ЗАДАЧИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

1. Задача о назначении.

Пусть для монтажа четырех объектов (n=4) требуется четыре канала (n=4). Из отчетных данных известно, какое время необходимо каждому крану Ai для монтажа объекта Bj. Нужно так распределить краны под объектами, чтобы суммарное время на монтаж этих объектов было минимально. В нашем случае cij – это затраты времени Ai – го крана при монтаже объекта Bj. Исходные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Ai	Bj				ai	di
	B1	B2	B3	B4		
A1	3	7	5	8	1	3
A2	2	4	4	5	1	2
A3	4	7	2	8	1	2
A4	9	7	3	8	1	3
bj	1	1	1	1		

Примечание: di – минимальный элемент строки.

2. Общая линейная распределительная задача.

Пусть некоторое предприятие может изготавливать изделия четырех видов И1, И2, И3, И4. Известно, что для изготовления изделия требуются три вида оборудования: О1, О2, О3. Известно также, сколько времени потребуется на изготовление каждого изделия на каждом оборудовании, фонд времени работы оборудования (сколько времени может проработать каждое оборудование) и какая прибыль может быть получена при реализации каждого изделия (таблица 2).

Таблица 2.

Oi	Bj				bi
	B1	B2	B3	B4	
O1	a11=3	a12=5	a13=2	a14=7	b1=15
O2	a21=4	a22=3	a23=3	a24=5	b2=9
O3	a31=4	a32=4	a33=4	a34=4	b3=30
cj	c1=40	c2=50	c3=30	c4=20	

Необходимо так распределить изделия по оборудованиям, чтобы предприятие имело максимальную прибыль. Исходные данные для расчета сведены в таблице 2. Обозначим: bi – ресурсы оборудования Oi, aij – время изготовления j-го изделия Иj на i-ом оборудовании, cj – прибыль от одного изделия Иj, xj – количество j-х изделий, которое необходимо выпустить на предприятии.

3. Нелинейная распределительная задача и динамическое программирование.

Пусть некоторая организация должна выполнить объем работ V = 4 тыс.усл.ед. В распоряжении организации имеются четыре вида оборудования. Известна зависимость эксплуатационных затрат каждого вида оборудования от объема выполняемых работ (таблица 3). Требуется так распределить объемы работ по четырем видам оборудования, чтобы суммарные затраты были минимальные.

Таблица 3.

Вид оборудования	Эксплуатационные затраты Yi(xi), тыс. руб., при объеме работ x, тыс.усл.ед.			
	1	2	3	4
1	10	25	36	46
2	10	22	30	34

3	4	15	25	33
4	8	17	23	28

4. Однопродуктовая детерминированная задача управления запасами.

Пусть месячная потребность предприятия в каком-либо материале (песок, щебень, цемент и т.д.) составляет Q усл. ед. Расход этого материала во времени происходит равномерно. Необходимо определить, каков должен быть размер поставки материалов, чтобы суммарные затраты на создание и хранение запаса были минимальны.

5. Общая детерминированная многопериодная задача управления запасами.

Пусть месячная потребность предприятия в каком-либо материале (песок, щебень, цемент и т.д.) составляет Q усл. ед. Расход этого материала во времени происходит равномерно. При неудовлетворении спроса на предприятии возникают убытки, измеряемые величиной Су на единицу материала в единицу времени. Затраты на хранение единицы материала в единицу времени составляют Сх. Затраты на поставку партии материала – Сд. В течение периода t1, t4 происходит поставка материала предприятию. Определить оптимальные размеры поставляемой и потребной партии материала, минимизирующие затраты на доставку и хранение.

6. Задача управления запасами при случайном спросе.

Пусть для некоторого оборудования целесообразно иметь запасные части (для простоты одного наименования). Известно, что вероятность поломки n штук этих деталей равна P(n). Стоимость одной детали равна С1, убытки в случае поломки и отсутствия запчасти - С2. Требуется определить оптимальное количество запасных деталей N, т.е. такое, чтобы суммарные затраты на приобретение и средние затраты из-за нехватки запчастей при поломке были минимальны.

7. Задача замены оборудования длительного пользования.

Пусть в эксплуатации находится некоторое оборудование. Покупная цена нового оборудования известна и равна S. Допустим, что известны затраты на эксплуатацию оборудования (уход за ним, ремонт и т.д.), производимые в начале (1, 2, …, t, …, n) периодов. Предположим, что периоды равны году. Обозначим затраты, производимые в t-й период, через Ct. В результате старения балансовая цена оборудования непрерывно падает и зависит от периода списания, обозначим ее St. Требуется определить период списания оборудования, чтобы затраты на единицу времени были минимальны.

8. Задача замены оборудования с учетом приведения затрат к текущему моменту времени.

Пусть в эксплуатации находится некоторое оборудование. Покупная цена нового оборудования известна и равна S. Допустим, что известны затраты на эксплуатацию оборудования в периоды 1, 2, …, n – C1, …., Ci, ….., Cn. Для упрощения предположим, что списочная цена St включена в затраты Ct. Требуется минимизировать затраты, приведенные к текущему моменту времени на единицу времени, т.е. определить, через какое время t следует производить замену оборудования, чтобы суммарные приведенные затраты на его эксплуатацию и на приобретение нового оборудования были минимальны.

9. Задача замены оборудования с целью предупреждения отказа.

Пусть в эксплуатации находится некоторое оборудование. Допустим, что известны затраты, связанные с отказом оборудования (брак готовой продукции, простой и т.д.), включая затраты на замену Сот = 100 руб., а также известны затраты на одну замену Сз = 50 руб. (предупредительную замену). Известно количество не отказавшего оборудования n(t) ко времени t (таблица 9).

Таблица 9.

Время работы	t	0	1	2	3	4	5	6	7
Количество неотказавшего оборудования ко времени t.	n(t)	200	190	180	160	100	40	20	10

Требуется определить оптимальный интервал между последовательными заменами оборудования, при котором минимизируются средние затраты на единицу времени. Вероятности отказа работы оборудования известны.

10. Детерминированная задача упорядочения.

Пусть имеется несколько изделий, каждое из которых должно быть обработано на двух машинах. Допустим, что известны время обработки и последовательность обработки каждого изделия на каждой машине (таблица 10). Требуется выбрать такой порядок обработки изделий, при котором суммарное время обработки изделий будет минимальным (иди суммарное время ожидания обработки изделий на машине).

Таблица 10.

Номер изделия	i	1	2	3	4	5	6
Время обработки на первой машине	t1i	6	4	6	5	7	4
Время обработки на второй машине	t2i	5	2	3	6	6	7

11.Детерминированная задача согласования.

Пусть необходимо установить мачту на фундамент. Известен комплекс операций, который необходимо выполнить, длительности их выполнения, а также последовательность их выполнения (таблица 11). Требуется определить минимальное время установки мачты, время начала и окончания каждой операции, резервы времени, определить операции, лежащие на критическом пути, который характеризует длительность установки мачты на фундамент.

Таблица 11.

Номер операции	Операция	Длительность операции, дни	Какие операции должны предшествовать
1	Заказ фундаментного блока	1	-
2	Изготовление блока	14	1
3	Доставка блока на место	1	2
4	Земляные работы	2	-
5	Устройство опалубки	3	4
6	Бетонирование	1	5
7	Твердение бетона	8	6
8	Установка фундаментного блока	2	3, 6
9	Изготовление мачты	10	-
10	Доставка мачты на место	1	9
11	Установка мачты	2	8, 10

12.Задача согласования с вероятностным временем выполнения операций.

Пусть дан некоторый производственный процесс и известны временные оценки продолжительности каждой операции $(i - j)$ (по данным специалистов): оптимистическая оценка t_{minij}, наиболее вероятная оценка $t_{нвij}$, пессимистическая оценка t_{maxij}. Пусть задан директивный срок выполнения события Тд = 45 дней. Требуется вычислить вероятность выполнения производственного процесса в срок.

13. Задачи анализа одноканальных систем массового обслуживания:

12.1. Задача анализа детерминированной системы.

Пусть исследуется производственный процесс, в котором поступление требований происходит через равные промежутки времени $\Delta t_п$ = const (т.е. интенсивность потока поступлений требований $\lambda = 1/\Delta t_п$ = const) и обслуживание производится через равные промежутки времени $\Delta t_{об}$ = const (т.е. интенсивность обслуживания $\mu = 1/\Delta t_{об}$ = const). Имеется один канал обслуживания. Предполагается, что $\Delta t_{об}/\Delta t_п = \lambda/\mu < 1$ (в противном случае очередь будет бесконечно возрастать) и что к началу обслуживания в системе имеется уже n требований. Определить через какое время очередь исчезнет.

12.2. Задача анализа разомкнутой системы с ожиданием (потоки требований пуассоновские).

Пусть задана некоторая система массового обслуживания, для которой справедливы следующие гипотезы:

1) вероятность поступления требований не зависит от принятого начала отсчета времени, а зависит только от продолжительности периода наблюдений (стационарность потока);

2) не поступают в систему и не покидают ее одновременно два или более требований (поток ординарный);

3) поступление одного требования не зависит от поступления другого (отсутствие последействия).

Известны также интенсивность λ поступления потока требований (среднее число поступлений требований в единицу времени $1/\Delta t_п$) и интенсивность μ обслуживания требований (среднее число обслуживаний в единицу времени $1/\Delta t_{об}$). Требуется определить основные характеристики системы:

1. Вероятность простоя канала обслуживания Ро;
2. Вероятность того, что в системе находится n требований, Pn;
3. Среднее число требований, находящихся в системе, Nсист (в очереди и обслуживании);
4. Среднее число требований, находящихся в очереди, N оч;
5. Среднее время ожидания требования в системе Т сист.

12.3.Задача анализа замкнутой системы с ожиданием (потоки требований пуассоновские).

Пусть исследуется некоторая замкнутая система массового обслуживания с ограниченным количеством требований в системе, т.е. обслуженные требования вновь возвращаются в систему обслуживания (например, экскаватор или автосамосвал). Интенсивность поступления одного требования в систему известна и равна λ. Интенсивность обслуживания требований известна и равна μ. Число требований, нуждающихся в обслуживании равно m. Требуется определить основные характеристики системы:

1. Вероятность того, что в системе находится n требований, Pn;
2. Вероятность простоя канала обслуживания Ро;
3. Среднее число требований, находящихся в очереди, N оч;
4. Среднее число требований, находящихся в системе, Nсист;
5. Среднее время ожидания требования в очередиТоч;
6. Среднее время ожидания требования в системе Т сист.

14.Транспортная задача.

1. Привести несбалансированную Т-задачу с дополнительными условиями к стандартному виду.
2. Найти первоначальный план транспортной задачи методом СЗ угла.
3. Построить оптимальный план решения Т-задачи методом потенциалов.

4. Переписать Т-задачу в виде задачи ЛП.

7	9	5	60
2	5	1	60
1	4	1	70
120	50	40	

15.Задачи анализа многоканальных систем массового обслуживания

15.1. Задача анализа разомкнутой системы с ожиданием (потоки требований пуассоновские).

Пусть известны интенсивность λ поступления потока требований в систему и интенсивность μ обслуживания этих требований. Число каналов обслуживания Nk. Требуется определить:

1. Вероятность того, что в системе имеется n требований, Pn(t);
2. Вероятность простоя канала обслуживания Po(t);
3. Среднее число требований, находящихся в очереди, N оч;
4. Среднее время ожидания требования в очереди Точ;
5. Среднее число свободных каналов обслуживания Nск.

15.2. Задача анализа разомкнутой системы с отказом (потоки требований пуассоновские).

Пусть исследуется некоторая разомкнутая система массового обслуживания. Интенсивность поступления требований в систему известна и равна λ. Интенсивность обслуживания каждым каналом известна и равна μ. Если требование застало все N каналов занятыми, то оно получает отказ и покидает систему. Эта задача впервые рассматривалась датчанином Эрлангом.

Требуется определить:

1. Вероятность Po того, что все каналы обслуживания свободны;
2. Вероятность Pn того, что занято ровно n каналов обслуживания;
3. Среднее число занятых каналов обслуживания Nзк.

15.3. Задача анализа замкнутой системы с ожиданием (потоки требований пуассоновские).

Пусть исследуется некоторая замкнутая система массового обслуживания, в которой обслуженные требования вновь возвращаются в систему обслуживания (ЭВМ-пользователи, аэродром - самолеты). Интенсивность поступления одного требования в систему известна и равна λ, интенсивность обслуживания каждого канала известна и равна μ. Число каналов обслуживания N, число требований, нуждающихся в обслуживании, m. Будем считать, что $N \leq m$. Требуется найти:

1. Вероятность того, что в системе находится n требований, Pn(t);
2. Вероятность простоя каналов обслуживания Po(t);
3. Среднее число требований, ожидающих начала обслуживания или длину очереди, N оч;
4. Среднее время ожидания требования в очереди Точ.

16.Задача синтеза (оптимизации) одноканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием.

Пусть исследуется одноканальная замкнутая система массового обслуживания, для которой известны характеристики канала обслуживания и характеристики требований, поступающих на обслуживание. Требуется определить оптимальную структуру системы, т.е. оптимальное число требований mопт, необходимых для обслуживания канала, чтобы эффективность системы была максимальна. В качестве критерия оптимизации примем удельные приведенные затраты, характеризующие затраты всей системы на одно обслуживание.

Аналитическое выражение критерия оптимизации для определения оптимальной структуры одноканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием запишется так:

$$Y = \frac{Po \cdot C\text{пк} + (1 - Po) \cdot C\text{рк} + m \cdot C\text{пт}}{\mu \cdot (1 - Po)} + \frac{E\text{н} \cdot (S\text{к} + m \cdot S\text{т})}{T\text{г} \cdot \mu \cdot (1 - Po)}$$ [руб. / ед. продукции], где

Ро – вероятность простоя канала обслуживания; m – число требований, нуждающихся в обслуживании; Спк – средние затраты при простоя канала обслуживания в течение часа из-за несвоевременного поступления требований на обслуживание, руб.; Срк – средние затраты при работе канала обслуживания в течение часа, руб.; μ – интенсивность обслуживания канала, 1/ч; μ = 1/ $t_{об}$; $t_{об}$ – среднее время обслуживания требования каналом, ч; Спт – средние затраты содержания требования в течение часа, руб.; Sк, Sт – капитальные вложения соответственно на канал обслуживания и требований, руб.; Тг – годовой режим работы – число часов работы системы в году; Ен – нормативный коэффициент эффективности.

17. Задача синтеза (оптимизации) многоканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием.

Пусть исследуется некоторая многоканальная система массового обслуживания. Известны характеристики каналов обслуживания и характеристики требований, поступающих на обслуживание. Требуется определить такую структуру многоканальной системы, чтобы эффективность системы была максимальна. В качестве критерия оптимизации принимаем целевую функцию – удельные приведенные затраты, т.е. затраыт, приходящиеся на одно обслуживание.

Аналитическое выражение критерия оптимизации для определения оптимальной структуры многоканальной замкнутой системы массового обслуживания будет выглядеть так:

$$Y = \frac{Po \cdot C\text{пк} \cdot \text{N} + (1 - Po) \cdot C\text{рк} \cdot \text{N} + N \cdot C\text{пт}}{\mu \cdot (1 - Po)} + \frac{E\text{н} \cdot (S\text{к} \cdot \text{N} + m \cdot S\text{т})}{T\text{г} \cdot \mu \cdot (1 - Po)}$$ [руб. / ед. продукции], где

N- число каналов обслуживания в системе; Ро – вероятность простоя канала обслуживания; m – число требований, нуждающихся в обслуживании; Спк – средние затраты при простоя канала обслуживания в течение часа из-за несвоевременного поступления требований на обслуживание, руб.; Срк – средние затраты при работе канала обслуживания в течение часа, руб.; μ – интенсивность обслуживания канала, 1/ч; μ = 1/ $t_{об}$; $t_{об}$ – среднее время обслуживания требования каналом, ч; Спт – средние затраты содержания требования в течение часа, руб.; Sк, Sт – капитальные вложения соответственно на канал обслуживания и требований, руб.; Тг – годовой режим работы – число часов работы системы в году; Ен – нормативный коэффициент эффективности.

18.Состязательная игра двух сторон с нулевой суммой.

Пусть в игре принимают участие две стороны: А и В. Условия игры заданы матрицей выигрышей (таблица 18)., отдельные элементы которой (cij) определяют суммы, которые сторона В обязана уплатить стороне А в заранее определенной ситуации AiBj.

Таблица 18.

Ai	Bj				
	B1	…	Bj	…	Bm
A1	c11	…	c1j	…	c1m
…	…	…	…	…	…
Ai	ci1	…	cij	…	cim
…	…	…	…	…	…
An	cn1	…	cnj	…	cnm

Элементы матрицы выигрышей могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Если элемент матрицы положителен, то сторона В в определенной ситуации уплачивает стороне А сумму, равную элементу матрицы. Если элемент матрицы отрицательный, то сторона А уплачивает стороне В сумму, равную абсолютному значению элемента. Если элемент равен нулю, то никакой выплаты не происходит. Требуется определить оптимальные вероятности использования стратегий, максимизирующие средний выигрыш первой стороны.

19.Задача оптимизации систем в условиях неопределенности.

Сформулируем в общем виде задачу поиска оптимальной системы в условиях неопределенности. Допустим, проектировщик имеет или может определить:

A = (A1, A2, …, Ai, …, An) –

B = (B1, B2, …, Bj, …, Bm) –

C = (C11, C12, …, Cij, …, Cnm) –

Cij – затраты на использование системы Ai при состоянии среды Bj.

Требуется спроектировать такую систему, которая обеспечивает минимальные затраты.

На начальных этапах проектирования систем проектировщик может иметь некоторую информацию о среде или интуитивно догадываться на основании проектирования предыдущих систем о вероятностных параметрах среды. Все это налагает определенные требования на процесс поиска оптимальной системы. В этом случае проектировщик имеет дело с априорной информацией.

Имея таблицу затрат для каждой системы для каждого состояния среды (таблица 19) и априорное распределение состояния среды P(B=Bj), необходимо вычислить ожидаемые затраты для каждой системы Ai(i=1, 2, …, n), используя априорное распределение. Выбрать систему с наименьшими затратами.

Таблица 19.

Ai	Bj				
	B1	…	Bj	…	Bm
A1	c11	…	c1j	…	c1m
…	…	…	…	…	…
Ai	ci1	…	cij	…	cim
…	…	…	…	…	…
An	cn1	…	cnj	…	cnm

20. Рациональная обработка эксперимента.