический смысл тока смещения.

Токи смещения существуют там, где имеется переменное электрическое поле, независимо от того, где это поле- в вакууме или в веществе. Ток смещения существует между обкладками конденсатора и обеспечивает протекание тока в его цепи (рис.2.5), он существует

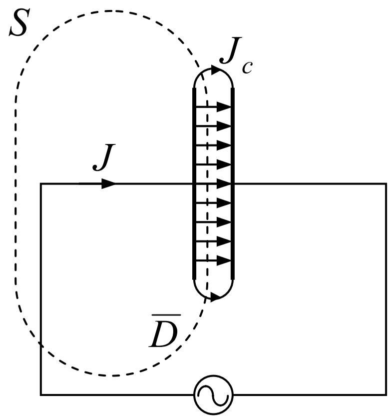


Рис. 2.5. Ток смещения в цепи конденсатора

в пространстве между антенной и землей, в пространстве между проводами двухпроводной линии всюду, где есть переменное электрическое поле.

2. Второе уравнение электродинамики: <u>закон электромагнитной индукции.</u>

Закон электромагнитной индукции в <u>интегральной форме</u>

$$\oint_l \overline{E} d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B} d\overline{S} \qquad (2.18)$$

или $$\oint_l \overline{E}\, d\,\overline{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\Phi = \int_S \overline{B} d\overline{S}$ – магнитный поток (поток вектора магнитной индукции) через поверхность S.

Согласно этому закону меняющееся во времени магнитное поле вызывает независимо от параметров среды такое электрическое поле, что для всякого произвольного контура циркуляция вектора напряженности этого поля равна взятой с обратным знаком скорости увеличения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

Запишем закон электромагнитной индукции применительно к точке пространства в дифференциальной форме.

Согласно преобразованию Стокса**:**

$$\oint_l \overline{E}d\overline{l} = \int_S rot\ \overline{E}d\overline{S}$$

соотношение (2.18) примет вид

$$\int_S rot\ \overline{E}d\overline{S} = -\int_S \frac{d\overline{B}}{dt}d\overline{S}.$$

Ввиду произвольности поверхности S подинтегральные выражения, должны быть одинаковы:

$$rot\ \overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt}. \qquad (2.19)$$

Мы получили закон электромагнитной индукции в <u>дифференциальной форме,</u> согласно которому меняющееся во времени магнитное поле образует такое электрическое поле, что вихрь напряженности электрического поля равен скорости изменения вектора магнитной индукции с обратным знаком. Из закона электромагнитной индукции следует, что электрические силовые линии необязательно должны начинаться и кончаться на электрических зарядах. Могут существовать замкнутые электрические силовые линии, охватывающие свои вихри в виде переменного магнитного поля (рис.2.6).

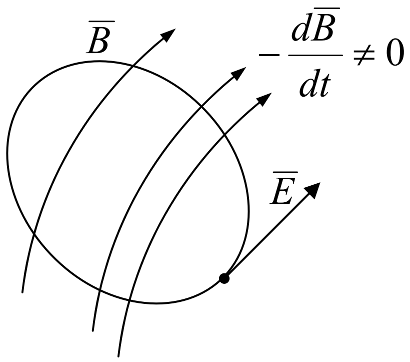


Рис. 2.6. Закон электромагнитной индукции

<u>Знак минус в законе электромагнитной индукции</u> имеет определенный физический смысл.

Пусть направление обхода контура l и нормали $\overline{n}_o$ к поверхности S выбрано так, чтобы они образовали правовинтовую систему (рис.2.7).

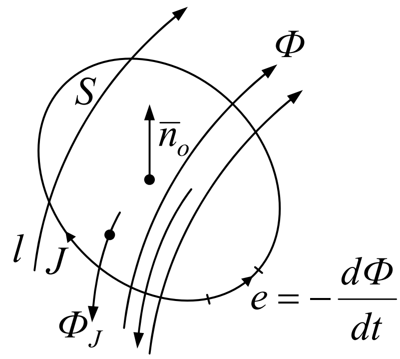


Рис. 2.7. Знак минус в законе электромагнитной индукции

Тогда при увеличении магнитного потока Ф электродвижущая сила (э.д.с.)

$$e=-\frac{d\Phi}{dt},$$

наведенная в контуре, будет отрицательной, т.е. направленной в сторону, противоположную направлению обхода контура**.** Ток, вызванный этой э.д.с. в контуре, будет создавать собственное магнитное поле Φ_J, направленное так, что оно будет препятствовать увеличению (изменению) исходного магнитного поля. Изложенное положение является правилом Ленца. Индуцированные э.д.с. имеют характер сил инерции и правило Ленца выражает закон электромагнитной инерции.

3.Третье уравнение электродинамики: закон непрерывности магнитного поля.

Закон непрерывности магнитного поля в интегральной форме:

$$\oint_S \overline{B}d\overline{S}=0 \qquad (2.20)$$

или $$\Phi=0.$$

Согласно этому закону магнитный поток сквозь замкнутую поверхность равен нулю. Для того чтобы получить этот закон в дифференциальной форме, используем преобразование Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \overline{B}d\overline{S}=\int_V div\,\overline{B}dV,$$

которое позволяет записать соотношение (2.20) в следующем виде:

$$\int_V div\,\overline{B}dV = 0.$$

Так как объем V произволен, то подинтегральное выражение равно нулю

$$div\,\overline{B} = 0. \qquad (2.21)$$

Мы получили закон (уравнение) непрерывности магнитного поля в дифференциальной форме. Он показывает, что магнитное поле не имеет истоков. Линии индукции магнитного поля всегда замкнутые.

Закон непрерывности справедлив для любых полей в любой среде потому что в любой среде индукции поля учитывают и внешнее, и наведенное поле.

4. Четвертое уравнение электродинамики: теорема о потоке вектора электрической индукции.

Теорема о потоке вектора электрической индукции в интегральной форме:

$$\Psi = \oint_S \overline{D}d\overline{S} = \int_V \rho dV = \text{Q}. \qquad (2.22)$$

Согласно этой теореме поток вектора электрической индукции Ψ через замкнутую поверхность равен суммарному свободному заряду Q, который находится в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Для того чтобы получить эту теорему в дифференциальной форме, используем преобразование Остроградского-Гаусса. С учетом произвольности объема получим эту теорему в следующем виде:

$$div\,\overline{D} = \rho\,. \qquad (2.23)$$

Согласно этой теореме дивергенция вектора электрической индукции равна объемной плотности свободных зарядов в каждой точке поля. Источниками вектора электрической индукции являются только свободные заряды. Поэтому введение вектора $\overline{D}$ позволяет получить очень удобные соотношения между полем и зарядами, в которых не фигурирует поляризация среды. Силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.

5. Следствия из первого и четвертого уравнений электродинамики: закон непрерывности полного тока и закон сохранения заряда.

Закон полного тока в дифференциальной форме описывается первым уравнением электродинамики (2.16). Возьмем от обеих частей этого уравнения дивергенцию:

$$div\, rot\, \overline{H} = div\,(\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt}).$$

Так как дивергенция левой части уравнения всегда равна нулю, то равна нулю и дивергенция правой:

$$div\,(\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt}) = div\, \overline{\delta}_{П} = 0. \qquad (2.24)$$

Полученное выражение носит название закона (уравнения) непрерывности полного тока в дифференциальной форме и показывает, что полный ток непрерывен.

Для получения этого закона в интегральной форме проинтегрируем его по произвольному объему V :

$$\int_{V} div\,(\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt})dV = 0$$

и учтем преобразование Остроградского-Гаусса. В итоге мы получим закон (уравнение) непрерывности полного тока в интегральной форме:

$$\oint_{S}(\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt})d\overline{S} = 0, \qquad (2.25)$$

согласно которому полный ток через замкнутую поверхность равен нулю.

Если электрическое поле постоянно, то $d\overline{D}/dt = 0$, ток смещения равен нулю и закон непрерывности полного тока переходит в закон непрерывности постоянного тока:

$$\oint_{S}\overline{\delta}d\overline{S} = 0 \quad \text{– интегральная форма;}$$

$$div\,\overline{\delta} = 0 \quad \text{– дифференциальная форма.}$$

Для выяснения физического смысла этого закона представим его в следующем виде

$$\oint_{S}\overline{\delta}d\overline{S} = -\oint_{S}\frac{d\overline{D}}{dt}d\overline{S} = -\frac{d}{dt}\oint_{S}\overline{D}d\overline{S}.$$

Интеграл в левой части уравнения представляет собой ток переноса, вытекающий из объема V (рис.2.8) через окружающую его поверхность S :

$$\oint_S \overline{\delta} d\overline{S} = J = \frac{d\mathrm{Q}}{dt},$$

где dQ – заряд, протекающий через поверхность за время *dt***.**

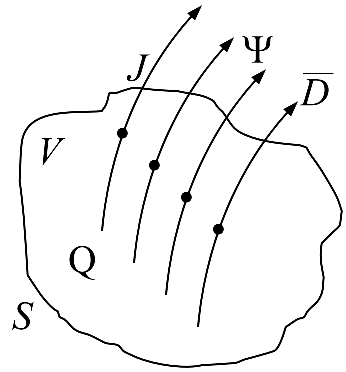


Рис.2.8. Закон непрерывности полного тока

Интеграл в правой части согласно теореме о потоке вектора электрической индукции равен заряду, находящемуся в объеме V :

$$\Psi = \oint_S \overline{D} d\overline{S} = \mathrm{Q},$$

где Ψ – поток вектора электрической индукции.

Поэтому наше уравнение можно записать в следующем виде:

$$J = -\frac{dQ}{dt}$$

или

$$\oint_S \overline{\delta} d\overline{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV. \qquad (2.26)$$

Мы получили закон сохранения заряда в интегральной форме: сила тока, протекающего сквозь замкнутую поверхность, равна скорости изменения заряда, находящегося внутри объема, ограниченного этой поверхностью, с обратным знаком.

Используя теорему Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \overline{\delta} d\overline{S} = \int_V div\, \overline{\delta} dV,$$

получим соотношение (2.26) в следующем виде:

$$\int_V div\,\bar{\delta} dV = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV.$$

Ввиду произвольности взятых объемов, подинтегральные выражения также одинаковы:

$$div\,\bar{\delta} = -\frac{d\rho}{dt}. \qquad (2.27)$$

Мы получили закон сохранения заряда в дифференциальной форме. Из этой формы закона видно, что источником тока являются изменяющиеся во времени заряды. Линии тока начинаются там, где заряд уменьшается, и кончаются там, где он увеличивается. Линии тока претерпевают разрыв там**,** где происходит изменение заряда.

Таким образом, закон сохранения заряда является следствием из первого и четвертого уравнений электродинамики.

Из приведенных соотношений легко установить физический смысл закона непрерывности полного тока.

Если из объема V (рис.2.8) вытекает ток переноса J , то заряд в объеме уменьшается. При этом уменьшается поток Ψ индукции через поверхность S, охватывающую объем, т.е. в объем втекает ток смещения. Так как поток вектора индукции равен заряду, то эти токи равны по величине и противоположны по знаку. Их сумма, называемая полным током, равна нулю. В случае конденсатора (рис.2.5) в объем, ограниченный поверхностью S, втекает по проводу ток переноса J, а вытекает в пространство между обкладками ток смещения J_c. Полный ток в цепи получается непрерывным.

Рассмотренные выше законы и уравнения совместно с материальными уравнениями, учитывающими свойства среды, образуют полную систему уравнений электродинамики. Полная система уравнений электродинамики включает в себя (табл.2.4):

1) четыре основных уравнения, определяющих вихри и истоки электромагнитного поля (фундаментальная система уравнений электродинамики);

2) три уравнения, учитывающих параметры среды;

3) два дополнительных уравнения, как следствия из основных.

Система уравнений электродинамики исчерпывающим образом характеризует электромагнитное поле. Из этих уравнений следует, что электромагнитное поле представляет собой особую форму материи, характерную тем, что она осуществляет взаимодействие электрических зарядов и связывает их в единую систему. Поле и заряды при этом выступают как формы проявления этой единой материальной системы. Уравнения электродинамики определяют как законы взаимодействия поля и зарядов, так и внутренние свойства самого электромагнитного поля.

Электромагнитное поле - это совокупность взаимосвязанных электрического и магнитного полей, это форма материи, существующей во времени и пространстве объективно, вне нашего сознания.

Электрическое и магнитное поле есть две характеристики, две формы проявления электромагнитного поля.

Уравнения электродинамики описывают очень широкий круг явлений, изучаемых в радиотехнике. Однако их применение ограничено известными пределами. Они неприменимы: для атомных явлений, где нужна квантовая теория поля; для скоростей, близких к световым, где необходимо использовать теорию относительности.

Первые четыре уравнения электродинамики (табл. 2.4) образуют фундаментальную систему уравнений электродинамики. Они справедливы для любой среды. Параметры среды в них не входят. Для того, чтобы система этих уравнений стала полной, т.е. чтобы при некоторых дополнительных условиях она однозначно определяла поле, к ней добавлены уравнения 5, 6 и 7 (табл.2.4), учитывающие свойства среды при помощи параметров ε_a, μ_a и γ. Эти уравнения накладывают дополнительные связи на векторы поля. В общем случае они являются нелинейными, так как параметры ε_a, μ_a и γ зависят от полей. В первом приближении их можно считать линейными. Следует иметь в виду, что параметры ε_a, μ_a и γ зависят и от частоты. Эта зависимость становится более сильной в сантиметровом диапазоне волн и очень сильной в оптическом. У ферромагнитных материалов μ с ростом частоты уменьшается и в сантиметровом диапазоне волн относительная магнитная проницаемость составляет несколько единиц, а для постоянного тока она составляет несколько сотен.

Для линейных сред полная система уравнений электродинамики является линейной, т.е. все переменные величины входят в нее в первой степени.

Уравнения электродинамики определяют, как протекают электромагнитные процессы в пространстве и времени. Они позволяют по начальным данным найти состояние процесса в любой момент времени.

Полная система уравнений электродинамики (ЭД) Таблица 2.4

<table>
<tr><th>Наименование</th><th>Дифферен-циальная форма</th><th>Интегральная форма</th><th>Комплексная форма</th><th colspan="2">Физический смысл</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td colspan="6">Четыре основных уравнения (Максвелла), определяющие <u>вихри</u> (первое и второе) и <u>истоки</u> (третье и четвертое) электромагнитного поля (ЭМП). <u>Фундаментальная</u> система уравнений электродинамики</td></tr>
<tr><td>1. Первое уравнение ЭД- закон полного тока</td><td>$rot\,\overline{H} = \overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt}$
(2.16)</td><td>$\oint_l \overline{H} d\overline{l} = \int_S (\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt}) d\overline{S}$
(2.17)</td><td>$rot\,\dot{\overline{H}} = \dot{\overline{\delta}} + j\omega\dot{\overline{D}}$</td><td>Причиной возникновения вихревого магнитного поля является в равной степени и ток переноса $\overline{\delta}$, и ток смещения $d\overline{D}/dt$</td><td rowspan="2">Уравнения устанавливают связь между переменными электрическими и магнитными полями. Переменные во времени магнитное и электрическое поля раздельно существовать не могут, они связаны друг с другом и образуют единое ЭМП. Всякое изменение электрического поля во времени вызывает появление магнитного и наоборот.</td></tr>
<tr><td>2. Второе уравнение ЭД- закон электро-магнитной индукции</td><td>$rot\,\overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt}$
(2.19)</td><td>$\oint_l \overline{E} d\overline{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B} d\overline{S}$
(2.18)</td><td>$rot\,\dot{\overline{E}} = -j\omega\dot{\overline{B}}$</td><td>Электрическое поле имеет вихри там, где изменяется магнитное поле</td></tr>
<tr><td>3. Третье уравнение ЭД – закон непрерывности магнитного поля</td><td>$div\,\overline{B} = 0$
(2.21)</td><td>$\int_S \overline{B} d\overline{S} = 0$
(2.20)</td><td>$div\,\dot{\overline{B}} = 0$ (является следствием из второго уравнения)</td><td colspan="2">Не существуют реальные магнитные заряды, на которых начинаются или оканчиваются линии магнитной индукции $\overline{B}$, т.е. магнитное поле не имеет истоков и является чисто вихревым полем. Линии магнитной индукция $\overline{B}$ всегда замкнутые.</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 2.4.

1	2	3	4	5
4.Четвертое уравнение ЭД – теорема о потоке вектора электрической индукции	$div\,\overline{D} = \rho$ (2.23)	$\oint_S \overline{D}\,d\overline{S} = \int_V \rho dV$ (2.22)	$div\,\dot{\overline{D}} = \dot{\rho}$ (является следствием из первого уравнения)	Линия вектора $\overline{D}$ могут быть и непрерывными (замкнутыми) и разомкнутыми, т.е. начинаться и кончаться на зарядах. Электрическое поле имеет истоки там, где есть заряды.
Три уравнения, учитывающие параметры среды				
5.	$\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E}$ (2.12)		$\dot{\overline{D}} = \varepsilon_a \dot{\overline{E}}$	Связь векторов поля с параметрами среды.
6.	$\overline{B} = \mu_a \overline{H}$ (2.15)		$\dot{\overline{B}} = \mu_a \dot{\overline{H}}$	
7. Дифференциальная форма обобщенного закона Ома	$\overline{\delta} = \gamma(\overline{E} + \overline{E}_{cm})$ (2.14)		$\dot{\overline{\delta}} = \gamma\dot{\overline{E}} + \dot{\overline{\delta}}_{cm}$	
Два дополнительных уравнения, как следствие из основных				
8. Закон непрерывности полного тока, как следствие из первого уравнения ЭД	$div\,(\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt}) = $ $= div\,\overline{\delta}_П = 0$ (2.24)	$\oint_S (\overline{\delta} + \frac{d\overline{D}}{dt})d\overline{S} = $ $= \oint_S \overline{\delta}_П d\overline{S} = 0$ (2.25)	$div\,\dot{\overline{\delta}}_П = 0$	Линии полного тока являются непрерывными.

Продолжение таблицы 2.4.

1	2	3	4	5
9. Закон сохранения заряда	$div\,\bar{\delta} = -\frac{d\rho}{dt}$ (2.27)	$\oint_S \bar{\delta} d\bar{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV$ или $J = -\frac{dQ}{dt}$, т.к. $J = \oint_S \bar{\delta} d\bar{S}$, $Q = \int_V \rho dV$ (2.26)	$div\,\dot{\bar{\delta}} = -j\omega\dot{\rho}$	Закон связывает между собою заряды и токи. Источником тока являются изменяющиеся во времени заряды. Линии тока начинаются там, где заряд уменьшается, и кончаются там, где он увеличивается. Линии тока претерпевают разрыв там, где происходит изменение заряда.

2.2.2. Система уравнений электродинамики в комплексной форме

В радиотехнике в большинстве случаев используют электромагнитные поля, напряжения, токи, меняющиеся по гармоническому закону во времени. Поэтому наибольший интерес и практическую важность представляет рассмотрение монохроматических полей, меняющихся по гармоническому закону во времени. Как будет показано ниже, заранее заданная зависимость поля от времени существенно упрощает систему уравнений электромагнитного поля, а также ее решение.

Если некоторая величина А, характеризующая электромагнитное поле (заряд, ток, вектор поля), является гармонической функцией времени, то ее зависимость от времени может быть записана в следующем виде:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\mathrm{A} = \mathrm{A}(x, y, z, t)$ - мгновенное значение величины;

$\mathrm{A}_m = \mathrm{A}_m(x, y, z)$ - амплитуда (не зависит от времени);

$\omega t + \varphi_0$ - мгновенная фаза;

ω - круговая (угловая) частота;

$\varphi_0 = \varphi_0(x, y, z)$ - начальная фаза (не зависит от времени).

Анализ величин, меняющихся по гармоническому закону, удобен при использовании метода комплексных обозначений. Метод комплексных обозначений применим к уравнениям электромагнитного поля только в случае их линейности, т.е. когда уравнения, учитывающие параметры среды, линейны. Для нелинейных сред этот метод непригоден.

Особенностью гармонической величины, записанной в комплексной форме, является то, что дифференцирование ее по времени заменяется умножением на множитель $j\omega$, т.е. знаку производной $\partial/\partial t$ соответствует множитель $j\omega$.

При записи системы уравнений электродинамики в комплексной форме будем считать, что она линейна и что все величины, входящие в нее, меняются по гармоническому закону.

В этом случае уравнения электродинамики в дифференциальной форме примут вид:

1. Первое уравнение электродинамики - закон полного тока:

$$rot\,\dot{\vec{\mathrm{H}}} = j\omega\dot{\vec{D}} + \dot{\vec{\delta}}\,. \tag{2.28}$$

2. Второе уравнение электродинамики - закон электромагнитной индукции:

$$rot\,\dot{\vec{\mathrm{E}}} = -j\omega\dot{\vec{\mathrm{B}}}\,. \tag{2.29}$$

3. Третье уравнение электродинамики - закон непрерывности магнитного поля:

$$div\,\dot{\vec{\mathrm{B}}} = 0\,. \tag{2.30}$$

4. Четвертое уравнение электродинамики – теорема о потоке вектора электрической индукции:

$$div\,\dot{\vec{D}} = \dot{\rho}\,. \tag{2.31}$$

5. Уравнения, учитывающие параметры среды:

$$\dot{\vec{D}} = \varepsilon_a \dot{\vec{E}}\,, \tag{2.32}$$

$$\dot{\vec{B}} = \mu_a \dot{\vec{H}}\,, \tag{2.33}$$

$$\dot{\vec{\delta}} = \gamma\,\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{\delta}}_{cm}\,. \tag{2.34}$$

6. Следствия из основных уравнений:

закон непрерывности полного тока

$$div\,\dot{\vec{\delta}}_{\Pi} = 0\,; \tag{2.35}$$

закон сохранения заряда

$$div\,\dot{\vec{\delta}} = -j\omega\dot{\rho}\,. \tag{2.36}$$

Если произвести сокращение приведенной системы уравнений на $e^{j\omega t}$, то мы получим систему уравнений электродинамики, записанную для комплексных амплитуд.

Система уравнений электродинамики в комплексной форме существенно отличается от системы уравнений электродинамики в случае полей с произвольной временной зависимостью. В случае полей с произвольной временной зависимостью четыре основных уравнения электродинамики были взаимно независимы. Для гармонических полей третье уравнение является следствием из 2-го, а четвертое уравнение - следствием из 1-го. Что бы показать это, возьмем от 2-го уравнения дивергенцию:

$$div\,rot\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\,div\,\dot{\vec{B}}\,.$$

Так как $div\,rot\,\dot{\vec{E}} = 0$, то $div\,\dot{\vec{B}} = 0$. Мы получили третье уравнение.

Возьмем теперь дивергенцию от 1-го уравнения:

$$div\,rot\,\dot{\vec{H}} = j\omega\,div\,\dot{\vec{D}} + div\,\dot{\vec{\delta}}\,.$$

Так как $div\,rot\,\dot{\vec{H}} = 0$, а из уравнения (2.36)

$$div\,\dot{\vec{\delta}} = -j\omega\dot{\rho}\,,$$

то $$j\omega\,div\,\dot{\vec{D}} = j\omega\dot{\rho}\,,$$

откуда $$div\,\dot{\vec{D}} = \dot{\rho}\,.$$

Мы получили четвертое уравнение.

Взаимозависимость уравнений упрощает систему уравнений для гармонических полей, а также ее решение.

Введем понятие комплексной диэлектрической проницаемости, для чего подставим в первое уравнение электродинамики значение плотности тока $\dot{\vec{\delta}}$ из

(2.34) и значение индукции $\dot{\bar{D}}$ из (2.32):

$$rot\,\dot{\bar{\mathrm{H}}} = j\omega\,\varepsilon_a\dot{\bar{\mathrm{E}}} + \gamma\,\dot{\bar{\mathrm{E}}} + \dot{\bar{\delta}}_{cm}.$$

Назовем сумму плотности тока смещения и плотности тока проводимости плотностью полного тока $\dot{\bar{\delta}}_{\Pi}$:

$$\dot{\bar{\delta}}_{\Pi} = \dot{\bar{\delta}}_c + \dot{\bar{\delta}}_{\gamma} = j\omega\,\varepsilon_a\dot{\bar{\mathrm{E}}} + \gamma\,\dot{\bar{\mathrm{E}}} = j\omega\,\varepsilon_a\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\,\varepsilon_a}\right)\dot{\bar{\mathrm{E}}}.$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость определяется следующей формулой

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\,\varepsilon_a}\right) = \varepsilon_a - j\frac{\gamma}{\omega} \quad . \tag{2.37}$$

В этом выражении первое слагаемое учитывает обычную диэлектрическую проницаемость, второе слагаемое - проводимость среды.

С учетом (2.37) плотность полного тока определяется следующим выражением:

$$\dot{\bar{\delta}}_{\Pi} = j\omega\,\dot{\varepsilon}_a\dot{\bar{\mathrm{E}}}.$$

Из приведенных выражений следует, что ток проводимости синфазен с напряженностью электрического поля, ток смещения сдвинут по фазе на 90°, а плотность полного тока сдвинута по фазе относительно тока смещения на некоторый угол φ_e (рис.2.9).

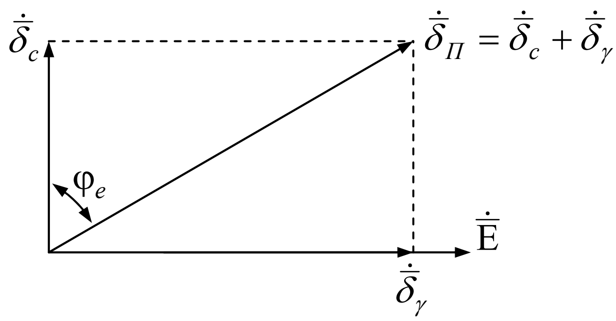


Рис.2.9. Полный ток и угол диэлектрических потерь

Из приведенного рисунка видно, что

$$tg\,\varphi_e = \frac{\delta_{\gamma}}{\delta_c} = \frac{\gamma}{\omega\,\varepsilon_a}. \tag{2.38}$$

Величина $tg\,\varphi_e$ называется тангенсом угла диэлектрических потерь. Токи смещения сдвинуты по фазе относительно электрического поля на 90°, поэтому они не рассеивают мощности. Они могут существовать в вакууме, где потери отсутствуют. Токи проводимости синфазны с электрическим полем и рассеивают мощность на тепло. Чем больше токи проводимости, тем больше тангенс угла потерь и тем больше тепловые потери, и поэтому угол φ_e носит название угла диэлектрических потерь.

В зависимости от величины $tg\,\varphi_e$ среды различаются на диэлектрики и проводники.

Диэлектриком называется среда, в которой преобладают токи смещения:

$$\delta_c \rangle\rangle \delta_\gamma ,$$

т.е.

$$tg\,\varphi_e \langle\langle 1 .$$

Если в среде $tg\varphi_e = 0\ (\gamma = 0)$, то она называется идеальным диэлектриком. Примером такой среды является вакуум.

Проводником называется среда, в которой преобладают токи проводимости:

$$\delta_\gamma \rangle\rangle \delta_c .$$

В этом случае

$$tg\,\varphi_e \rangle\rangle 1 .$$

Если в среде $tg\,\varphi_e = \infty\ (\gamma = \infty)$, то она называется идеальным проводником. Примером такой среды являются металлы при возникновении в них явления сверхпроводимости.

Так как величина тангенса угла потерь зависит от частоты, то одна и та же среда в зависимости от частоты может быть и диэлектриком и проводником. В длинноволновом диапазоне радиоволн поверхность земли является проводником, а в дециметровом диапазоне она проявляет себя как диэлектрик. По мере увеличения частоты среды все больше проявляют диэлектрические свойства за счет увеличения токов смещения.

2.3. Граничные условия электродинамики

Электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям электродинамики и зависит от начальных условий и свойств среды. Кроме того, реальное электромагнитное поле существует не в безграничном однородном пространстве, а в области пространства, имеющей определенные границы. Например, поле используемое в радиосвязи, распространяется в области пространства, ограниченной поверхностью Земли и ионосферой. Волна, распространяющаяся в волноводе, существует в области, ограниченной стенками волновода.

В большинстве случаев мы практически встречаемся с кусочно-однородными средами. На границах раздела областей кусочно-однородной среды ее параметры меняются скачком, поэтому скорость их изменения и их производные по координатам в направлении нормали на границе раздела равны бесконечности и уравнения электродинамики в дифференциальной форме непригодны на границе областей (рис. 2.10).

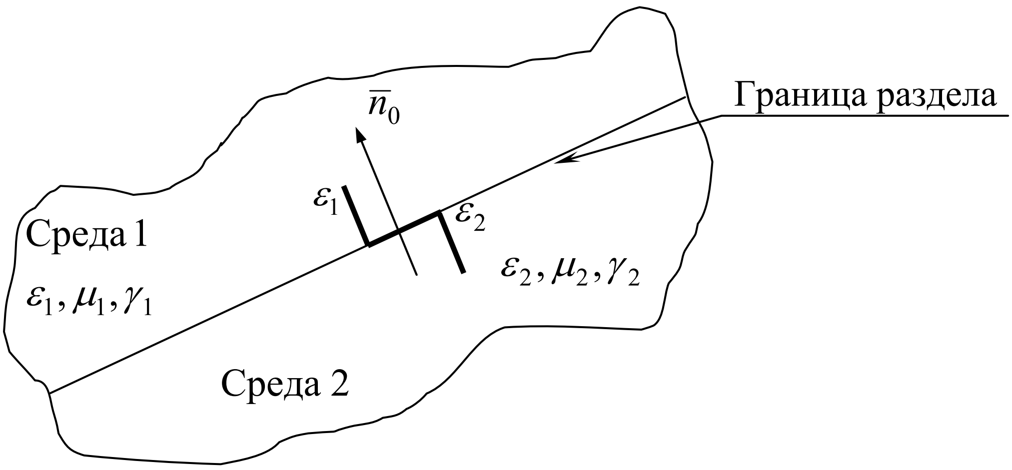


Рис. 2.10. Кусочно-однородная среда

На границе раздела уравнения электродинамики приобретают особую форму, называемую граничными условиями. Для вывода граничных условий используются уравнения электродинамики в интегральной форме.

2.3.1. Граничные условия электродинамики в общем виде

Векторы электромагнитного поля, принадлежащие окрестности точки 0, принято разлагать на касательные (тангенциальные) и нормальные составляющие. Так, вектор $\overline{\mathrm{E}}$ (рис.2.11) может быть представлен в виде

$$\overline{\mathrm{E}} = \overline{\mathrm{E}}_t \overline{n}_t + \overline{\mathrm{E}}_n \overline{n}_0.$$

Здесь $\overline{n}_t, \overline{n}_0$ – единичные векторы тангенциального и нормального направлений, а $\overline{\mathrm{E}}_t, \overline{\mathrm{E}}_n$ – тангенциальная (касательная) и нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля.

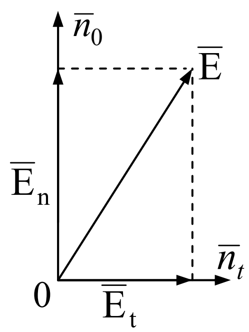


Рис. 2.11. Разложение вектора $\overline{\mathrm{E}}$ на тангенциальные (касательные) и нормальные составляющие

Каждому уравнению электродинамики соответствует свое граничное условие, поэтому внесем граничные условия в табл. 2.5 в том же порядке, что и уравнения электродинамики.

Граничные условия электродинамики Таблица 2.5

Граничное условие	Формулировка граничного условия
1. Для напряженности магнитного поля $\overline{H}_{t2}-\overline{H}_{t1}=[\overline{\delta}_S\ \overline{n}_o]$ (2.39)	На границе раздела двух сред касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля претерпевает скачок, равный по величине поверхностной плотности тока $\overline{\delta}_S$
2. Для напряженности электрического поля $\overline{\mathrm{E}}_{t2}-\overline{\mathrm{E}}_{t1}=0$ (2.40)	На границе раздела двух сред касательная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывна
3. Для магнитной индукции $\mathrm{B}_{n2}-\mathrm{B}_{n1}=0$ (2.41)	На границе раздела двух сред нормальная составляющая вектора магнитной индукции непрерывна (или нормальные составляющие этого вектора в средах 1 и 2 одинаковы)
4. Для вектора электрической индукции $D_{n2}-D_{n1}=\sigma$ (2.42)	На границе раздела двух сред нормальная составляющая вектора электрической индукции претерпевает скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов σ
5. Для полного тока $\delta_{\Pi n2}-\delta_{\Pi n1}=0$ (2.43)	На границе раздела двух сред нормальная составляющая вектора объемной плотности полного тока непрерывна

В пределах каждой среды в каждой точке поле описывается уравнениями электродинамики в дифференциальной форме, а связь между полями на границе раздела - граничными условиями.

2.3.2. Частные случаи граничных условий электродинамики

1. Граничные условия электродинамики для электрического поля, когда на границе раздела отсутствуют свободные заряды.

В этом случае на границе раздела $\sigma = 0$ и граничные условия (2.40) и (2.42) примут следующий вид:

$$\overline{\mathrm{E}}_{t2} = \overline{\mathrm{E}}_{t1},$$
$$D_{n2} = D_{n1}.$$

Выразим проекции векторов через величину векторов и угол их наклона относительно нормали к поверхности раздела согласно рис.2.12 и подставим их в граничные условия.

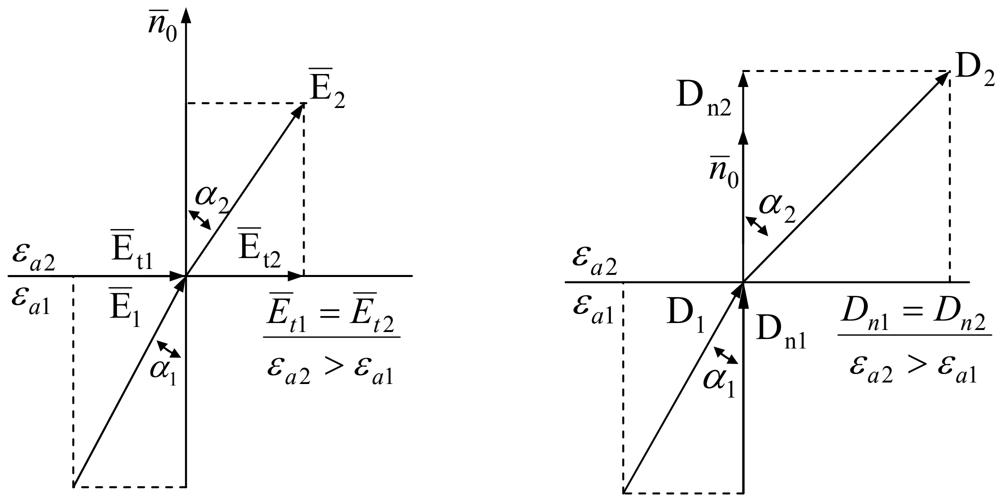


Рис.2.12. Преломление силовых линий при переходе через границу раздела двух сред

При этом получим следующие уравнения

$$\mathrm{E}_2 \sin\alpha_2 = \mathrm{E}_1 \sin\alpha_1,$$
$$D_2 \cos\alpha_2 = D_1 \cos\alpha_1.$$

Первое уравнение разделим на второе, в результате получим

$$\frac{\mathrm{E}_2}{D_2} tg\,\alpha_2 = \frac{\mathrm{E}_1}{D_1} tg\,\alpha_1.$$

Поскольку $\overline{D} = \varepsilon_a \overline{\mathrm{E}}$, то

$$\frac{tg\,\alpha_2}{\varepsilon_{a2}} = \frac{tg\,\alpha_1}{\varepsilon_{a1}},$$

откуда

$$\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1} = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}. \qquad (2.44)$$

Из соотношения (2.44) следует, что при переходе из одной среды в другую меняется направление электрических силовых линий. Электрические силовые линии при переходе в среду с большим ε_a отклоняются в сторону границы раздела. При этом, как видно из рис.2.12, напряженность электрического поля уменьшается, а индукция увеличивается. При переходе в среду с меньшим ε_a силовые линии отклоняются от границы раздела, напряженность электрического поля увеличивается, а индукция падает.

2. Граничные условия электродинамики для магнитного поля, когда на границе раздела отсутствуют поверхностные токи, т.е. $\overline{\delta}_s = 0$.

Граничные условия (2.39) и (2.41) в этом случае примут следующий вид:

$$\overline{\mathrm{H}}_{t2} = \overline{\mathrm{H}}_{t1},$$
$$\mathrm{B}_{n2} = \mathrm{B}_{n1}.$$

Остаточного намагничивания быть не должно, т.к. оно эквивалентно наличию поверхностного тока.

Проводя преобразования, такие же как в первом случае, получим

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \qquad (2.45)$$

Это соотношение аналогично формуле (2.44) для электрического поля и к нему относятся все ранее сделанные выводы.

3. Преломление линий постоянного тока проводимости на границе раздела двух сред.

Используем граничное условие для напряженности электрического поля (2.40) и для постоянного тока:

$$\overline{\mathrm{E}}_{t_2} = \overline{\mathrm{E}}_{t1},$$
$$\delta_{n2} = \delta_{n1}.$$

Последнее граничное условие получено из (2.43) при условии, что

$$\overline{\delta}_c = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = 0.$$

Проводя преобразования, аналогичные сделанным в первом случае и учитывая, что на основании закона Ома при $\overline{\delta}_{cm} = 0$

$$\overline{\delta}_\gamma = \gamma\,\overline{\mathrm{E}},$$

получим следующую связь между направлением линий тока на границе раздела двух сред:

$$\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \qquad (2.46)$$

4. Граничные условия электродинамики на поверхности идеального проводника.

Идеальный проводник - это среда, проводимость которой бесконечно велика. Многие металлы по свойствам близки к идеальным проводникам. Внутри идеального проводника электрическое и магнитное поля не существуют. Это можно объяснить следующим образом. Допустим, что внутри идеального проводника существует электрическое поле. Тогда в нем возникает бесконечно большой ток и как следствие - бесконечно большое магнитное поле. Это поле обладает бесконечно большой энергией, что противоречит физическому смыслу. Поэтому наше допущение о существовании электрического и магнитного поля внутри идеального проводника неверно.

Если обозначить идеальный проводник как среду I, то в граничных условиях (2.39) – (2.42) для электрического и магнитного поля

$$\overline{\mathrm{E}}_{t1} = D_{n1} = \overline{\mathrm{H}}_{t1} = \mathrm{B}_{n1} = 0$$

и они примут следующий вид, если опустить индекс второй среды:

$$\overline{\mathrm{H}}_t = \left[\overline{\delta}_s\ \overline{n}_0\right], \tag{2.47}$$

$$\overline{\mathrm{E}}_t = 0, \tag{2.48}$$

$$\mathrm{B}_n = 0, \tag{2.49}$$

$$D_n = \sigma. \tag{2.50}$$

Мы получили граничные условия для поля в среде и у поверхности идеального проводника. Из них видно, что у поверхности идеального проводника силовые линии электрического поля перпендикулярны к поверхности, а магнитного поля - направлены по касательной (рис.2.13).

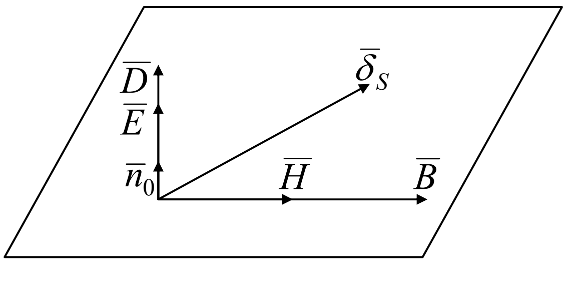


Рис. 2.13. Граничные условия на поверхности идеального проводника

2.4. Основные теоремы электродинамики

2.4.1. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга. Вектор Пойнтинга

Электромагнитное поле представляет собой материальный процесс, происходящий в пространстве. Этот процесс неизбежно связан с затратами и переносом энергии. Теорема Умова-Пойнтинга описывает закон сохранения энергии в случае электромагнитного поля.

В том случае, если в некоторой области пространства имеются сторонние силы, то их энергия непосредственно не может перейти в энергию электромагнитного поля. Связующим элементом являются электрические заряды. Под действием сторонних сил электрические заряды начинают двигаться, появляется сторонний ток и в окружающем пространстве начинаются электромагнитные процессы, связанные, в свою очередь, с другими явлениями, в частности, с тепловыми.

В дифференциальной форме теорему Умова-Пойнтинга можно записать в следующем виде:

$$p_{ст} = \overline{\mathrm{E}}_{ст}\overline{\delta} = \frac{\overline{\delta}^2}{\gamma} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a \overline{\mathrm{E}}^2}{2} + \frac{\mu_a \overline{\mathrm{H}}^2}{2}\right) + div\left[\overline{\mathrm{E}} \cdot \overline{\mathrm{H}}\right] =$$

$$= p_t + \frac{\partial w_e}{\partial t} + \frac{\partial w_м}{\partial t} + div\,\overline{p}, \qquad (2.51)$$

т.е. в каждой точке пространства мощность сторонних сил $p_{ст}$ расходуется на тепловые потери p_t, на увеличение энергии электрического w_e и магнитного $w_м$ полей и на мощность, уходящую из данной точки пространства $div\,\overline{p}$.

В интегральной форме теорема имеет вид:

$$\mathrm{P}_{ст} = \int\limits_V \overline{\mathrm{E}}_{ст}\overline{\delta}dV = \int\limits_V \frac{\overline{\delta}^2}{\gamma}dV + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{\varepsilon_a\overline{\mathrm{E}}^2}{2}dV + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{\mu_a\overline{\mathrm{H}}^2}{2}dV + \oint\limits_S\left[\overline{\mathrm{E}} \cdot \overline{\mathrm{H}}\right] d\overline{S} =$$

$$= P_t + \frac{\partial}{\partial t}W_e + \frac{\partial}{\partial t}W_м + \mathrm{P}_\Sigma, \qquad (2.52)$$

т.е. мощность сторонних сил, затрачиваемая в объеме $P_{ст}$, расходуется на тепловые потери за счет токов проводимости P_t, на увеличение энергии электрического W_e и магнитного $W_м$ полей, запасенных в этом объеме, а также излучается за пределы объема в вида мощности излучения P_Σ.

Входящие в выражения (2.51) и (2.52) слагаемые определяются следующим образом:

$p_{ст} = \overline{E}_{ст}\overline{\delta}$ - удельная объемная мощность сторонних сил;

$p_t = \dfrac{\overline{\delta}^2}{\gamma}$ - плотность мощности тепловых потерь (зависит только от тока и проводимости среды, поэтому представляет собой удельную объемную мощность, расходуемую токами проводимости на тепло);

$w_e = \dfrac{\varepsilon_a \overline{E}^2}{2}$ - плотность энергии электрического поля;

$w_м = \dfrac{\mu_a \overline{H}^2}{2}$ - плотность энергии магнитного поля;

$\dfrac{\partial w_e}{\partial t} + \dfrac{\partial w_м}{\partial t}$ - эти слагаемые представляют собой скорость увеличения энергии электрического и магнитного полей <u>в точке</u>, т.е. мощность, затрачиваемую сторонними силами, на создание поля <u>в точке</u>;

$P_t = \int\limits_V \dfrac{\overline{\delta}^2}{\gamma} dV = \int\limits_V p_t dV$ - мощность тепловых потерь <u>в объеме;</u>

$P_{ст} = \int\limits_V \overline{E}_{ст}\overline{\delta}\ dV = \int\limits_V p_{ст} dV$ -мощность сторонних сил, расходуемая <u>в объеме;</u>

$W_e = \int\limits_V \dfrac{\varepsilon_a \overline{E}^2}{2}\ dV = \int\limits_V w_e\ dV$ - энергия электрического поля;

$W_м = \int\limits_V \dfrac{\mu_a \overline{H}^2}{2}\ dV = \int\limits_V w_м\ dV$ - энергия магнитного поля;

$\dfrac{\partial W_e}{\partial t} + \dfrac{\partial W_м}{\partial t}$ - эти слагаемые представляют собой скорость увеличения энергии электрического и магнитного полей <u>в объеме</u> V;

$P_\Sigma = \oint\limits_S \left[\overline{E} \cdot \overline{H}\right] d\overline{S} = \oint\limits_S \overline{p} d\overline{S}$ - мощность излучения или поток мощности через поверхность S (представляет собой мощность, связанную с поверхностью, ограничивающую данный объем V);

$\overline{p} = \left[\overline{E} \cdot \overline{H}\right]$ - вектор Пойнтинга.

Вектор Пойнтинга

$$\overline{p} = \left[\overline{E} \cdot \overline{H}\right], \quad \frac{Вт}{м^2}$$

всегда перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ (рис.2.14), и показывает направление перемещения энергии поля, проходящей в единицу времени через единичную площадку, поставленную перпендикулярно направлению движения волны. Направление его определяется по правилу векторного произведения (т.е. поступательным движением правого винта при вращении его от первого сомножителя ко второму по кратчайшему пути).

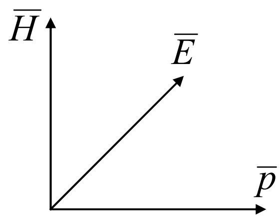


Рис. 2.14. Вектор Пойнтинга

На практике применяют усредненный за период электромагнитного колебания вектор Пойнтинга. В результате векторного перемножения монохроматического поля $\overline{E}$ и $\overline{H}$ (монохроматическое поле характеризуется постоянной частотой ω, фазой φ и векторными амплитудами $\overline{E}_m$ и $\overline{H}_m$)

$$\overline{E} = \overline{E}_m \cos\left(\omega t + \varphi_E\right),$$
$$\overline{H} = \overline{H}_m \cos\left(\omega t + \varphi_H\right),$$

здесь φ_E и φ_H -начальные фазы полей $\overline{E}$ и $\overline{H}$, получаем

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\left[\overline{E}_m \cdot \overline{H}_m\right]\left\{\cos\left(2\omega t + \varphi_E + \varphi_H\right) + \cos\left(\varphi_E - \varphi_H\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\overline{E}_m \cdot \overline{H}_m\right]\cos\left(2\omega t + \varphi_E + \varphi_H\right) + \frac{1}{2}\left[\overline{E}_m \cdot \overline{H}_m\right]\cos\left(\varphi_E - \varphi_H\right) = \overline{p}_r + \overline{p}_{cp}.$$

Оказывается, вектор Пойнтинга в случае монохроматических полей, меняющихся по гармоническому закону во времени, состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое $\overline{p}_r$, зависящее от времени, меняется с удвоенной частотой и дважды за период меняет направление (рис. 2.15).

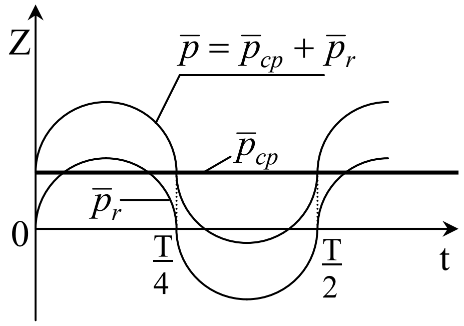


Рис.2.15. Зависимость вектора Пойнтинга от времени

Оно определяет поэтому плотность мощности, колеблющейся в окрестности точки наблюдения и не уходящей от этой точки, т.е. представляет собой реактивную, колеблющуюся часть удельной мощности поля. Второе слагаемое $\overline{p}_{cp}$, не зависящее от времени, в любой момент времени имеет одно и то же направление и определяет плотность потока мощности, движущейся в одну сторону, т.е. характеризует усредненную по времени часть удельной мощности. Средний во времени поток мощности у данной точки определяется только вторым слагаемым, которое представляет собою среднее за период значение вектора Пойнтинга:

$$\overline{p}_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{p}dt = \frac{1}{2}[\overline{\mathrm{E}}_m \cdot \overline{\mathrm{H}}_m]\cos(\varphi_E - \varphi_H), \quad \frac{Вт}{м^2}. \tag{2.53}$$

Комплексный вектор, определяемый соотношением

$$\dot{\overline{p}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\overline{E}}_m \cdot \overset{*}{\overline{H}}\right] = \frac{1}{2}\left[\dot{\overline{E}}_m \cdot \overset{*}{\overline{H}}_m\right],$$

называется комплексным вектором Пойнтинга. Здесь $\overset{*}{\overline{H}}$ – комплексно сопряженный вектор, у которого знак при мнимой части $\dot{\overline{H}}$ изменен.

Мнимая часть вектора $\dot{\overline{p}}$ эквивалентна реактивной мощности в теории цепей и не имеет четкого физического смысла.

Величина $\overline{p}_{cp}$ зависит от взаимного сдвига по фазе полей $\overline{E}$ и $\overline{H} - (\varphi_E - \varphi_H)$ в одной и той же точке пространства. Когда $(\varphi_E - \varphi_H) = 0$, поток энергии максимален, при $(\varphi_E - \varphi_H) = 90^0$, поток энергии отсутствует.

Если поля записаны в комплексной форме, то усредненный за период вектор Пойнтинга равен

$$\overline{p}_{cp} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\overline{E}} \cdot \overset{*}{\overline{H}}] = \frac{1}{2}[\overline{E}_m \cdot \overline{H}_m]\cos(\varphi_E - \varphi_H).$$

2.4.2. Теорема единственности решения основных уравнений электродинамики

Уравнения электродинамики представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных, поэтому они имеют бесконечное количество линейно независимых частных решений. При решении определенной задачи по нахождению электромагнитного поля, которое соответствует поставленным условиям, необходимо знать, каким минимальным условиям должно удовлетворять частное решение уравнений электродинамики для того, чтобы оно было единственно верным решением. Ответ на этот вопрос дает теорема единственности решения. Эта теорема важна с той точки зрения, что если мы нашли каким - либо способом электромагнитное поле, являющееся решением данной задачи и удовлетворяющее теореме единственности, то мы можем быть уверены в том, что оно, реально и другого решения быть не может.

Теорема единственности имеет физический смысл в том случае, если рассматривается ограниченная область пространства и дополняются, соответственно, уравнения электродинамики граничными условиями на границах области. Это связано с тем, что нашему наблюдению доступна только ограниченная часть пространства, и, следовательно, мы не можем определить напряженность поля во всем безграничном пространстве.

Все задачи, которые приходится решать в теории электромагнитного поля, можно разделить на два типа: внутренние и внешние.

Внутренняя краевая задача: имеется некоторая область пространства, ограниченная поверхностью S. Внутри области заданы сторонние токи (источники поля), а на поверхности (границе области) - касательная составляющая $\overline{E}_t$ вектора напряженности электрического или $\overline{H}_t$ магнитного поля (рис.2.16).

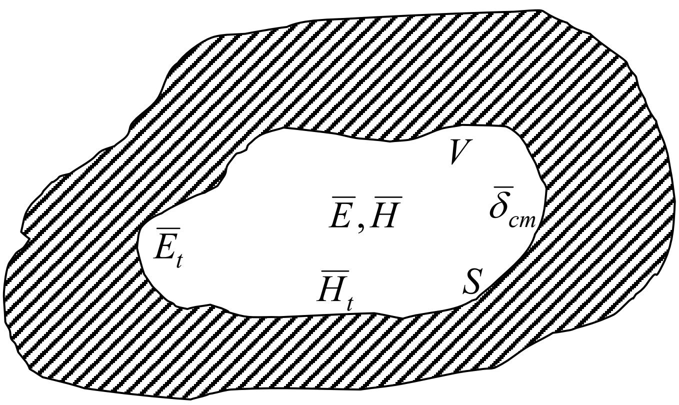


Рис. 2. 16. Внутренняя задача электродинамики

Требуется найти поле в данной области, удовлетворяющее уравнениям электродинамики и поставленным условиям. Примером внутренней задачи может служить задача по определению поля внутри объемного резонатора.

Внешняя краевая задача: требуется найти поле в безграничном пространстве, окружающем некоторую поверхность S . В пространстве заданы сторонние токи (источники поля), а на поверхности – касательная составляющая вектора напряженности электрического или магнитного поля (рис.2.17).

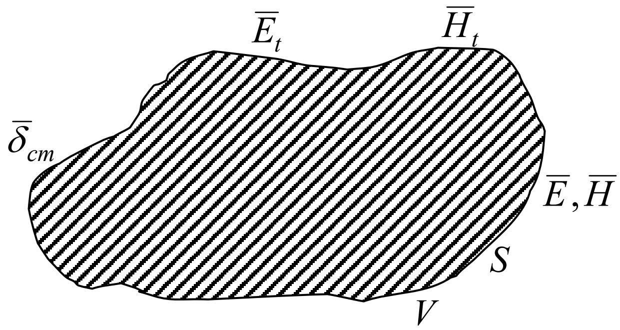


Рис. 2.17. Внешняя задача электродинамики

Сформулируем теорему единственности для монохроматического поля в среде с потерями.

Теорема единственности для внутренней задачи. Для того чтобы решение уравнений электродинамики в области, ограниченной поверхностью S, было единственным, необходимо задать на этой поверхности касательные составляющие векторов напряженности электрического или магнитного поля, т.е. задать граничные условия.

Теорема единственности для внешней задачи. Для того чтобы решение уравнений электродинамики было единственным в бесконечном пространстве, окружающем поверхность S , необходимо задать на этой поверхности касательные составляющие векторов напряженности электрического или магнитного полей, т.е. задать граничные условия. Кроме того, сторонние токи (источники поля) должны находиться на конечном расстоянии, а в бесконечности поле с увеличением расстояния должно убывать быстрее, чем $\frac{1}{r}$, где r - расстояние от фиксированной точки.

2.4.3. Принцип двойственности

Рассмотрим электромагнитное поле в области V , ограниченной некоторой поверхностью S. Будем считать, что в этой области нет сторонних токов и зарядов, что заданы начальные и граничные условия и что проводимость среды равна нулю.

При таких условиях уравнения электродинамики (2.16), (2.19), (2.21), (2.23) можно записать в следующем виде:

$$rot\,\overline{H} = \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial t};$$

$$rot\,\overline{E} = -\mu_a \cdot \frac{\partial \overline{H}}{\partial t};$$

$$div\,\overline{H} = 0;$$

$$div\,\overline{E} = 0.$$

Эта система уравнений остается неизменной, если в ней заменить вектор $\overline{H}$ на вектор $\overline{E}$, а вектор $\overline{E}$ на вектор $\overline{H}$, диэлектрическую проницаемость ε_a на магнитную проницаемость с обратным знаком $-\mu_a$ и $-\mu_a$ на ε_a .

Указанную перестановку можно написать следующим образом;

$$\overline{E} \rightleftarrows \overline{H}; \quad \varepsilon_a \rightleftarrows -\mu_a .$$

Рассмотренное свойство уравнений электродинамики носит название <u>свойства перестановочной двойственности</u> этих уравнений.

Свойство перестановочной двойственности лежит в основе принципа двойственности, позволяющего при определенных условиях выразить решение одной электродинамической задачи через решение другой, без необходимости заново решать систему уравнений электродинамики.

Принцип двойственности заключается в следующем.

Пусть нам известно решение граничной задачи электродинамики в некоторой области V при указанных в начале условиях для уравнений.

Если в этом решении произвести перестановку в соответствии со свойством перестановочной двойственности $\overline{E} \rightleftarrows \overline{H}$ и $\varepsilon_a \rightleftarrows -\mu_a$, то полученные выражения будут также решениями уравнений электродинамики ввиду их свойств перестановочной двойственности. Однако это новое решение на поверхности S будет удовлетворять новым граничным условиям, которые получаются из старых путем той же самой перестановки.

2.4.4. Теорема взаимности

Теорема взаимности существенно помогает при решении различных задач электродинамики. В частности, в теории и технике антенн, как правило, исследуются и определяются характеристики передающих антенн, а свойства и характеристики приемных антенн определяются с помощью теоремы взаимности через свойства и характеристики этих антенн как передающих.

Теорема взаимности заключается в том, что условия передачи из одной области в другую совершенно такие же, как и в обратном направлении, независимо от свойств окружающей среды, если она изотропна и линейна.

Теорему взаимности можно распространить на любую антенну и записать ее следующим образом:

$$\frac{\dot{J}_1}{\dot{e}_{21}} = \frac{\dot{J}_2}{\dot{e}_{12}},$$

где $\dot{e}_{12}$ - э.д.с., наводимая в антенне 1 током $\dot{J}_2$, протекающим в антенне 2;

$\dot{e}_{21}$ - э.д.с. , наводимая в антенне 2 током $\dot{J}_1$, протекающим в антенне 1.

Таким образом, теорема взаимности для двух антенн заключается в следующем: если первая антенна работает как передающая и в ней протекает ток $\dot{J}_1$,то во второй антенне, работающей как приемная, наводится такая же э.д.с., какая будет наведена в первой антенне, если ток $\dot{J}_1$ будет протекать во второй антенне.

2.4.5. Электродинамические потенциалы и волновые уравнения

Уравнения электродинамики (2.28) и (2.29) не всегда удобны для определения полей. Это связано с тем, что в каждое из них входит и электрическое и магнитное поле и для определения этих полей необходимо решать систему уравнений. Поэтому используются вспомогательные уравнения и понятия, облегчающие решение задач по определению полей. К ним относятся волновые уравнения и электродинамические потенциалы.

Рассмотрим уравнения электродинамики в комплексной форме в однородной среде без свободных зарядов $(\rho = 0)$. Примером такой среды может служить вакуум, воздух, диэлектрик.

В этом случае объемная плотность тока $\bar{\delta} = 0$, т.к. $\bar{\delta} = \rho\bar{\upsilon}$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$rot\,\dot{\bar{H}} = j\omega\,\dot{\bar{D}} \quad ; \tag{2.54}$$

$$rot\,\dot{\bar{E}} = -j\omega\,\dot{\bar{B}} \quad . \tag{2.55}$$

В каждое из уравнений электродинамики (2.54) и (2.55) входит напряженность и электрического, и магнитного поля. Получим из этой системы уравнений уравнения, содержащие только по одному полю. Для этого возьмем ротор от первого уравнения:

$$rot\, rot\, \dot{\overline{H}} = j\omega\, \dot{\varepsilon}_a rot\, \dot{\overline{E}}.$$

Используя в левой части уравнения теорему о роторе ротора (1.15), а в правой - второе уравнение электродинамики, получим соотношение :

$$grad\ div\, \dot{\overline{H}} - \nabla^2 \dot{\overline{H}} = \omega^2 \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\overline{H}},$$

где ∇^2 - квадрат оператора Гамильтона или оператор Лапласа;

$\dot{\varepsilon}_a$, $\dot{\mu}_a$ – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Учитывая, что $div\, \dot{\overline{H}} = 0$ и что

$$\dot{k}^2 = \omega^2 \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a, \tag{2.56}$$

где $\dot{k}$ - комплексный коэффициент распространения, получим однородное волновое уравнение для магнитного поля:

$$\nabla^2 \dot{\overline{H}} + \dot{k}^2 \dot{\overline{H}} = 0. \tag{2.57}$$

Отметим, что комплексный коэффициент распространения определяется также следующей формулой

$$\dot{k} = \beta - j\alpha, \tag{2.58}$$

где β - коэффициент фазы, рад/м;

α - коэффициент затухания, Неп/м.

Проделав аналогичные преобразования со вторым уравнением электродинамики, получим однородное волновое уравнение для электрического поля:

$$\nabla^2 \dot{\overline{E}} + \dot{k}^2 \dot{\overline{E}} = 0. \tag{2.59}$$

В отличие от уравнений электродинамики волновые уравнения являются уравнениями второго порядка. Полученные уравнения содержат в себе только одно неизвестное поле и называются однородными, так как их правая часть равна нулю. Решениями этих уравнений являются волны (т.к. в комплексный коэффициент распространения $\dot{k}$ входит коэффициент фазы β, который определяет набег фазы бегущей волны на единицу длины).

Для определения взаимосвязанных векторов $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\mathrm{H}}$ использование только волновых уравнений недостаточно. Нельзя найти из одного волнового уравнения электрическое поле, из другого – магнитное так, чтобы установить связь между этими полями, не используя систему уравнений электродинамики. Если электрическое или магнитное поле найдено из волнового уравнения, то второе поле необходимо определять по найденному с помощью первого или второго уравнения электродинамики.

Непосредственное определение векторов поля из уравнений электродинамики или из полученных однородных волновых уравнений в ряде случаев является <u>весьма сложной задачей.</u> Эта задача становится особенно трудной, если требуется найти поле, созданное сторонними токами или зарядами. В то же время эта задача имеет большое практическое значение, так как электромагнитные поля в реальных системах всегда создаются токами (или зарядами), например, поле антенны; поле, созданное в волноводе или резонаторе и т.д. Трудность определения непосредственно векторов поля объясняется тем, что они входят в качестве неизвестных в систему дифференциальных уравнений и тем, что векторы поля являются суммой трех проекций, каждая из которых есть неизвестная функция.

Для облегчения решения задачи по определению полей в электродинамике вводятся вспомогательные функции, которые носят название электродинамических потенциалов. Введение потенциалов, как будет видно ниже, упрощает решение электродинамических задач, так как решение дифференциальных уравнений в этом случае сводится к определению либо скалярной функции, либо (в ряде задач) векторной функции, <u>имеющей меньшее число проекций</u>, чем искомое поле.

Сравним третье уравнение электродинамики

$$div\,\dot{\overline{B}} = div\,\dot{\mu}_a \dot{\overline{H}} = 0$$

с известной теоремой векторного анализа

$$div\,rot\,\dot{\overline{A}} = 0,$$

согласно которой поле вихрей векторной функции не имеет источников.

На основании сравнения можно считать, что индукция магнитного поля $\dot{\overline{B}} = \dot{\mu}_a \dot{\overline{H}}$ представляет собой поле вихрей некоторого вектора $\dot{\overline{A}}$, который называется <u>векторным электродинамическим потенциалом.</u>

Таким образом,

$$\dot{\mu}_a \dot{\overline{H}} = rot\,\overline{A} \qquad (2.60)$$

и

$$\dot{\overline{B}} = rot\,\dot{\overline{A}}.$$

Подставим соотношение (2.60) в уравнение (2.55). При этом получим следующее выражение:

$$rot\left(\dot{\overline{E}} + j\omega\,\dot{\overline{A}}\right) = 0 \quad .$$

Сравним его с известной теоремой векторного анализа

$$rot\ grad\ \dot{\varphi} = 0,$$

согласно которой поле градиентов скалярной функции $\dot{\varphi}$ является безвихревым. На основании сравнения можно считать, что

$$\dot{\overline{E}} + j\omega \dot{\overline{A}} = -grad\ \dot{\varphi}.$$

Из последнего выражения получим соотношение для напряженности электрического поля:

$$\dot{\overline{E}} = -\left(j\omega \dot{\overline{A}} + grad\ \dot{\varphi} \right), \tag{2.6I}$$

где функция $\dot{\varphi}$ называется скалярным электродинамическим потенциалом.

Таким образом, с помощью формул (2.60) и (2.61) мы выразили напряженности электрического и магнитного поля через электродинамические потенциалы.

Векторный и скалярный потенциалы находятся из неоднородных волновых уравнений для потенциалов (уравнений Даламбера).

Векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \dot{\overline{A}} + \dot{k}^2 \dot{\overline{A}} = -\dot{\mu}_a \dot{\overline{\delta}}_{cm}, \tag{2.62}$$

которое называется неоднородным волновым уравнением (уравнением Даламбера) для векторного электродинамического потенциала.

Неоднородное волновое уравнение (уравнение Даламбера) для скалярного электродинамического потенциала:

$$\nabla^2 \dot{\varphi} + \dot{k}^2 \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\rho}_{cm}}{\dot{\varepsilon}_a}. \tag{2.63}$$

Приведенные неоднородные волновые уравнения позволяют найти электромагнитное поле, если заданы токи или заряды. Если заданы токи, то из уравнения (2.62) определяется векторный потенциал $\dot{\overline{A}}$, затем из уравнения связи

$$div\ \dot{\overline{A}} = -j\omega \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\varphi}\ -$$

- скалярный потенциал и далее из уравнения (2.61) и (2.60) - векторы поля $\dot{\overline{E}}$ и $\dot{\overline{H}}$.

2.5. Вопросы для самопроверки

Первый уровень обученности

1. В чем заключается суть макроскопического подхода в теории электромагнитного поля?
2. Какие виды распределения зарядов и токов Вы знаете?
3. Какие заряды называются точечными?
4. Что послужило основанием для введения понятия элемента тока?
5. Назовите основные векторы электромагнитного поля. Запишите формулы для их определения.
6. Изложите основные принципы графического построения картин поля.
7. В чем отличие свободных зарядов от связанных?
8. Какие векторы электромагнитного поля зависят от параметров среды, а какие не зависят?
9. В чем суть явлений, называемых поляризацией и намагничиванием среды?
10. Запишите уравнения, связывающие векторы электромагнитного поля с параметрами среды.
11. Каким образом различают виды сред в зависимости от свойств параметров среды?
12. Какие среды называются анизотропными?
13. В чем различие между системами уравнений электродинамики, записанными в общем виде и в комплексной форме?
14. В чем разница между дифференциальной и интегральной формами уравнений электродинамики?
15. Дайте определение переменного электромагнитного поля. Запишите полную систему уравнений электродинамики в интегральной и дифференциальной формах. Поясните физический смысл уравнений.
16. В чем заключается физический смысл тока смещения?
17. Чем объяснить, что во втором уравнении электродинамики в отличие от первого, поставлен знак минус?
18. Каковы ограничения на применение уравнений электродинамики?
19. Какая среда называется диэлектриком, а какая проводником?
20. Какие токи существуют в вакууме, где потери отсутствуют?
21. Перечислите граничные условия на границе раздела двух сред. Какой вид принимают граничные условия, если вторая среда является идеальным проводником?
22. Какое поле существует внутри идеального проводника?
23. Каким образом направлены силовые линии электрического и магнитного полей у поверхности идеального проводника?
24. Прокомментируйте теорему Умова-Пойнтинга, записанную в дифференциальной и интегральной формах.

25. Дайте определение вектора Пойнтинга. Укажите его размерность.
26. Как определяется направление вектора Пойнтинга?
27. Выведите формулу для усредненного за период вектора Пойнтинга.
28. Как определяется комплексный вектор Пойнтинга?
29. Сформулируйте теорему единственности решения основных уравнений электродинамики.
30. В чем заключается принцип двойственности?
31. Запишите волновые уравнения и выражения для электродинамических потенциалов. Поясните их применение.
32. В чем заключаются основные отличия волновых уравнений от уравнений электродинамики?
33. Запишите уравнения для электродинамических потенциалов. Поясните их.

Второй уровень обученности

34. Как определяется сила тока в случае, если ток меняется во времени?
35. Чем объяснить, что напряженность электрического поля и индукция магнитного поля зависят от параметров среды?
36. Почему суммарное поле в среде отличается от поля в вакууме?
37. Чем объясняются свойства ферромагнитных веществ?
38. Можно ли утверждать, что при постоянном токе электромагнитная энергия передается по проводам?
39. Чем объяснить, что показания вольтметра в переменном электромагнитном поле зависят от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения?
40. Почему закон о потоке вектора электрической индукции справедлив только для свободных зарядов?
41. Как и почему меняются диэлектрические свойства сред при увеличении частоты?
42. Получите из уравнений электродинамики волновые уравнения.
43. Возможно ли использование для определения векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ только волновых уравнений?
44. Какова последовательность определения поля с использованием электродинамических потенциалов?

3. СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

3.1. Электростатика

Электростатическим полем называется электрическое поле неподвижных неизменных зарядов, не изменяющихся во времени. Рассмотрение свойств статических полей необходимо не только потому, что эти поля широко используются на практике, но и потому, что многие электродинамические задачи могут быть решены методами статики.

3.1.1. Система уравнений электростатики. Скалярный электростатический потенциал и его определение

Рассмотрим основные уравнения электродинамики (2.16), (2.19), (2.21), (2.23) и материальное уравнение (2.12):

$$rot\ \overline{H} = \overline{\delta} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t};$$

$$rot\ \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t};$$

$$div\ \overline{B} = 0;$$

$$div\ \overline{D} = \rho;$$

$$\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E},$$

при условии, что входящие в них величины не зависят от времени. В этом случае связь между электрическим и магнитным полями разрывается, и мы сможем выделить следующую систему уравнений электростатики в дифференциальной форме, описывающую свойства статического электрического поля:

$$rot\ \overline{E} = 0; \tag{3.1}$$

$$div\ \overline{D} = \rho; \tag{3.2}$$

$$\overline{D} = \varepsilon_a \overline{E}. \tag{3.3}$$

Этим уравнениям соответствуют следующие уравнения в интегральной форме:

$$\oint_{\ell} \overline{E}\, d\overline{l} = 0; \tag{3.4}$$

$$\oint_{S} \overline{D}\, d\overline{S} = \int_{V} \rho\, dV. \tag{3.5}$$

Первое уравнение электростатики является следствием из закона электромагнитной индукции, а второе - теоремой о потоке вектора электрической индукции.

Из уравнений (3.1) и (3.2) вытекает, что электростатическое поле является безвихревым. Электростатическое поле является потенциальным. Потенциальное поле - это поле, в котором величина линейного интеграла

$$\int_B^A \overline{E}d\overline{l}$$

вдоль некоторого пути зависит только от положения начальной и конечной точек А и В и не зависит от формы пути.

Скалярный электростатический потенциал φ является частным случаем скалярного электродинамического потенциала

$$\dot{\overline{E}} = -\left(j\omega \dot{\overline{A}} + grad\ \dot{\varphi} \right)$$

при частоте $\omega = 0$, т.е. для постоянных полей:

$$\overline{E} = -grad\ \varphi\ . \qquad (3.6)$$

Знак минус означает, что вектор $\overline{E}$ направлен в сторону уменьшения потенциала. Поясним назначение знака минус.

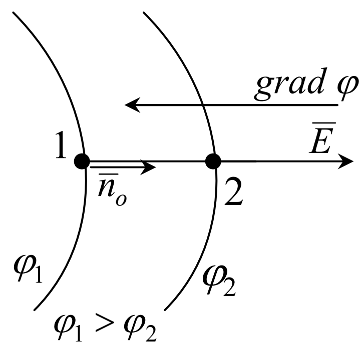


Рис. 3.1. Назначение знака минус в выражении, связывающим скалярный потенциал с вектором напряженности электрического поля

На рис. 3.1 изображены отрезки двух весьма близко расположенных эквипотенциалей. Одна из них имеет потенциал φ_1 , другая - φ_2. Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$. Тогда в соответствии с определением градиента (подраздел 1.3) изобразим его на рис. 3.1 вектором, перпендикулярным эквипотенциальным линиям, направленным от φ_2 к φ_1 (в сторону увеличения потенциала). Напряженность электрического поля направлена от более высокого потенциала (φ_1) к более низкому (φ_2). Следовательно, знак минус означает, что направление вектора $\overline{E}$ и направление *grad φ* противоположны (рис. 3.1).

Связь между потенциалом и зарядами устанавливается уравнением, вытекающим из скалярного уравнения Даламбера (2.63):

$$\nabla^2\dot{\varphi} + \dot{k}^2\dot{\varphi} = -\frac{\dot{\rho}_{cm}}{\dot{\varepsilon}_a}.$$

При ω = 0 коэффициент распространения $\dot{k} = 0$ и мы получим скалярное уравнение для определения потенциала:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \quad . \tag{3.7}$$

Полученное выражение носит название скалярного уравнения Пуассона. Таким образом, мы получили дифференциальные соотношения, определяющие потенциал, если известны заряды, и определяющие напряженность электрического поля через потенциал.

Часто бывает необходимо определить потенциал поля в данной точке, если известна напряженность поля. В этом случае можно воспользоваться следующей формулой

$$\varphi = \int_M^0 \overline{E}\,d\bar{l} \quad .$$

Исходя из последней формулы можно дать следующее определение для скалярного потенциала: скалярный потенциал в произвольной точке М представляет собой линейный интеграл от вектора напряженности электрического поля $\overline{E}$, взятый от точки М до некоторой точки 0 , принятой за начало отсчета потенциала. Так как электростатическое поле потенциально, то потенциал поля зависит от координаты точки и не зависит от формы пути интегрирования. Последнее выражение позволяет выяснить физический смысл потенциала. Поскольку напряженность электрического поля равна силе, с которой поле действует на единичный положительный заряд, то произведение $\overline{E}d\bar{l}$, стоящее под знаком интеграла, равно работе, совершаемой полем по перемещению этого заряда на пути $d\bar{l}$.

Следовательно, потенциал поля в точке М равен работе, которую совершит поле при переносе единичного положительного точечного заряда из точки М в точку О , принятую за начало отсчета потенциала.

С понятием потенциала тесно связано понятие электрического напряжения между двумя точками. Электрическим напряжением или просто напряжением между двумя точками А и В называется разность потенциалов между этими точками:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^O \overline{E}d\bar{l} - \int_B^O \overline{E}\,d\bar{l} = \int_A^B \overline{E}\,d\bar{l} \ , \ \text{В}.$$

Для того чтобы определить потенциал поля, если заданы заряды, необходимо решить дифференциальное уравнение Пуассона, в котором под знак оператора Лапласа входит неизвестный потенциал.

Решение уравнения Пуассона имеет следующий вид:

в объеме V с объемной плотностью ρ

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_V \frac{\rho}{r} dV; \tag{3.8}$$

на поверхности S с поверхностной плотностью σ

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_S \frac{\sigma}{r} dS; \tag{3.9}$$

на линии l с линейной плотностью заряда τ

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_l \frac{\tau}{r} dl; \tag{3.10}$$

в случае точечных зарядов

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad , \tag{3.11}$$

где r – расстояние от элементарных зарядов до точки, где ищется поле;
q_i – i-й точечный заряд.

Таким образом, при заданном распределении зарядов в однородной среде напряженность электрического поля может быть вычислена при помощи потенциала следующим образом: определяется потенциал поля в данной точке при помощи формул (3.8) – (3.11), и затем вычисляется напряженность поля по формуле (3.6).

Уравнение Пуассона и его решение позволяют определить поле как в точках, где расположены заряды, так и в тех точках, где зарядов нет.

В тех точках однородной среды, где нет зарядов $(\rho = 0)$, в уравнении Пуассона (3.7) правая часть становится равной нулю, и это уравнение принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi = 0 . \tag{3.12}$$

Полученное уравнение называется <u>скалярным уравнением Лапласа</u> и представляет собой однородное статическое уравнение.

Таким образом, оператор Лапласа от потенциала электростатического поля в однородной среде без зарядов равен нулю. Поле, созданное электрическими зарядами, удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, где нет зарядов.

Как уже отмечалось (подраздел 1.3), при анализе и графическом построении полей широко используется понятие поверхностей равного потенциала. Напомним, что <u>поверхностью равного потенциала</u> (в случае скалярного поля электростатического потенциала φ эти поверхности называются эквипотенциальными) называется поверхность, на которой потенциал сохраняет неизменное значение. Аналитически уравнение поверхности равного потенциала получается приравниванием потенциала постоянной величине:

$$\varphi(x, y, z) = const.$$

Поверхность равного потенциала всегда перпендикулярна электрическим силовым линиям, потому что только в этом случае перемещение заряда по поверхности не связано с работой поля:

$$\overline{E}d\overline{l} = 0,$$

где $d\overline{l}$ - элемент пути по поверхности равного потенциала и, следовательно, все точки этой поверхности находятся под одинаковым потенциалом.

В случае, например, точечного заряда поверхности равного потенциала являются сферами (рис. 1.4).

3.1.2. Граничные условия электростатики

Граничные условия электростатики представляют собой частный случай граничных условий электродинамики для полей, не зависящих от времени. Поэтому на границе раздела двух сред напряженность и индукция электростатического поля связаны между собой теми же соотношениями (2.40) и (2.42), что и в случае переменных полей, так как в граничные условия зависимость от времени не входит.

Приведем эти соотношения:

$$\overline{E}_{t2} - \overline{E}_{t1} = 0, \tag{3.13}$$

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma. \tag{3.14}$$

Если на границе раздела нет поверхностных зарядов (σ = 0), то граничные условия упрощаются и принимают вид:

$$\overline{E}_{t2} = \overline{E}_{t1},$$

$$D_{n2} = D_{n1},$$

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}} .$$

3.1.3. Емкость. Энергия электростатического поля

Чем больший заряд нужно сообщить проводнику, тем больше емкость проводника. Из приведенного выражения следует, что емкость определяется как отношение заряда проводника к его потенциалу:

$$C = \frac{Q}{\varphi},\ \textit{Ф}.$$

Для создания емкости обычно используют систему из двух проводников, заряды которых равны по величине и противоположны по знаку. Такая система называется конденсатором.

В этом случае разность потенциалов U между проводниками будет прямо пропорциональна заряду Q одного из проводников, что аналитически можно записать следующим образом:

$$U = \frac{1}{C}Q, \tag{3.15}$$

откуда коэффициент пропорциональности, называемой емкостью конденсатора, определяется формулой

$$C = \frac{|Q|}{|U|} = \frac{|Q|}{|\varphi_2 - \varphi_1|},\ \text{Ф}\ , \tag{3.16}$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы проводников.

Таким образом, емкость конденсатора - это величина, равная отношению величины заряда одного из проводников к величине разности потенциалов между ними.

Величина емкости системы связана с энергией электрического поля этой системы. Как было показано при рассмотрении теоремы Умова-Пойнтинга, энергия W_e электрического поля во всем объеме, где оно существует, определяется соотношением

$$W_e = \int_V \frac{\varepsilon_{\text{а}} \overline{E}^2}{2} dV. \tag{3.17}$$

Выражение (3.17) можно преобразовать к виду:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_l \oint_S \varepsilon_a \overline{E}^2 d\overline{S} d\bar{l} = \frac{1}{2}\oint_S \overline{D} d\overline{S} \int_l \overline{E} d\bar{l} = \frac{1}{2}Q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{3.18}$$

Из выражения (3.18) с учетом (3.15), (3.16) следует формула для определения энергии поля конденсатора:

$$W_e = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}, \tag{3.19}$$

так как $Q = CU$.

3.1.4. Прямая и обратная задачи электростатики

Задача определения поля по заданным зарядам называется прямой задачей электростатики. При ее решении удобно использовать готовые решения (3.8) - (3.11) уравнения Пуассона, позволяющие сразу найти поле по заданным зарядам.

Обратной задачей электростатики называется задача определения величины зарядов и их распределения в объеме и на поверхностях проводников, если известно поле. Эта задача также решается с помощью уравнения Пуассона (3.7) и граничных условий (3.13) и (3.14). Объемная плотность зарядов в объеме, где имеется поле, определится вытекающей из выражения (3.7) формулой

$$\rho = -\varepsilon_a \nabla^2 \varphi.$$

Таким образом, решение прямой и обратной задачи электростатики не вызывает принципиальных затруднений.

3.2. Стационарное магнитное поле

Стационарным магнитным полем называется магнитное поле постоянного тока. Это поле соответствует режиму установившегося движения зарядов.

3.2.1. Система уравнений стационарного магнитного поля

Законы, которым следует стационарное магнитное поле и уравнения, описывающие эти законы, являются следствиями из уравнений электродинамики при независимости входящих в них величин от времени.

Уравнения стационарного магнитного поля вытекают из 1-го и 3-го уравнений электродинамики и материального уравнения (2.13) и имеют вид:

закон полного тока:

в дифференциальной форме

$$rot\ \overline{H} = \overline{\delta}, \tag{3.20}$$

в интегральной форме

$$\oint\limits_{l} \overline{H} d\overline{l} = \int\limits_{s} \overline{\delta} d\overline{S}; \tag{3.21}$$

закон непрерывности магнитного поля:

в дифференциальной форме

$$div\ \overline{B} = 0, \tag{3.22}$$

в интегральной форме

$$\oint \overline{B} d\overline{S} = 0; \tag{3.23}$$

материальное уравнение

$$\overline{B} = \mu_a \overline{H}. \tag{3.24}$$

Из приведенных, уравнений следует, что в отличие от электростатического поля стационарное магнитное поле является вихревым.

3.2.2. Прямая задача стационарного магнитного поля. Векторный потенциал магнитного поля

Аналогично прямой задаче электростатики прямая задача стационарного магнитного поля, имеющая практически важное значение, заключается в том, что по известной величине тока и его распределению требуется найти магнитное поле. Наиболее просто эта задача решается при помощи потенциалов стационарного магнитного поля. Векторный потенциал магнитного поля является частным случаем векторного электродинамического потенциала, определенного ранее, при частоте ω = 0 :

$$\overline{B} = rot\ \dot{\overline{A}}. \tag{3.25}$$

Функция $\dot{\overline{A}}$ называется векторным потенциалом магнитного поля.

Из уравнения связи

$$div\ \dot{\overline{A}} = -j\omega\ \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\varphi}$$

следует, что

$$div\ \dot{\overline{A}} = 0, \tag{3.26}$$

т.е. поле вектора $\dot{\overline{A}}$ является чисто вихревым. Полученное соотношение позволяет однозначно определить векторный потенциал. Векторный потенциал магнитного поля удовлетворяет векторному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \dot{\overline{A}} = -\mu_a \overline{\delta}, \tag{3.27}$$

которое представляет собой частный случай векторного уравнения Даламбера (2.62)

$$\nabla^2 \dot{\overline{A}} + \dot{k}^2 \dot{\overline{A}} = -\mu_a \dot{\overline{\delta}},$$

при частоте колебаний $\omega = 0$.

Решением векторного уравнения Пуассона является соотношение

$$\overline{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int\limits_V \frac{\overline{\delta} dV}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{\overline{d_j}}{r}, \tag{3.28}$$

где интеграл берется по всему объему, в котором протекают токи.

Таким образом, магнитное поле по заданным токам может быть вычислено путем последовательного использования формул (3.28), (3.25) с учетом (3.26).

3.2.3. Граничные условия для стационарного магнитного поля

Граничные условия для стационарного магнитного поля являются частным случаем граничных условий электродинамики для случая, когда все величины не зависят от времени, поэтому на основании соотношений (2.39) и (2.41) получаем следующие граничные условия для стационарного магнитного поля, которые совпадают с граничными условиями электродинамики:

$$\overline{H}_{t_2} - \overline{H}_{t_1} = \left[\overline{\delta}_s \overline{n}_o\right], \tag{3.29}$$

$$B_{n_2} - B_{n_1} = 0, \tag{3.30}$$

поэтому к ним относятся все выводы и замечания, сделанные для граничных условий электродинамики.

3.2.4. Магнитостатика

Магнитостатика изучает поля постоянных магнитов.

В областях, где нет свободных токов $(\overline{\delta}=0)$, уравнения и граничные условия стационарного магнитного поля принимают следующий вид:

$$rot\ \overline{H}=0; \tag{3.31}$$

$$div\ \overline{B}=0; \tag{3.32}$$

$$\overline{B}=\mu_a \overline{H}. \tag{3.33}$$

$$\overline{H}_{t2}-\overline{H}_{t1}=0; \tag{3.34}$$

$$B_{n2}-B_{n1}=0; \tag{3.35}$$

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1}=\frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \tag{3.36}$$

Магнитостатическое поле, т.е. поле в отсутствии постоянных токов описывается уравнениями (3.31), (3.32). В этом случае нет ни источников магнитного поля $(div\ \overline{B}=0)$, ни вихрей $(rot\ \overline{H}=0)$. Поэтому в магнитостатике магнитное поле можно получить лишь за счет намагниченности среды. Намагниченность среды обусловлена молекулярными (атомарными) токами. Каждый электрон, вращаясь вокруг ядра, создает магнитный атомарный (молекулярный) момент. Количество намагниченности среды характеризуется вектором намагниченности $\overline{M}$ (подраздел 2.1.3).

Из уравнений (3.31) и (3.32) видно, что магнитостатическое поле является безвихревым.

Введем понятие скалярного магнитостатического потенциала. Из сравнения уравнения (3.31) с известной из векторного анализа теоремой

$$rot\ grad\ \varphi^M=0$$

можно считать, что магнитное поле $\overline{H}$ является полем градиентов скалярного магнитного потенциала φ^M :

$$\overline{H}=-grad\ \varphi^M. \tag{3.37}$$

Магнитостатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi^M=0. \tag{3.38}$$

В областях пространства, где $\overline{\delta}=0,\ rot\ \overline{H}=0$, магнитное поле можно рассматривать, как потенциальное. В этом случае величина скалярного магнитостатического потенциала не зависит от формы пути, а зависит только от положения точек, как и у скалярного электростатического потенциала.

3.2.5. Индуктивность. Энергия стационарного магнитного поля

Индуктивность является важным электромагнитным параметром электромагнитных систем и электрических цепей. Она определяется путем расчета магнитного поля токов.

Собственная индуктивность контура представляет собой отношение полного магнитного потока к вызвавшему его току:

$$L = \frac{\Phi_{сц}}{J}, \quad Г. \tag{3.39}$$

Полный магнитный поток через поверхность, натянутую на контур с током, называется потокосцеплением:

$$\Phi_{сц} = \int\limits_S \overline{B} d\overline{S}, \; Вб.$$

Потокосцепление катушки индуктивности с плотной намоткой при N витках

$$\Phi_{сц} = N\Phi.$$

Из теоремы Умова-Пойнтинга следует, что энергия, запасенная в магнитном поле, определяется формулой

$$W_м = \int\limits_V \frac{\mu_a \overline{H}^2}{2} dV = \int\limits_V \frac{\overline{B}\overline{H}}{2} dV. \tag{3.40}$$

Выражение (3.40) можно преобразовать к виду

$$W_м = \frac{1}{2}\int\limits_S \oint\limits_l \overline{B}\overline{H} d\overline{S} d\overline{l} = \frac{1}{2}\int\limits_S \overline{B} d\overline{S} \oint\limits_l \overline{H} d\overline{l} = \frac{1}{2}\Phi_{сц} J, \tag{3.41}$$

т.к. согласно закону полного тока

$$\oint\limits_l \overline{H} d\overline{l} = J \; .$$

Из выражения (3.40) и с учетом (3.39) следует формула для энергии поля катушки индуктивности

$$W_м = \frac{LJ^2}{2}. \tag{3.42}$$

3.3. Вопросы для самопроверки

Первый уровень обученности

1. Охарактеризуйте понятие “электростатическое поле”.
2. Запишите систему уравнений электростатики. Поясните физический смысл уравнений, входящих в систему.
3. Какие поля называют потенциальными?
4. Показать, что скалярный электростатический потенциал является частным случаем скалярного электродинамического потенциала.
5. Как определить потенциал поля в данной точке, если известна напряженность поля?
6. В чем заключается физический смысл потенциала?
7. Какой вид имеют решения уравнения Пуассона для потенциала φ?
8. Как вычислить напряженность электрического поля при помощи потенциала, если задано распределение зарядов?
9. Как определяется электростатическое поле в точках, где зарядов нет?
10. Что понимается под эквипотенциальной поверхностью? Как находится уравнение эквипотенциальной поверхности?
11. Могут ли быть замкнутыми силовые линии в электростатическом поле?
12. Перечислите граничные условия электростатики на границе раздела двух сред.
13. От чего зависит емкость проводников?
14. Каким образом величина емкости системы связана с энергией электрического поля этой системы?
15. Сформулируйте прямую и обратную задачи электростатики. Поясните методы их решения.
16. Дайте определение стационарного магнитного поля.
17. Запишите систему уравнений стационарного магнитного поля. Поясните физический смысл уравнений, входящих в эту систему.
18. Сформулируйте прямую задачу стационарного магнитного поля. Как она решается?
19. Запишите граничные условия для стационарного магнитного поля.
20. Какое поле называется магнитостатическим?
21. Запишите уравнения и граничные условия магнитостатики.
22. Как определяется вектор напряженности магнитного поля через скалярный магнитостатический потенциал?
23. Поясните, как определяется индуктивность контура.

Второй уровень обученности

24. Почему пишут $\overline{E} = -grad\ \varphi$, а не $\overline{E} = +grad\ \varphi$, хотя с точки зрения тождества $rot\ grad\ \varphi = 0$ оба выражения равноценны?

25. Показать, что скалярное уравнение Пуассона является частным случаем скалярного уравнения Даламбера.

26. Почему поверхность равного потенциала всегда перпендикулярна электрическим силовым линиям?

27. Показать, что векторный магнитный потенциал является частным случаем векторного электродинамического потенциала?

28. Показать, что векторное уравнение Пуассона является частным случаем векторного уравнения Даламбера. Запишите решение векторного уравнения Пуассона.

29. Какова последовательность вычисления стационарного магнитного поля по заданным токам?

30. Получите формулу для расчета энергии поля катушки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ. М.: Высш.шк., 1990. – 335 с.
2. Яманов Д. Н., Нечаев Е.Е., Электродинамика и распространение радиоволн: Сборник задач. – М.:МГТУГА, 1997. – 76 с.
3. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1978. – 432 с.
4. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высш.шк.,1991.

СОДЕРЖАНИЕ